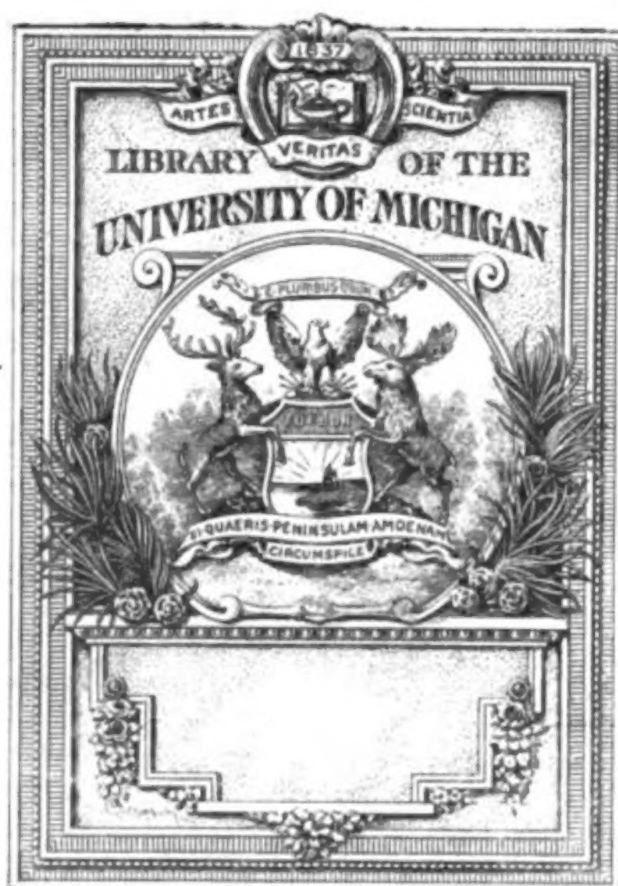
Sitzungsberichte

Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Akademie der ...


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

732

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTDREIZEHNTER BAND.



WIEN, 1904.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXIII. BAND. ABTEILUNG IIa.

JAHRGANG 1904. — HEFT I BIS X.

(Mit 10 TAFELN UND 136 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1904.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. I. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1890 III (Coggia)

von

Josef Rheden.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1904.)

I. Allgemeines.

Der Komet 1890 III wurde am 18. Juli 1890 von G. Coggia, Adjunktastronom an der Sternwarte in Marseille, entdeckt. Zur Zeit seiner Auffindung besaß er eine Gesamthelligkeit von ungefähr der 9. Größenklasse und zeigte einen ausgeprägten, von einer schwachen Nebelhülle umgebenen Kern 10. bis 11. Größe. Im Laufe der Beobachtungsperiode nahm er an Helligkeit kontinuierlich ab und wurde schließlich zu einem schwachen, auch für lichtstärkere Fernrohre an der Grenze der Sichtbarkeit stehenden Nebelfleck ohne jede Spur einer kernartigen Verdichtung. Eine Neigung zur Schweifbildung wurde während der ganzen Dauer der Sichtbarkeit nicht beobachtet, wenigstens wurden von keinem Astronomen diesbezügliche Notizen veröffentlicht. Die von den Beobachtern zeitweilig gemachten Angaben über die Helligkeit bestätigen im allgemeinen den rechnungsmäßigen Gang derselben, welcher durch den Quotienten

$$\frac{1}{r^2\rho^2}$$

gegeben ist, reichen aber nicht hin, etwaige Anomalien nachweisen zu können. Über Versuche, den Kometen photographisch aufzunehmen, wurde nichts bekannt, ebensowenig gelang es, Nachrichten von spektralanalytischen Untersuchungen des von ihm ausgestrahlten Lichtes zu erlangen.

Der Komet wurde vom Tage seiner Entdeckung an, die zehn Tage nach dem Periheldurchgange erfolgte, bis einschließlich zum 1. August täglich auf mindestens einer Sternwarte beobachtet. Von da an wurden wegen seines südlichen Laufes die Sichtbarkeitsbedingungen für die nördlicheren Sternwarten immer ungünstiger und außerdem wurden die Beobachtungen noch durch den Umstand erschwert, daß gerade um jene Zeit (31. Juli) Vollmond war. Am 6. August wurde der Komet zum letztenmal in Europa, und zwar in Bordeaux, beobachtet. Eine Woche länger konnte er in Amerika, auf der Lick-Sternwarte, verfolgt werden und verschwand dann am 13. August endgültig in der Abenddämmerung.

Die Notizen über die physische Beschaffenheit des Kometen blieben, wie bereits angedeutet und wie sich bei der Schwäche des Objektes und unter den sehr ungünstigen Beobachtungsbedingungen auch nicht anders erwarten ließ, sehr spärlich. Im folgenden sei kurz dasjenige mitgeteilt, was hierüber in verschiedenen Zeitschriften gefunden werden konnte.

Albany (Astronomical Journal, X, 54):

In the observation of July 27, the comet was extremly faint.

Bordeaux (Annales de l'Observatoire de Bordeaux, VII, 128):

Le juillet 21, la comète était assez brillante et présentait l'aspect d'une nébulosité ronde d'environ 2′ de diamètre, avec une légère condensation centrale.

Kiel (Astronomische Nachrichten, CXXV, 77):

Am 21. Juli Kern deutlich, Koma schwach wegen Dämmerung.

Marseille (Comptes Rendus, CXI, 217):

La comète est assez brillante, ronde, d'un diamètre de 2′ environ, avec un peu de condensation centrale. (Anmerkung zu den Beobachtungen von Juli 18 bis 25.)

(Bulletin Astronomique, VII, 358):

L'éclat de la comète a été en diminuant du 18 au 26 juillet.

Nizza (B. A., VII, 383):

Le juillet 22. La comète est une nébulosité circulaire de 1'5 de diamètre environ, avec une condensation centrale assez brillante. Elle disparaît en même temps que les étoiles de 10e grandeur, en éclairant le champ de la lunette.

Padua (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, tomo VII, serie VI, 438):

Luglio 22. Piccola macchia che eguaglia una stella di 9^a^ sfuocata con nebulosità diffusa all'intorno per 1'5, lucente e non opaca. — Luglio 24. Si vedeva la cometa meglio delle stelle die 9·5^a^, le ultime che sarebbero state osservabili sul fondo illuminato del cielo.

Paris (C. R., CXI, 224):

21 juillet, comète très brillante, nebulosité sonde avec un noyau de condensation de grandeur 10e—11e. Elle se distingue facilement dans le chercheur (10 *cm* d'ouverture).

22 juillet. Le noyau de la comète se voit à peine.

Wien (A. N., CXXV, 91):

Der Komet ist vom 27. auf den 28. Juli auffallend schwach geworden.

Die Elementensysteme, welche von verschiedenen Astronomen für diesen Kometen aufgestellt wurden, sind in der Tabelle auf p. 6 übersichtlich wiedergegeben.

Wie man aus dieser Zusammenstellung ersieht, unterscheiden sich die ersten sieben Systeme verhältnismäßig nur sehr wenig vom achten, das wegen des größeren Bahnbogens und der genauer durchgeführten Rechnung für diesen Vergleich als Ausgangspunkt dienen kann. Letzteres müßte überhaupt als definitiv angesehen werden, wenn in demselben die Beobachtungen von Albany und Mount Hamilton, welch letztere außerdem noch den Bahnbogen um einen Zeitraum von sieben Tagen vergrößern, dem Berechner aber nicht zeitlich genug bekannt wurden, berücksichtigt wären.

System	Abgeleitet aus den Beobachtungen von	T 1890, M. Z. Berlin	ω	☊	i	log q	Berechner	Quelle
			(mittl. Äquin. 1890·0)					
I.	Juli 19, 21 u. 22	Juli 7·97725	84°20!87	14° 4!93	63°28!28	9·88007	Berberich	A. N., CXXV, 77
II.	19, 21 u. 22	9·6595	87 40·5	15 22·4	62 46·7	9·8892	Bellamy	A. J., X, 56
III.	19, 21 u. 22	8·6355	85 46·0	14 25·6	63 14·3	9·88404	Leuschner	Publ. A. S. Pac., II, 237
IV.	19, 21 u. 23	8·7928	86 3' 4"	14 28' 33"	63 14' 37"	9·88420	Lubrano und Maitre	A. N., CXXV, 91
V.	19—23	9·1743	86 50 17	14 49 2	63 2 33	9·88673	Fabry	A. N., CXXV, 92
VI.	21, 23 u. 25	8·730	85 58·5	14 25·6	63 14·6	9·88429	Bidschof	A. N., CXXV, 95
VII.	19—27	8·6858	85 53 26	14 24 50	63 15 2	9·88403	Boss	A. J., X, 53
VIII.	Juli 19—Aug. 6	Juli 8·577276	85°39' 36!86	14°18' 25!38	63°20' 3!70	9·8831669	Ebert	A. N., CXXXII, 105

II. Ephemeride.

Die Ebert'schen Elemente wurden nun als die weitaus sichersten der vorliegenden definitiven Bahnbestimmung zugrunde gelegt. Mit Hülfe derselben und der ebenfalls von Ebert gegebenen heliozentrischen Äquatorialkoordinaten des Kometen:

$$x = [9\cdot9891432]\,r.\sin(v+182^\circ\ 11'\ 22''04)$$
$$y = [9\cdot3632231]\,r.\sin(v+164\quad 51\quad 21\cdot51)$$
$$z = [9\cdot9990212]\,r.\sin(v+\ 91\quad 19\quad 2\cdot76)$$

wurde sechsstellig eine von Mitternacht zu Mitternacht fortschreitende Ephemeride gerechnet und dieselbe dann auf die Hälfte interpoliert.

1890 M. Z. Berlin	Wahre α	I. Diff.	Wahre δ	I. Diff.	lg ρ	lg r	Aberrationszeit	$\frac{1}{\rho^2 r^2}$
Juli 18·5	8h 48m 37s06		+44° 41' 28"2		0·19205	9·89683	—0d008982	0·66
		+243s16		—1246"7				
19·0	52 40·22		44 20 41·5		0·19304		0·009002	
		238·94		1276·4				
19·5	8 56 39·16		43 59 25·1		0·19404	9·89960	0·009023	
		234·73		1304·5				
Juli 20·0	9h 0m 33s89		+43° 37' 40"6		0·19508		—0d009044	
		+230s54		—1331"8				

1890 M. Z. Berlin	Wahre α	I. Diff.	Wahre δ	I. Diff.	lg ρ	lg r	Aberrationszeit	$\frac{1}{\rho^2 r^2}$
Juli 20·5	9h 4m 24s43		+43° 15' 28"8		0·19616	9·90259	−0d·009067	0·63
		+226s36		−1357"2				
21·0	8 10·79		42 52 51·6		0·19728		0·009090	
		222·18		1380·6				
21·5	11 52·97		42 29 51·0		0·19842	9·90578	0·009114	
		218·05		1402·6				
22·0	15 31·02		42 6 28·4		0·19959		0·009138	
		213·96		1423·2				
22·5	19 4·98		41 42 45·2		0·20080	9·90918	0·009164	0·60
		209·90		1442·4				
23·0	22 34·88		41 18 42·8		0·20205		0·009190	
		205·91		1460·7				
23·5	26 0·79		40 54 22·1		0·20332	9·91275	0·009217	
		201·96		1477·4				
24·0	29 22·75		40 29 44·7		0·20462		0·009245	
		198·04		1492·0				
24·5	32 40·79		40 4 52·7		0·20595	9·91650	0·009273	0·57
		194·23		1505·6				
25·0	35 55·02		39 39 47·1		0·20731		0·009302	
		190·46		1518·6				
25·5	39 5·48		39 14 28·5		0·20870	9·92041	0·009332	
		186·76		1530·2				
26·0	42 12·24		38 48 58·3		0·21012		0·009363	
		183·12		1540·2				
Juli 26·5	9h 45m 15s36		+38° 23' 18"1		0·21156	9·92447	0d·009394	0·53
		+179s56		−1549"2				

Juli 27·0	9h 48m 14s92		+37° 57′ 28″9		0·21302		−0d·009426	
		+176s07		−1557″5				
27·5	51 10·99		37 31 31·4		0·21451	9·92867	0·009458	
		172·65		1564·7				
28·0	54 3·64		37 5 26·7		0·21603		0·009491	
		169·31		1570·5				
28·5	56 52·95		36 39 16·2		0·21756	9·93300	0·009525	0·50
		166·05		1575·3				
29·0	59 39·00		36 13 0·9		0·21912		0·009559	
		162·85		1579·7				
29·5	10 2 21·85		35 46 41·2		0·22070	9·93743	0·009594	
		159·73		1583·1				
30·0	5 1·58		35 20 18·1		0·22230		0·009629	
		156·67		1585·4				
30·5	7 38·25		34 53 52·7		0·22391	9·94198	0·009665	0·47
		153·70		1587·0				
31·0	10 11·95		34 27 25·7		0·22555		0·009701	
		150·81		1588·1				
31·5	12 42·76		34 0 57·6		0·22720	9·94662	0·009738	
		148·00		1588·5				
August 1·0	15 10·76		33 34 29·1		0·22887		0·009776	
		145·22		1588·0				
1·5	17 35·98		33 8 1·1		0·23056	9·95135	0·009814	0·43
		142·53		1586·9				
2·0	19 58·51		32 41 34·2		0·23226		0·009852	
		139·94		1584·7				
2·5	22 18·45		32 15 9·5		0·23397	9·95614	0·009891	
		137·40		1582·2				
August 3·0	10h 24m 35s85		+31° 48′ 47″3		0·23570		−0d·009931	
		+134s91		−1579″7				

1890 M. Z. Berlin	Wahre α	I. Diff.	Wahre δ	I. Diff.	lg ρ	lg r	Aberrationszeit	$\frac{1}{\rho^2 r^2}$
August 3·5	10h 26m 50s76		+31° 22′ 27″6		0·23744	9·96101	$-0^{d}{\cdot}009971$	0·40
		+132s49		−1576″5				
4·0	29 3·25		30 56 11·1		0·23920		0·010011	
		130·14		1572·8				
4·5	31 13·39		30 29 58·3		0·24097	9·96594	0·010052	
		127·85		1568·5				
5·0	33 21·24		30 3 49·8		0·24274		0·010093	
		125·63		1563·3				
5·5	35 26·87		29 37 46·5		0·24453	9·97091	0·010135	0·37
		123·47		1557·8				
6·0	37 30·34		29 11 48·7		0·24633		0·010177	
		121·37		1552·5				
6·5	39 31·71		28 45 56·2		0·24813	9·97593	0·010219	
		119·32		1546·9				
7·0	41 31·03		28 20 9·3		0·24995		0·010262	
		117·31		1540·9				
7·5	43 28·34		27 54 28·4		0·25177	0·98098	0·010305	0·34
		115·37		1534·5				
8·0	45 23·71		27 28 53·9		0·25360		0·010349	
		113·50		1527·2				
8·5	47 17·21		27 3 26·7		0·25544	9·98606	0·010393	
		111·68		1519·8				
9·0	49 8·89		26 38 6·9		0·25728		0·010437	
		109·88		1512·6				
August 9·5	10h 50m 58s77		+26° 12′ 54″3		0·25912	9·99116	$-0^{d}{\cdot}010481$	0·32
		+108s14		−1505″1				

August 10·0	10h 52m 46s91		+25° 47' 49"2		0·26097		—0d·010526	
		+106s46		—1497"5				
10·5	54 33·37		25 22 51·7		0·26283	9·99628	0·010571	
		104·82		1489·6				
11·0	56 18·19		24 58 2·1		0·26469		0·010616	
		103·22		1481·5				
11·5	58 1·41		24 33 20·6		0·26656	0·00141	0·010662	0·29
		101·67		1473·3				
12·0	59 43·08		24 8 47·3		0·26842		0·010708	
		100·15		1464·5				
12·5	11 1 23·23		23 44 22·8		0·27029	0·00654	0·010754	
		98·67		1455·8				
13·0	3 1·90		23 20 7·0		0·27216		0·010800	
		97·25		1447·1				
13·5	4 39·15		22 55 59·9		0·27403	0·01168	0·010847	0·27
		95·86		1438·2				
14·0	6 15·01		22 32 1·7		0·27591		0·010894	
		94·50		1429·6				
14·5	7 49·51		22 8 12·1		0·27778	0·01681	0·010941	
		+93s18		—1420"6				
August 15·0	11h 9m 22s69		+21° 44' 31"5		0·27965		—0d·010988	

III. Vergleichsterne.

Die von den Beobachtern angegebenen Vergleichsterne wurden in erster Linie in Auwers-Bradley nachgesehen; waren sie hier vorhanden, so wurden sie des weiteren nur mehr in jenen Katalogen nachgesucht, deren Epoche nicht älter als 1875·0 ist. Jene Sterne hingegen, welche in Auwers-Bradley nicht zu finden waren, wurden zum Zwecke der Ermittlung einer etwaigen Eigenbewegung in allen vorhandenen Katalogen nachgesehen.

Von den Katalogen der Astronomischen Gesellschaft standen mir bereits alle in Betracht kommenden zur Verfügung.

In der folgenden Zusammenstellung der Vergleichsterne ist außer α und δ auch noch die Epoche und Anzahl der Beobachtungen zur Erleichterung der Ableitung von eventuellen Eigenbewegungen angeführt. Dort, wo solche nachgewiesen werden konnten, sind die endgültigen Positionen bereits entsprechend korrigiert.

Für die Kataloge wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

A. G. . . . . Kataloge der Astronomischen Gesellschaft, 1875·0.

Ar. II . . . . Second Armagh Catalogue of 3300 stars, 1875·0.

Au. . . . . Auwers-Bradley, 1865·0.

B. B. VI . . . . . . Bonner Beobachtungen, Bd. VI, 1855·0.

Br. . . . . Catalogue de 10792 étoiles, observées à l'Observatoire Royal de Bruxelles, 1865·0.

$Cape_{90}$ . . . . Cape Catalogue, 1890·0.

Gou. . . . . Gould-d'Agelet, 1800·0.

$Greenw._{80}$ . . . . Ten-year Catalogue, 1880·0.

$Greenw._{90}$ . . . . Second Ten-year Catalogue, 1890·0.

Grombr. . . . . . Groombridge, 1810·0.

Kam. I .... Katalog von Sternen, deren Örter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind. Aus Bd. 1 bis 66 der »Astron. Nachrichten«, 1855·0.

K.-M. .... Küstner - Mönnichmeyer, Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreis der Sternwarte zu Bonn, 1900·0.

Lal. .... Lalande, 1800·0.

Lal.-B. .... Bossert, Catalogue de 3950 étoiles. Supplément à l'Histoire Céleste de Lalande, 1800·0.

Ma. .... Results of observations of the Fixed Stars made with the Madras Meridian Circle, 1875·0.

Pa. II .... Catalogue de l'Observatoire de Paris, vol. II, 1875·0.

Pi. .... Piazzi, 1800·0.

Pu. VIII ...... Observations de Pulkova, vol. VIII. Catalogue d'étoiles déduit des observations publiées dans les volumes VI et VII, 1855·0.

Ra. I .... The Radcliffe Catalogue of 6317 stars, 1845·0.

Ro. .... Romberg, Katalog von 5634 Sternen aus den Beobachtungen am Pulkowaer Meridiankreis, 1875·0.

W. II .... Weiße, Bd. II, 1825·0.

Ya. III .... Yarnall-Catalogue, IIIth Edition, 1875·0.

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht
1	Lal. 17777	7	$8^h 57^m 10^s 29$	— 5·8	1	½
	Groombr. 1507	7—8	10·39	+13·2	5	1
	Ra. I 2261	7·0	10·42	+46·4	5	1
	B. B. VI +44°, 1817	7·9	10·30	+60·2	1	½
	Br. 3814	8·0	10·35	+73·72	2	1
	A. G. Bonn 6912	7·7	10·34	+75·9	3	2
	Pa. II 11114	7	10·19	+75·8	5	2
	Ro. 2011	7·6	10·25	+75·6	3	2
	$Greenw._{90}$ 2612	7·7	8 57 10·29	+92·79	4	2
2	Lal. 17998	—	9 2 54·54	— 5·8	1	½
	W. II 8^h, 1494	8	54·63	+30·3	1	0
	A. G. Bonn 6969	8·4	54·41	+75·8	3	2
	Pa II 11237	8—9	9 2 54·44	+80·2	1	1
3*	Lal. 18258	9	9 10 58·48	— 5·8	1	½
	» 18261	8	59·18	— 3·8	1	½
	A. G. Bonn 7037	8·0	58·79	+78·6	5	2
	Pa. II 11413	9—10	9 10 58·70	+81·2	2	2
4	B. B. VI +42°, 2001	8·0	9 15 43·66	+60·3	1	1
	A. G. Bonn 7079	8·4	9 15 43·67	+69·8	2	2
5*	Lal. 18494	9	9 18 49·97	— 3·8	1	0
	W. II 9^h, 338	9	50·21	+29·3	1	0
	A. G. Bonn 7103	8·9	49·64	+70·7	2	2
	Pa. II 11588	9—10	9 18 49·65	+80·9	3	2
6	Lal. 18535	7·5	9 19 50·02	— 3·8	1	0
	W. II 9^h, 363	7—8	50·01	+29·3	1	0
	Pa. II 11610	7—8	49·67	+67·3	1	1
	A. G. Bonn 7116	7·0	49·76	+69·7	2	2
	Pa. II 11610	7—8	$9^h 19^m 49^s 73$	+79·1	1	1

δ (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beob-achtungen	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app.
+43°52'36"9	− 5·8	1	1/2	8h 57m 10s30	−0s79	+43°52'37"6	+ 4"8
39·3	+13·2	5	1				
38·8	+47·4	5	1				
38·0	+60·2	1	1/2				
36·7	+73·70	2	1				
37·6	+75·9	3	2				
37·4	+75·4	4	2				
37·0	+75·6	3	2				
+43 52 37·0	+91·67	6	2				
+43 23 7·9	− 5·8	1	1/2	9 2 54·44	−0·77	+43 23 9·2	+4·8
6·5	+30·3	1	0				
9·0	+75·8	3	2				
+43 23 10·1	+80·2	1	1				
+42 31 37·9	− 5·8	1	0	9 10 58·76	−0·73	+42 31 32·9	+4·9
29·7	− 3·8	1	0				
33·6	+76·9	5	2				
+42 31 31·6	+81·1	1	1				
+42 40 18·0	+60·3	1	1	9 15 43·67	−0·72	+42 40 17·9	+5·1
+42 40 17·9	+69·8	2	2				
+41 40 41·9	− 3·8	1	0	9 18 49·65	−0·69	+41 40 49·2	+5·1
55·8	+29·3	1	1/2				
51·3	+70·7	2	2				
+41 40 50·3	+80·7	2	1				
+41 30 3·5	− 3·8	1	1/2	9h 19m 49s73	−0s68	+41°30' 2"9	+5"1
7·1	+29·3	1	0				
2·7	+67·3	1	1				
3·1	+69·7	2	2				
+41°30' 2"4	+79·1	1	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht
7	Lal. 18562	7·5	9h 20m 42s66	— 3·8	1	0
	W. II 9h, 389	7—8	42·93	+29·3	1	0
	Pa. II 11628	7—8	42·43	+67·2	2	1
	A. G. Bonn 7124	7·2	9 20 42·32	+69·7	2	2
8	B. B. VI +41°, 1967	9·2	9 22 15·78	+60·3	1	1
	A. G. Bonn 7138	9·2	9 22 15·82	+72·7	4	2
9	Lal. 18598	8·5	9 22 27·30	— 3·8	1	1/2
	W. II 9h, 422	8—9	27·40	+29·2	1	1
	A. G. Bonn 7139	7·8	27·38	+77·5	3	2
	Pa. II 11651	8—9	9 22 27·13	+80·3	1	1/2
10*	Lal. 18772	5·5	9 28 11·82	— 3·7	1	1/2
	Pi. 9h, 115	6	12·42	+ 1·3	8	1
	Groombr. 1560	6—7	12·32	+13·2	6	1
	W. II 9h, 543	6	12·30	+29·2	1	1/2
	Ra. I 2364	5·3	12·18	+44·8	4	2
	Pu. VIII 1512	4·7	12·12	+47·67	1	2
	Pa. II 11769	5—6	12·04	+63·8	7	2
	A. G. Bonn 7182	4·5	12·12	+72·2	4	2
	Ro. 2127	4·7	12·13	+78·3	4	2
	Pa. II 11769	5—6	12·02	+80·2	1	1
	Greenw.$_{80}$ 1578	5	9 28 12·09	+86·50	2	2
11	W. II 9h, 611	9	9 31 22·42	+29·2	1	0
	A. G. Bonn 7211	8·5	9 31 22·70	+69·7	2	2
12	Au. 1346	6·0	9 31 29·77	+61·5	4	2
	A. G. Bonn 7212	5·3	29·70	+69·8	2	2
	Ro. 2143	5·5	29·72	+78·2	4	2
	Pa. II 11837	6	29·66	+79·7	2	2
	Cape$_{90}$ 1120	5·3	29·40	+89·15	1	1
	Greenw.$_{90}$ 2711	5·3	29·59	+90·18	4	2
	K.—M. +40°, 2232	7·1	9h 31m 29s57	+98·26	1	2

δ (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht	Angenommene Position α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app.
+41°40'31"9	— 3·8	1	0	9h 20m 42s36	—0s69	+41°40'28"6	+5"1
34·7	+29·3	1	0				
28·0	+67·2	2	1				
+41 40 28·9	+69·7	2	2				
+41 7 20·3	+60·3	1	0	9 22 15·81	—0·67	+41 7 17·6	+5·0
+41 7 17·6	+72·7	4	2				
+40 54 35·9	— 3·8	1	1/2	9 22 27·35	—0·67	+40 54 34·4	+5·0
36·8	+29·2	1	0				
33·6	+77·5	3	2				
+40 54 35·7	+80·3	1	1/2				
+40 6 26·2	— 3·7	1	0	9 28 12·14	—0·63	+40 6 33·6	+5·0
34·1	+ 2·3	5	1				
34·6	+13·2	6	1				
33·1	+29·2	1	1/2				
33·2	+45·9	4	2				
32·8	+42·23	1	2				
33·2	+65·2	2	2				
33·4	+72·2	4	2				
33·3	+78 3	4	2				
34·7	+80·2	1	1				
+40 6 34·1	+86·62	2	2				
+40 3 4·8	+29·2	1	0	9 31 22·70	—0·63	+40 3 1·7	+5·1
+40 3 1·7	+69·7	2	2				
+40 43 59·4	+61·5	4	2	9h 31m 29s63	—0s64	+40°43'59"9	+5"3
60·1	+69·8	2	2				
59·2	+78·2	4	2				
60·1	+79·8	3	2				
60·3	+90·88	6	2				
59·5	+90·18	4	2				
+40°43'60"1	+98·26	1	2				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht
13	B. B. VI +40°, 2238	9·5	$9^h 33^m 59^s 96$	+59·2	1	1
14*	Lal. 18964	7·5	9 34 32·49	— 3·8	1	1/2
	Groombr. 1569	7—8	33·12	+13·2	5	1
	W. II 9^h, 686	7—8	33·02	+29·2	1	1/2
	Ra. I 2379	7·1	33·32	+46·2	3	1
	Ya. III 4121	7·3	33·37	+61·6	5	2
	Br. 4044	7—8	33·34	+69·26	2	1
	Ar. II 1117	7·0	33·22	+69·93	4	1
	Ro. 2152	7·0	33·50	+75·2	4	2
	A. G. Lund 4697	7·3	33·62	+86·7	4	2
	Greenw.$_{90}$ 2722	7·0	9 34 33·46	+94·68	4	2
15	Au. 1354	6·0	9 35 11·52	+67·5	3	2
	A. G. Bonn 7241	5·5	11·61	+74·3	2	2
	Ro. 2155	5·8	11·43	+78·5	4	2
	Pa. II 11918	6—7	11·44	+80·2	4	2
	Greenw.$_{90}$ 2727	5·5	11·32	+94·48	3	2
	K.-M. +40°, 2241	7·3	9 35 11·33	+98·28	2	2
16	W. II 9^h, 699	9	9 35 19·93	+29·2	1	0
	A. G. Lund 4701	8·7	9 35 18·80	+80·2	2	2
17*	Lal. 19059	9	9 37 32·29	— 5·8	1	1/2
	W. II 9^h, 762—3	8—9	32·03	+28·8	2	1/2
	A. G. Lund 4713	8·5	9 37 31·73	+80·2	2	2
18	Au. 1378	6·3	9 45 41·71	+65·2	6	2
	Pa. II 12104	7	41·59	+76·2	5	2
	A. G. Lund 4749	6·7	41·61	+80·2	2	2
	Greenw.$_{90}$ 2755	6·3	41·56	+88·90	6	2
	K.-M. +38°, 2076	8·3	$9^h 45^m 41^s 52$	+98·28	2	2

δ (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app.
+40° 9'50"0	+59·2	1	1	$9^{h}\,33^{m}\,59^{s}96$	$-0^{s}62$	+40° 9'50"0	+5"2
+39 27 23·6	− 3·8	1	1/2	9 34 33·56	−0·60	+39 27 10·0	+5·1
22·0	+13·2	5	1				
21·0	+29·2	1	1/2				
16·0	+48·0	4	1				
14·8	+61·1	5	2				
12·5	+69·46	4	2				
13·5	+67·02	7	2				
11·1	+75·2	4	2				
10·3	+86·7	4	2				
+39 27 10·2	+94·68	4	2				
+40 15 32·7	+67·5	3	2	9 35 11·40	−0·62	+40 15 31·9	+5·3
32·3	+74·3	2	2				
32·1	+78·5	4	2				
33·0	+80·2	4	1				
31·6	+94·48	3	2				
+40 15 31·6	+98·28	2	2				
+39 44 51·3	+29·2	1	0	9 35 18·80	−0·61	+39 44 50·0	+5·2
+39 44 50·0	+80·2	2	2				
+38 57 52·7	− 5·8	1	1/2	9 37 31·67	−0·59	+38 57 43·5	+5·1
49·1	+28·8	2	1/2				
+38 57 44·4	+80·2	2	2				
+38 25 49·2	+65·2	8	2	$9^{h}\,45^{m}\,41^{s}60$	$-0^{s}57$	+38°25'49"1	+5"2
49·2	+79·2	3	2				
49·1	+80·2	2	2				
48·5	+88·86	5	1				
+38°25'49"2	+98·28	2	2				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht
19	Lal.-B. 738	9	9h 49m 9s10	+ 1·2	1	1/2
	W. II 9h, 995	9	9·44	+28·3	1	0
	A. G. Lund 4768	8·7	8·85	+80·2	2	2
	K.-M. +37°, 2027	8·3	9 49 8·64	+98·28	2	2
20	A. G. Lund 4774	8·5	9 50 11·64	+80·2	3	2
21	A. G. Lund 4783	9·0	9 52 21·72	+81·2	2	2
22	Lal.-B. 762	9	9 53 20·71	+ 1·2	1	0
	W. II 9h, 1090	9	20·59	+28·3	1	1/2
	A. G. Lund 4788	8·7	9 53 20·59	+80·2	2	2
23	Lal. B. 770	9	9 56 32·97	+ 1·2	1	0
	B. B. VI +37°, 2042	9	32·37	+59·2	1	1/2
	A. G. Lund 4802	8·7	9 56 32·41	+80·2	2	2
24	W. II 9h, 1166—7	8—9	9 57 3·51	+30·8	2	0
	A. G. Lund 4804	8·6	9 57 3·25	+80·1	2	2
25	Au. 1401	4·3	10 0 56·31	+63·6	10	2
	Ro. 2232	4·4	56·40	+78·4	4	2
	Greenw. 80 1646	4·6	56·39	+80·26	3	2
	A. G. Lund 4828	4·8	56·41	+85·9	12	2
	Greenw. 90 2811	4·6	56·34	+92·84	3	2
	K.-M. +35°, 2110	II. 8·6 I. 6·8	10 0 56·52	+98·25	1	1
26	W. II 9h, 1275—6	9	10 1 48·41	+30·7	2	1/2
	A. G. Lund 4832	9·1	10 1 48·44	+80·2	2	2
27	Lal.-B. 801	9	10 1 53·99	+ 1·2	1	0
	W. II 9h, 1277	9	53·48	+28·3	1	1/2
	A. G. Lund 4833	8·8	10h 1m53s36	+80·3	2	2

α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app.
+37°42'57"3	+ 1·2	1	0	9h 49m 8s78	—0s54	+37°42'58"2	+5"1
62·8	+28·3	1	0				
58·5	+80·2	2	2				
+37 42 57·9	+98·28	2	2				
+37 17 59·1	+80·2	3	2	9 50 11·64	—0·53	+37 17 59·1	+5·2
+37 39 45·0	+81·2	2	2	9 52 21·72	—0·53	+37 39 45·0	+5·2
+37 38 0 8	+ 1·2	1	0	9 53 20·59	—0·53	+37 38 3·7	+5·3
6·0	+28·3	1	0				
+37 38 3·7	+80·2	2	2				
+37 22 57·6	+ 1·2	1	0	9 56 32·40	—0·52	+37 22 58·3	+5·4
56·3	+59·2	1	0				
+37 22 58·3	+80·2	2	2				
+36 29 5·0	+30·8	2	0	9 57 3·25	—0·51	+36 29 6·4	+5·2
+36 29 6·4	+80·1	2	2				
+35 46 49·9	+63·5	22	2	10 0 56·42	—0·49	+35 46 50·1	+5·1
19·7	+78·4	4	2				
49·7	+80·72	4	2				
49·9	+85·9	12	2				
49·8	+92·84	3	2				
+35 46 51·0	+98·25	1	1				
+35 52 26·2	+30·7	2	0	10 1 48·43	—0·49	+35 52 27·2	+5·1
+35 52 27·2	+80·2	2	2				
+36 48 54·1	+ 1·2	1	0	10h 1m53s38	—0s51	+36°48'52"4	+5"3
51·5	+28·3	1	0				
+36°48'52"4	+80·3	2	2				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht
28*	B. D. +34°, 2103	9·4	10h 8m 44s09	+103·2		
29	Lal. 20012	8	10 13 41·79	− 5·7	1	1/2
	W. II 10h, 229	8	42·15	+ 30·3	1	1/2
	Pa. II 12631	8	42·11	+ 67·2	1	1
	A. G. Leiden 4145	8·1	41·98	+ 72·7	2	2
	Pa. II 12631	8	10 13 41·82	+ 80·2	1	2
30*	Lal. 20013	9	10 13 45·68	− 5·7	1	1/2
	W. II 10h, 230	8—9	45·62	+ 30·3	1	1/2
	Pa. II 12634	8—9	45·85	+ 73·5	4	2
	A. G. Leiden 4146	8·5	45·83	+ 74·7	2	2
	K.-M. +34°, 2111	8·3	10 13 46·02	+ 98·24	2	1/2
31	W. II 10h, 282	9	10 16 31·76	+ 30·3	1	0
	A. G. Leiden 4161	8·3	10 16 31·53	+ 72·7	2	2
32	B. B. VI +33°, 1981	9·4	10 18 24·71	+ 57·3	1	1
33*	B. D. +33°, 1982	9·1	10 18 44·32	+103·2		
34	Lal. 20411	9	10 26 57·94	− 4·7	1	0
	A. G. Leiden 4217	8·1	10 26 57·77	+ 72·2	2	2
35	A. G. Leiden 4254	8·8	10 35 45·64	+ 72·2	3	2
36	W. II 10h, 767	8—9	10 39 38·17	+ 32·3	1	1/2
	A. G. Cambr. (E.) 5486 ...	8·5	38·02	+ 75·6	3	2
	K.-M. +28°, 1925	8·7	10 39 37·97	+ 97·79	2	2
37	A. G. Cambr. (E.) 5502 ...	8·9	10h 41m 15s20	+ 75·6	3	2

α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht	Angenommene Position α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app
+34°44'52"1	+103·2			10h 8m44s09	—0s45	+34°44'52"1	+5"1
+34 6 37·6	— 5·7	1	0	10 13 41·95	—0·43	+34 6 30·5	+5·1
31·4	+ 30·3	1	1/2				
30·3	+ 67·2	1	1				
30·4	+ 72·7	2	2				
+34 6 30·5	+ 80·2	1	2				
+34 3 19·3	— 5·7	1	0	10 13 45·82	—0·43	+34 3 10·7	+5·1
10·9	+ 30·3	1	1/2				
10·9	+ 75·3	3	2				
10·8	+ 74·7	2	2				
+34 3 9·4	+ 98·24	2	1/2				
+33 50 5·9	+ 30·3	1	0	10 16 31·53	—0·43	+33 50 11·1	+5·1
+33 50 11·1	+ 72·7	2	2				
+33 5 19·2	+ 57·3	1	1	10 18 24·71	—0·41	+33 5 19·2	+5·1
+33 0 10·7	+103·2			10 18 44·32	—0·41	+33 0 10·7	+5·0
+31 19 36·0	— 4·7	1	0	10 26 57·77	—0·38	+31 19 27·4	+4·9
+31 19 27·4	+ 72·2	2	2				
+30 22 19·7	+ 72·2	3	2	10 35 45·64	+0·35	+30 22 19·7	+4·9
+28 32 32·5	+ 32·3	1	1/2	10 39 38·02	—0·32	+28 32 34·2	+4·6
33·8	+ 75·6	3	2				
+28 32 35·8	+ 97·79	2	1				
+28°54' 0"1	+ 75·6	3	2	10h41m15s20	—0s32	+28°54' 0"1	+4"6

Nr.	Autorität	Mag.	α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beob-achtungen	Gewicht
38	Gou. 2348	7—8	$10^h 47^m 35^s 16$	—16·7	1	1/2
	Lal. 20941	7·5	35·08	— 5·7	1	1/2
	W. II 10^h, 927	7—8	35·25	+31·3	1	1/2
	Kam. I 1855	—	34·86	+45	1	1/2
	Pa. II 13326	7—8	35·12	+62·8	7	2
	A. G. Cambr. (E.) 5545	7·0	10 47 35·16	+77·6	3	2
39	A. G. Cambr. (E.) 5583	9·1	10 53 54·55	+85·3	4	2
	K.-M. +25°, 2324	9·2	10 53 54·65	+97·23	2	2
40	W. II 10^h, 1214	8	11 2 0·70	+26·2	1	1/2
	A. G. Berlin (N.) 4194	8·3	11 2 0·92	+80·5	3	2
41*	Lal. 21416	9	11 6 22·18	— 5·7	1	1/2
	W. II 11^h, 70	9	21·94	+26·2	1	1/2
	Pa. II 13683	9	21·—	+49·3	1	0
	Ma. 2530	8·7	21·90	+68·48	5	2
	Pa. II 13683	9	21·79	+72·8	2	2
	A. G. Berlin (N.) 4207	8·5	$11^h 6^m 21^s 90$	+80·2	2	2

α (1890·0)	Epoche 1800+	Zahl der Beobachtungen	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1890·0)	Red. ad l. app.	δ (1890·0)	Red. ad l. app.
+26°47′35″3	−16·7	1	1/2	10ʰ47ᵐ35ˢ12	−0ˢ29	+26°47′34″8	+4″
39·9	− 5·7	1	0				
35·5	+31·3	1	1/2				
38·3	+45	1	0				
35·2	+62·8	7	2				
+26 47 34·1	+77·6	3	2				
+25 11 44·5	+85·3	4	2	10 53 54·60	−0·27	+25 11 44·4	+4·1
+25 11 44·3	+97·23	2	2				
+23 34 6·7	+26·2	1	1/2	11 2 0·88	−0·24	+23 34 7·9	+3·9
+23 34 8·2	+80·5	3	2				
+22 39 18·6	− 5·7	1	0	11ʰ 6ᵐ21ˢ89	−0ˢ23	+22°39′11″0	+3″8
10·4	+26·2	1	1/2				
9·8	+49·3	1	1/2				
10·4	+68·48	5	2				
11·5	+72·8	2	2				
+22°39′11″7	+80·2	2	2				

Bemerkungen zu den Vergleichsternen.

3.... In δ wohl beide Lal.-Positionen fehlerhaft; unter der Annahme jedoch, daß die erste Angabe die richtigere sei, würde sich eine merkbare Eigenbewegung ergeben.

5.... Lal. in δ fehlerhaft. W. II zeigt in α eine merkliche Abweichung. In δ läßt sich mit Ausschluß der Lal.-Position eine Eigenbewegung im Betrage von

$$-0\rlap{.}''108$$

ableiten.

10.... Die in Ra. I angegebene Eigenbewegung in δ im Betrage von —0"05 trifft nicht zu. Eine Eigenbewegung in α ist eher wahrscheinlich, aber, wenn wirklich vorhanden, sehr gering; von der Berücksichtigung derselben bei der Ableitung des endgültigen Ortes wurde daher abgesehen.

14.... Es ergibt sich unter Berücksichtigung aller Kataloge eine Eigenbewegung von

$$+0\rlap{.}^{s}0089 \text{ in } \alpha \quad \text{und} \quad -0\rlap{.}''154 \text{ in } \delta.$$

17.... Es läßt sich aus den drei Katalogpositionen eine Eigenbewegung von

$$-0\rlap{.}^{s}0075 \text{ in } \alpha \quad \text{und} \quad -0\rlap{.}''096 \text{ in } \delta$$

ableiten.

28.... Refraktoranschluß an A. G. Leiden 4094.

30.... Lal. in δ fehlerhaft; auch die K.-M.-Position ist von den Beobachtern als unverläßlich bezeichnet.

33.... Refraktoranschluß an A. G. Leiden 4151.

41.... Lal. in δ fehlerhaft.

IV. Zusammenstellung der Beobachtungen.

Die in der folgenden Tabelle übersichtlich geordneten Beobachtungen waren publiziert in den »Atti del R. Istituto Veneto«, dem »Astronomical Journal«, den »Astronomischen Nachrichten«, im »Bulletin Astronomique« und in den »Comptes Rendus«.

Über die Bedeutung der einzelnen Kolumnen braucht wohl nichts weiteres bemerkt zu werden; hingewiesen sei nur darauf, daß die Parallaxenwerte mit Hülfe des aus der Ebertschen Ephemeride ermittelten ρ erlangt wurden.

Genauere Angaben über die Beobachtungsbehelfe fanden sich leider sehr spärlich; eine ausdrückliche Bezeichnung des verwendeten Mikrometers wurde sehr selten, eine solche der Vergrößerung gar nicht gefunden.

1890	M. Z. Berlin der Beobachtung	$\alpha_{app.}$	Par. α	$d\alpha$ $(B-R)$	$\delta_{app.}$	Par. δ	$d\delta$ $(B-R)$	Zahl der Vergleiche	Vergleichstern
Albany, Dudley Observatory [A. J., X, 54 und 61]. Beobachter: Lewis Boss. Refraktor 13″. Fadenmikrometer.									
Juli 22	$15^h\ 4^m\ 15^s$	$9^h\ 19^m\ 53^s99$	$+0^s32$	-0^s90	$+41^\circ\ 37'\ 1''6$	$+4''2$	$+1''5$	15 : 5	7
27	15 12 6	9 51 52·95	+0·29	−0·86	37 24 57·3	+4·0	−2·8	5 : 2	23
August 4	$14^h\ 47^m\ 32^s$	$10^h\ 31^m\ 39^s33$	$+0^s27$	-1^s16	$+30^\circ\ 24'\ 23''5$	$+3''6$	$+2''6$	6 : 2	35
Berlin [A. N., CXXXIII, 57]. Beobachter: V. Knorre. Refraktor 244 *mm*. Registriermikrometer (Deklinograph).									
Juli 27	$10^h\ 10^m\ 15^s$	$9^h\ 50^m\ 40^s49$	$+0^s21$	-0^s37	$+37^\circ\ 35'\ 51''3$	$+4''7$	$-2''8$	7 : 7	21
Juli 27	$10^h\ 16^m\ 9^s$	$9^h\ 50^m\ 42^s37$	$+0^s21$	$+0^s08$	$+37^\circ\ 35'\ 45''5$	$+4''7$	$+4''2$	6 : 6	22

Bordeaux [C. R., CXI, 223 und 476].

Beobachter: Courty, G. Rayet und L. Picard. Großes Äquatoreal.

Juli 21	10^h 29^m 7^s	9^h 11^m 20^{s}87	+0^{s}29	+0^{s}03	+42° 33′ 9″0	+4″5	+ 2″6	—	4
26	10 39 30	9 44 51·61	+0·27	+0·23	38 26 35·1	+4·3	— 0·4	—	18
27	10 25 38	9 50 44·46	+0·28	—0·06	37 35 10·8	+4·2	— 7·5	—	22
29	10 33 51	10 1 59·14	+0·26	—0·03	35 49 43·0	+4·2	[—33·5]	—	25
August 6	10^h 4^m 58^s	10^h 39^m 9^{s}75	+0^{s}25	+0^{s}01	+28° 50′ 35″7	+3″7	+ 3″9	—	37

Cambridge (A.), Harvard College [A. J., X, 70].

Beobachter: O. C. Wendell. Refraktor 15″.

Juli 21	16^h 7^m 29^s	9^h 13^m 2^{s}92	+0^{s}25	—1^{s}22	+42° 22′ 11″8	+4″9	—0″1	3	3
22	15 2 0	9 19 53·69	+0·31	—0·55	41 37 5·9	+4·2	+1·3	4	7
23	14 54 24	9 26 45·51	+0·31	—0·50	40 48 51·8	+4·1	+3·1	5	12
August 1	14^h 27^m 29^s	10^h 18^m 1^{s}37	+0^{s}29	—0^{s}91	+33° 31′ 0″9	+3″9	+7″7	7	32

Dresden [A. N., CXXV, 93].

Beobachter: Baron v. Engelhardt. Refraktor 12″.

Juli 27	10^h 4^m 37^s	9^h 50^m 39^{s}47	+0^{s}22	—0^{s}01	+37° 36′ 41″1	+4″6	[+34″7]	6 : 3	19

1890		M. Z. Berlin der Beobachtung	$\alpha_{app.}$	Par. α	$d\alpha$ $(B-R)$	$\delta_{app.}$	Par. δ	$d\delta$ $(B-R)$	Zahl der Vergleiche	Vergleichstern
Kiel [A. N., CXXV, 77 und 93]. Beobachter: E. Lamp.										
Juli	21	$11^h\ 9^m\ 10^s$	$9^h\ 11^m\ 33^s.53$	$+0^s.17$	$+0^s.30$	$+42°\ 31'\ 49''.0$	$+5''.2$	$-\ 0''.3$	9	3
	22	11 11 2	9 18 47·14	+0·16	+0·63	+41 44 54·4	+5·1	+10·7	5	7
Juli	25	$11^h\ 6^m\ 27^s$	$9^h\ 38^m\ 47^s.42$	$+0^s.17$	$-0^s.33$	$+39°\ 16'\ 37''.1$	$+5''.0$	$-\ 8''.2$	1	14
Kremsmünster [A. N., CXXVII, 149]. Beobachter: F. Schwab.										
Juli	23	$10^h\ 5^m\ 2^s$	$9^h\ 25^m\ 24^s.51$	$+0^s.24$	$+0^s.34$	$+40°\ 58'\ 32''.6$	$+4''.7$	$-6''.2$	3	8
Marseille [C. R., CXI, 216; B. A., VII, 356]. Beobachter: Borelly und Coggia. Refraktor 258 *mm*.										
Juli	19	$10^h\ 4^m\ 18^s$	$8^h\ 55^m\ 56^s.73$	$+0^s.31$	$+0^s.27$	$+44°\ 3'\ 1''.8$	$+4''.4$	$-9''.1$	5 : 5	1
	20	9 56 27	9 3 40·28	+0·31	−0·42	43 19 46·0	+4·4	+6·9	5 : 5	2
Juli	21	$9^h\ 58^m\ 53^s$	$9^h\ 11^m\ 11^s.29$	$+0^s.31$	$-0^s.26$	$+42°\ 3'\ 59''.7$	$+4''.3$	$-6''.1$	7 : 7	3

Juli	22	9h 58m 0s	9h 18m 24s74	+0s31	−0s11	+41° 47′ 11″0	+4″3	+1″7	5 : 5	7
	23	9 47 8	9 25 18·61	+0·31	−0·40	40 59 8·0	+3·9	−8·1	5 : 5	9
	25	10 2 29	9 38 30·74	+0·29	−0·09	30 19 6·5	+4·2	+5·1	5 : 5	14
Juli	26	9h 36m 37s	9h 44m 34s94	+0s29	−0s53	+38° 28′ 50″8	+3″9	+0″2	6 : 6	18

Mount Hamilton [A. J., X, 54 und 100].

Beobachter: Barnard und Campbell. Refraktor 12″.

Juli	22	17h 55m 31s	9h 20m 44s54	+0s36	−0s37	+41° 31′ 19″9	+3″7	+1″8	8 : 8	6
	23	18 8 47	9 27 39·75	+0·34	−0·91	40 42 14·1	+3·9	+3·5	10 : 6	12
	24	17 57 50	9 34 13·58	+0·35	−0·26	39 52 51·4	+3·7	+1·0	18 : 6	16
	25	18 7 43	9 40 37·33	+0·34	−0·16	39 1 51·1	+3·8	−2·0	12 : 5	17
	27	18 7 26	9 56 35·57	+0·33	−0·35	37 18 41·7	+3·7	+2·1	10 : 5	20
	28	17 45 34	—	—	—	36 27 6·7	+3·4	−0·7	3	24
	28	17 58 32	9 58 12·15	+0·33	−0·39	—	—	—	6	24
	29	17 33 32	—	—	—	35 34 52·4	+3·3	−2·9	2	25
	29	17 57 39	10 3 36·32	+0·32	[−1·87]	—	—	—	6	26
	30	17 44 39	—	—	—	34 41 34·0	+3·4	−6·5	6	28
	30	17 51 44	10h 8m 50s33	+0s32	−0s07	—	—	—	3	28
Juli	31	17h 53m 0s	—	—	—	+33° 48′ 29″8	+3″4	+3″4	2	31

1890	M. Z. Berlin der Beobachtung	$\alpha_{app.}$	Par. α	$d\alpha$ $(B-R)$	$\delta_{app.}$	Par. δ	$d\delta$ $(B-R)$	Zahl der Vergleiche	Vergleichstern
August 1	17h 36m 33s	10h 18m 39s93	+0s32	+0s13	+32° 56' 6"1	+3"2	—1"0	4 : 8	33
3	17 43 15	10 27 51·12	+0·31	—0·14	31 10 30·3	+3·2	+6·4	10 : 5	34
6	17 43 27	10 40 26·00	+0·29	—0·15	28 34 6·5	+3·2	+0·4	6 : 4	36
8	17 47 16	10 48 8·14	+0·28	—0s56	26 51 41·4	+3·2	+0·1	8 : 5	38
10	17 39 44	10h 54m 19s—	+0s27	—	25 11 35·7	+3·1	—0·6	1 : 2	39
12	17 35 29	—	—	—	23 33 34·5	+3·0	+2·8	1	40
August 13	17h 40m 7s	—	—	—	+22° 44' 59"9	+3"0	—7"8	1	41

Nizza [B. A., VII, 379].

Beobachter: Charlois. Äquatorial 380 *mm*.

1890	M. Z. Berlin der Beobachtung	$\alpha_{app.}$	Par. α	$d\alpha$ $(B-R)$	$\delta_{app.}$	Par. δ	$d\delta$ $(B-R)$	Zahl der Vergleiche	Vergleichstern
Juli 22	9h 49m 41s	9h 18m 22s43	+0s30	+0s07	+41° 47' 28"6	+4"3	+2"5	5	7
23	9 29 38	9 25 14·12	+0·32	+0·10	40 59 51·6	+4·0	0·0	5	9
Juli 24	9h 34m 11s	9h 31m 56s91	+0s31	—0s12	+40° 10' 22"7	+4"1	+3"1	5	10

Padua [A. N., CXXV, 91].

Beobachter: Abetti.

Juli	22	10h 10m 6s	9h 18m 30s26	+0s26	[+1s83]	—	—	—	8 : 0	6
	22	10 10 6	9 18 29·21	+0·26	+0·78	+41° 47' 5"8	+4"7	[+20"6]	8 : 4	7
	24	9 43 58	9 31 58·95	+0·28	-0·79	40 10 15·9	+4·3	[+16·8]	16 : 8	13
Juli	24	9h 43m 58s	9h 31m 59s15	+0s28	—0s59	+40° 10' 18"6	+4"3	[+19"5]	16 : 8	15

Palermo [A. N., CXXV, 93].

Beobachter: Riccò.

Juli	24	9h 15m 30s	9h 31m 52s42	+0s33	+0s52	+40° 10' 53"8	+3"9	—4"8	—	15

Paris [C. R., CXI, 224].

Beobachter: D. Klumpke.

Juli	21	10h 40m 0s	9h 11m 23s—	+0s25	—	+42° 32' 51"9	+4"7	+5"8	12 : 8	3
	22	11 10 40	9 18 45·99	+0·22	—0s35	41 44 49·0	+4·9	+4·3	6 : 4	7
	23	11 5 52	9 25 41·40	+0·23	—0·35	40 56 34·1	+4·8	—0·7	12 : 8	9
Juli	24	10h 44m 54s	9h 32m 16s14	+0s24	—0s29	+40° 7' 52"1	+4"6	0"0	12 : 8	11

1890		M. Z. Berlin der Beobachtung	$\alpha_{app.}$	Par. α	$d\alpha$ $(B-R)$	$\delta_{app.}$	Par. δ	$d\delta$ $(B-R)$	Zahl der Vergleiche	Vergleichstern
Rom, Collegio Romano [A. N., CXXV, 91].										
Beobachter: Millosevich.										
Juli	23	9h 6m 58s	9h 25m 7s71	+0s33	+0s15	+41° 0' 36"9	+4"0	−0"8	4 : 3	12
Toulouse [C. R., CXI, 260].										
Beobachter: Cosserat. Großes Äquatoreal.										
Juli	21	10h 33m 58s	9h 11m 22s71	+0s29	+0s38	+42° 32' 57"2	+4"5	−0"8	12 : 16	3
Juli	22	10h 45m 57s	9h 18m 39s33	+0s27	+0s33	+41° 45' 35"8	+4"5	+1"6	10 : 12	5
Wien [A. N. CXXV, 91; CXXVII, 331].										
Beobachter: Spitaler. Refraktor 27". Ringmikrometer.										
Juli	25	9h 37m 26s	9h 38m 24s62	+0s25	+0s34	+39° 19' 54"0	+4"5	0"0	—	14
	27	9 18 43	9 50 28·44	+0·26	+0·16	37 37 46·0	+4·3	−0·1	—	19
	28	9 28 15	9 56 14·15	+0·25	+0·07	36 45 11·9	+4·4	−1·4	—	27
	29	9 6 45	10 1 39·69	+0·26	+0·10	35 53 24·7	+4·1	−3·2	—	26
	31	9 7 14	10 12 3·53	+0·25	−0·13	34 7 42·6	+4·1	−2·9	3	30
Juli	31	9h 18m 48	10h 12m 5s75	+0s25	−0s32	+34° 7' 18"1	+4"2	−1"8	4	29

Bemerkungen zu den Beobachtungen.

Albany: In the observation of July 27, the comet was difficult to observe, owing to the presence of a slight fog strongly illuminated by moon-light. — On August 4, the comet was barely visible through light fog.

Bordeaux: Juillet 21. La comète est assez difficile à observer dans le grande clarté du nord-ouest du ciel. — La comète a rapidement faibli, et, dès le 26 juillet, elle était difficile à observer dans la grande illumination du nord-ouest du ciel. L'observation du 6 août a été difficile à cause de la faiblesse de l'astre.

Dresden: Heller Mondschein, Abenddämmerung und Dunst.

Kiel: Am 25. Juli wegen Bewölkung nur eine Einstellung.

Marseille: Les observations du 18 et du 19 juillet ont été faites par M. Coggia et les suivantes par M. Borelly. Celle du 18, qui n'est que mediocrement approchée, a été obtenue avec le chercheur parallactique qu'agitait un vente de NO assez violent. Les six autres ont été faites avec l'équatorial Eichens dont l'ouverture est de 0^m258.

Mount Hamilton: At the last few observations, the comet was seen for only a few minutes. It was still bright, but set too early to permit accurate observations.

Nizza: Observation faite avec la lune.

Padua: Luglio 22. Osservazioni affrettate. — Luglio 24. Prossima al tramonto. Orizonte fosco e chiaro di luna. Osservazioni affrettate, puntata difficilissima.

Paris: 22 juillet, observation très difficile à cause de la faible hauteur de l'astre.

Wien: Am 31. Juli war die Luft bis zum Horizont sehr rein; es war Vollmond, daher der Komet sehr schwach und schwierig zu beobachten.

V. Aufstellung der Normalörter.

In der folgenden Tabelle, welche eine nach der Zeit geordnete Zusammenstellung der Beobachtungen enthält, gibt die erste Kolumne den Beobachtungsort, die zweite die Beobachtungszeit, bezogen auf den Meridian von Berlin und korrigiert um den durch die Aberration bedingten Betrag. Der Tagesbruch wurde mit jedenfalls weitaus hinreichender Genauigkeit auf zwei Dezimalen angegeben. Die dritte und sechste Kolumne geben die beobachtete Position des Kometen, bezogen auf den Erdmittelpunkt, die vierte und siebente den für denselben Zeitpunkt gültigen Ephemeridenort, die fünfte und achte die Fehler, welche die Beobachtung gegen die Ephemeride übrig läßt, und zwar wie früher im Sinne »Beobachtung—Rechnung«. Die letzte Kolumne endlich enthält den zur Beobachtung gehörigen Vergleichstern.

Genau genommen hätten bereits an dieser Stelle die übrigbleibenden Fehler in Rektaszension durch Multiplikation mit $\cos\delta$ auf den größten Kreis bezogen werden sollen. Da sich aber die Deklination innerhalb der wenigen Tage, welche ein Normalort umfaßt, nur sehr wenig änderte und da außerdem die Deklinationen nicht sehr hoch sind, konnte ohne Gefahr für die Genauigkeit der weiteren Rechnung von der Anbringung dieser Korrektion an dieser Stelle Abstand genommen werden.

Beobachtungsort	M. Z. Berlin der Beobachtung	Beob. $\alpha_{geoc.}$	$\alpha_{Eph.}$	$d\alpha$	Beob. $\delta_{geoc.}$	$\delta_{Eph.}$	$d\delta$	Vergleichstern
Marseille	Juli 19·41	8h 55m 57s04	55m 56s77	+0s27	+44° 3' 6"2	3' 15"3	— 9"1	1
»	20·41	9 3 40·59	3 41·01	—0·42	43 19 50·4	19 43·5	+ 6·9	2
»	21·41	9 11 11·60	11 11·86	—0·26	42 34 4·0	34 10·1	— 6·1	3
Bordeaux (1)	21·43	9 11 21·16	11 21·13	+0·03	42 33 14·4	33 11·8	+ 2·6	4
Toulouse	21·43	9 11 23·00	11 22·62	+0·38	42 33 1·7	33 2·5	— 0·8	3
Paris (2)	21·44	9 11 23·—	—	—	42 32 56·6	32 50·8	+ 5·8	3
Kiel	21·46	9 11 33·70	11 33·40	+0·30	42 31 54·2	31 54·5	— 0·3	3
Cambridge (A.)	21·66	9 13 3·17	13 4·39	—1·22	42 22 16·7	22 16·8	— 0·1	3
Nizza	22·40	9 18 22·73	18 22·66	+0·07	41 47 32·9	47 30·4	+ 2·5	7
Marseille	22·41	9 18 25·05	18 25·16	—0·11	41 47 15·3	47 13·6	+ 1·7	7
Padua (3)	22·42	9 18 30·52	18 28·69	[+1·83]	—	—	—	6
	22·42	9 18 29·47	18 28·69	+0·78	41 47 10·5	46 49·9	[+20·6]	7
Toulouse	22·44	9 18 39·60	18 39·27	+0·33	41 45 40·3	45 38·7	+ 1·6	5
Paris	22·46	9 18 46·21	18 46·56	—0·35	41 44 53·9	44 49·6	+ 4·3	7
Kiel	22·46	9 18 47·30	18 46·67	+0·63	41 44 59·5	44 48·8	+10·7	7
Cambridge (A.)	22·62	9 19 54·00	19 54·55	—0·55	41 37 10·1	37 8·8	+ 1·3	7
Albany	22·62	9 19 54·31	19 55·21	—0·90	41 37 5·8	37 4·3	+ 1·5	7
Mt. Hamilton	Juli 22·74	9h 20m 44s90	20m 45s27	—0s37	+41° 31' 23"6	31' 21"8	+ 1"8	6

Beobachtungsort	M. Z. Berlin der Beobachtung	Beob. $\alpha_{geoc.}$	$\alpha_{Eph.}$	$d\alpha$	Beob. $\delta_{geoc.}$	$\delta_{Eph.}$	$d\delta$	Vergleichstern
Rom	Juli 23·37	9h 25m 8s04	25m 7s89	+0s15	+41° 0' 40"9	0' 41"7	— 0"8	12
Nizza	23·39	9 25 14·44	25 14·34	+0·10	40 59 55·6	59 55·6	0·0	9
Marseille	23·40	9 25 18·92	25 19·32	—0·40	40 59 11·9	59 20·0	— 8·1	9
Kremsmünster	23·41	9 25 24·75	25 24·41	+0·34	40 58 37·3	58 43·5	— 6·2	8
Paris	23·45	9 25 41·33	25 41·68	—0·35	40 56 38·9	56 39·6	— 0·7	9
Cambridge (A.)	23·61	9 26 45·82	26 46·32	—0·50	40 48 55·9	48 52·8	+ 3·1	12
Mt. Hamilton	23·75	9 27 40·09	27 41·00	—0·91	40 42 18·0	42 14·5	+ 3·5	12
Palermo	24·38	9 31 52·75	31 52·23	+0·52	40 10 57·7	11 2·5	— 4·8	15
Nizza	24·39	9 31 57·22	31 57·34	—0·12	40 10 26·8	10 23·7	+ 3·1	10
Padua	24·40	9 31 59·23	32 0·02	—0·79	40 10 20·2	10 3·4	[+16·8]	13
Padua	24·40	9 31 59·43	32 0·02	—0·59	40 10 22·9	10 3·4	[+19·5]	15
Paris	24·44	9 32 16·38	32 16·67	—0·29	40 7 56·7	7 56·7	0·0	11
Mt. Hamilton	24·74	9 34 13·93	34 14·19	—0·26	39 52 55·1	52 54·1	+ 1·0	16
Wien	25·39	9 38 24·87	38 24·53	+0·34	39 19 58·5	19 58·5	0·0	14
Marseille	25·41	9 38 31·03	38 31·12	—0·09	39 19 10·7	19 5·6	+ 5·1	14
Kiel	25·45	9 38 47·59	38 47·92	—0·33	39 16 42·1	16 50·3	— 8·2	14
Mt. Hamilton	Juli 25·75	9h 40m 37s67	40m 37s83	—0s16	+39° 1' 54"9	1' 56"9	— 2"0	17

Marseille	Juli	26·39	9h 44m 35s·23	44m 35s·76	—0s·53	+38° 28' 54"·7	28' 54"·5	+ 0"·2	18
Bordeaux		26·43	9 44 51·88	44 51·65	+0·23	38 26 39·4	26 39·8	— 0·4	18
Wien		27·38	9 50 28·70	50 28·54	+0·16	37 37 50·3	37 50·4	— 0·1	19
Dresden		27·41	9 50 39·69	50 39·70	—0·01	37 36 45·7	36 11·0	[+34·7]	19
Berlin		27·41	9 50 40·70	50 41·07	—0·37	37 35 56·0	35 58·8	— 2·8	21
		27·42	9 50 42·58	50 42·50	+0·08	37 35 50·2	35 46·0	+ 4·2	22
Bordeaux (4)		27·43	9 50 44·74	50 44·80	—0·06	37 35 15·0	35 22·5	— 7·5	21
Albany		27·62	9 51 53·24	51 54·10	—0·86	37 25 1·3	25 4·1	— 2·8	23
Mt. Hamilton		27·75	9 52 35·90	52 36·25	—0·35	37 18 45·4	18 43·3	+ 2·1	20
Wien		28·39	9 56 14·40	56 14·33	+0·07	36 45 16·3	45 17·7	— 1·4	27
Mt. Hamilton		28·73	—	—	—	36 27 10·1	27 10·8	— 0·7	24
		28·74	9 58 12·48	58 12·87	—0·39	—	—	—	24
Wien		29·37	10 1 39·95	1 39·85	+0·10	35 53 28·8	53 32·0	— 3·2	26
Bordeaux		29·43	10 1 59·40	1 59·43	—0·03	35 49 47·2	50 20·7	[—33·5]	25
Mt. Hamilton		29·72	—	—	—	35 34 55·7	34 58·6	— 2·9	25
		29·74	10 3 36·64	3 38·51	[—1·87]	—	—	—	25
» »		30·73	—	—	—	34 41 37·4	41 43·9	— 6·5	28
		30·74	10 8 50·65	8 50·72	—0·07	—	—	—	28
Wien		31·37	10 12 3·78	12 3·91	—0·13	34 7 46·7	7 49·6	— 2·9	30
	Juli	31·38	10h 12m 6s·00	12m 6s·32	—0s·32	+34° 7' 22"·3	7' 24"·1	— 1"·8	29

Beobachtungsort	M. Z. Berlin der Beobachtung	Beob. $\alpha_{geoc.}$	$\alpha_{Eph.}$	$d\alpha$	Beob. $\delta_{geoc.}$	$\delta_{Eph.}$	$d\delta$	Vergleich-stern
Mt. Hamilton......	Juli 31·74	—	—	—	+33° 48' 33″2	48' 29″8	+3″4	31
Cambridge (A.)....	August 1·59	10^{h} 18^{m} $1^{s}66$	18^{m} $2^{s}57$	—$0^{s}91$	33 3 14·8	3 7·1	+7·7	32
Mt. Hamilton......	1·72	10 18 40·25	18 40·12	+0·13	32 56 9·3	56 10·3	—1·0	33
Mt. Hamilton (5) ..	3·73	10 27 51·43	27 51·57	—0·14	31 10 33·5	10 27·1	+6·4	34
Albany...........	4·61	10 31 39·60	31 40·76	—1·16	30 24 27·1	24 24·5	+2·6	35
Bordeaux.........	6·41	10 39 10·00	39 9·99	+0·01	28 50 39·4	50 35·5	+3·9	37
Mt. Hamilton......	6·73	10 40 26·29	40 26·44	—0·15	28 34 9·7	34 9·3	+0·4	36
» »	8·73	10 48 8·42	48^{m} $89^{s}8$	—$0^{s}56$	26 51 44·6	51 44·5	+0·1	38
Mt. Hamilton (6)...	10·73	10^{h} 54^{m} 20^{s}—	—	—	25 11 38·8	11 39·4	—0·6	39
» »	12·72	—	—	—	23 33 37·5	33 34·7	+2·8	40
» »	August 13·73	—	—	-	+22° 45' 2″9	45' 10″7	—7″8	41

Anmerkungen.

1....Die Bordeauxer Beobachtungen wurden nach den »Annales de l'Observatoire de Bordeaux« verbessert. Die Angaben in den »Comptes Rendus« und in den »Astronomischen Nachrichten« scheinen auf raschen, nur genäherten Reduktionen beruht zu haben.

2....α war nur auf die ganze Zeitsekunde genau angegeben.

3....Die konstante Abweichung der Paduaner Beobachtungen in δ scheint auf einen systematischen Instrumental- oder Beobachtungsfehler hinzuweisen. Ich schrieb in dieser Angelegenheit an Prof. Abetti, welcher mir einen Abdruck aus den »Atti del R. Istituto Veneto«, in welchen die in Padua angestellten Beobachtungen dieses Kometen gleichfalls publiziert sind, zum Vergleiche zur Verfügung stellte. Mit diesen decken sich die Angaben in den »Astronomischen Nachrichten« vollkommen und es blieb mir daher nichts anderes übrig, als die Paduaner Deklinationen von der weiteren Verwertung auszuschließen.

4....Hier war ursprünglich falscher Vergleichstern angegeben.

5....Auch hier war falscher Vergleichstern angegeben.

6....Die Vergleichsternposition war mit einem Zeitminutenfehler behaftet; an der vom Beobachter angegebenen Stelle steht kein Stern. α war nur auf die ganze Zeitsekunde genau angeführt.

In welcher Weise die in der vorhergehenden Tabelle zusammengestellten Beobachtungen zu Normalörtern vereinigt wurden, ist durch Trennungsstriche angezeigt. Aus derselben ist auch zu ersehen, daß sich der Aufstellung der ersten vier Normalörter keine wesentlichen Schwierigkeiten entgegenstellten, während das gleiche nicht auch vom fünften und sechsten Normalorte behauptet werden kann. Nach dem 1. August waren die Beobachtungen wegen der sehr ungünstig gewordenen Sichtbarkeitsbedingungen des Kometen weit spärlicher geworden und auch die Genauigkeit derselben dürfte möglicherweise, wenn es sich auch nicht in auffälliger Weise

äußert, durch die gleichen Umstände im ungünstigen Sinne beeinflußt worden sein. Was speziell den sechsten Normalort betrifft, so umfaßt derselbe nur die drei letzten Beobachtungen, die auf der Lick-Sternwarte angestellt worden waren, von denen die erste in Rektaszension nur einen rohen, auf die ganze Zeitsekunde genauen Anschluß, die beiden letzten überhaupt nur mehr Deklinationsanschlüsse geben. Bei der Aufstellung des sechsten Normalortes wurde daher auch von der Rektaszensionsangabe der drittvorletzten Beobachtung abgesehen und nur die Deklinationen, welche noch eine befriedigende innere Übereinstimmung zeigen, zu einem unvollständigen Normalorte vereinigt.

Die Zusammenfassung der in der vorhergehenden Tabelle angegebenen Werte von $d\alpha$ und $d\delta$ ergibt für die Korrektion der Ephemeride folgende Größen, wobei noch bemerkt sei, daß alle in die Aufstellung der Normalörter einbezogenen Beobachtungen als gleichwertig angenommen wurden.

Normalort	Beobachtungen	M. Z. Berlin	$d\alpha$	Zahl der Beob.	$d\delta$	Zahl der Beob.
I	Juli 19—22	Juli 21·85	—0ˢ087	16	+1ʺ52	16
II	23—25	24·30	—0·166	17	—1·00	15
III	26—27	27·23	—0·196	9	—1·11	8
IV	Juli 28—Aug. 1	30·47	—0·166	9	—0·78	10
V	Aug. 3—8	Aug. 6·04	—0ˢ400	5	+2·68	5
VI	10—13	12·5	—	—	[—1ʺ87]	3

Mit Hülfe der angeführten Ephemeridenkorrektion wurden folgende, auf den Jahresanfang bezogene Normalörter aufgestellt, wobei die Zeiten auf Mittag oder Mitternacht abgerundet wurden.

I. Normalort:

Ephemeridenort	9h 15m 31s02	+42° 6′ 28″4
Korrektion der Ephem...	−0·087	+ 1·52
Red. ad l. med..........	−0·972	+ 2·86
	9h 15m 29s961	+42° 6′ 32″78
I. (Juli 22·0)	138° 52′ 29″42	+42° 6′ 32″78

II. Normalort:

Ephemeridenort	9h 32m 40s79	+40° 4′ 52″7
Korrektion der Ephem...	−0·166	− 1·00
Red. ad l. med..........	−0·974	+ 3·25
	9h 32m 39s650	+40° 4′ 54″95
II. (Juli 24·5)..........	143° 9′ 54″75	+40° 4′ 54″95

III. Normalort:

Ephemeridenort........	9h 48m 14s92	+37° 57′ 28″9
Korrektion der Ephem...	−0·196	− 1·11
Red. ad l. med..........	−0·977	+ 3·60
	9h 48m 13s747	+37° 57′ 31″39
III. (Juli 27·0)	147° 3′ 26″20	+37° 57′ 31″39

IV. Normalort:

Ephemeridenort........	10h 7m 38s25	+34° 53′ 52″7
Korrektion der Ephem...	−0·166	− 0·78
Red. ad l. med..........	−0·991	+ 4·05
	10h 7m 37s093	+34° 53′ 55″97
IV. (Juli 30·5)	151° 54′ 16″40	+34° 53′ 55″97

V. Normalort:

Ephemeridenort	10h 37m 30s34	+29° 11′ 48″7
Korrektion der Ephem...	−0·400	+ 2·68
Red. ad l. med..........	−0·996	+ 4·79
	10h 37m 28s944	+29° 11′ 56″17
V. (August 6·0)	159° 22′ 14″16	+29° 11′ 56″17

VI. Normalort:

Ephemeridenort	—	+23° 44′ 22″8
Korrektion der Ephem...	—	— 1·87
Red. ad l. med.	—	+ 5·42
	—	+23° 44′ 26″35
VI. (August 12·5)......	—	+23° 44′ 26″35

VI. Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn.

Da der Komet während der Dauer seiner Sichtbarkeit nur einen kurzen heliozentrischen Bogen beschrieb, konnte bei der Ermittlung der definitiven Elemente von der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate abgesehen und der viel rascher zum Ziele führenden Methode der Variation des Verhältnisses der Distanzen der Vorzug gegeben werden.

Was die durch die Elemente genau darzustellenden beiden Bahnpunkte betrifft, so war kein Zweifel, daß als erster der auf einer verhältnismäßig großen Anzahl von Beobachtungen aufgebaute I. Normalort zu wählen sei. Was die Wahl des zweiten Bahnpunktes anbelangt, so mußte vom letzten Normalorte aus dem Grunde abgesehen werden, weil dieser nur auf Deklinationsbeobachtungen beruht. Es fiel daher die Wahl auf den fünften, welcher allerdings auch nicht viele Beobachtungen in sich vereinigt; trotzdem konnte bei diesem Normalorte als zweitem vollständig darzustellenden Bahnpunkte geblieben werden, weil die innere Übereinstimmung in den $d\alpha$- und $d\delta$-Werten nicht schlechter als bei den anderen Normalörtern ist und daher angenommen werden konnte, daß dieser Normalort mit den vorhergehenden ungefähr gleichwertig sei. Auf den eine größere Anzahl von Beobachtungen umfassenden IV. Normalort zurückzugehen, wäre wohl aus dem Grunde nicht angezeigt gewesen, weil dadurch die beiden genau darzustellenden Bahnpunkte einander zu nahe gerückt worden wären.

Als Ausgangswert des Verhältnisses der kurtierten Distanzen wurde jener angenommen, welchen die Ephemeride für die Zeit des I. und V. Normalortes gibt. Es war daher

$$\log M_1 = 0{\cdot}064831$$

und mit diesem Werte von log M_{I} wurde ein parabolisches Elementensystem berechnet.

Als zweiter Wert von log M wurde ein um 0·001 größerer gewählt und es lautete daher

$$\log M_{\mathrm{II}} = 0\cdot 065831.$$

Auch mit diesem Werte von log M wurde ein parabolisches Elementensystem ermittelt. In der folgenden Zusammenstellung sind alle Elemente auf die Ekliptik als Fundamentalebene, die die Bahnlage bestimmenden außerdem auf 1890·0 bezogen.

	System I	System II
	log M_{I} = 0·064831	log M_{II} = 0·065831
T	Juli 8·57485 M. Z. Berlin	Juli 8·27418 M. Z. Berlin
ω	85° 39′ 30″6	84° 54′ 8″7
☊	14 18 3·9	14 2 16·0
i	63 20 7·7	63 36 19·2
log q . .	9·883176	9·879789

Die aus diesen beiden Elementensystemen für die Zeit der Normalörter abgeleiteten Rektaszensions- und Deklinationswerte lauten:

Normalort	Rektaszension				Deklination			
	Beobachtung	Syst. I	Syst. II	Syst. III	Beobachtung	Syst. I	Syst. II	Syst. III
I	138°52′29″42	29″5	29″5	29″1	+42° 6′32″78	32″8	32″6	32″6
II	143 9 54·75	55·2	86·8	59·1	40 4 54·95	57·4	45·2	60·0
III	147 3 26·20	26·3	72·4	32·2	37 57 31·39	33·7	13·0	37·2
IV	151 54 16·40	15·1	59·2	21·2	34 53 55·97	58·6	33·8	62·0
V	159 22 14·16	14·4	14·2	14·2	29 11 56·17	56·3	55·9	55·7
VI	[165°20′ —]	[25″8]	[−31″0]	[16″3]	+23°44′26″35	[32″6]	[89″1]	[23″2]

Der besseren Übersicht halber wurde in diese Zusammenstellung auch das erst später zur Sprache kommende System III (Ellipse) aufgenommen.

Die Unterschiede »Beob.—Syst. I«, »Syst. II—Syst. I« und »Syst. III—Syst. I« sind in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt:

Normalort	Beob.—Syst. I			Syst. II—Syst. I			Syst. III—Syst. I		
	$d\alpha$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	μ	$\mu \cos\delta$	ν	η	$\eta \cos\delta$	ζ
I	(−0ʺ08)	—	(−0ʺ02)	(0ʺ0)	—	(−0ʺ2)	(−0ʺ4)	—	(−0ʺ2)
II	−0·45	−0ʺ34	−2·45	+31·6	+24ʺ18	−12·2	+3·9	+2ʺ98	+2·6
III	−0·10	−0·08	−2·31	+46·1	+36·35	−20·7	+5·9	+4·65	+3·7
IV	+1·30	+1·07	−2·63	+44·1	+36ʺ17	−24·8	+6·1	+5ʺ00	+3·4
V	(−0ʺ24)	—	(−0·13)	(−0ʺ2)	—	(−0·4)	(−0ʺ2)	—	(−0·6)
VI	—	—	[−6ʺ25]	—	—	[+56ʺ5]	—	—	[−9ʺ4]

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, daß der VI. Normalort gegen die drei aufgestellten Systeme beträchtliche Unterschiede im Vergleiche zu den übrigen Normalörtern gibt und daß er sich kaum an irgendeine Bahnform in befriedigender Weise anschließen werde. Er wurde daher von der weiteren Benützung ausgeschlossen, was um so eher geschehen konnte, als er nur sehr wenige und unter ungünstigen Verhältnissen erlangte Beobachtungen umfaßt.

Es war nun das Verhältnis zu ermitteln, in welchem die willkürlich angenommene Variation

$$\log M_{II} - \log M_{I} = 0·001$$

zu ändern ist, um vom System I auf die wahrscheinlichste Parabel zu gelangen. Die dieses Verhältnis Δx ergebenden sechs Gleichungen sind folgende:

$$-0·34 = +24·18\,\Delta x$$

$$-0·08 = +36·35\,\Delta x$$

$$+1·07 = +36·17\,\Delta x$$

$$-2·24 = -12·2\,\Delta x$$

$$-2·31 = -20·7\,\Delta x$$

$$-2·63 = -24·8\,\Delta x,$$

woraus man

$$\Delta x = +0{\cdot}038647$$

erhält.

Berechnet man nun mit dem im Verhältnis von Δx verbesserten Werte von $\log M_5$,

$$\log M_P = 0{\cdot}064870,$$

neue Elemente, so erhält man als wahrscheinlichstes parabolisches Elementensystem folgendes:

T....	Juli 8·56336 M. Z. Berlin	
ω....	85° 37′ 47″4	Mittl. Äquin. 1890·0
☊....	14 17 24·4	
i....	63 20 46·6	
$\log q$....	9·883044,	

welches nachstehende, auf die Zeiten der Normalörter bezogenen Kometenpositionen gibt:

I. Norm......	138° 52′ 29″3	+42° 6′ 33″0
II. »	143 9 56·4	40 4 57·0
III. »	147 3 27·6	37 57 32·8
IV. »	151 54 16·3	34 53 57·3
V. »	159 22 13·8	29 11 55·7
VI. »	165° 20′ 22″7	+23° 44′ 33″7

Die hier erlangten Kometenörter lassen gegen die Beobachtung noch folgende Fehler übrig:

Normalort	$d\alpha$	$d\alpha \cos \delta$	$d\delta$
I	(+0″12)	--	(−0″22)
II	−1·65	−1″26	−2·05
III	−1·40	−1·10	−1·41
IV	+0·10	+0″08	−1·33
V	(+0″36)	—	(+0·47)
VI	—	—	[−7″35]

Diese Größen zeigen, daß den Beobachtungen durch eine Parabel in ziemlich befriedigender Weise Genüge geleistet wird; die Unmöglichkeit aber, ohne Erhöhung der Fehlerreste einen wesentlich besseren Zeichenwechsel herbeizuführen, ließ darauf schließen, daß sich eine andere Bahnform als die parabolische noch enger an die Beobachtungen anschließen werde. Zu diesem Zwecke wurde a als sechste Veränderliche in die Rechnung eingeführt und nach Hornsteins Methode untersucht, in welche Kegelschnittslinie sich die Parabel verwandeln würde, wenn man in der Ausgleichsrechnung

$$a < \infty$$

setzt. Unter Zugrundelegung des Wertes von log M_{I} und unter der Annahme, daß

$$a = 50$$

sei, wurde folgendes elliptische Elementensystem ermittelt:

T....	Juli 8·44716	M. Z. Berlin
ω....	85° 21′ 13″0	Mittl. Äquin. 1890·0
☊....	14 18 36·7	
i....	63 27 15·8	
log q....	9·881554	
log a....	1·698970	
a....	50	
e....	0·984774	

Mit Hülfe dieses Elementensystems wurden die bereits auf p. 45 als System III eingereihten Positionen erlangt, welche gegen das System I die in der Tabelle auf p. 46 unter »Syst. III—Syst. I« angegebenen Unterschiede zeigen.

Auf Grund der beiden parabolischen Elementensysteme I und II und des nunmehr abgeleiteten elliptischen (III) läßt sich nach Hornstein die wahrscheinlichste Bahn auf einfache Weise ermitteln.

Die Fehler, welche die Ellipse gegen die Beobachtung übrigläßt, sind durch

$$d\alpha - \mu x - \eta_{\prime} y$$

und

$$d\delta - \nu x - \theta y$$

für jeden einzelnen Normalort dargestellt. Der Abstand des beobachteten vom berechneten Orte ist daher durch

$$\sqrt{(d\alpha-\mu x-\eta y)^2 \cos^2\delta+(d\delta-\nu x-\theta y)^2}$$

gegeben. Wird an die Summe der Quadrate dieser Distanzen die Bedingung geknüpft, daß sie zu einem Minimum werde, so sind die Werte für x und y durch folgende beiden Gleichungen gegeben:

$$[\Sigma(\mu^2\cos^2\delta)+\Sigma(\nu^2)]x+[\Sigma(\mu\eta\cos^2\delta)+\Sigma(\nu\theta)]y =$$
$$= \Sigma(\mu\, d\alpha\cos^2\delta)+\Sigma(\nu\, d\delta)$$
$$[\Sigma(\mu\eta\cos^2\delta)+\Sigma(\nu\theta)]x+[\Sigma(\eta^2\cos^2\delta)+\Sigma(\theta^2)]y =$$
$$= \Sigma(\eta\, d\alpha\cos^2\delta)+\Sigma(\theta\, d\delta).$$

Setzt man für $d\alpha$, $d\delta$, μ, ν, η und θ die entsprechenden Werte aus der auf p. 46 gegebenen Tafel ein, so erhalten die beiden Gleichungen die Form:

$$4406\cdot32\,x+229\cdot56\,y = 170\cdot30$$
$$229\cdot56\,x+87\cdot58\,y = -19\cdot93$$

und daraus findet man

$$x = +0\cdot058492$$
$$y = -0\cdot380879.$$

Der negative Wert von y zeigt an, daß die wahrscheinlichste Bahn eine Hyperbel sein werde, für welche sich als Wert der großen Halbachse

$$\frac{50}{y} = -131\cdot275$$

und als solcher für

$$\log M_H = 0\cdot064889$$

ergibt.

Die auf diesen Grundlagen ermittelten hyperbolischen Elemente lauten:

T....	Juli 8·60569 M. Z. Berlin	
ω....	85° 43′ 49″3	Mittl. Äquin. 1890·0
☊....	14 16 53·4	
i....	63 18 23·2	
$\log q$....	9·883596	
$\log a$....	2·118183	
a....	131·275	
e....	1·005827.	

Die aus den obigen Elementen für die Zeiten der Normalörter abgeleiteten Kometenörter sind:

I. Normalort ...	138° 52′ 29″5	+42° 6′ 33″2
II. » ...	143 9 55·5	+40 4 56·0
III. » ...	147 3 26·1	+37 57 31·3
IV. » ...	151 54 14·9	+34 53 56·1
V. » ...	159 22 14·2	+29 11 56·0
VI. » ...	165° 20′ 24″9	+23° 44′ 38″6

Aus dem Vergleiche der Beobachtung mit den aus den wahrscheinlichsten hyperbolischen Elementen sich ergebenden Kometenpositionen gehen folgende noch übrigbleibenden Fehler hervor:

Normalort	$d\alpha$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I	(−0″08)	—	(−0″42)
II	−0·75	−0″57	−1·05
III	+0·10	+0·08	+0·09
IV	+1·50	+1″23	−0·13
V	(−0″04)	—	(+0·17)
VI	—	—	(−12″25)

Vergleicht man nun diese Größen mit jenen, welche aus den wahrscheinlichsten Parabelelementen hervorgegangen sind, so sieht man, daß nicht nur die absoluten Fehlerbeträge bedeutend kleiner geworden sind, sondern daß auch der Zeichenwechsel ein ungleich besserer, ja sogar ein sehr befriedigender geworden ist. Die folgende kleine Tabelle gibt noch eine Übersicht über die Summe der Fehlerquadrate.

	System I	Beste Parabel	Beste Hyperbel
$\Sigma(d\alpha^2 \cos^2\delta)$ ...	1·27	2·81	1·84
$\Sigma(d\delta^2)$	18·26	7·96	1·13
$\Sigma(v^2)$	19·53	10·77	2·97

Es stellt sich nun die Frage, ob für den vorliegenden Kometen die Parabel oder die Hyperbel als endgültige Bahnform zu wählen sei. Spricht für die Parabel der eine Umstand, daß sie als die im allgemeinen wahrscheinlichere Bahnform die Beobachtungen doch ziemlich gut darstellt, so hat die Hyperbel die bedeutend kleinere Fehlerquadratsumme für sich. Man wird daher die Ergebnisse der vorliegenden Rechnung dahin zusammenfassen können, daß als definitive Bahnform die Parabel anzunehmen sei, daß aber eine etwaige Abweichung von dieser nicht nach der Ellipse, sondern nach der für gewöhnlich weniger wahrscheinlichen Hyperbel hin stattfinden würde.

Beim Abschlusse der vorliegenden Arbeit drängt es mich, dem Direktor der k. k. Wiener Sternwarte, Herrn Hofrat Prof. Dr. E. Weiß für die mir oft und in liebenswürdigster Weise erteilten wertvollen Ratschläge den ehrfurchtsvollsten Dank auszusprechen.

Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten

von

Dr. **M. Allé,**

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1904.)

I.

Die logarithmische Spirale

$$r = ae^{k\vartheta}$$

hat bekanntlich für einen bestimmten Wert von k, der als Wurzel einer transzendenten Gleichung gefunden wird, die Eigenschaft, daß die Krümmungsmittelpunkte ihrer Punkte auf ihr liegen, daß sie also zugleich ihre Evolute ist.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob diese Eigenschaft der logarithmischen Spirale allein zukommt oder ob es noch andere Kurven geben kann, welche die gleiche Eigenschaft besitzen.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, diese Frage zu beantworten.

Für den mathematischen Ansatz und die weitere Untersuchung ist die Wahl der unabhängig Veränderlichen nicht gleichgültig.

Als solche wird im folgenden der Richtungskoeffizient p der Tangente in einem Punkte $m(xy)$ der gesuchten Kurve angenommen.

Ist

$$y = f(x) \qquad 1)$$

die Gleichung der Kurve und

$$f'(x) = p,$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$x = \varphi(p)$$

und lassen sich dann sämtliche Ableitungen von $f(x)$ als Funktionen von p auffassen.

Zur Vereinfachung mögen bei dieser Auffassung die abkürzenden Bezeichnungen

$$f''(x) = q \qquad f'''(x) = r \qquad \text{etc.}$$

benützt werden.

Sind $\xi\eta$ die Koordinaten des Evolutenpunktes μ, welcher dem Punkte m entspricht, so gilt die Gleichung

$$f'(\xi) = -\frac{1}{p} \tag{2}$$

und wird, wenn die Evolute die ursprüngliche Kurve selbst sein soll,

$$\xi = \varphi\left(-\frac{1}{p}\right)$$

sein müssen.

Drückt man nun in der Gleichung, welche die Koordinate ξ des Krümmungsmittelpunktes bestimmt, alles durch p aus, so findet man die Gleichung:

$$\varphi\left(-\frac{1}{p}\right)-\varphi(p)+p(1+p^2)\varphi'(p) = 0. \tag{3}$$

Führt man eine neue Funktion ein durch die Gleichung

$$\Theta(p) = \frac{\varphi\left(-\frac{1}{p}\right)}{\varphi(p)}, \tag{4}$$

so nimmt 3) die Form an:

$$\Theta(p)-1+p(1+p^2)\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)} = 0,$$

aus welcher folgt

$$\varphi(p) = e^{\int\frac{1-\Theta(p)}{p(1+p^2)}\cdot dp}, \tag{5}$$

welche gestattet, $\varphi(p)$ zu finden, sobald $\Theta(p)$ ermittelt ist.

Das Einsetzen des Ausdruckes 5) in 3) führt auf die Gleichung:

$$(1+p^2)\frac{\Theta'(p)}{\Theta(p)} = p\Theta\left(-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\Theta(p)-\frac{1+p^2}{p}.$$

Wird in dieser Gleichung p mit $-\frac{1}{p}$ vertauscht und die so entstehende neue Gleichung mit der vorhergehenden durch Addition verbunden, so gelangt man zu der Gleichung

$$\Theta(p).\Theta\left(-\frac{1}{p}\right) = -k^2, \qquad 6)$$

wenn mit $-k^2$ eine Konstante bezeichnet wird.

Durch Benützung von 6) nimmt die obige Gleichung zur Bestimmung von Θ die einfachere Gestalt an:

$$\Theta'(p)+\frac{\Theta(p)}{p} = \frac{\Theta(p)^2}{p(1+p^2)}-k^2.\frac{p}{1+p^2}. \qquad 7)$$

Die Ermittlung der Funktion Θ wird also auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt.

Die Integration einer solchen kann bekanntlich von der Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängig gemacht werden und mag dies hier auf folgende Art geschehen:

Wenn

$$a = -k^2\frac{p}{1+p^2} \qquad b = -\frac{1}{2p} \qquad c = \frac{1}{p(1+p^2)},$$

so hat 7) die Form:

$$\Theta'(p) = a+2b\Theta+c\Theta^2.$$

Setzt man $\Theta(p) = \frac{\mu}{\nu}$, so wird der vorangehenden Gleichung genügt, wenn $\mu\nu$ die Gleichungen erfüllen:

$$\mu' = a\nu \qquad \nu'+2b\nu+c\mu = 0.$$

Mit Benützung der ersten dieser Gleichungen geht die zweite über in

$$\mu'' + \left(2b - \frac{a'}{a}\right)\mu' + ac\mu = 0$$

und findet man, wenn diese integriert ist, Θ durch

$$\Theta(p) = a\frac{\mu}{\mu'}.$$

Die zunächst zu integrierende Gleichung ist daher

$$p(1+p^2)\mu'' - 2(1+p^2)\mu' - k^2 p\mu = 0.$$

Bei Annahme von

$$\mu = u . e^{k \operatorname{arctg} p}$$

ergibt sich für u die Gleichung

$$p(1+p^2)u'' + 2(kp-1)u' - 2ku = 0,$$

welcher durch

$$u = 1 - kp$$

genügt wird. Man findet also

$$\mu = (1-kp)e^{k \operatorname{arctg} p}$$

und damit eine Partikularlösung von 7)

$$\Theta(p) = k \cdot \frac{1-kp}{k+p}.$$

Die Formel 5) liefert dann

$$x = \varphi(p) = \frac{k+p}{\sqrt{1+p^2}} e^{k \operatorname{arctg} p}, \qquad 8)$$

welcher Ausdruck der Gleichung 3) genügen muß.

Durch Einsetzen von 8) in 3) wird aber die linke Seite dieser Gleichung

$$(e^{k\lambda\pi} - k)(1-kp).$$

Es muß daher die Konstante k eine Wurzel der Gleichung

$$e^{k\lambda\pi} - k = 0 \qquad 9)$$

sein.

Da $y = \int p\varphi'(p)dp$ ist, so findet man wegen 8)

$$y = \frac{kp-1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot e^{k \operatorname{arctg} p}, \tag{10}$$

wenn die Integrationskonstante durch 0 ersetzt wird, was einer Verschiebung des Ursprunges auf der Y-Achse gleichkommt.

Aus 8) und 10) folgt, wenn

$$x^2+y^2 = r^2,$$

$$r = \sqrt{1+k^2} \cdot e^{k \operatorname{arctg} p},$$

also wenn

$$p = \operatorname{tang} \psi,$$

$$r = \sqrt{1+k^2} \cdot e^{k\psi}.$$

Man findet ferner aus den Gleichungen, welche xy bestimmen,

$$\frac{y}{x} = \frac{kp-1}{p+k} = \operatorname{tang} \vartheta,$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, welchen die Richtung des Fahrstrahles r mit der X-Achse einschließt.

Setzt man

$$\frac{1}{k} = \operatorname{tang} \varepsilon,$$

so findet man aus der früheren Gleichung

$$\vartheta = \psi - \varepsilon,$$

so daß der Ausdruck für den Fahrstrahl die folgende Form erhält:

$$r = a e^{k\vartheta},$$

wo a willkürlich ist, weil, wenn $\varphi(p)$ der Gleichung 3) genügt, auch $c\varphi(p)$ dasselbe tut, folglich x und y in 8) und 10) mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert werden können.

II.

Der partikulären Lösung der Gleichung 7) in I entspricht, wie soeben gezeigt wurde, eine Lösung von 3) ebendort, welche auf die logarithmische Spirale führt.

Durch diese Partikularlösung ist man imstande, das allgemeine Integral von 7) durch Quadraturen ausgedrückt zu finden und könnte versuchen, noch zu anderen Lösungen von 3) zu gelangen, deren entsprechende Kurven möglicherweise die Eigenschaft der logarithmischen Spirale, Selbstevolute zu sein, auch besitzen könnten.

Bei der Undurchsichtigkeit der Ausdrücke, auf welche man bei diesem Vorgange gelangt, ist aber wenig Aussicht auf einen Erfolg zu erwarten, wenn es sich darum handelt, diese Frage entscheiden zu wollen.

Ich habe daher noch einen anderen, weniger direkten Weg eingeschlagen, um die in I gestellte Aufgabe zu lösen und namentlich der Frage näher zu treten, ob die Eigenschaft der logarithmischen Spirale, Selbstevolute zu sein, auch noch anderen Kurven zukommen könne.

Sei

$$y = f(x) \tag{1}$$

die Gleichung einer Kurve, seien ferner $ds\, d\sigma$ die Bogenelemente, $\rho\rho_1$ die Krümmungshalbmesser der Kurve und ihrer Evolute, so ist

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{d\sigma}{ds}$$

oder, wenn $d\sigma$ durch die Differentiale der Koordinaten $\zeta\eta$ ausgedrückt und auf Gleichung 2) in I Rücksicht genommen wird,

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{d\eta}{dx}.$$

Da aber

$$\eta = y + \frac{p(1+p^2)}{q},$$

so folgt

$$\frac{\rho_1}{\rho} = R, \tag{2}$$

wenn abkürzend

$$R = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} \tag{3}$$

gesetzt wird.

Werden q und r als Funktionen von p aufgefaßt, so ist

$$r = q\frac{dq}{dp}$$

und findet man

$$R = (1+p^2)\frac{d\rho}{dp}. \tag{4}$$

Es folgt dann aus 2)

$$\rho_1 = (1+p^2)\frac{d\rho}{dp}. \tag{5}$$

Setzt man

$$\rho = \Phi(p)$$

und besitzt die Kurve 1) die Eigenschaft, daß die Krümmungsmittelpunkte auf ihr selbst liegen, so ist

$$\rho_1 = \Phi\left(-\frac{1}{p}\right)$$

und daher findet man zur Bestimmung einer solchen Kurve aus 5)

$$\Phi\left(-\frac{1}{p}\right) = (1+p^2)\Phi'(p). \tag{6}$$

Ist eine Lösung dieser Gleichung gefunden, so erhält man als Darstellung der gesuchten Kurve die beiden Gleichungen:

$$x = \int\frac{\Phi(p)dp}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad y = \int\frac{\Phi(p).pdp}{(1+p^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

III.

Um Lösungen der Gleichung 6) in II zu erhalten, setze man ähnlich, wie in I vorgegangen worden,

$$\Omega(p) = -\frac{\Phi\left(-\frac{1}{p}\right)}{\Phi(p)} \tag{1}$$

und findet

$$\Phi(p) = e^{\int\frac{\Omega(p)dp}{1+p^2}}. \tag{2}$$

Die Gleichung 6) in II geht dann über in

$$\Omega\left(-\frac{1}{p}\right)-\Omega(p)=(1+p^2)\frac{\Omega'(p)}{\Omega(p)} \qquad 3)$$

und eine Lösung dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich

$$\Omega(p)=k,$$

wenn k eine beliebige Konstante bedeutet.

Dieser Lösung entsprechend, findet man

$$\Phi(p)=e^{k\,\mathrm{arctg}\,p}. \qquad 4)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in 6), II ergibt sich die Gleichung

$$e^{k\lambda\pi}-k=0 \qquad 5)$$

zur Bestimmung von k, in welcher

$$\lambda=\pm\frac{2n+1}{2} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Die Lösung 4) sowie jede Lösung der Gleichung 6) in II kann, wie aus ihrer Form ersichtlich ist, noch mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden.

Es gibt aber noch eine andere Lösung.

Werden p und $-\frac{1}{p}$ in 3) vertauscht, so liefert die Verbindung dieser Gleichung mit neu entstandenen die folgende Beziehung:

$$\Omega(p).\Omega\left(-\frac{1}{p}\right)=\gamma, \qquad 6)$$

wo γ konstant ist.

Vermöge 6) geht 3) über in

$$\frac{d\Omega}{\gamma-\Omega^2}=\frac{dp}{1+p^2}$$

und der Funktion Φ kann mit Rücksicht auf eine kurz vorher gemachte Bemerkung die Form erteilt werden

$$\Phi(p)=\frac{c}{\sqrt{\gamma-\Omega^2}},$$

in welchen beiden Formeln zur Abkürzung Ω anstatt $\Omega(p)$ geschrieben ist.

Der hier ermittelte Ausdruck von $\Phi(p)$ muß aber der Gleichung 6) in II genügen, was jedoch, wie die Substitution zeigt, nur dann geschieht, wenn

$$\gamma = -1$$

ist.

Jede von k verschiedene Lösung Ω, welche auf eine Lösung Φ führen soll, muß also der Gleichung

$$\Omega(p) . \Omega\left(-\frac{1}{p}\right) = -1 \tag{7}$$

genügen und die obenstehende Differentialgleichung zwischen p und Ω erhält jetzt die Gestalt:

$$\frac{d\Omega}{1+\Omega^2} = -\frac{dp}{1+p^2},$$

aus welcher folgt

$$\operatorname{arctg} \Omega = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} p,$$

wenn a eine willkürliche Konstante bedeutet.

Man findet somit für jede von k verschiedene Lösung der Gleichung 3)

$$\Omega(p) = \frac{a-p}{1+ap}$$

und mit dieser aus 2)

$$\Phi(p) = \frac{1+ap}{\sqrt{1+p^2}} .$$

Da Φ mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden kann, ohne daß es aufhört, der Gleichung 6) in II zu genügen, so ist es erlaubt, dasselbe in einer der folgenden Formen darzustellen:

$$\Phi = \frac{c+c'p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{oder} \quad \Phi = \frac{c''+p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Wählt man die erste, so geben die Gleichungen 7) in II, wenn $\gamma\gamma'$ statt $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}c'$ gesetzt werden,

$$x = \gamma \operatorname{arctg} p + \frac{\gamma p - \gamma'}{1+p^2}$$

$$y = \gamma' \operatorname{arctg} p - \frac{\gamma' p + \gamma}{1+p^2}.$$

Diese Gleichungen stellen, wie eine leichte Diskussion zeigt, eine gemeine Zykloide dar.

Es ist dies allerdings keine Lösung der in I gestellten Aufgabe, aber die Gleichung in Φ 6), II drückt aus, daß die Krümmungshalbmesser einer Kurve und ihrer Evolute dieselben Funktionen von p, beziehungsweise von $-\frac{1}{p}$ sind.

Dies trifft zu, wenn eine Kurve ihre Evolute ist, aber auch dann, wenn die Evolute einer Kurve durch Translation derselben entsteht, wie es für die Zykloide der Fall ist.

IV.

Geht man auf die erste Lösung der Gleichung 3), III zurück, nämlich

$$\Omega(p) = k,$$

so erhält man mit Benützung der Gleichungen 2), III und 7), II für xy dieselben Ausdrücke wie 8), 10) in I und daher wie dort die Gleichung der logarithmischen Spirale

$$r = a e^{k\vartheta}, \tag{1}$$

wobei k der Gleichung

$$e^{\lambda\pi k} - k = 0 \tag{2}$$

zu genügen hat.

Die Gleichung 2) hat eine reelle Wurzel nur dann, wenn $\lambda < 0$, also für

$$\lambda = -\frac{2n+1}{2}.$$

Der Fahrstrahl r_1 der Evolute von 1) ist aber bekanntlich die Subnormale, also

$$r_1 = a k e^{k\vartheta},$$

d. h. wegen 2)

$$r_1 = a e^{k(\vartheta+\lambda\pi)},$$

welche Gleichung zeigt, daß in der Tat die Evolutenpunkte auf der Kurve 1) liegen.

Die Evolute einer logarithmischen Spirale geht aus dieser durch eine Drehung um den Pol hervor und ist die Größe dieser Drehung durch den Winkel

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{lk}{k}$$

ausgedrückt. Dieser Winkel wird in dem Falle, wo die Spirale ihre Evolute ist, 2π oder allgemeiner $2q\pi$, daher wegen 2)

$$\omega = 2q\pi = (n+1)\pi,$$

also

$$n = 2q-1, \quad \text{d. h. } 1, 3, 5, \ldots$$

Auf diese Art erhält man als zulässige Werte von λ die Werte

$$\lambda = -\frac{2n+1}{2} \quad \text{für} \quad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

d. h.

$$\lambda = -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, \ldots$$

Bei der Erörterung der Frage, ob noch andere Kurven existieren, deren Krümmungsmittelpunkte auf ihr liegen, kommen auch die komplexen Wurzeln der transzendenten Gleichung 2) in Betracht.

Der Gleichung zur Bestimmung der Funktion Φ genügt nämlich auch die Summe von Einzellösungen, wobei noch jede mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert werden kann, wodurch sich noch andere Kurven ergeben, deren Krümmungshalbmesser der Gleichung 6), II genügt.

Es soll daher im folgenden die transzendente Gleichung zur Bestimmung von k in bezug auf ihre Wurzeln untersucht werden.

V.

In der Gleichung

$$e^{\lambda\pi k} = k \qquad 1)$$

ist

$$\lambda = \pm \frac{2n+1}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und mag bei der gegenwärtigen Untersuchung mit λ der absolute Betrag der bisherigen Größe λ bezeichnet werden, so daß man es anstatt mit der Gleichung 1) mit den beiden Gleichungen

$$e^{-\lambda\pi k} - k = 0, \qquad 2)$$

$$e^{\lambda\pi k} - k = 0 \qquad 3)$$

zu tun hat, deren erste zunächst betrachtet wird.

Setzt man

$$k = x + iy,$$

so findet man zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e^{-\lambda\pi x} \cos \lambda\pi y &= x \\ e^{-\lambda\pi x} \sin \lambda\pi y &= -y \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

welche ungeändert bleiben, wenn y mit $-y$ vertauscht wird.

Die komplexen Wurzeln kommen also paarweise konjugiert vor und alle werden geometrisch durch die Schnittpunkte der beiden Kurven 4) dargestellt.

Die Gleichungen 4) können auch durch die beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{(e^{-\lambda\pi x} - x)(e^{-\lambda\pi x} + x)} \\ x &= -\frac{y}{\operatorname{tg} \lambda\pi y} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

ersetzt werden.

Die der ersten Gleichung 5) entsprechende Kurve besteht aus einem links ins Unendliche verlaufenden Aste mit einem Scheitel rechts vom Ursprunge, dessen Abszisse der Gleichung

$$e^{-\lambda\pi x} - x = 0$$

genügt.

Dieser Ast schneidet die Y-Achse in zwei Punkten, für welche $y = \pm 1$ ist.

Die zweite Gleichung 5) stellt unendlich viele Äste dar, die innerhalb gewisser Parallelstreifen, deren Begrenzung der X-Achse parallel ist, asymptotisch verlaufen.

Trägt man nämlich auf der Y-Achse Punkte auf, deren Ordinaten sind:

$$y_1 = \frac{1}{2n+1} \quad y_2 = \frac{2}{n+1} \quad y_3 = \frac{3}{n+1} \cdots,$$

so schneiden diejenigen der zuletzt erwähnten Äste, welche oberhalb der X-Achse verlaufen, die Y-Achse in Punkten, deren Ordinaten sind:

$$y_1 \quad y_3 \quad y_5 \cdots y_{2n+1} = 1 \ldots$$

Zieht man durch die Punkte

$$y_2 \quad y_4 \quad y_6 \cdots$$

Parallele zur X-Achse, so verlaufen innerhalb des zweiten, dritten etc. der so gebildeten Flächenstreifen die betrachteten Äste nach beiden Seiten asymptotisch gegen ihre Begrenzung.

Ebenso verhält es sich bezüglich der symmetrisch zur X-Achse unterhalb derselben liegenden Flächenstreifen.

Für $y = 0$ nimmt x jeden beliebigen Wert an.

Der sehr kleinen Werten von y sich stetig anschließende Wert des x für $y = 0$, nämlich

$$x_0 = -\frac{y}{\operatorname{tg} \lambda\pi y}\Big|_0 = -\frac{1}{\lambda\pi},$$

liefert die Abszisse des Scheitels eines nach rechts ins Unendliche sich erstreckenden Astes, der symmetrisch in bezug auf die X-Achse innerhalb der beiden an die X-Achse oberhalb und unterhalb angrenzenden Flächenstreifen verläuft.

Auf diese Art ergeben sich außer dem Scheitel der ersten Kurve 5), welcher als Wurzelpunkt der einzigen reellen Wurzel der Gleichung 2) entspricht, noch unendlich viele Schnittpunkte der beiden Kurven 5) als Wurzelpunkte der komplexen Wurzeln.

Es ist aber zu bemerken, daß die Gleichung

$$e^{-\lambda\pi k} + k = 0 \tag{6}$$

ebenso behandelt, wie dies im vorhergehenden mit 2) geschehen ist, auf dieselben Gleichungen 5) führt.

Die Schnittpunkte der Kurven 5) verteilen sich daher als Wurzelpunkte auf die beiden Gleichungen 2) und 6).

Unter den komplexen Wurzeln derselben kommen auch die beiden

$$k = \pm i$$

vor, aber bei gegebenem λ kann immer nur eine der beiden diese Wurzeln besitzen, und zwar für $n = 1, 3, 5, \ldots$ nur die erste und für $n = 0, 2, 4, \ldots$ nur die zweite.

Es kann gezeigt werden, daß, wenn eine derselben diese Wurzeln besitzt, sie keine anderen komplexen Wurzeln mehr haben kann.

Es sei nämlich

$$e^{-\lambda\pi k} = k \qquad \lambda = \frac{2n+1}{2} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{2}$$

dann ist

$$e^{-\lambda\pi i} = i \tag{7}$$

und wenn

$$k = \alpha + i\beta \tag{8}$$

irgend eine komplexe Wurzel von 2) darstellt, für welche α und β von Null verschieden sind, so findet man durch Einsetzen dieses Ausdruckes von k in 2) wegen 7)

$$e^{-\alpha\lambda\pi} . i^{\beta} = \alpha + i\beta.$$

Da aber für

$$\lambda' = \frac{2n+1}{2} \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

$$i = e^{\lambda'\pi i}$$

ist, so müßte die Wurzel 8) von 2) der Gleichung genügen:

$$e^{-\alpha\lambda\pi} . e^{\beta\lambda'\pi i} = \alpha + i\beta,$$

aus welcher folgen würde

$$\left.\begin{aligned} e^{-\alpha\lambda\pi} \cos\beta\lambda'\pi &= \alpha \\ e^{-\alpha\lambda\pi} \sin\beta\lambda'\pi &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Wurzelpunkte, welche durch $k = \alpha + i\beta$ dargestellt werden, wären also die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= e^{-2\alpha\lambda\pi} \\ \operatorname{tg}\beta\lambda'\pi &= \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned} \tag{10}$$

Aber die Gleichungen 2) und 6) haben zusammen ein System von Wurzelpunkten, welches sich auf beide verteilt und durch die Schnittpunkte der Kurven 5), V dargestellt wird, oder was dasselbe ist, wenn die Wurzeln der eben bezeichneten Gleichungen in der Form $\alpha + i\beta$ aufgefaßt werden, so müssen $\alpha\beta$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= e^{-2\alpha\lambda\pi} \\ \operatorname{tg}\beta\lambda\pi &= \frac{-\beta}{\alpha} \end{aligned} \tag{11}$$

genügen.

Das Wertsystem der $\alpha\beta$ aus 10) ist aber verschieden von dem, welches die Gleichungen 11) liefern.

Es ergibt sich also der Widerspruch, daß eine Gleichung, nämlich 2), zwei verschiedene Systeme von Wurzelpunkten zulassen sollte.

Daher kann die Annahme, daß in dem Ausdrucke einer komplexen Wurzel der Gleichung 2) von der Form $\alpha + i\beta$ α und β beide von Null verschieden sein sollen, nicht aufrecht erhalten werden.

Es ist somit entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Dann löst sich aber in der Tat der frühere Widerspruch, indem beide Gleichungssysteme 10) und 11) im ersten Falle $\beta = \pm 1$, im zweiten die einzige reelle Wurzel liefern, welche die Gleichung 2) besitzt.

Die Gleichung 2) kann also außer $k = \pm i$ keine weitere komplexe Wurzel besitzen und die übrigen durch 5), V bestimmten komplexen Werte von k sind Wurzeln der Gleichung 6), welche keine reelle Wurzel besitzt.

VI.

Die Gleichung II, 6) hat die Eigenschaft, daß ihr auch die Summe einzelner Lösungen genügt.

Zieht man nun auch die komplexen Wurzeln der Gleichung

$$e^{\lambda\pi k} = k \qquad \lambda = \pm \frac{2n+1}{2} \tag{1}$$

in Betracht, so liefert ein Paar komplexer Wurzeln $\alpha \pm i\beta$, wenn zur Abkürzung $\operatorname{arctg} p = \varphi$ gesetzt wird, eine neue Lösung:

$$e^{\alpha\varphi} \cos(\beta\varphi + \gamma) = \Phi, \tag{2}$$

welche noch mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert werden kann.

Die Koordinaten der Kurve, welche diesem Krümmungshalbmesser entsprechen, findet man aus:

$$\begin{aligned} x &= \int \Phi \cos \varphi \, d\varphi \\ y &= \int \Phi \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Entscheidung der Frage, ob diese Kurve mit ihrer Evolute zusammenfällt, kommt darauf hinaus, zu zeigen, ob die Koordinaten xy in jene $\xi\eta$ des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes übergehen, wenn φ in $\varphi + \lambda\pi$ übergeht, und zwar für $n = 1, 3, 5, \ldots$.

Zur Ermittlung der Koordinaten $\xi\eta$ dienen die Gleichungen:

$$\xi = x - \frac{dy}{d\varphi}$$

$$\eta = y + \frac{dx}{d\varphi}$$

oder wegen 3)

$$\begin{aligned} \xi &= -\int \frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi \\ \eta &= \int \frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

d. h. wenn $\beta\varphi + \gamma = \psi$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \xi &= -\int e^{\alpha\varphi} (\alpha \cos \psi - \beta \sin \psi) \sin \varphi \, d\varphi \\ \eta &= \int e^{\alpha\varphi} (\alpha \cos \psi - \beta \sin \psi) \cos \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Ersetzt man jetzt in 3) φ durch $\varphi+\lambda\pi$ und berücksichtigt die Gleichungen

$$\begin{aligned} e^{\lambda\pi\alpha}\cos\lambda\pi\beta &= \alpha \\ e^{\lambda\pi\alpha}\sin\lambda\pi\beta &= \beta, \end{aligned} \tag{6}$$

so findet man für die Koordinaten xy die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\psi-\beta\sin\psi)\sin\varphi\,.\sin\lambda\pi d\varphi \\ y_0 &= \int e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\psi-\beta\sin\psi)\cos\varphi\,.\sin\lambda\pi d\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

Für das positive Zeichen von λ in 1), also für $\lambda=\frac{2n+1}{2}$ $n=1,3,\ldots$, wird $\sin\lambda\pi=-1$ und daher $x=-\xi$, $y_0=-\eta$, somit in diesem Falle eine Selbstevolute ausgeschlossen.

Für $\lambda=-\frac{2n+1}{2}$ hat aber 1) nur die komplexen Wurzeln $\pm i$ und außerdem eine reelle Wurzel. Die Gleichung zur Bestimmung von Φ gibt dem komplexen Paare entsprechend die Lösung

$$\Phi = Ce^{i\operatorname{arctg} p}+C_1e^{-i\operatorname{arctg} p},$$

welche an die Stelle von 2) tritt und beim Übergange zum reellen die Form annimmt

$$\Phi=\frac{c+c_1p}{\sqrt{1+p^2}},$$

von welcher früher gezeigt wurde, daß sie der Zykloide entspreche.

Die allgemeinste Lösung der Gleichung in Φ ist, soweit nur die komplexen Wurzeln berücksichtigt werden,

$$\Sigma c_j e^{\alpha_j\cdot\varphi}\cos(\beta_j\varphi+\gamma_j).$$

In dem Falle, wo die transzendente Gleichung zur Bestimmung von k eine reelle Wurzel hat, käme zu obiger Summe noch die Lösung hinzu, welche dieser reellen Wurzel entspricht.

Aber die Anwendung des früher erhaltenen Resultates bei Benützung nur eines Wurzelpaares auf die Glieder der letzten Summe zeigt wieder, daß eine Selbstevolute nicht möglich ist und somit nur dann vorkommen kann, wenn die der reellen Wurzel k entsprechende Einzelnlösung von Φ benützt wird, welche auftritt, wenn $\lambda = -\frac{n+1}{2}$ ist und, wie gezeigt wurde, auf die logarithmische Spirale führt.

Über die Verteilung der meteorologischen Elemente in der Umgebung der Barometerminima und -Maxima zu Kiew

von

Dr. Viktor Drapczyński in Buccari.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1904.)

Derartige Berechnungen wurden bereits für mehrere Orte durchgeführt, doch nur wenige für Orte, die sich auf ausgedehnten Kontinentalflächen befinden.

Hier wurde zum Gegenstande der Untersuchung Kiew in Rußland gewählt.

Material und Methode der Untersuchung.

Als Material wurden die von der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien herausgegebenen täglichen synoptischen Karten verwendet. Aus denselben suchte man nur jene Tage auf, an denen Kiew um 7^h a. m. im Gebiete eines Barometerminimums oder -Maximums lag. Die meteorologischen Daten für diese Tage wurden den »Observations faites à l'Observatoire Météorologique de l'Université de Kiew, publiées par P. Broounof et J. Kossonogoff« entnommen.

Die Berechnungen sind für die zehn aufeinanderfolgenden Jahre vom 1. Oktober 1892 bis 30. September 1902 durchgeführt worden, und zwar abgesondert für die kältere Jahreszeit (Oktober bis März), die in der Untersuchung als Winter bezeichnet wurde, und die wärmere Jahreszeit (April bis September), die die Bezeichnung Sommer führt.

Man nahm an, daß Kiew im Gebiete eines Minimums, beziehungsweise Maximums liege, wenn die Luftströmung

eine zyklonale, beziehungsweise antizyklonale war und Kiew nicht über 10 (Äquator-) Grade vom Zentrum eines Barometerminimums oder -Maximums entfernt war.

Bezeichnungen.

Das Gebiet des Barometerminimums und des -Maximums wurde eingeteilt in je ein kreisförmiges Zentrum vom Halbmesser von 4 Äquatorgraden (444 *km*), um welches eine ringförmige Zone von der Breite von 6 Äquatorgraden (666 *km*) gelegt ist. Das Zentrum wurde als I. Zone, die ringförmige Zone als II. Zone bezeichnet. Das Zentrum und die anliegende Zone wurden noch eingeteilt in acht gleiche Sektoren, die nach ihrer Lage zum Mittelpunkte der Area als N-Sektor, NE-Sektor u. s. w. bezeichnet sind.

Verteilung der Fälle.

Von den 3651 in Betracht kommenden Tagen wurden 1377 Tage (38%) in Rechnung gezogen. In 612 Tagen (17%) lag Kiew im Gebiete einer Zyklone, in 765 (21%) im Gebiete einer Antizyklone. Unberücksichtigt blieben 62% der Fälle.

I. Die Barometerminima.

Verteilung der Fälle im Barometerminimum.

Kiew im Sektor	Winter			Sommer			Jahr		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	5	13	18	12	18	30	17	31	48
NE ...	4	28	32	6	35	41	10	63	73
E ..	6	27	33	6	28	34	12	55	67
SE ..	9	65	**74**	11	39	50	20	104	**124**
S	10	47	57	17	38	**55**	27	85	112
SW ...	9	44	53	10	43	53	19	87	106
W	7	11	18	7	23	30	14	34	48
NW ..	5	7	12*	8	14	22*	13	21	34*
Summe	55	242	297	77	238	315	132	480	612

Im Winter sind die Lagen im SE-, S- und SW-Sektor über der mittleren Anzahl der Fälle. Am stärksten ist vertreten die SE-Lage, am schwächsten die NW-Lage.

Im Sommer steigt die Häufigkeitskurve von ihrem tiefsten Werte im NW-Sektor langsam zu ihrem höchsten Werte im S-Sektor auf, von wo sie dann rasch sinkt.

I. Temperaturabweichungen vom Mittel[1] im Barometerminimum in Celsiusgraden (7^h a.).

Winter (Mittel —0·42° C.), Sommer (Mittel 12·88° C.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	+1·98	—1·67	—0·66	**+3·59**	+0·51	**+1·74**
NE	+1·25	+0·72	+0·79	—1·63	—0·93	—1·03
E	—0·78*	—1·46*	—1·34*	+0·45	**+1·31**	+1·16
SE	+0·12	—0·12	—0·09	—0·63	+0·98	+0·63
S	—0·72	+0·71	+0·46	+0·74	—0·20	+0·09
SW	—1·84	+0·34	—0·02	—2·22*	—1·64*	—1·75*
W........	+0·26	—2·23	—1·26	+0·75	+1·37	+1·27
NW	**+3·62**	**+2·55**	**+3·00**	—0·02	—2·23	—1·42
Mittel	+0·14	—0·03	0·00	+0·34	—0·11	0·00

Die Temperatur ist im Winter ziemlich unregelmäßig verteilt. Das Maximum der Temperatur liegt im NW-Sektor, das Minimum im E-Sektor.

Auch im Sommer ist die Temperatur nicht ganz regelmäßig verteilt, doch läßt sich ein Temperaturüberschuß auf der Vorderseite der Zyklone, in den Sektoren N und E bis S, mit

[1] Die Mittelwerte, denen die Temperaturabweichungen zu Grunde gelegt worden sind, sind arithmetische Mittel sämtlicher Temperaturangaben im Winter, beziehungsweise Sommer, wenn Kiew im Gebiete einer Zyklone lag. Gleichfalls wurden die Mittelwerte in der Antizyklone erhalten.

der maximalen Temperatur im N-Sektor erkennen. Das Minimum der Temperatur fällt auf den SW-Sektor.

Im Sommer ist das Zentrum der Zyklone um nahe 0·5° C. wärmer als die angrenzende ringförmige Zone, im Winter kaum um 0·2° C.

II. Die Änderung der Temperatur in den letzten 24 Stunden im Barometerminimum in Celsiusgraden.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	+0·48	+1·58	+1·28	+0·68	+0·24	+0·41
NE	+0·73	+1·03	+0·99	**+2·00**	+0·58	+0·79
E	−0·56	**+1·84**	**+1·40**	+0·60	**+1·12**	**+1·03**
SE	**+2·70**	+0·78	+1·01	−0·15	+0·70	+0·51
S	+0·77	+1·06	+1·01	+0·34	+0·45	+0·41
SW	−1·24	−0·02	−0·27	−0·94*	−1·32*	−1·26*
W	−0·70	−1·11	−0·94	−0·49	−0·42	−0·43
NW	−2·34*	−3·49*	−3·01*	+0·29	+0·55	+0·45
Mittel	+0·11	+0·66	+0·56	+0·23	+0·17	+0·19

Im Winter steigt die Temperatur von einem Tage zum anderen auf der Vorderseite der Zyklone, in den Sektoren N bis S, während sie auf der Rückseite sinkt. Am stärksten erfolgt das Steigen im E-Sektor, von wo es schwächer wird und langsam in ein Sinken übergeht, welches am stärksten im NW-Sektor auftritt.

Im Sommer sinkt die Temperatur von einem Tage zum anderen bloß im SW- und W-Sektor, stärker im SW-Sektor, während sie in den übrigen Sektoren steigt, am stärksten im E-Sektor.

Das Zentrum der Zyklone erwärmt sich im Winter schwächer als die anliegende ringförmige Zone, im Sommer erwärmt sich die ganze Area gleich stark, doch nicht in dem Maße, wie sich die Gesamtarea im Winter erwärmt.

III. Relative Feuchtigkeit im Barometerminimum in Prozenten (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	96	91	93	84	**88**	86
NE	**97**	92	93	81	76	77
E	92	**94**	**94**	76*	74*	75*
SE	92	92	92	85	79	81
S	93	89	90	87	82	83
SW	89*	85*	86*	86	84	84
W	92	89	90	89	86	87
NW	93	87	89	**94**	82	**87**
Mittel	92·5	89·9	90·4	85·7	80·9	82·1

Die relative Feuchtigkeit ändert sich von einem Sektor zum anderen ganz regelmäßig, doch sind die Änderungen gering. Höher ist sie zu beiden Jahreszeiten im Zentrum als in der ringförmigen Zone.

Im Winter ist die relative Feuchtigkeit über dem Mittel auf der Vorderseite der Zyklone, in den Sektoren N bis SE, mit dem Maximum im E-Sektor, während das Minimum im SW-Sektor liegt. Die Differenz Maximum weniger Minimum beträgt nur 8%.

Im Sommer ist die relative Feuchtigkeit über dem Mittel auf der Rückseite, in den Sektoren S bis N, mit dem Maximum im NW-Sektor und Minimum im E-Sektor. Die Amplitude ist im Sommer etwas größer und beträgt 12%, doch ist das Mittel der Gesamtarea jetzt geringer als im Winter.

IV. Bewölkung im Barometerminimum (Skala 0 bis 10) (7h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	10·0	9·7	9·8	7·9	8·5	8·3
NE	10·0	9·6	9·7	7·0	6·9	6·9
E	9·5	9·7	9·6	5·9*	5·8	5·8*
SE	9·1	8·7	8·8	7·8	5·5*	6·0
S	8·7	8·1	8·2	9·1	7·0	7·6
SW.......	9·4	7·5*	7·8*	9·0	7·1	7·5
W........	7·7*	8·4	8·1	8·9	7·8	8·0
NW	**10·0**	**10·0**	**10·0**	**9·4**	**9·0**	**9·1**
Mittel.....	9·2	8·6	8·7	8·3	6·9	7·3

Auch die Bewölkung nimmt einen ziemlich regelmäßigen Verlauf ein.

Im Winter steigt sie von ihrem tiefsten Werte im SW-Sektor zu ihrem höchsten im NW-Sektor rasch auf, von wo sie sich dann langsam verringert. Unter dem Mittel ist sie bloß in den Sektoren S bis W.

Im Sommer ist die Bewölkung unter dem Mittel in den Sektoren NE bis SE. Von ihrem geringsten Werte im E-Sektor steigt sie regelmäßig zum höchsten im NW-Sektor, um dann etwas rascher zu sinken.

Die Differenz Maximum weniger Minimum ist im Sommer größer als im Winter. Das Mittel der Gesamtarea ist aber im Winter höher als im Sommer. Zu beiden Jahreszeiten hat das Zentrum größere Bewölkung als die anliegende Zone.

V. Die Niederschlagswahrscheinlichkeit für einen Tag im Barometerminimum in Prozenten.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	80	85	83	83	**83**	**83**
NE	75*	79	78	67	54	56
E	83	81	82	67*	43*	47*
SE	89	72*	74*	82	56	62
S	90	73	75	76	76	76
SW	89	70	74	80	79	79
W	**100**	**100**	**100**	71	83	80
NW	100	86	92	**88**	64	73
Mittel	89	76	79	78	67	70

Im Winter ist die Niederschlagswahrscheinlichkeit größer in der nördlichen Hälfte der Zyklone. Ihren höchsten Wert erreicht sie im W-Sektor, von wo sie sich langsam verringert, um im SE-Sektor das Minimum zu erreichen. Unter dem Mittel ist sie in den Sektoren SE bis SW.

Im Sommer ist die Niederschlagswahrscheinlichkeit unter dem Mittel auf der Vorderseite der Zyklone, in den Sektoren NE bis SE, mit dem Minimum im E-Sektor. Auf der Rückseite ist sie höher und erreicht ihr Maximum im N-Sektor.

Zu beiden Jahreszeiten ist sie höher im Zentrum als in der angrenzenden Zone. Das Mittel der Gesamtarea ist im Winter höher als im Sommer.

VI. Mittlere Niederschlagsmenge pro Niederschlagstag im Barometerminimum in Millimetern.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	10·8	5·2	6·7	4·2	8·1	5·4
NE	1·5	4·2	3·9	1·7	4·2	3·9
E	4·1	2·9	2·5	4·1	2·7	3·6
SE	3·3	2·1	2·3	3·7*	1·0*	1·6*
S	7·7	1·2	2·8	3·7	2·1	2·6
SW	3·5*	0·9*	1·4*	5·5	5·2	5·3
W........	5·[illegible]	4·0	4·7	9·1	4·6	5·6
NW	8·[illegible]	7·9	8·4	14·7	7·0	10·4
Mittel	5·7	2·6	3·2	6·0	4·2	4·7

Die mittlere Niederschlagsmenge ist im Winter unter dem Mittel in den Sektoren E bis SW. Im SW-Sektor liegt das Minimum. Von hier steigt sie rasch und erreicht im NW-Sektor das Maximum. Das Mittel des Zentrums ist viel höher als das der anliegenden Zone.

Auch im Sommer hat das Zentrum größere mittlere Niederschlagsmenge als die angrenzende Zone, doch ist die Differenz zwischen diesen zwei Mittelwerten jetzt geringer. Unter dem Mittel hält sich die mittlere Niederschlagsmenge in den Sektoren NE bis S. Das Minimum liegt im SE-Sektor, das Maximum im NW-Sektor. Das Mittel der Gesamtarea ist im Sommer höher als im Winter.

VII. Die Änderung des Luftdruckes in den letzten zehn Stunden im Barometerminimum in Millimetern.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	—2·78	—1·26	—1·68	—0·77	—0·71	—0·73
NE	—1·13	—1·89	—1·80	—2·98	—0·33	—0·72
E	—0·97	—1·31	—1·25	—1·37	—0·63	—0·76
SE	—3·91*	—1·74	—2·00*	—2·97*	—0·74*	—1·23*
S	—0·74	—2·09*	—1·84	—0·58	—0·69	—0·65
SW	+0·32	—0·40	—0·28	—0·60	+0·29	+0·12
W	—0·73	+1·59	+0·71	—1·87	—0·35	—0·70
NW	+0·48	+0·13	+0·29	—1·44	+0·06	—0·48
Mittel	—1·20	—1·30	—1·28	—1·41	—0·39	—0·63

Im Winter steigt der Luftdruck bloß im NW-Sektor des Zentrums, in der ringförmigen Zone und der Gesamtarea im W- und NW-Sektor. In den übrigen Sektoren der Gesamtarea sinkt er, am stärksten im SE-Sektor. Das Sinken ist etwas stärker im äußeren Gebiete als im Zentrum.

Im Sommer steigt der Luftdruck im Zentrum überhaupt nicht, in der anliegenden Zone nur im SW-Sektor, was auch ein Ansteigen im SW-Sektor der Gesamtarea ergibt. Im Zentrum sinkt jetzt der Luftdruck stärker als in der Zone, doch das Mittel der Gesamtarea ist jetzt um die Hälfte kleiner als im Winter.

VIII. Die Windgeschwindigkeiten im Barometerminimum in Metern pro Sekunde (7h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	5·6	5·0	5·2	3·4*	4·9	4·3
NE	5·0	5·9	5·7	5·7	5·1	5·2
E	4·2*	5·7	5·5	5·3	4·3	4·5
SE	5·0	4·2*	4·3*	5·6	3·5*	4·0*
S	6·0	6·3	6·2	5·1	5·7	5·5
SW........	6·3	5·9	6·0	4·2	5·8	5·5
W........	5·6	5·6	5·6	3·4	4·5	4·3
NW	6·0	5·9	6·0	3·9	5·3	4·8
Mittel	5·53	5·44	5·46	4·56	4·91	4·83

Die Unterschiede zwischen den Windgeschwindigkeiten zu beiden Jahreszeiten sind nicht groß.

Im Winter treten größere Windgeschwindigkeiten auf der Rückseite der Depression auf, da sich hier die Isobaren mehr aneinander drängen. Größte Geschwindigkeit hat der S-Sektor, geringste der SE-Sektor. Fast gleich groß ist die Geschwindigkeit im Zentrum wie in der anliegenden Zone.

Im Sommer ist die Verteilung der Windgeschwindigkeiten etwas unregelmäßiger. Das Maximum liegt im SW-Sektor, das Minimum im SE-Sektor. Ein sekundäres Maximum liegt im NE-Sektor, ein sekundäres Minimum im N-Sektor. Die mittlere Windgeschwindigkeit ist jetzt in der Zone etwas höher als im Zentrum. Das Mittel der Gesamtarea ist im Sommer geringer als im Winter.

IX. Mittlere Windrichtungen[1] im Barometerminimum (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer			Jahr		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	N 45° E	N 73° E	N 58° E	N 30° E	N 52° E	N 43° E	N 36° E	N 54° E	N 49° E
NE	N 67 E	S 70 E	S 69 E	S 59 E	S 87 E	S 82 E	S 72 E	S 77 E	S 76 E
E	S 56 E	S 50 E	S 51 E	S 37 E	S 44 E	S 42 E	S 44 E	S 47 E	S 46 E
SE	S 6 E	S 15 W	S 12 W	S 19 W	S 14 W	S 15 W	S 5 W	S 15 W	S 13 W
S	S 51 W	S 73 W	S 69 W	S 58 W	S 76 W	S 70 W	S 54 W	S 74 W	S 70 W
SW	N 68 W	N 88 W	N 85 W	N 61 W	N 69 W	N 68 W	N 65 W	N 79 W	N 76 W
W	N 50 W	N 63 W	N 57 W	N 52 W	N 62 W	N 60 W	N 51 W	N 62 W	N 59 W
NW	N 4 E	N 32 E	N 20 E	N 38 E	N 3 E	N 14 E	N 21 E	N 14 E	N 17 E

[1] Zur Berechnung der mittleren Windrichtung wurde die Formel

$$\tang \varphi = \frac{n-s}{e-w}$$

verwendet, wo n, e, s, w die Komponenten bedeuten, die aus der Formel $n = N + NNE \cos 22^1/_2 + NE \cos 45 + ENE \cos 67^1/_2 + NNW \cos 22^1/_2 + NW \cos 45 + WNW \cos 67^1/_2$ u. s. w. berechnet wurden. Für N, NNE, NE u. s. w. wurde die Anzahl der Winde eingesetzt.

In der Fig. 1 sind die Windrichtungen der I. und II. Zone im Barometerminimum um 7^h a. für das Jahr dargestellt.

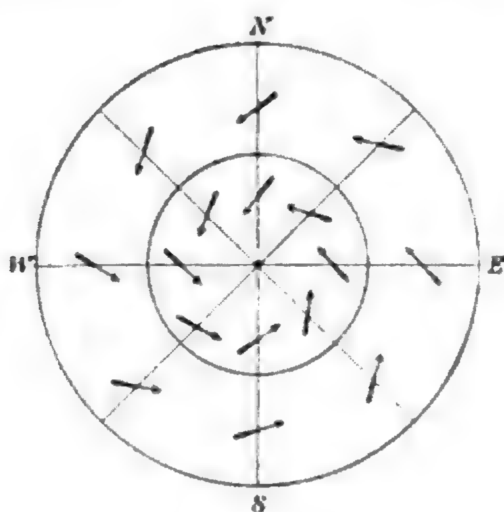


Fig. 1.

Windrichtungen um 7^h a. in der Zyklone.

X. Die Ablenkung der Luftströmung von der Richtung des Gradienten im Barometerminimum (7^h a.).

Sektor	Gesamtarea		
	Winter	Sommer	Jahr
N	58°	43°	49°
NE	66	53	59
E	39	48	44
SE	57	60	58
S	69	70	70
SW........	50	67	59
W.........	33 *	30 *	31 *
NW	65	59	62
Mittel	54	54	54

Die Ablenkungswinkel sind nicht ganz regelmäßig verteilt. Größer sind sie in den Sektoren SE bis SW, während sie in den übrigen Sektoren unter dem Mittel sind. Der größte Ablenkungswinkel liegt im S-Sektor, der kleinste im W-Sektor.

Der mittlere Ablenkungswinkel ist zu beiden Jahreszeiten gleich groß und beträgt 54°.

Im Zentrum der Gesamtarea beträgt er für das ganze Jahr 53°, in der anliegenden Zone 54°.

XI. Mittlere Windrichtungen im Barometerminimum[1] (1^h p.).

Sektor	Jahr				
	Untere Windrichtung		Cumuluswolken		Cirrus-wolken[2]
	I. Zone	II. Zone	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	N 28° E	N 51° E	N 57° E	N 46° E	S 53° E
NE	S 39 E	S 73 E	S 45 E	S 60 E	S 33 E
E	S 24 E	S 46 E	S 1 E	S 4 E	S 8 W
SE	S 69 W	S 30 W	S 55 W	S 58 W	S 44 W
S	S 85 W	S 85 W	N 86 W	N 89 W	S 85 W
SW	N 50 W	N 72 W	N 51 W	N 59 W	N 45 W
W	N 40 W	N 56 W	N 56 W	N 43 W	N 11 W
NW	N 2 E	N 1 E	N 43 E	N 15 E	S 62 E

In der Fig. 2 sind die Windrichtungen in der Zyklone um 1^h p. dargestellt. Die Fig. 3 stellt den Zug der unteren Wolken (Cumulus und Stratus) um 1^h p. dar. Die Fig. 4 enthält den

[1] In den »Observations faites à l'Observatoire à Kiew« ist der Zug der Wolken nur für 1^h p. angegeben. Um diese Angaben annähernd zu verwerten, wurden die Berechnungen auch für 1^h p. durchgeführt und angenommen, daß die Lage der Barometerminima, beziehungsweise -Maxima von 7^h a. bis 1^h p. unverändert blieb.

[2] Die Anzahl der Fälle der beobachteten unteren Wolken ist ziemlich groß, daß man die Mittel als ziemlich richtig annehmen kann. Die Anzahl der Beobachtungen der Cirruswolken ist geringer. Die folgende Tabelle enthält die Anzahl derselben:

Sektor der Zyklone	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Anzahl der Beobachtungen der Cirruswolke	6	6	9	9	8	4	2	4

Zug der oberen Wolken (Cirrus und Cirro-stratus) zu derselben Tageszeit.

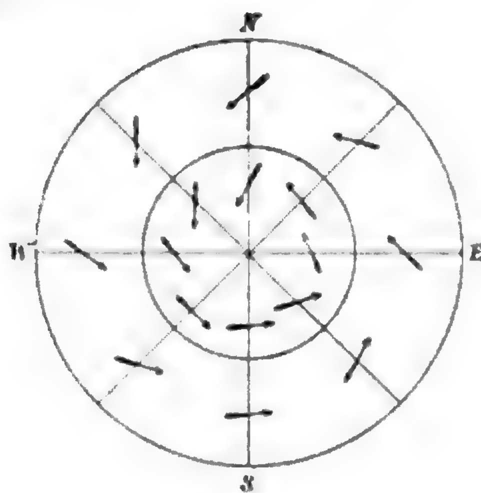


Fig. 2.

Windrichtungen um 1h p. in der Zyklone.

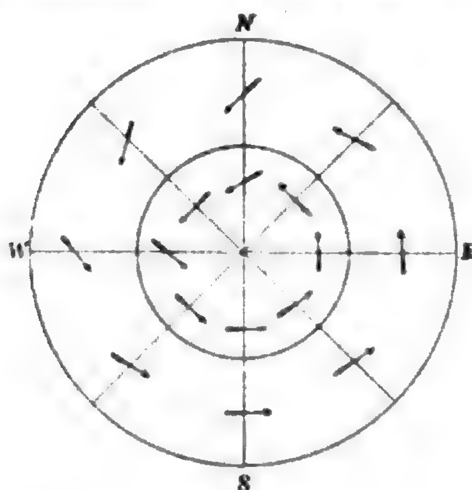


Fig. 3.

Untere Wolken um 1h p. in der Zyklone.

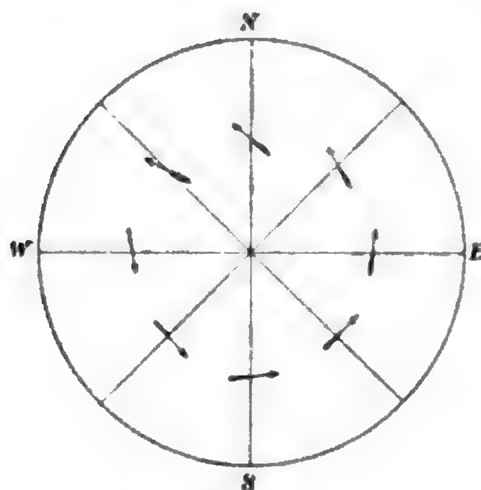


Fig. 4.

Cirruswolken um 1h p. in der Zyklone.

II. Die Barometermaxima.

Verteilung der Fälle im Barometermaximum.

Sektor	Winter			Sommer			Jahr		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	26	31	57	10	18	28	36	49	85
NE ...	25	86	**111**	15	30	45	40	116	**156**
E	16	46	62	11	38	**49**	27	84	111
SE ...	12	13	25*	11	14	25	23	27	50*
S	12	23	35	6	13	19*	18	36	54
SW ...	23	78	**101**	10	33	43	33	111	**144**
W	19	52	71	12	36	**48**	31	88	119
NW ...	13	11	24*	11	11	22*	24	22	46*
Summe	146	340	486	86	193	279	232	533	765

Im Winter ist die NE- und SW-Lage besonders vertreten, weniger die SE- und NW-Lage.

Im Sommer ist die E- und W-Lage mehr vertreten als die S- und NW-Lage.

Die Extreme des Jahres fallen auf dieselben Sektoren wie im Winter.

XII. Temperaturabweichungen vom Mittel im Barometermaximum in Celsiusgraden (7^h a.).

Winter (Mittel —4·56° C.), Sommer (Mittel 9·73° C.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	—0·57	+2·95	+2·34	—1·81	—0·62	—1·05
NE	—0·92	+2·50	+0·96	+1·32	—1·53*	—0·58
E	—2·74	+0·13	—0·64	+**1·14**	+0·55	+0·68
SE	—4·40	—2·75*	—3·54*	+0·13	+1·62	+0·96
S	—5·61*	+0·39	—1·67	+0·59	**+5·04**	**+3·63**
SW	+0·20	—2·47	—1·86	—0·56	—0·76	—0·72
W	—2·41	+2·65	+1·29	—4·75*	—0·04	—1·22*
NW	**+4·52**	**+3·64**	**+4·08**	—0·04	+1·63	+0·79
Mittel	—1·26	+0·54	0·00	—0·52	+0·22	0·00

Im Winter ist die Temperatur regelmäßig verteilt. Unter dem Mittel ist sie in den Sektoren E bis SW mit dem Minimum der Temperatur im SE-Sektor, während das Maximum im NW-Sektor liegt.

Im Sommer ist die Temperatur etwas unregelmäßiger. Über dem Mittel ist sie in den Sektoren E bis S und im NW-Sektor. Das Maximum liegt im S-Sektor, das Minimum im W-Sektor.

Der Kern des Barometermaximums ist im Winter um 1·8° C. kühler als die anliegende ringförmige Zone, im Sommer nur um 0·7° C.

XIII. Die Änderung der Temperatur in den letzten 24 Stunden im Barometermaximum in Celsiusgraden.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	—1·80	—0·31	—0·99	+1·23	+0·34	+0·66
NE	—0·32	+0·43	+0·26	+0·47	—0·87	—0·43
E	—2·29*	—0·85	—1·22	—2·16*	—0·06	—0·53
SE	—0·78	—1·78*	—1·30	—0·70	—0·96*	—0·84*
S	—1·89	—1·30	—1·50*	—0·63	—0·95	—0·85
SW	—0·25	—1·28	—1·05	+0·34	—0·28	—0·14
W	—1·13	+0·52	+0·08	+0·75	+0·99	+0·93
NW	—1·74	+1·29	—0·35	+0·79	+1·55	+1·17
Mittel	—1·18	—0·36	—0·61	+0·06	—0·02	0·00

Im Winter steigt die Temperatur von einem Tage zum anderen nur im W- und NE-Sektor, im letzteren stärker. In den übrigen Sektoren sinkt sie, besonders stark im S-Sektor. Der Kern erkühlt mehr als die anliegende Zone, die Gesamtarea aber um 0·6° C.

Im Sommer steigt die Temperatur in den Sektoren W bis N, am stärksten im NW-Sektor. Das Sinken ist im

SE-Sektor am stärksten. Während die Temperatur im Sommer im Zentrum etwas steigt, in der anliegenden Zone etwas sinkt, ergibt sich für die Gesamtarea des Barometermaximums im Sommer weder ein Steigen noch ein Sinken der Temperatur von einem Tage zum anderen.

XIV. Relative Feuchtigkeit im Barometermaximum in Prozenten (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	88	87	88	**84**	75	78
NE	**84***	87*	**86***	75	**82**	**80**
E	87	92	91	80	79	79
SE	89	86	88	77	76	76
S	88	93	91	73	75	74
SW	85	87	87	69*	76	73
W	90	92	92	76	70*	72*
NW	**95**	**96**	**95**	74	74	74
Mittel	87·7	89·1	88·7	76·1	76·2	76·2

Ein regelmäßiger Verlauf der relativen Feuchtigkeit ist im Winter schwer zu erkennen, wozu auch etwas die geringe Schwankung beiträgt. Die Differenz Maximum weniger Minimum beträgt nur 9%. Das Maximum liegt im NW-Sektor, das Minimum im NE-Sektor.

Im Sommer ist der Verlauf mehr regelmäßig. Von ihrem höchsten Werte im NE-Sektor sinkt die relative Feuchtigkeit langsam zu ihrem tiefsten Werte im W-Sektor und von da steigt sie etwas rascher auf.

Das Mittel der Gesamtarea ist im Winter höher als im Sommer.

XV. Bewölkung im Barometermaximum (Skala 0 bis 10) (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	3·4*	5·3*	4·4*	1·2*	2·5*	2·0*
NE	4·8	7·2	6·6	1·9	4·1	3·4
E	4·5	8·3	7·3	**4·4**	4·9	4·8
SE	4·8	**9·0**	7·0	1·5	3·6	2·7
S	5·3	8·9	7·7	1·7	3·2	2·7
SW	6·0	7·1	6·9	2·1	**6·2**	**5·3**
W	**6·3**	8·5	**8·0**	1·0	3·9	3·2
NW	6·0	7·7	6·8	2·0	4·8	3·4
Mittel	5·0	7·5	6·8	2·0	4·4	3·6

Zu beiden Jahreszeiten ist die Bewölkung geringer im Kerne der Antizyklone als der angrenzenden Zone, doch das Mittel der Gesamtarea ist im Winter fast zweimal so hoch wie im Sommer.

Im Winter liegt das Maximum im W-Sektor, im Sommer im SW-Sektor, während die Minima zu beiden Jahreszeiten auf den N-Sektor fallen.

XVI. Die Niederschlagswahrscheinlichkeit für einen Tag im Barometermaximum in Prozenten.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	19	23*	21	—	17	11
NE	24	40	36	**27**	40	**36**
E	**62**	**67**	**66**	9	29	24
SE	25	54	40	9	**43**	28
S	25	65	51	17	15	16
SW	9	37	29	10	27	23
W	26	33	31	—*	8*	6*
NW	8*	27	17*	9	18	14
Mittel	24	41	36	10	25	20

Die Niederschlagswahrscheinlichkeit steigt im Winter von ihrem niedrigsten Werte im NW-Sektor rasch zu ihrem höchsten Werte im E-Sektor auf, von wo sie dann langsamer abnimmt.

Im Sommer sinkt sie von ihrem maximalen Werte im NE-Sektor langsam zum Minimum im W-Sektor und steigt dann rascher zum Maximum auf.

Zu beiden Jahreszeiten ist sie geringer im Kerne als der ringförmigen Zone. Das Mittel der Gesamtarea ist aber im Winter höher als im Sommer.

XVII. Mittlere Niederschlagsmenge pro Niederschlagstag im Barometermaximum in Millimetern.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	0·2	1·2	0·8	—	1·1	1·1
NE	0·5	1·1	1·0	1·5	1·8	1·7
E	1·3	2·2	2·0	**2·9**	2·7	2·7
SE	**4·9**	2·3	3·1	0·7	**3·5**	**3·1**
S	1·2	**4·6**	**4·0**	2·4	2·4	2·4
SW	0·2	1·7	1·6	1·1	1·8	1·7
W...... ..	0·3*	1·3	1·1	—*	0·7*	0·7*
NW	0·4	0·8*	0·7*	0·8	1·1	1·0
Mittel	1·1	1·9	1·7	1·5	2·1	2·0

Im Winter erreicht die mittlere Niederschlagsmenge ihr Maximum im S-Sektor, sinkt nun rasch zu ihrem Minimum im NW-Sektor, von wo sie dann langsam ansteigt. Über dem Mittel hält sie sich in den Sektoren E bis S.

Auch im Sommer ist die mittlere Niederschlagsmenge über dem Mittel in den Sektoren E bis S, doch das Maximum liegt im SE-Sektor, das Minimum im W-Sektor.

Zu beiden Jahreszeiten ist das Mittel des Kernes niedriger als das der ringförmigen Zone. Das Mittel der Gesamtarea ist aber im Sommer etwas höher als im Winter.

XVIII. Die Änderung des Luftdruckes in den letzten zehn Stunden im Barometermaximum in Millimetern.

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	+0·62	—0·14	+0·20	+0·30	+0·81	+0·67
NE	+0·71	—0·42	—0·16	+0·67	+1·02	+0·90
E	**+2·14**	+1·98	**+2·02**	+1·52	+0·52	+0·74
SE	+1·08	**+2·72**	+1·93	**+2·27**	+0·75	**+1·42**
S	+1·83	—0·61	+0·23	+1·53	**+1·32**	+1·39
SW	—0·21	—0·30	—0·28	+0·94	+0·24	+0·40
W........	—0·21*	—0·87	—0·70*	+0·55	+0·23	+0·31
NW	—0·04	—0·92*	—0·48	—0·11*	—0·15*	—0·13*
Mittel	+0·64	—0·02	+0·18	+0·92	+0·56	+0·67

Im Winter steigt der Luftdruck auf der Vorderseite der Antizyklone, am stärksten im E-Sektor. Das Sinken ist am stärksten im W-Sektor. Im Kerne steigt der Luftdruck um rund 0·6 *mm*, in der anliegenden Zone bleibt er soviel wie unverändert.

Im Sommer ist der Luftdruck bis auf den NW-Sektor im Steigen begriffen. Am raschesten steigt er im SE-Sektor. Im Kerne erfolgt das Steigen stärker als in der anliegenden Zone.

Das mittlere Ansteigen in der Gesamtarea ist höher im Sommer als im Winter.

XIX. Die Windgeschwindigkeiten im Barometermaximum in Metern pro Sekunde (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer		
	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area	I. Zone	II. Zone	Gesamt-area
N	3·3	4·0	3·7	2·3*	3·7	3·2*
NE	3·6	4·5	4·3	3·3	4·0	3·8
E	2·9	4·2	3·9	2·6	3·8	3·5
SE	**3·8**	**5·1**	**4·4**	2·5	4·0	3·3
S	3·0	4·2	3·8	3·2	3·3	3·3
SW	3·6	4·3	4·2	2·9	**4·6**	**4·2**
W........	3·4	4·3	4·0	**3·3**	3·8	3·6
NW	2·7*	3·8*	3·2*	3·1	3·5*	3·3
Mittel	3·36	4·31	4·02	2·84	3·92	3·61

Ein regelmäßiger Ablauf der Windgeschwindigkeiten ist im Barometermaximum nicht zu erkennen.

Im Winter liegt das Maximum im SE-Sektor, Minimum im NW-Sektor. Im Sommer Maximum im SW-Sektor, Minimum im N-Sektor.

Zu beiden Jahreszeiten hat die ringförmige Zone größere Windgeschwindigkeit als das Zentrum. Das Mittel der Gesamtarea ist im Winter etwas höher als im Sommer.

XX. Mittlere Windrichtungen im Barometermaximum (7^h a.).

Sektor	Winter			Sommer			Jahr		
	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	S 26° W	S 40° W	S 34° W	S 45° W	S 53° W	S 50° W	S 34° W	S 43 W	S 39° W
NE	N 86 W	N 88 W	N 87 W	N 76 W	N 83 W	N 81 W	N 83 W	N 86 W	N 84 W
E	N 15 W	N 47 W	N 39 W	N 36 W	N 38 W	N 37 W	N 24 W	N 43 W	N 38 W
SE	N 10 W	N 8 E	N 1 W	N 25 W	N 32 E	N 12 E	N 17 W	N 20 E	N 4 E
S	N 43 E	N 42 E	N 42 E	N 49 E	N 56 E	N 53 E	N 45 E	N 44 E	N 45 E
SW	S 69 E	S 88 E	S 84 E	S 57 E	S 81 E	S 76 E	S 65 E	S 86 E	S 82 E
W	S 58 E	S 45 E	S 49 E	S 41 E	S 54 E	S 51 E	S 47 E	S 49 E	S 49 E
NW	S 33 E	S 4 E	S 15 E	S 13 W	S 7 E	S 4 W	S 10 E	S 1 E	S 5 E

In der Fig. 5 sind die Windrichtungen der I. und II. Zone im Barometermaximum um 7^h a. für das Jahr dargestellt.

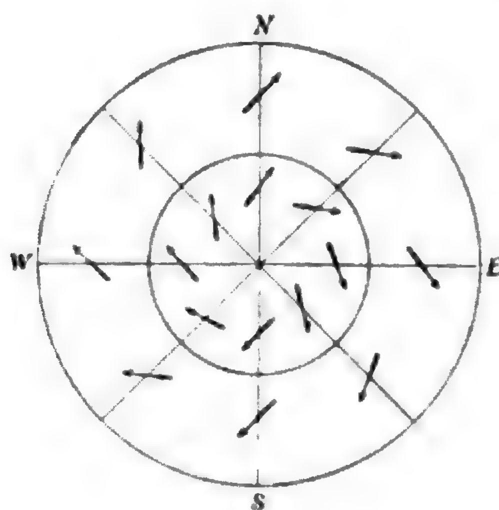


Fig. 5.

Windrichtungen um 7^h a. in der Antizyklone.

XXI. Die Ablenkung der Luftströmung von der Richtung des Gradienten im Barometermaximum (7^h a.).

Sektor	Gesamtarea		
	Winter	Sommer	Jahr
N	34°	50°	39°
NE	48	54	51
E	**51**	53	**52**
SE	44	**57**	49
S	42	53	45
SW	51	59	53
W	41	39 *	41
NW	30 *	49	40 *
Mittel	43	52	46

Unter dem Mittel sind die Ablenkungswinkel in den Sektoren W bis N, während sie auf der Vorderseite der Antizyklone höhere Werte haben. Das Maximum im Jahresmittel liegt im E-Sektor, das Minimum im NW-Sektor.

Im Sommer ist der mittlere Ablenkungswinkel größer als im Winter.

XXII. Mittlere Windrichtungen im Barometermaximum (1^h p.).

Sektor	Jahr				
	Untere Windrichtung		Cumuluswolken		Cirruswolken [1]
	I. Zone	II. Zone	I. Zone	II. Zone	Gesamtarea
N	S 35° W	S 39° W	N 73° W	N 89° W	S 73° W
NE	S 82 W	N 84 W	N 69 W	N 58 W	N 50 W
E	N 35 W	N 39 W	N 24 W	N 22 W	N 52 W
SE	N 2 W	N 20 E	N 3 W	N 18 E	N 50 W
S	N 54 E	N 42 E	S 67 E	N 87 E	S 45 E
SW	S 64 E	S 87 E	S 22 E	S 67 E	S 55 E
W	S 46 E	S 45 E	S 34 E	S 15 E	S 4 E
NW	S 19 W	S 11 W	S 55 W	S 13 W	N 80 W

In den Figuren 6 bis 8 sind diese Richtungen der Luftströmung um 1^h p. im Barometermaximum dargestellt.

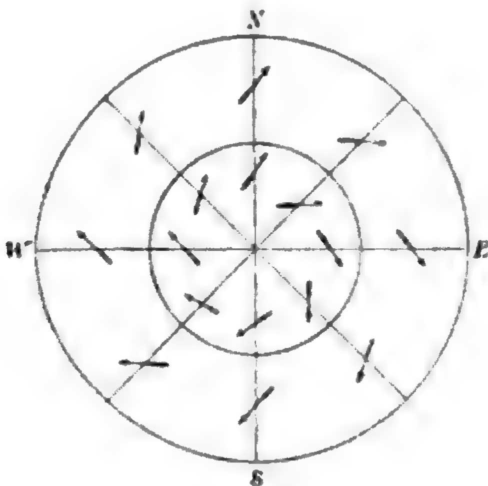


Fig. 6.

Windrichtungen um 1^h p. in der Antizyklone.

[1] Sektor der Antizyklone . . N NE E SE S SW W NW
Anzahl der Beobachtungen der Cirruswolken 13 11 9 5 1 5 10 5

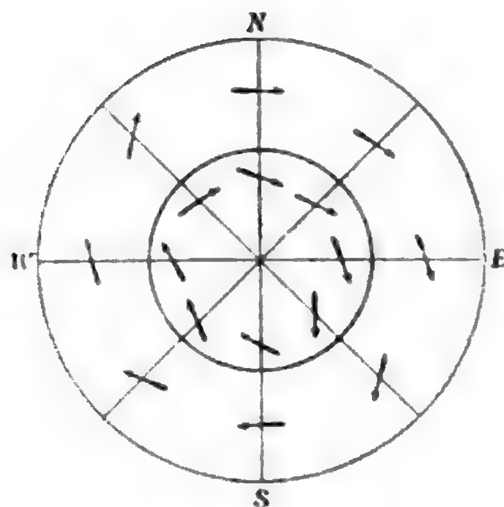


Fig. 7.

Untere Wolken um 1^h p. in der Antizyklone.

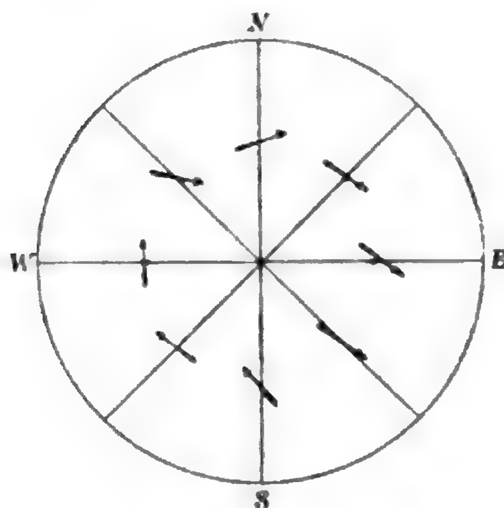


Fig. 8.

Cirruswolken um 1^h p. in der Antizyklone.

Ergebnisse.

I. Lufttemperatur.

Zu beiden Jahreszeiten nimmt die Lufttemperatur mit zunehmendem Luftdruck ab, infolgedessen ist auch die Temperatur des Barometermaximums tiefer als die des -Minimums.

Die Zyklone zeigt einen Temperaturüberschuß im Sommer auf der Vorderseite, die Antizyklone zu beiden Jahreszeiten im I. Quadranten.[1]

II. Relative Feuchtigkeit.

Die relative Feuchtigkeit nimmt mit zunehmendem Luftdruck ab, doch ist die Schwankung gering.

In der Zyklone ist die relative Feuchtigkeit im Winter auf der Vorderseite höher, im Sommer auf der Rückseite.

In der Antizyklone ist das entgegengesetzte der Fall.

Sowohl in der Zyklone als auch in der Antizyklone ist sie im Winter höher als im Sommer.

III. Bewölkung.

Auch die Bewölkung nimmt mit zunehmendem Luftdruck ab.

In der Zyklone ist sie geringer im Winter im II. Quadranten, im Sommer auf der Vorderseite.

In der Antizyklone ist sie im Winter auf der Nordseite gering, im Sommer ist sie etwas unregelmäßig.

In der Zyklone und der Antizyklone ist sie höher im Winter als im Sommer.

IV. Niederschlag.

Auch die Niederschlagswahrscheinlichkeit und die mittlere Niederschlagsmenge nehmen mit zunehmendem Luftdruck ab.

In der Zyklone ist die Niederschlagswahrscheinlichkeit über dem Mittel im Winter im IV. Quadranten, im Sommer auf der ganzen Rückseite.

In der Antizyklone ist sie höher auf der Vorderseite.

Ohne Rücksicht auf die Höhe des Barometerstandes ist sie höher im Winter als im Sommer.

---

[1] Das Gebiet der Zyklone und der Antizyklone wurde durch die zwei Richtungen N—S und E—W in je vier Quadranten eingeteilt. Als I., II., III. und IV. Quadrant wurden der Reihe nach die Quadranten SE, SW, NE und NW bezeichnet.

Die mittlere Niederschlagsmenge ist in der Zyklone über dem Mittel im Winter in den Sektoren W bis NE, im Sommer auf der Rückseite.

In der Antizyklone ist sie in beiden Jahreszeiten über dem Mittel im I. Quadranten.

Sowohl in der Zyklone als auch in der Antizyklone ist sie höher im Sommer als im Winter.

V. Wind.

Die Windgeschwindigkeiten sind nicht ganz regelmäßig verteilt.

In der Zyklone sind sie im Winter höher auf der Rückseite im Sommer im II. Quadranten. Mit zunehmendem Luftdrucke nehmen sie im Sommer zu.

In der Antizyklone sind sie im Winter geringer in den Sektoren NW und N; im Sommer sind sie höher im II. Quadranten. In der Antizyklone nehmen sie mit zunehmendem Luftdruck ab.

In der Zyklone und der Antizyklone sind sie höher im Winter als im Sommer.

Die mittlere Ablenkung der Windrichtung vom Gradienten ist in der Zyklone über dem Mittel auf der Vorderseite. Am höchsten ist sie im S-Sektor, am geringsten im W-Sektor. In beiden Jahreszeiten ist sie gleich groß und beträgt 54°.

In der Antizyklone ist der mittlere Ablenkungswinkel unter dem Mittel im IV. Quadranten. Am größten ist er im E-Sektor, am geringsten im NW-Sektor. Im Mittel für die Gesamtarea der Antizyklone beträgt er 46° und ist im Sommer größer als im Winter.

Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1874 II (Winnecke)

von

Georg Burggraf.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Jänner 1904.

I. Allgemeines.

Der zweite Komet des Jahres 1874 wurde am 11. April desselben Jahres von Winnecke in Straßburg entdeckt. Er stand zu dieser Zeit im Sternbilde des Wassermannes bei $21^h 21^m$ AR. und $-6° 17'$ Deklination; doch verhinderten an diesem Tage Wolken die genaue Beobachtung, so daß nur eine genäherte Position erhalten werden konnte. In der Folgezeit durchlief der Komet die Sternbilder des Füllens, des Delphins, des Adlers, des Pfeiles und des Fuchses, gelangte Anfang Mai in das der Leyer, durchzog hierauf das des Herkules, erreichte am 18. Mai in dem des Bootes seine nördlichste Deklination, gelangte dann in die Jagdhunde und entzog sich Mitte Juni an der Grenze der Jagdhunde und des Haupthaares der Berenice stehend, der weiteren Beobachtung. Auf Grund der an den unmittelbar auf den Tag der Entdeckung folgenden Tagen angestellten Beobachtungen wurden am 22. April 1874 provisorische Elemente von W. Schur in Straßburg (A. N., Bd. 83) und ein zweites Elementensystem von Hofrat Prof. E. Weiß mittels Zirkular der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien vom 22. April bekanntgegeben. Ausgehend von diesen beiden Elementensystemen hat Wenzel in Prag unter Benützung von 90 über die ganze Zeit der Sichtbarkeit des Kometen verteilten Beobachtungen eine Bahnbestimmung

durchgeführt. In Erwägung dessen aber, daß bei dieser Arbeit nicht das gesamte zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial verwertet wurde, hat G. Rosmanith in Wien einer neuen Bahnbestimmung sich unterzogen, bei welcher er von den 148 Beobachtungen, die einen Bogen von 47° wahrer Anomalie umfassen und auf einen Zeitraum von 67 Tagen (vom 12. April bis 17. Juni) verteilt sind, 142 der Rechnung zugrunde legte. Auch wurden von G. Rosmanith die von den Beobachtern gegebenen Positionen durch Anwendung wahrscheinlicher Korrekturen verwendbar gemacht und an Stelle der bisweilen ungenauen oder verfehlten Positionen der Vergleichssterne genaue Positionen abgeleitet. Um endlich allen Ansprüchen, die man an eine definitive Bahnbestimmung stellt, zu genügen, habe ich die bisher noch ausständige Untersuchung der etwaigen Störungen des Kometen durch die dabei in Betracht kommenden Planeten Jupiter, Venus und Erde durchgeführt und mit Berücksichtigung der von Rosmanith gerechneten Ephemeride als Ausgangspunkt und mit Verwendung der neuesten Sternkataloge, wodurch bessere Positionen der Vergleichssterne erzielt wurden, eine neue Bahn gerechnet.

II. Physische Beschaffenheit des Kometen.

Während der Komet selbst zur Zeit seiner größten Helligkeit für das freie Auge nur schwer sichtbar war, erschien er dem bewaffneten Auge zur Zeit seiner Entdeckung als blasse, runde Scheibe von ungefähr 4′ Durchmesser, schweiflos, ohne Kern, jedoch gut verdichtet. Er machte zu dieser Zeit den Eindruck eines Sternhaufens, zu dessen Auflösung eben noch die optische Kraft des Instrumentes hinreicht. An Größe übertraf er den Nebel bei ε Pegasi, wenn er ihm auch an Lichtstärke nachstand; auch lag die Verdichtung bei dem Kometen auf einen größeren Raum verteilt als im Pegasusnebel. J. F. Schmidt in Athen bestimmte aus wiederholten Passagen sowohl den scheinbaren als auch den wahren Durchmesser der Coma und gelangte so zu folgender Tabelle, in welcher A der beobachtete, scheinbar vorangehende Halbmesser der Coma und B der wahre Radius, gemessen in Einheiten des Halbmessers des Erdäquators, bedeutet:

Datum				A	B
April	24,	$15 \cdot 2^h$	....	4·41	21·0
Mai	6,	10·2	....	4·33	16·0
»	12,	9·0	....	3·33	13·0
»	13,	8·5	....	4·72	18·8
»	18,	9·5	....	4·94	22·2
Juni	9,	9·7	....	2·41	21·0
»	10,	9·7	....	2·36	20·7
»	11.	9·7	....	2·88	25·3
»	12.	9·7	....	2·60	22·9

Als mittlerer Wert des Halbmessers der Coma ergibt sich demnach 20·1 Erdhalbmesser oder ungefähr 128.373 *km*, während der Kern, falls sein scheinbarer Durchmesser wirklich nur 0'5 betragen haben sollte, einen wahren Durchmesser von nur 104 *km* besaß. Auch nach der Angabe anderer Beobachter erschien der Komet als ein heller, zirkulärer Nebel von einem beiläufigen Durchmesser von 5', während der verdichtete Teil nur einen Durchmesser von 1'5 zu haben und eher von elliptischer Form zu sein schien. In dem zentralen Teil der Verdichtung, in dem auch zeitweilig nach H. C. Vogel einzelne Sternchen von der 13. bis 14. Sterngrößenklasse aufblitzten, wurde auch öfters ein Kern von der 11. bis 13. Sterngrößenklasse beobachtet, der aber nicht jederzeit sichtbar gewesen zu sein scheint. Im übrigen fiel einigen beobachtenden Astronomen die große Ähnlichkeit des Kometenkopfes, was die Glockenform betrifft, mit dem großen Donati'schen Kometen vom Jahre 1858 auf. Vom 7. Mai an, zu welcher Zeit der Komet in einer Entfernung von 0·537 Erdbahnradien die Erdnähe passiert hatte, wurde der Komet immer lichtschwächer und seine Konturen immer verschwommener, während im vorangehenden Teile der Nebelmasse, die stark granuliert zu sein schien, eine merkliche Verdichtung zu erkennen war. In der Folgezeit büßte der Komet immer mehr an Helligkeit ein, so daß er sich in der ersten Hälfte des Juni, ohne weitere bemerkenswerte Erscheinungen zu bieten, den Beobachtungen der nur mit schwächeren Instrumenten ausgerüsteten Astronomen entzog. Am 17. Juni endlich wurde

der Komet das letztemal in Pola und Wien beobachtet. Im allgemeinen erlangten die Ortsbestimmungen des Kometen, die zumeist an Kreismikrometern angestellt wurden, mit Rücksicht auf die zentrale Verdichtung, die große Räume umfaßte und, da der Kern nur als Stern 11. bis 13. Größe erschien, manchmal aber überhaupt nicht zu sehen war, keine besondere Genauigkeit, auf welche ohnehin verzichtet werden mußte, als im Juni der Komet äußerst lichtschwach wurde und nur noch unsicher gesehen werden konnte.

III. Spektrum des Kometen.

Der Komet wurde auch spektroskopisch von H. C. Vogel und Secchi untersucht. Da aber aus der Zeit nach der von G. Rosmanith ausgeführten Bahnbestimmung keine weiteren Beiträge zur spektroskopischen Untersuchung dieses Kometen sich vorfinden, so gebe ich im folgenden das von G. Rosmanith zusammengestellte, noch nicht publizierte, zusammenfassende Resultat obiger Untersuchungen bekannt:

Das Spektrum des Kometen zeigte die drei hellen Streifen der Kometenspektra in Gelb, Grün und Blau, deren relative Intensitätsverhältnisse H. C. Vogel durch die Zahlen 1, 2·5, 1 ausdrückt. Die Streifen selbst erschienen nach dem violetten Ende des Spektrums allmählich verlaufend, nach dem roten schärfer begrenzt. Messungen konnte H. C. Vogel wegen der Lichtschwäche des Kometenspektrums nicht vornehmen, jedoch gelang es ihm festzustellen, daß die hellste Stelle des mittleren Streifens wenig brechbarer war als die Magnesiumlinie und der Anfang des Streifens mit b_4 zusammenfiel. Nach Secchi war der mittlere Streifen der schwächste, eine Angabe, die auf einem Versehen beruhen dürfte, da er weiterhin das Spektrum als ein gewöhnliches Kometenspektrum bezeichnet, einer Kohlenverbindung aus der Gruppe der Kohlenwasserstoffe angehörig, bei denen immer der mittlere Streifen der hellste ist. Der hellere zentrale Teil des Kometen gab ein sehr schwaches, kontinuierliches Spektrum, das, von dem ersten Streifen beginnend, sich nur wenig über den dritten Streifen hinaus verfolgen ließ. Dieses kontinuierliche Spektrum stimmt vollständig

mit jenem überein, welches Hasselberg (Pet. Mem., Bd. 12) erhielt, wenn er durch Kohlenwasserstoffdämpfe unter bestimmten Druckverhältnissen den elektrischen Funken schlagen ließ. In dem sonst komplizierten, aus fünf Liniengruppen bestehenden Flammenspektrum der Kohlenwasserstoffe verschwindet im elektrischen Spektrum fast vollständig die im Violetten liegende Gruppe, während die Gruppe im Roten überhaupt nur bei höheren Temperaturen erscheint. Unter gewissen Druckverhältnissen trat außer diesem Linienspektrum, mit ihm sich deckend, ein kontinuierliches Spektrum auf. Hasselberg sagt darüber: »...Es liegt die Vermutung nahe, den ganzen Vorgang mit einer unvollkommenen Verbrennung parallel zu stellen, indem durch den elektrischen Strom die Kohlenwasserstoffe dissoziiert werden, wobei die in fester Form ausgefällten und in feinster Verteilung erglühenden Kohlenpartikelchen das kontinuierliche Spektrum geben.« Indem nun in dem verdichteten Teile des Kometen immerhin die nötigen Druckverhältnisse vorauszusetzen sind, so können die Spektralbeobachtungen dieses Kometen als Beleg für den elektrischen Ursprung des Kometenlichtes gelten.

IV.

Die von Wenzel in Prag für die wahrscheinlichste Parabel gefundenen Werte der Elemente:

T	1874 März 13·97282 m. Z. Berlin
☊	274° 6′ 54″02
π	245 51 38·37
i	148 24 31·08
$\log q$	9·9473096

und die rechtwinkeligen, heliozentrischen Äquatorkonstanten:

$$x = [9\cdot9307631]r \sin[v + 146^\circ\ 55'\ 4''33]$$
$$y = [9\cdot9788608]r \sin[v + 225\ \ 37\ \ 2\cdot94]$$
$$z = [9\cdot7816070]r \sin[v + 290\ \ 42\ \ 58\cdot91],$$

in denen die eingeklammerten Werte logarithmisch zu verstehen sind, bilden die Grundlage der folgenden von 12 zu

12 Stunden gerechneten Ephemeride, die wegen der raschen, scheinbaren Bewegung des Kometen von 6 zu 6 Stunden interpoliert werden mußte. Die Ephemeride gibt sofort die jeweiligen scheinbaren Örter des Kometen von April 12·5 bis Juni 18·5 $lg\Delta$ und lgr sowie die in Tagesbruchteilen ausgedrückte Aberrationszeit in der vorletzten Kolumne und für jeden vierten Tag den Helligkeitskoeffizienten $\frac{1}{r^2\Delta^2}$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄—♁)	lg *r* (☄—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
April 12·50	21ʰ 20ᵐ 41ˢ38		— 6° 17′ 9″9		9·9931924	0·0142354	—0·00568	0·97
		—0ᵐ 43ˢ59		+11′ 49″3				
12·75	19 57·79		— 6 5 20·6					
		—0 44·15		+11 58·9				
13·00	19 13·64		— 5 53 21·7		9·9874748	0·0161420	—0·00561	
		—0 44·74		+12 8·6				
13·25	18 28·90		— 5 41 13·1					
		—0 45·33		+12 18·5				
13·50	17 43·57		— 5 28 54·6		9·9816901	0·0180606	—0·00553	
		—0 45·93		+12 28·5				
13·75	16 57·64		— 5 16 26·1					
		—0 46·55		+12 38·9				
14·00	16 11·09		— 5 3 47·2		9·9758388	0·0199906	—0·00546	
		—0 47·19		+12 49·3				
14·25	15 23·90		— 4 50 57·9					
		—0ᵐ 47ˢ83		+13′ 0″0				
April 14·50	21ʰ 14ᵐ 36ˢ07		— 4° 37′ 57″9		9·9699221	0·0219312	—0·00539	

		—0m 48s50		+13′ 10″8				
April 14·75	21h 13m 47s57		— 4° 24′ 47″1					
		—0 49·17		+13 21·9				
15·00	12 58·40		— 4 11 25·2		9·9639403	0·0238820	—0·00531	
		—0 49·88		+13 33 1				
15·25	12 8 52		— 3 57 52·1					
		—0 50·58		+13 44·6				
15·50	11 17·94		— 3 44 7·5		9·9578053	0·0258426	—0·00524	
		—0 51·31		+13 56·3				
15·75	10 26·63		— 3 30 11·2					
		—0 52·04		+14 8·2				
16·00	9 34·59		— 3 16 3·0		9·9517877	0·0278120	—0·00516	
		—0 52·80		+14 20·2				
16·25	8 41·79		— 3 1 42·8					
		—0 53·58		+14 32·6				
16·50	7 48·21		— 2 47 10·2		9·9456199	0·0297902	—0·00509	1·15
		—0 54·38		+14 45·2				
16·75	6 53·83		— 2 32 25·0					
		—0 55·19		+14 57·9				
17·00	5 58·64		— 2 17 27·1		9·9393930	0·0317764	—0·00502	
		—0 56·02		+15 10·9				
17·25	5 2·62		— 2 2 16·2					
		—0 56·88		+15 24·1				
17·50	4 5·74		— 1 46 52·1		9·9331101	0·0337700	—0·00495	
		—0 57·75		+15 37·5				
17·75	3 7·99		— 1 31 14·6					
		—0 58·64		+15 51·3				
18·00	2 9·35		— 1 15 23·3		9·9267730	0·0357708	—0·00488	
		—0 59·56		+16 5·2				
April 18·25	21h 1m 9s79		— 0° 59′ 18″1					
		—1m 0s49		+16′ 19″4				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄ — ♁)	lg r (☄ — ☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
April 18·50	21ʰ 0ᵐ 9ˢ30		— 0° 42′ 58″7		9·9203847	0·0377784	—0·00481	
		—1 1·44		+16′ 33″8				
18·75	20 59 7·86		— 0 26 24·9					
		—1 2·43		+16 48·4				
19·00	58 5·43		— 0 9 36·5		9·9139482	0·0397920	—0·00473	
		—1 3·43		+17 3·4				
19·25	57 2·00		+ 0 7 26·9					
		—1 4·45		+17 18·4				
19·50	55 57·55		+ 0 24 45·3		9·9074673	0·0418112	—0·00466	
		—1 5·50		+17 33·9				
19·75	54 52·05		+ 0 42 19·2					
		—1 6·57		+17 49·6				
20·00	53 45·48		+ 1 0 8·8		9·9009459	0·0438356	—0·00459	
		—1 7·67		+18 5·4				
20·25	52 37·81		+ 1 18 14·2					
		—1 8·79		+18 21·6				
20·50	51 29·02		+ 1 36 35·8		9·8943887	0·0458648	0·00452	1·32
		—1 9·95		+18 38·0				
20·75	50 19·07		+ 1 55 13·8					
		—1 11·13		+18 54·6				
21·00	49 7·94		+ 2 14 8·4		9·8878007	0·0478986	—0·00446	
		—1 12·33		+19 11·5				
April 21·25	20ʰ 47ᵐ 55ˢ61		+ 2° 33′ 19″0					
		—1ᵐ 13ˢ57		+19′ 28″0				

April 21·50	20ʰ 46ᵐ 42ˢ04	—1ᵐ 14ˢ83	+ 2° 52' 48"5	+19' 45"9	9·8811874	0·0499362	—0·00439	
21·75	45 27·21	—1 16·12	+ 3 12 34·4	+20 3·6				
22·00	44 11·09	—1 17·45	+ 3 32 38·0	+20 21·4	9·8745551	0·0519776	—0·00432	
22·25	42 53·64	—1 18·80	+ 3 52 59·4	+20 39·5				
22·50	41 34·84	—1 20·19	+ 4 13 38·9	+20 57·8	9·8679107	0·0540222	—0·00426	
22·75	40 14·65	—1 21·60	+ 4 34 36·7	+21 16·2				
23·00	38 53·05	—1 23·06	+ 4 55 52·9	+21 35·0	9·8612618	0·0560694	—0·00419	
23·25	37 29·99	—1 24·54	+ 5 17 27·9	+21 53·8				
23·50	36 5·45	—1 26·07	+ 5 39 21·7	+22 13·0	9·8546165	0·0581192	—0·00413	
23·75	34 39·38	—1 27·62	+ 6 1 34·7	+22 32·2				
24·00	33 11·76	—1 29·22	+ 6 24 6·9	+22 51·7	9·8479839	0·0601702	—0·00407	
24·25	31 42·54	—1 30·85	+ 6 46 58·6	+23 11·3				
24·50	30 11·69	—1 32·51	+ 7 10 9·9	+23 31·0	9·8413741	0·0622250	—0·00401	1·56
24·75	28 39·18	—1 34·22	+ 7 33 40·9	+23 50·9				
April 25·00	20ʰ 27ᵐ 4ˢ96	—1ᵐ 35ˢ96	+ 7° 57' 31"8	+24' 10"9	9·8347976	0·0642800	—0·00395	

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄—♁)	lg r (☄—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
April 25·25	20ʰ 25ᵐ 29ˢ00		+ 8° 21′ 42″7					
		—1ᵐ 37ˢ74		+24′ 30″9				
25·50	23 51·26		+ 8 46 13·6		9·8282671	0·0663364	—0·00389	
		—1 39·57		+24 51·0				
25·75	22 11·69		+ 9 11 4·6					
		—1 41·44		+25 11·2				
26·00	20 30·25		+ 9 36 15·8		9·8217944	0·0683936	—0·00383	
		—1 43·35		+25 31·4				
26·25	18 46·90		+10 1 47·2					
		—1 45·30		+25 51·6				
26·50	17 1·60		+10 27 38·8		9·8153936	0·0704514	—0·00377	
		—1 47·29		+26 11·8				
26·75	15 14·31		+10 53 50·6					
		—1 49·33		+26 31·9				
27·00	13 24·98		+11 20 22·5		9·8090790	0·0725094	—0·00372	
		—1 51·41		+26 51·8				
27·25	11 33·57		+11 47 14·3					
		—1 53·54		+27 11·8				
27·50	9 40·03		+12 14 26·1		9·8028669	0·0745674	—0·00367	
		—1 55·70		+27 31·4				
27·75	7 44·33		+12 41 57·5					
		—1 57·92		+27 51·0				
April 28·00	20ʰ 5ᵐ 46ˢ41		+13° 9′ 48″5		9·7967738	0·0766250	—0·00362	
		—2ᵐ 0ˢ18		+28′ 10″2				

April 28·25	20h 3m 46s23		+13° 37' 58"7		9·7908173	0·0786820	—0·00357	1·82
		—2m 2s50		+28' 30"2				
28·50	1 43·73		+14 6 28·9					
		—2 4·84		+28 47·1				
28·75	19 59 38·89		+14 35 16·0		9·7850159	0·0807382	—0·00352	
		—2 7·25		+29 6·3				
29·00	57 31·64		+15 4 22·3					
		—2 9·69		+29 24·2				
29·25	55 21·95		+15 33 46·5					
		—2 12·19		+29 41·6				
29·50	53 9·76		+16 3 28·1		9·7793894	0·0827934	—0·00347	
		—2 14·73		+29 58·4				
29·75	50 55·03		+16 33 26·5					
		—2 17·31		+30 14·8				
30·00	48 37·72		+17 3 41·3		9·7739577	0·0848474	—0·00343	
		—2 19·94		+30 30·4				
30·25	46 17·78		+17 34 11·7					
		—2 22·62		+30 45·4				
30·50	43 55·16		+18 4 57·1		9·7687421	0·0868996	—0·00339	
		—2 25·34		+30 59·6				
30·75	41 29·82		+18 35 56·7					
		—2 28·09		+31 13·1				
Mai 1·00	39 1·73		+19 7 9·8		9·7637641	0·0889502	—0·00335	
		—2 30·91		+31 25·6				
1·25	36 30·82		+19 38 35·4					
		—2 33·74		+31 37·2				
1·50	33 57·08		+20 10 12·6		9·7590448	0·0909988	—0·00331	
		—2 36·63		+31 47·7				
Mai 1·75	19h 31m 20s45		+20° 42' 0"3					
		—2m 39s55		+31' 57"3				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄—♁)	lg r (☄—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Mai 2·00	19ʰ 28ᵐ 40ˢ90		+21° 13′ 57″6		9·7546066	0·0930454	—0·00328	
		—24ᵐ 2ˢ50		+32′ 5″7				
2·25	25 58·40		+21 46 3·3					
		—2 45·50		+32 12·8				
2·50	23 12·90		+22 18 16·1		9·7504713	0·0950896	—0·00325	2·04
		—2 48·50		+32 18·8				
2·75	20 24·40		+22 50 34·9					
		—2 51·55		+32 23·3				
3·00	17 32·85		+23 22 58·2		9·7466598	0·0971310	—0·00322	
		—2 54·62		+32 26·5				
3·25	14 38·23		+23 55 24·7					
		—2 57·71		+32 28·3				
3·50	11 40·52		+24 27 53·0		9·7431932	0·0991698	—0·00319	
		—3 0·82		+32 28·6				
3·75	8 39·70		+25 0 21·6					
		—3 3·94		+32 27·2				
4·00	5 35·76		+25 32 48·8		9·7400911	0·1012056	—0·00317	
		—3 7·07		+32 24·3				
4·25	2 28·69		+26 5 13·1					
		—3 10·21		+32 19·6				
4·50	18 59 18·48		+26 37 32·7		9·7373722	0·1032384	—0·00315	
		—3 13·35		+32 13·4				
Mai 4·75	18ʰ 56ᵐ 5ˢ13		+27° 9′ 46″1					
		—3ᵐ 16ˢ47		+32′ 5″3				

Mai	5·00	18ʰ 52ᵐ 48ˢ66		+27° 41′ 51″4		9·7350535	0·1052680	—0·00313	
			—3ᵐ 19ˢ59		+31′ 55″4				
	5·25	49 29·07		+28 13 46·8					
			—3 22·69		+31 43·7				
	5·50	46 6·38		+28 45 30·5		9·7331497	0·1072940	—0·00312	
			—3 25·77		+31 30·3				
	5·75	42 40·61		+29 17 0·8					
			—3 28·81		+31 14·9				
	6·00	39 11·80		+29 48 15·7		9·7316743	0·1093166	—0·00311	
			—3 31·83		+30 57·7				
	6·25	35 39·97		+30 19 13·4					
			—3 34·78		+30 38·7				
	6·50	32 5·19		+30 49 52·1		9·7306374	0·1113354	—0·00310	2·07
			—3 37·71		+30 17·7				
	6·75	28 27·48		+31 20 9·8					
			—3 40·55		+29 55·0				
	7·00	24 46·93		+31 50 4·8		9·7300471	0·1133504	—0·00310	
			—3 43·35		+29 30·3				
	7·25	21 3·58		+32 19 35·1					
			—3 46·06		+29 4·0				
	7·50	17 17·52		+32 48 39·1		9·7299092	0·1153614	—0·00310	
			—3 48·69		+28 35·8				
	7·75	13 28·83		+33 17 14·9					
			—3 51·22		+28 5·8				
	8·00	9 37·61		+33 45 20·7		9·7302253	0·1173684	—0·00310	
			—3 53·66		+27 34·3				
	8·25	5 43·95		+34 12 55·0					
			—3 55·99		+27 1·2				
Mai	8·50	18ʰ 1ᵐ 47ˢ96		+34° 39′ 56″2		9·7309952	0·1193710	—0·00311	
			—3ᵐ 58ˢ22		+26′ 26″4				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (♅—♁)	lg r (♅—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Mai 8·75	17ʰ 57ᵐ 49ˢ74		+35° 6' 22"6					
		—4ᵐ 0ˢ30		+25' 50"1				
9·00	53 49·44		+35 32 12·7		9·7322153	0·1213694	—0·00312	
		—4 2·28		+25 12·5				
9·25	49 47·16		+35 57 25·2					
		—4 4·09		+24 33·6				
9·50	45 43·07		+36 21 58·8		9·7338797	0·1233634	—0·00313	
		—4 5·76		+23 53·4				
9·75	41 37·31		+36 45 52·2					
		—4 7·29		+23 12·2				
10·00	37 30·02		+37 9 4·4		9·7359785	0·1253526	—0·00314	
		—4 8·67		+22 29·9				
10·25	33 21·35		+37 31 34·3					
		—4 9·86		+21 46·7				
10·50	29 11·49		+37 53 21·0		9·7385013	0·1273374	—0·00316	1·86
		—4 10·89		+21 2·8				
10·75	25 0·60		+38 14 23·8					
		—4 11·77		+20 17·9				
11·00	20 48·83		+38 34 41·7		9·7414333	0·1293172	—0·00318	
		—4 12·45		+19 32·7				
11·25	16 36 38		+38 54 14·4					
		—4 12·95		+18 46·8				
Mai 11·50	17ʰ 12ᵐ 23ˢ43		+39° 13' 1"2		9·7447596	0·1312922	—0·00321	
		—4ᵐ 13ˢ28		+18' 0"7				

Mai	11·75	17h 8m 10s15		+39° 31' 1"9					
			—4m 13s42		+17' 14"3				
	12·00	3 56·73		+39 48 16·2		9·7484623	0·1332624	—0·00323	
			—4 13·36		+16 27·7				
	12·25	16 59 43·37		+40 4 43·9					
			—4 13·14		+15 41·1				
	12·50	55 30·23		+40 20 25·0		9·7525219	0·1352274	—0·00326	
			—4 12·72		+14 54·5				
	12·75	51 17·51		+40 35 19·5					
			—4 12·11		+14 8·2				
	13·00	47 5·40		+40 49 27·7		9·7569190	0·1371874	—0·00330	
			—4 11·34		+13 22·1				
	13·25	42 54·06		+41 2 49·8					
			—4 10·39		+12 36·4				
	13·50	38 43·68		+41 15 26·2		9·7616326	0·1391422	—0·00333	
			—4 9·27		+11 51·3				
	13·75	34 34·41		+41 27 17·5					
			—4 7·96		+11 6·5				
	14·00	30 26·45		+41 38 24·0		9·7666403	0·1410916	—0·00337	
			—4 6·50		+10 22·5				
	14·25	26 19·95		+41 48 46·5					
			—4 4·88		+ 9 39·1				
	14·50	22 15·07		+41 58 25·6		9·7719213	0·1430358	—0·00341	1·48
			—4 3·12		+ 8 56·6				
	14·75	18 11·95		+42 7 22·2					
			—4 1·19		+ 8 14·8				
	15·00	14 10·76		+42 15 37·0		9·7774534	0·1449746	—0·00346	
			—3 59·14		+ 7 34·0				
Mai	15·25	16h 10m 11s62		+42° 23' 11"0					
			—3m 56s96		+ 6' 54"0				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄—♁)	lg r (☄—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Mai 15·50	16^h 6^m 14^s66	-3^m 54^s65	+42° 30' 5"0	+ 6' 15"1	9·7832149	0·1469078	—0·00350	
15·75	2 20·01	—3 52·22	+42 36 20·1	+ 5 37·3				
16·00	15 58 27·79	—3 49·70	+42 41 57·4	+ 5 0·4	9·7891849	0·1488356	—0·00355	
16·25	54 38·09	—3 47·06	+42 46 57·8	+ 4 24·6				
16·50	50 51·03	—3 44·34	+42 51 22·4	+ 3 50·0	9·7953429	0·1507578	—0·00360	
16·75	47 6·69	—3 41·54	+42 55 12·4	+ 3 16·4				
17·00	43 25·15	—3 38·67	+42 58 28·8	+ 2 44·1	9·8016689	0 1526744	—0·00366	
17·25	39 46·48	—3 35·72	+43 1 12·9	+ 2 12·9				
17·50	36 10·76	—3 32·72	+43 3 25·8	+ 1 42·8	9·8081435	0·1545852	—0·00371	
17·75	32 38·04	—3 29·66	+43 5 8·6	+ 1 13·8				
18·00	29 8·38	—3 26·57	+43 6 22·4	+ 0 46·0	9·8147490	0·1564906	—0·00377	
Mai 18·25	15^h 25^m 41^s81		+43° 7' 8"4					

(The last differences printed below the final row: -3^m 23^s43 and + 0' 19"4.)

Mai 18·50	15ʰ 22ᵐ 18ˢ38		+43° 7' 27"8		9·8214080	0·1583900	−0·00383	1·10
		−3ᵐ 20ˢ27		−0' 6"2				
18·75	18 58·11		+43 7 21·6					
		−3 17·09		−0 30·7				
19·00	15 41·02		+43 6 50·9		9·8282843	0·1602836	−0·00389	
		−3 13·88		−0 54·0				
19·25	12 27·14		+43 5 56·9					
		−3 10·67		−1 16·3				
19·50	9 16·47		+43 4 40·6		9·8351826	0·1621714	−0·00395	
		−3 7·45		−1 37·5				
19·75	6 9·02		+43 3 3·1					
		−3 4·23		−1 57·9				
20·00	3 4·79		+43 1 5·2		9·8421489	0·1640534	−0·00401	
		−3 0·92		−2 17·0				
20·25	0 3·87		+42 58 48·2					
		−2 57·90		−2 35·3				
20·50	14 57 5·97		+42 56 12·9		9·8491697	0·1659294	−0·00408	
		−2 54·61		−2 52·7				
20·75	54 11·36		+42 53 20·2					
		−2 51·44		−3 9·0				
21·00	51 19·92		+42 50 11·2		9·8562331	0·1677994	−0·00414	
		−2 48·29		−3 24·6				
21·25	48 31·63		+42 46 46·6					
		−2 45 17		−3 39·2				
21·50	45 46·46		+42 43 7·4		9·8633273	0·1696634	−0·00421	
		−2 42·07		−3 43·1				
21·75	43 4·39		+42 39 14·3					
		−2 39·01		−4 6·1				
Mai 22·00	14ʰ 40ᵐ 25ˢ38		+42° 35' 8"2		9·8704427	0·1715214	−0·00428	
		−2ᵐ 35ˢ97		−4' 18"4				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (♅—♁)	lg r (♅—☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Mai 22·25	14ʰ 37ᵐ 49ˢ41		+42° 30' 49"8					
		—2ᵐ 32ˢ97		— 4' 30"0				
22·50	35 16·44		+42 26 19·8		9·8775695	0·1733734	—0·00435	0·79
		—2 30·02		— 4 40·8				
22·75	32 46·42		+42 21 39·0					
		—2 27·09		— 4 50·8				
23·00	30 19·33		+42 16 48·2		9·8846994	0·1752196	—0·00442	
		—2 24·22		— 5 0·4				
23·25	27 55·11		+42 11 47·8					
		—2 21·37		— 5 9·2				
23·50	25 33·74		+42 6 38·6		9·8918239	0·1770594	—0·00450	
		—2 18·58		— 5 17·5				
23·75	23 15·16		+42 1 21·1					
		—2 15·84		— 5 25·2				
24·00	20 59·32		+41 55 55·9		9·8989367	0·1788932	—0·00457	
		—2 13·13		— 5 32·2				
24·25	18 46·19		+41 50 23·7					
		—2 10·46		— 5 38·9				
24·50	16 35·73		+41 44 44·8		9·9060309	0·1807210	—0·00465	
		—2 7·84		— 5 45·0				
24·75	14 27·88		+41 38 59·8					
		—2 5·28		— 5 50·7				
Mai 25·00	14ʰ 12ᵐ 22ˢ60		+41° 33' 9"1		9·9131004	0·1825426	—0·00473	
		—2ᵐ 2ˢ76		— 5ᵐ 55"8				

Mai 25·25	14h 10m 19s84		+41° 27' 13"3					
		−2m 0s29		−6' 0"5				
25·50	8 19·55		+41 21 12·8		9·9201409	0·1843582	−0·00480	
		−1 57·85		−6 4·9				
25·75	6 21·70		+41 15 7·9					
		−1 55·48		−6 8·7				
26·00	4 26·22		+41 8 59·2		9·9271469	0·1861676	−0·00488	
		−1 53·14		−6 12·4				
26·25	2 33·08		+41 2 46·8					
		−1 50·86		−6 15·6				
26·50	0 42·22		+40 56 31·2		9·9341147	0·1879708	−0·00496	0·57
		−1 48·60		−6 18·4				
26·75	13 58 53·62		+40 50 12·8					
		−1 46·41		−6 21·1				
27·00	57 7·21		+40 43 51·7		9·9410408	0·1897680	−0·00504	
		−1 44·26		−6 23·2				
27·25	55 22·95		+40 37 28·5					
		−1 42·15		−6 25·2				
27·50	53 40·80		+40 31 3·3		9·9479213	0·1915588	−0·00512	
		−1 40·08		−6 27·0				
27·75	52 0·72		+40 24 36·3					
		−1 38·06		−6 28·4				
28·00	50 22·66		+40 18 7·9		9·9547540	0·1933436	−0·00520	
		−1 36·08		−6 29·6				
28·25	48 46·58		+40 11 38·3					
		−1 34·14		−6 30·6				
28·50	47 12·44		+40 5 7·7		9·9615362	0·1951222	−0·00528	
		−1 32·25		−6 31·4				
Mai 28·75	13h 45m 40s19		+39° 58' 36"3					
		−1m 30s39		−6' 32"0				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄ — ♁)	lg r (☄ — ☉)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Mai 29·00	13^{h} 44^{m} $9^{s}80$		+39° 52' 4″3		9·9682656	0·1968946	—0·00536	
		-1^{m} $28^{s}57$		— 6' 32″4				
29·25	42 41·23		+39 45 31·9					
		—1 26·80		— 6 32·5				
29·50	41 14·43		+39 38 59·4		9·9749406	0·1986608	—0·00545	
		—1 25·05		— 6 32·7				
29·75	39 49·38		+39 32 26·7					
		—1 23·35		— 6 32·5				
30·00	38 26·03		+39 25 54·2		9·9815596	0·2004210	—0·00553	
		—1 21·69		— 6 32·3				
30·25	37 4·34		+39 19 21·9					
		—1 20·06		— 6 31·8				
30·50	35 44·28		+39 12 50·1		9·9881209	0·2041748	—0·00562	0·41
		—1 18 47		— 6 31·3				
30·75	34 25·81		+39 6 18·8					
		—1 16·91		— 6 30·6				
31·00	33 8·90		+38 59 48·2		9·9946239	0·2039226	—0·00570	
		—1 15·39		— 6 29·9				
31·25	31 53·51		+38 53 18·3					
		—1 13·90		— 6 29·1				
31·50	30 39·61		+38 46 49·2		0·0010671	0·2056642	—0·00579	
		—1 12·43		— 6 28·0				
Mai 31·75	13^{h} 29^{m} $27^{s}18$		+38° 40' 21″2					
		-1^{m} $11^{s}02$		— 6' 26″9				

Juni	1·00	13h 28m 16s16		+38° 33' 54"3		0·0074505	0·2073996	—0·00587	
			—1m 9s61		—6' 25"8				
	1·25	27 6·55		+38 27 28·5					
			—1 8·25		—6 24·6				
	1·50	25 58·30		+38 21 3·9		0·0137728	0·2091288	—0·00595	
			—1 6·91		—6 23·3				
	1·75	24 51·39		+38 14 40·6					
			—1 5·61		—6 21·9				
	2·00	23 45·78		+38 8 18·7		0·0200342	0·2108520	—0·00604	
			—1 4·33		—6 20·4				
	2·25	22 41·45		+38 1 58·3					
			—1 3·08		—6 19·0				
	2·50	21 38·37		+37 55 39·3		0·0262341	0·2125690	—0·00613	
			—1 1·86		—6 17·3				
	2·75	20 36·51		+37 49 22·0					
			—1 0·66		—6 15·8				
	3·00	19 35·85		+37 43 6·2		0·0323723	0·2142798	—0·00622	
			—0 59·48		—6 14·1				
	3·25	18 36·37		+37 36 52·1					
			—0 58·34		—6 12·4				
	3·50	17 38·03		+37 30 39·7		0·0384489	0·2159846	—0·00631	0·31
			—0 57·22		—6 10·7				
	3·75	16 40·81		+37 24 29·0					
			—0 56·12		—6 8·9				
	4·00	15 44·69		+37 18 20·1		0·0444637	0·2176832	—0·00640	
			—0 55·04		—6 7·1				
	4·25	14 49·65		12 13·0					
			—0 53·99		—6 5·2				
Juni	4·50	13h 13m 55s66		+37° 6' 7"8		0·0504170	0·2193758	—0·00648	
			—0m 52s96		—6' 3"4				

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄ − ♁)	lg r (☄ − ⊙)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Juni 4·75	13h 13m 2s70		+37° 0' 4"4					
		−0m 51s96		− 6' 1"0				
5·00	12 10·74		+36 54 3·0		0·0563080	0·2210622	−0·00657	
		−0 50·97		− 5 59·6				
5·25	11 19·77		48 3·4					
		−0 50·00		− 5 57·6				
5·50	10 29·77		42 5·8		0·0621397	0·2227424	−0·00666	
		−0 49·06		− 5 55·7				
5·75	9 40·71		36 10·1					
		−0 48·12		− 5 53·8				
6·00	8 52·59		30 16·3		0·0679101	0·2244168	−0·00675	
		−0 47·22		− 5 51·8				
6·25	8 5·37		24 24·5					
		−0 46·33		− 5 49·8				
6·50	7 19·04		18 34·7		0·0736202	0·2260852	−0·00684	
		−0 45·45		− 5 47·8				
6·75	6 33·59		12 46·9					
		−0 44·60		− 5 45·8				
7·00	5 48·99		7 1·1		0·0792700	0·2277474	−0·00693	
		−0 43·77		− 5 43·7				
7·25	5 5·22		1 17·4					
		−0 42·95		− 5 41·8				
Juni 7·50	16h 4m 22s27		+35° 55' 35"6		0·0848602	0·2294036	−0·00702	0·24
		−0m 42s15		− 5' 39"7				

Juni 7·75	13h 3m 40s·12		+35° 49' 55"·0				
		−0m 41s·36		− 5' 37"·8			
8·00	2 58·76		44 18·1		0·0903905	0·2310538	−0·00711
		−0 40·59		− 5 35·7			
8·25	2 18·17		38 42·4				
		−0 39·83		− 5 33·7			
8·50	1 38·34		33 8·7		0·0958644	0·2326980	−0·00720
		−0 39·09		− 5 31·7			
8·75	0 59·25		27 37·0				
		−0 38·36		− 5 29·7			
9·00	0 20·89		22 7·3		0·1012794	0·2343364	−0·00729
		−0 37·66		− 5 27·7			
9 25	12 59 43·23		16 39·6				
		−0 36·95		− 5 25·7			
9·50	59 6·28		11 13·9		0·1066369	0·2359686	−0·00738
		−0 36·27		− 5 23·6			
9·75	58 30·01		5 50·3				
		−0 35·61		− 5 21·7			
10·00	57 54·40		0 28·6		0·1119375	0·2375950	−0·00747
		−0 34·94		− 5 19·7			
10·25	57 19·46		+34 55 8·9				
		−0 34·29		− 5 17·7			
10·50	56 45·17		49 51·2		0·1171819	0·2392154	−0·00756
		−0 33·66		− 5 15·7			
10·75	56 11·51		44 35·5				
		−0 33·04		− 5 13·9			
11·00	55 38·47		39 21·6		0·1223708	0·2408300	−0·00765
		−0 32·43		− 5 11·8			
Juni 11·25	12h 55m 6s·04		+34° 34' 9"·8				
		−0m 31·83		− 5' 10"·0			

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR.	I. Differenz	Scheinbare D.	I. Differenz	lg Δ (☄ – ♁)	lg r (☄ – ⊙)	Aberrations-zeit	$\frac{1}{\Delta^2 r^2}$
Juni 11·50	12h 54m 34s21		+34° 28' 59"8		0·1275048	0·2424388	—0·00774	0·18
		—0m 31s24		— 5' 8"0				
11·75	54 2·97		23 51·8					
		—0 30·66		— 5 6·0				
12·00	53 32·31		18 45·8		0·1325845	0·2440418	—0·00783	
		—0 30·10		— 5 4·2				
12·25	53 2·21		13 41·6					
		—0 29·54		— 5 2·2				
12·50	52 32·67		8 39·4		0·1376101	0·2456386	—0·00792	
		—0 29·00		— 5 0·4				
12·75	52 3·67		3 39·0					
		—0 28·47		— 4 58·4				
13·00	51 35·20		+33 58 40·6		0·1425830	0·2472300	—0·00801	
		—0 27·94		— 4 56·6				
13·25	51 7·26		53 44·0					
		—0 27·42		— 4 54·8				
13·50	50 39·84		48 49·2		0·1475032	0·2488152	—0·00811	
		—0 26·92		— 4 52·8				
13·75	50 12·92		43 56·4					
		—0 26·42		— 4 51·1				
14·00	49 46·50		39 5·3		0·1523716	0·2503950	—0·00820	
		—0 25·94		— 4 49·3				
14·25	49 20·56		34 16·0					
		—0m 25s45		— 4' 47"4				
Juni 14·50	12h 48m 55s11		+33° 29' 28"6		0·1571887	0·2519688	—0·00829	

Juni 14·75	12ʰ 48ᵐ 30ˢ13	−0ᵐ 24ˢ98	+33° 24′ 42″9	−4′ 45″7				
15·00	48 5·62	−0 24·51	19 59·0	−4 43·9	0·1610557	0·2535370	−0·00838	
15·25	47 41·56	−0 24·06	15 16·9	−4 42·1				
15·50	47 17·94	−0 23·62	10 36·6	−4 40·3	0·1666726	0·2550994	−0·00847	0·14
15·75	46 54·77	−0 23·17	5 57·9	−4 38·7				
16·00	46 32·02	−0 22·75	1 21·0	−4 36·9	0·1713402	0·2566562	−0·00856	
16·25	46 9·70	−0 22·32	+32 56 45·9	−4 35·1				
16·50	45 47·80	−0 21·90	52 12·4	−4 33·5	0·1759592	0·2582074	−0·00866	
16·75	45 26·30	−0 21·50	47 40·6	−4 31·8				
17·00	45 5·21	−0 21·09	43 10·5	−4 30·1	0·1805300	0·2597526	−0·00875	
17·25	44 44·51	−0 20·70	38 42·1	−4 28·4				
17·50	44 24·21	−0 20·30	34 15·3	−4 26·8	0·1850538	0·2612926	−0·00884	
17·75	44 4·28	−0 19·93	29 50·1	−4 25·2				
18·00	43 44·73	−0 19·55	25 26·6	−4 23·5	0·1895310	0·2628270	−0·00893	
18·25	43 25·55	−0 19·18	21 4·6	−4 22·0				
Juni 18·50	12ʰ 43ᵐ 6ˢ74	−0ᵐ 18ˢ81	+32° 16′ 44″2	−4′ 20″4	0·1939625	0·2643560	−0·00902	

Verzeichnis der Vergleichssterne.

Zur Ableitung möglichst genauer Positionen der Vergleichssterne wurden dieselben in sämtlichen mir zur Verfügung stehenden Katalogen nachgeschlagen, für welche die am Schlusse dieser Bemerkung folgenden Abkürzungen verwendet wurden. Alle erlangten Positionen wurden auf das Äquinoctium 1874·0 reduziert und zu dem angenommenen Orte in der Weise vereinigt, daß die aus den älteren Katalogen gefundenen Positionen entweder weggelassen oder mit geringerem Gewichte den neueren angeschlossen wurden. Die folgende Tabelle enthält neben der Rektaszension und Deklination der Vergleichssterne auch die jeweilige, dem Ort entsprechende Epoche, sowie die Anzahl der Beobachtungen, aus denen der Ort des Vergleichssternes abgeleitet wurde, endlich auch das Gewicht, mit welchem er bei der Bildung der angenommenen Position in Rechnung gezogen wurde. Der einzelnen Sternen beigefügte Asterisk weist darauf hin, daß entweder bei dem betreffenden Sterne eine Eigenbewegung konstatiert wurde oder aber eine andere auf ihn bezügliche Anmerkung sich findet. Für die bei der Zusammenstellung der folgenden Tabelle verwendeten Sternkataloge wurden folgende Abkürzungen benützt:

A. G. . . . . Katalog der astronomischen Gesellschaft. Aequ. 1875·0.

Ar. II . . . . Second Armagh Catalogue of 3300 stars. Aequ. 1875·0.

Au. . . . . Auwers-Bradley. Aequ. 1865·0.

B. B. IV . . . . . Bonner Beobachtungen, Bd. IV. Aequ. 1855·0.

Bö.-Cop. . . . . . Börgen-Copeland: Mittlere Örter der in den Zonen —0° und —1° der Bonner Durchmusterung enthaltenen Sterne. Aequ. 1875·0.

Br. . . . . Catalogue de 10792 étoiles observées à l'observatoire Royal de Bruxelles. Aequ. 1865·0.

Cap_{85} . . . . Cape of good Hope, Catalogue of 1713 stars for the epoch 1885·0.

Cap_{90} . . . . Cape Catalogue for the epoch 1890·0.

Gl. . . . . Catalogue of stars observed at the Glasgow observatory from 1860 to 1881. Aequ. 1870·0.

Gou. . . . . Gould' Agelet. Aequ. 1800·0.

Gr_{80} . . . . Ten year Catalogue. Aequ. 1880·0.

Gr_{90} . . . . Greenwich second ten year Catalogue of 6892 stars. Aequ. 1890·0.

Gr. . . . . Groombridge. Aequ. 1810·0.

K. I . . . . Kam I: Katalog von Sternen, deren Örter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind; aus Band 1 bis 66 der A. N. Aequ. 1855·0.

K. II . . . . Kam II: Katalog von Sternen, deren Örter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind; aus Band 67 bis 112 der A. N. Aequ. 1875·0.

Kü. . . . . Küstner-Mönnichmayer: Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreis auf der Sternwarte zu Bonn. Aequ. 1900·0.

Lal. . . . . A catalogue of those stars in the »histoire céléste française« of Jérôme Deslandres for wich tables of reduction to the Epoch 1800 have been published by Prof. Schuhmacher.

M. I . . . . Erstes Münchner Sternverzeichnis, enthaltend die mittleren Örter von 13.200 Sternen. Aequ. 1880·0.

Ottak. Beob. . . Publikationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Aequ. 1900·0.

Pi. . . . . Piazzi. Aequ. 1800·0.

Ra. . . . . The Radcliffe Catalogue of 1617 stars. 1845·0.

Ro. . . . . Romberg: Katalog von 5634 Sternen aus den Beobachtungen am Pulkowaer Meridiankreis. Aequ. 1875·0.

Rü. . . . . Rümker: Mittlere Örter von 12.000 Fixsternen aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte. Aequ. 1836·0.

Schj. . . . . Schjellerup, stjerne forte gnelse indeholdende 1000 Positioner af teleskopiske Fixstjerne

imellem: —15° og +15° Declination. Aequ. 1865·0.

Tay. .... Taylor 1835·0: Catalogue of fixed stars.

W. I .... Weisse: Positiones mediae stellarum fixarum in zonis Regiomontanis a Besselio inter —15° et +15° declinationis observatarum. Aequ. 1825·0.

W. II .... Weisse: Positiones mediae stellarum fixarum in zonis Regiomontanis a Besselio inter +15° et +45° declinationis observatarum. Aequ. 1825·0.

Yar. .... Yarnall: Catalogue of stars observed at the United states Naval observatory during the years 1845 to 1877. Aequ. 1860·0.

Bemerkungen zu den Vergleichssternen.

Stern 14: Die Position aus A. G. Lund wurde um 2′ korrigiert.

» 35: Die Positionen in Deklination ließen —0ˢ250 als Wert der Eigenbewegung ableiten, welcher die angenommene Position in Deklination ergab.

» 40: Nach A. N. Bd. 86, Nr. 2047, ist Stern 62 Hamburger M. B. um —1′ zu korrigieren.

» 45: Vom Beobachter fälschlich Weisse 338 als Vergleichsstern angegeben; die in A. N. 2115 gegebene M. B. Leiden wurde in Deklination um —1′ korrigiert.

» 47 und 48: Die in A. N. 2092 gegebene Position in Deklination wurde um +4′ korrigiert.

» 57: Die angeführten Örter ergaben als Wert der Eigenbewegung in AR. —0ˢ037 und in Deklination —0ˢ071.

» 67: Die Positionen in Deklination zeigen zwar eine kleine Eigenbewegung, die aber nicht in Rechnung gezogen wurde, weil die Epoche der angenommenen Position sehr nahe auf 1874·0 fällt.

» 68: Aus den angeführten Positionen in Deklination ergab sich eine Eigenbewegung im Werte von —0ˢ574.

Stern 72: Da die M. B. Kremsmünster stark von dem Mittel der beiden anderen Positionen abweicht, wurde sie, ohne daß eine Eigenbewegung angenommen werden konnte, ausgeschlossen.

» 85: Die Positionen in Deklination zeigen zwar eine Eigenbewegung, doch ist dieselbe wegen ihrer geringen Größe nicht in Rechnung gezogen worden.

» 86: In Deklination ergab sich als Wert der Eigenbewegung: —0'128.

» 92: In Deklination wurde eine Eigenbewegung in der Größe von —0'075 gefunden.

» 94: Aus den angegebenen Positionen in Deklination ließ sich eine Eigenbewegung im Werte von —0'283 ableiten.

» 97: Der Ort dieses in den A. N. Bd. 85, p. 307, als Nr. 11 angegebenen Vergleichssternes ist zufolge Einsicht in die Originalbeobachtung durch zwei Druckfehler entstellt und soll heißen:

$$AR. = 21^h\,12^m\,3^s71 \quad \text{und} \quad D. = -3°\,39'\,31''0.$$

» 100: Die angenommene Position in Rektaszension ergab sich auf Grund einer Eigenbewegung im Werte von —0^{s}013.

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
1	Pola M. B. 3719	9·5	12h 45m 8s37	+77·37	1	1
	Anschluß an *a*		8·00			1/2
	» » *c*		8·01			1/2
2	Pola M. B. 3721	9·4	12 45 13·00	+77·33	1	1
	Anschluß an *b*		12·85			1/2
3	Pola M. B. 3722	9·5	12 45 30·98	+77·39	1	1
	Anschluß an 2		31·19			1/2
4	W. II 1021	9·0	12 51 59·57	+28·27	3	0
	A. G. Leiden 4801 ...	9·2	59·33	+71·9	3	1
	Kü.	9·3	59·28	+98·39	2	1
5	W. II 1047	8·0	12 53 29·63	+28·27	1	0
	A. G. Leiden 4806 ...	8·3	29·44	+71·9	3	1
6	Pola M. B. 3769.....	9·4	12 56 22·73	+76·85	4	1
	Kü.	9·4	22·57	+98·39	2	1
7	Anschluß an *a*		12 57 6·78			1
	» » *e*		6·70			1
8	Anschluß an: 1/2 (B. B. VI 2400+ +A. G. Lund)		12 57 22·91			
9	B. B. VI	9·4	12 58 52·68	+58·24		1/4
	A. G. Leiden 4826 ...	9·4	53·49	+81·8	2	1
10	Yarn. 5557	5·0	12h 59m 50s81	+71·0	3	1
	Au. 1739...........	5·0	50·81	+61·5	4	1
	Ro. 2957	5·3	50·80	+78·5	1	1
	A. G. Lund 5632	5·6	50·77	+87·2	15	1
	Kü.		50·82	+98·28	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position: α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+32° 53' 27″0	+77·37	1	1	12ʰ 45ᵐ 8ˢ19	+1ˢ52	+32° 53' 27″7	+3·4
26·7			1/2				
29·8			1/2				
+32 36 49·6	+77·33	1	1	12 45 12·95	+1·50	+32 36 51·3	+3·4
54·7			1/2				
+32 52 18·5	+77·39	1	1	12 45 31·05	+1·52	+32 52 19·5	+3·4
21·6			1/2				
+34 8 53·8	+28·27	3	1/4	12 51 59·31	+1·63	+34 8 45·1	+3·2
45·2	+71·9	3	1				
42·7	+98·39	2	1				
+34 43 43·4	+28·27	1	0	12 53 29·44	+1·66	+34 43 42·8	+3·1
42·8	+71·9	3	1				
+34 26 54·2	+76·85	4	1	12 56 22·65	+1·67	+34 26 55·4	+2·9
56·5	+98·39	2	1				
+34 50 29·8			1	12 57 6·74	+1·69	+34 50 27·6	+2·9
25·4			1				
+35 13 45·1			1	12 57 22·91	+1·71	+35 13 45·1	+2·9
+34 41 57·6	+58·24		1/4	12 58 53·33	+1·70	+34 42 1·2	+2·8
42 1·6	+81·8	2	1				
+36° 28' 26″0	+46·6	3	1	12ʰ 59ᵐ 50ˢ80	+1ˢ79	+36° 28' 25″0	+2″7
24·6	+61·5	4	1				
24·4	+78·5	1	1				
25·0	+87·2	15	1				
25·0	+98·28	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
11	B. B. VI 2408	9·3	13h	2m	42s05	+58·24		1/4
	A. G. Lund 5650 ...	9·3			42·22	+87·7	5	1
12	Hamburg. M. B. 3814.	8·8	13	6	1·23	+75·18	2	1
	A. G. Lund 5673	9·0			1·41	+80·3	2	1
13	Anschluß an *g*		13	7	42·02			
14*	W. II 197	9·0	13	11	44·75	+29·31	2	1/2
	A. G. Lund 5712	8·8			44·49	+80·2	2	1
15	W. II 246/7		13	13	56·78	+29·33	1	1/2
	A. G. Lund 5725	7·0			56·77	+80·3	2	1
16	Anschluß an *h*		13	16	14·11			
17	W. II 308	9	13	17	7·59	+29·33	1	0
	A. G. Lund 5749	9·1			7·74	+79·3	2	1
	Kü...............	9·0			7·82	+98·9	2	1
18	Hamburg. M. B. 3918.	8·0	13	32	35·17	+75·18	2	1
	A. G. Lund 5837	8·6			35·14	+79·4	2	1
19	W. II 1153	8	13	53	7·32	+29·45	—	0
	A. G. Bonn 9192 ..	8·5			7·47	+69·8	2	1
	Hamburg. M. B. 4001.	8·5			7·41	+75·18	2	1
	Kü...............	8·2			7·45	+98·9	2	1
20	W. II 1306..........	9	14	0	9·81	+29·45	—	0
	A. G. Bonn 9256	8·8			10·17	+69·9	2	1
21	Gou. 3504..........		14h	4m	50·36	—16·64		0
	W. II 72				49·70	+29·47		0
	A. G. Bonn 9299				50·00	+69·9	2	1
	Hamburg. M. B. 4039.				49·91	+75·18	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+35° 40' 45ʺ9	+58·24		1/4	13h 2m 42s18	+1s76	+35° 40' 43ʺ5	+2ʺ6
42·9	+87·7	5	1				
+35 56 41·0	+75·18	2	1	13 6 1·32	+1·80	+35 56 42·0	+2·4
43·0	+80·3	2	1				
+36 20 36·1				13 7 42·02	+1·82	+36 20 36·1	+2·3
+36 22 53·8	+29·31	2	1/2	13 11 44·58	+1·84	+36 22 53·6	+2·1
53·5	+80·2	2	1				
+36 44 43·3	+29·33	1	1/2	13 13 56·77	+1·87	+36 44 43·7	+2·0
43·8	+80·3	2	1				
+37 15 34·9				13 16 14·11	+1·92	+37 15 34·9	+1·7
+37 50 52·7	+29·33	1	0	13 17 7·78	+1·94	+37 50 56·0	+1·8
56·5	+79·3	2	1				
55·5	+99·0	2	1				
+38 37 24·0	+75·18	2	1	13 32 35·16	+2·08	+38 37 24·5	+0·6
24·9	+79·4	2	1				
+40 29 30·4	+29·45		0	13 53 7·45	+2·22	+40 29 30·2	1·0
31·5	+69·8	2	1				
29·7	+75·18	2	1				
29·3	+98·9	2	1				
+40 54 13·0	+29·45		0	14 0 10·17	+2·26	+40 54 11·7	1·6
11·7	+69·9	2	1				
+41° 22' 25ʺ1	−16·64		0	14h 4m 49s96	+2s30	+41° 22' 26ʺ1	−2ʺ2
25·0	+29·47		0				
26·1	+69·9	2	1				
26·0	+75·18	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d Beob.	Gewicht
22	Leiden M. B. 4053...		14ʰ	9ᵐ	1ˢ36	+75·28	2	
23	W. II 338	9	14	16	29·70	+29·47		1
	Hamburg. M. B. 4064.	8·6			30·05	+75·18	2	1
	A. G. Bonn 9395	8·8			30·17	+80·3	3	1
24	Pi. 182	9	14	40	44·47		7	0
	Lal. 26955	7			45 19	— 6·70		0
	Gr. 2149	7			45·12	+10·4		0
	W. II 864 5	7·8, 7·8			44·53	+29·48		0
	Tay 7812..........	7·8			44·54		3	0
	Ra. I 3261..........	7·4			44·89	+45·3	4	1
	Br. 5933	7			44·56	+66·41	2	1
	A. G. Bonn 9605	7·2			44·67	+69·5	2	1
	Hamburg. M. B. 4115.	7			44·57	+74·39	2	1
25	W. II 907	9	14	42	23·38	+29·47		0
	A. G. Bonn 9615 . ..	8·8			23·53	+69·8	2	1
26	Anschluß an *i*		14	47	38·53			
27	Leiden M. B. 4164 ..		14	55	44·22	+75·28	2	
28	B. B. VI 2462	9·4	14	58	53·71	+60·33		
29	W. II 1291	9	14	59	54·74	+29·40		0
	A. G. Bonn 9767	9·3			54·61	+69·9	2	1
	Hamburg. M. B. 4179.	9·2			54·69	+74·39	2	1
30	Lal. 27843	5·5	15ʰ	9ᵐ	37ˢ65	— 6·70		0
	Gr. 2206	6			36·81	+10·4	3	0
	W. II 187,89	7, 7·7			37·55	+29·13		0
	Ra. I 3343..........	5·9			37·16	+47·5	6	1
	A. G. Bonn 9854 ..	6·0			36·87	+69·9	2	1
	Gr. II 3847	6·0			37·08	+88·43	3	1
	Kü.	7·8			37·10	+98·45	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800 +	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+41° 25' 20"7	+75·28	2		14ʰ 9ᵐ 1ˢ36	+2ˢ31	+41° 25' 20"7	−2"3
+41 45 10·8	+29·47		1	14 16 30·11	+2·34	+41 45 10·7	2·9
10·3	+75·18	2	1				
10·9	+80·3	3	1				
+42 54 38·7		7	0	14 40 44·67	+2·43	+42 54 42·3	−5·1
41·3	− 6·70		0				
38·2	+10·4		0				
40·0	+29·48		0				
38·0		3	0				
41·4	+44·4	4	1				
42·5	+70·89	2	1				
42·2	+69·5	2	1				
42·9	+74·39	2	1				
+42 52 45·4	+29·47		0	14 42 23·53	+2·43	+42 52 42·7	−5·2
42·7	+69·8	2	1				
+42 41 4·9				14 47 38·53	+2·43	+42 41 4·9	5·6
+42 53 21·8	+75·28	2		14 55 44·22	+2·44	+42 53 21·8	−6·4
+42 59 48·3	+60·33			14 58 53·71	+2·45	+42 59 48·3	−6·6
+42 49 9·4	+29·40		0	14 59 54·65	+2·44	+42 49 8·6	−6·7
8·5	+69·9	2	1				
8·7	+74·39	2	1				
+42° 38' 32"6	− 6·70		0	15ʰ 9ᵐ 37ˢ05	+2ˢ44	+42° 38' 30"0	−7"7
31·3	+10·4	3	0				
30·6	+29·13		0				
31·0	+45·1	6	1				
30·3	+69·9	2	1				
29·4	+88·40	2	1				
29·3	+98·45	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
31	Anschluß an ✱32....		15ʰ	9ᵐ	48ˢ62			
32	W. II 198	9	15	9	55·90	+29·47		0
	Hamburg. M. B. 4254 .	8·8			55·83	+74·39	2	1
	A. G. Bonn 9858	9·0			55·90	+76·4	2	1
33	Lal. 27952	8	15	12	50·50	— 6·70		0
	W. II 268.9	7·8, 8			49·38	+28·97		0
	A. G. Bonn 9881	7·5			49·65	+74·3	2	1
34	Hamburg. M. B. 4306 .	9·2	15	21	30·97	+74·39	2	1
	Berlin. M. B. 4307....	9·2			30·98	+74·40	2	1
	Kü................	9·1			30·80	+98·45	2	1
35*	Lal. 28256	7·5	15	23	17·23	— 6·70		0
	W. II 501	8			17·37	+28·45		0
	Rü. 5108...				17·19	+42·0	2	1
	A. G. Bonn 9967	7·7			16·94	+76·4	2	1
	Kü.	7·3			16·78	+98·45	2	1
36	Pi. 112	5·6	15	27	16·05		13	0
	Au. 1967	4·8			16·44	+56·4	6	1
	Yarn. 6512	5·5			16·38	+59·5	2	1
	A. G. Bonn 10006 ...	4·8			16·38			1
	Gr. I 2402....	5·0			16·37	+81·03	5	1
	Cap_{90} 1823.........	5·0			—	—	—	
37	Pi. 211	6	15ʰ	48ᵐ	18ˢ45			0
	Gr. 2284	6			19·04			0
	Au. 2021...........	4·4			19·13	+56·4	5	1
	A. G. Bonn 10198 ...	4·5			19·17	+79·1	3	1
	Gr. I 2466	4·5			19·18	+85·48	4	1
	Cap_{90} 1890.........	4·5			—	—		
	Gr. II 4011	4·5			19·18	+96·41	5	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+43° 10' 46"1				15h 9m 45s62	+2s45	+43° 10' 46"1	−7"6
+43 3 35·0	+29·47		0	15 9 55·87	+2·45	+43 3 35·4	−7·6
56·6	+74·39	2	1				
54·2	+76·4	2	1				
+43 1 47·9	− 6·70		0	15 12 49·65	+2·45	+43 1 38·6	−7·6
36·4	+28·97		0				
38·6	+74·3	2	1				
+43 6 22·1	+74·39	2	1	15 21 30·92	+2·44	+43 6 22·[illegible]	−7·[illegible]
22·8	+74·40	2	1				
23·0	+98·45	2	1				
+43 20 4·7	− 6·70		1	15 23 16·97	+2·45	+43 20 41·9	−8·8
19 51·8	+28·45		1				
50·0	+42·0	2	1				
41·3	+76·4	2	1				
35·9	+98·45	2	1				
+41 19 40·7		7	0	15 27 16·39	+2·38	+41 19 40·7	−9·2
40·8	+56·4	6	1				
39·3	+53·5	3	1				
40·6			1				
41·1	+81·18	4	1				
41·8	+93·57	7	1				
+42° 48' 19"1			0	15h 48m 19s17	+2s38	+42° 48' 19"3	−11·[illegible]
18·4			0				
18·6	+56·5	4	1				
18·8	+79·1	3	1				
18·9	+85·47	4	1				
20·9	+92·10	8	1				
19·3	+96·41	5	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
38	W. II 1233/4	9/9	15^h	49^m	50^s39	+28·45		1/2
	A. G. Bonn 10210 ...	8·9			50·33	+74·8	3	1
39	Pi. 226	6	15	51	15 90		11	0
	Yarn. 6703	6·0			16·19	+60·4	2	1
	Au. 2028	6·0			16·10	+77·4	4	1
	A. G. Bonn 10219....	6·0			16·13	+69·4	2	1
	Gr. I 2479..........	5·7			16·10	+83·82	3	1
	Cap_{90} 1895.........	5·7			16·03	+88·58	2	1
	Kü.	8·2			16·10	+98·45	3	1
40*	Gou. 4220 1	6·7, 6	16	7	36·90	—16·49		0
	Gr. 2318...........	6			37·38	+10·4		0
	Ra. I 3517..........	5·6			37·50	+48·0	4	1
	K. I 3206...........	—			37·43	+28		1
	Hamburg. M. B. 1434.	9·0			37·51	+74·39	1	1
	A. G. Bonn 10392 ...	6·5			37·39	+81·4	2	1
	Gr. II 4084	6·5			37·33	+94·48	3	1
41	Pi. 105	5	16	24	29·94		7	0
	Gr. 2348...........	5			30·02		6	0
	Yarn. 6938	5·0			30·25	+68·4	4	1
	Au. 2102...........	5·6			30 31	+60·2	4	1
	A. G. Bonn 10552....	5·0			30·25	+71·0	2	1
	Ro. 3630...........	5·0			30·27	+78·6	2	1
	Gr. I 2567	var.			30·27	+79·79	3	1
	Cap_{90} 1972.........	var.			30·25	+89·58	11	1
	Kü.	8·3			30·34	+98·81	3	1
42	Lal. 30489	8	16^h	38^m	1^s17	— 5·58		0
	W. II 1188	7·8			1·61	+28·52		0
	A. G. Bonn 10683 ...	7·8			1·68	+70·0	2	1
	Br. 6695	8			1·66	+71·17	3	1
	Hamburg. M. B. 4534.	7·5			1·76	+74·39	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+42° 53' 25"8	+28·45		0	15h 49m 50s35	+2s38	+42° 53' 31"5	—11"1
31·5	+74·8	3	1				
+42 56 3·8		10	0	15 51 16·11	+2·38	+42 56 1·7	—11·2
1·3	+53·5	3	1				
1·5	+77·4	4	1				
1·5	+69·4	2	1				
1·1	+83·82	3	1				
2·6	+91·18	8	1				
2·1	+98·45	3	1				
+42 41 59·5	—16·49		0	16 7 37·43	+2·32	+42 41 53 6	—12·5
51·7	+10·4		0				
53·8	+44·9	5	1				
51·8	+28		1				
53·7	+74·39	1	1				
53·8	+81·4	2	1				
54·8	+94·48	3	1				
+42 9 39·4		8	0	16 24 30·28	+2·24	+42 9 35·8	13·8
38·5		6	0				
35·7	+54·4	3	1				
36·7	+60·1	3	1				
36·4	+71·0	2	1				
35·3	+78·6	2	1				
36·2	+79·79	3	1				
35·6	+93·00	6	1				
35·0	+98·81	3	1				
+41° 26' 2"4	— 5·58		0	16h 38m 1s70	+2s16	+41° 26' [illegible]	—15"9
5·5	+28·52		0				
5·9	+70·0	2	1				
6·3	+69·93	2	1				
6·6	+74·39	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
43	Lal. 30574	7·5	16ʰ	40ᵐ	55ˢ34	− 5·58		0
	W. II 1281	8			55·57	+28·52		0
	A. G. Bonn 10707 ...	7·9			55·69	+76·1	3	1
44	Lal. 31066	8	16	57	38·72	− 2·61		0
	W. II 1764	8			39·33	+28·46		0
	A. G. Lund 6992	7·8			39·59	+80·4	2	1
45*	W. II 309/10	8·9, 9·0	17	11	57·85	+29·47		0
	Leiden M. B. 4622 ...	8·8			57·96	+74·48	2	1
	A. G. Lund 7065	8·5			57·90	+80·1	3	1
46	Leiden M. B. 4661 ...		17	29	46·74	+74·48	1	
47*	Wien, Micr. Vergl. ...		18	18	45·15			
48*	Wien, Micr. Vergl. ...		18	19	15·12			
49	W. II 818/9	7/7	18	28	35·36	+29·17		1
	A. G. Leiden 6720 ...	7·5			35·39	+73·0	2	1
	Ar. II 2234	7·5			35·22	+79·38	5	1
50	Anschluß an A. G. Leiden 208 und 302..		18	30	58·65			
51	W. II 977	7·8	18	33	11·98	+29·65		0
	B. B. VI 3313	7·3			10·93	+58·69		1/2
	A. G. Leiden 6764 ...	7·7			10·85	+80·8	3	1
52	W. II 998	9	18	33	46·63	+28·68		0
	A. G. Leiden 6774 ...	9·1			46·38	+73·5	3	1
53	W. II 999	9	18	33	47·10	+28·68		0
	A. G. Leiden 6775 ...	8·9			46·97	+82·5	2	1
54	B. B. VI 3260	9·5	18	35	0·48	+58·61		
55	Lal. 34680	6	18ʰ	35ᵐ	13ˢ41	− 6·37		0
	W. II 1038	7·8			13·84	+28·68		0
	A. G. Leiden 6785 ...	6·3			13·74	+74·5	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+40° 52' 1"3	− 5·58		0	16h 40m 55s69	+2s13	+40° 52' 7"9	−15"0
5·8	+28·52		0				
7·9	+76·1	3	1				
+39 53 58·4	− 2·61		0	16 57 39·59	+2·02	+39 53 57·0	−16·1
55·0	+28·46		0				
57·0	+80·4	2	1				
+39 17 32·3	+29·47		0	17 11 57·93	+1·92	+39 17 34·[illegible]	−17·0
33·7	+74·48	2	1				
34·5	+80·1	3	1				
+37 56 30·2	+74·48	1		17 29 46·74	+1·78	+37 56 30·2	17·9
+32 48 11·0				18 18 45·15	+1·37	+32 48 11·0	19·4
+32 48 52·6				18 19 15·12	+1·36	+32 48 52·6	19·4
+30 47 48·8	+29·17		0	18 28 35·32	+1·27	+30 47 51·0	19·5
51·1	+73·0	2	1				
50·9	+79·38	5	1				
+30 58 36·8				18 30 58·65	+1·25	+30 58 36·8	19·5
+31 12 26·9	+29·65		0	18 33 10·88	+1·24	+31 12 29·9	19·6
31·5	+58·69		1/2				
29·0	+80·8	3	1				
+30 36 39·7	+28·68		0	18 33 46·38	+1·23	+30 36 41·6	−19·5
41·6	+73·5	3	1				
+30 38 57·8	+28·68		0	18 33 46·97	+1·23	+30 39 0·4	−19·5
39 0·4	+82·5	2	1				
+30 49 3·2	+58·61			18 35 0·48	+1·23	+30 49 3·2	−19·6
+30° 43' 59"5	− 6·37		0	18h 35m 13s74	+1s23	+30° 44' 0"7	−19"6
56·0	+28·68		0				
44 0·7	+74·5	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
56	Wien, Micr. Vergl., Anschluß an *k*....		18ʰ	44ᵐ	46ˢ35			
57*	Au. 2368...........	5·5	18	45	10·35	+66·6	7	1
	A. G. Leiden 6905...	5·5			10·69	+74·6	2	1
	Ro. 4104...........	6·1			10·65	+77·7	4	1
	Kü.	7·3			11·49	+97·51	2	1
58	Lal. 35186	6	18	46	38·51	— 6·37		0
	W. II 1401	7			38·57	+28·63		0
	Rü. 6795..........	6·7			38·72	+42	3	0
	Ar. II 2295	6·5			38·57	+71·05	4	1
	A. G. Cambr. 9301 ..	6·6			38·70	+75·6	6	1
59	Wien, Micr. Vergl. an ★60 angeschl.....		19	21	40·58			
60	Br. 8167		19	23	5·75	+67·63	3	1/2
	A. G. Berlin 7040....	7·4			5·91	+80·9	3	1
61	Lal. 36875		19	23	24 27	— 5·4		0
	Rü. 7497...........				24·39	+42	1	0
	A. G. Berlin 7045....	8·1			24·41	+80·7	2	1
62	Pi. 279.............	4	19ʰ	41ᵐ	45ˢ68		13	0
	Tay. 9108..........	4			46·20		4	1/2
	Au. 2516...........	4·0			46·15	+77·3	4	1
	Ro. 4350...........	4·0			46·17	+77·2	15	1
	A. G. Berlin 7686....	4·0			46·18			1
	Gr. I 3242..........	3·7			46·18	+79·33	3	1
	Cap_{85} 1368.........	3·7			46·17	+84·0	6	1
	Cap_{90} 2453.........	3·7			46·18	+89·09	11	1
	Gr. II 5102	3·7			46·17	+94·10	13	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l app.	δ (1874·0)	Red. ad l app.
+28° 51′ 58″4				18ʰ 44ᵐ 46ˢ35	+1ˢ13	+28° 51′ 58″4	—19″5
+32 24 25·3	+66·6	7	1	18 45 10·61	+1·17	+32 24 25·2	—20·0
25·1	+74·6	2	1				
25·2	+77·7	4	1				
23·8	+97·51	2	1				
+28 38 5·8	— 6·37		0	18 46 38·64	+1·12	+28 38 2·9	—19·5
37 59·6	+28·63		0				
38 1·0	+42	3	0				
3·3	+70·96	5	1				
2·4	+75 6	6	1				
+22 30 1·3				19 21 40·58	+0·81	+22 30 1·3	—18·6
+22 27 37·8	+70·16	2	1/2	19 23 5·86	+0·80	+22 27 38·9	18·6
39·4	+80·9	3	1				
+22 18 7·3	— 5·4		0	19 23 24·41	+0·80	+22 18 9·2	—18·5
8·9	+42	1	0				
9·2	+80·7	2	1				
+18° 13′ 32″3		14	0	19ʰ 41ᵐ 46ˢ17	+0ˢ63	+18° 13′ 28″7	—17″8
31·0		5	1/2				
25·8	+77·3	4	1				
28·8	+77·2	14	1				
29·4			1				
28·8	+79·33	3	1				
29·4	+84·0	5	1				
28·8	+88·92	12	1				
28·4	+94·10	13	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
63	Au. 2546	7·0	19^h	52^m	30·20	+65·3	3	1
	A. G. Berlin 7823....	7·1			30·20	+70·7	2	1
64	Berlin M. B. 5065....		20	0	26·27	+75·51	2	
65	Lal. 39081	7	20	14	18·27	— 5·39		0
	Hamburg M. B. 5141 .	8·7			18·54	+74·85	2	1
	A. G. Leipzig 7853...	8·8			18·57	+90·5	2	1
66	Lal. 39132,34	8, 8, 8	20	15	35·53	— 4·34		0
	W. I 357	8·9			36·23	+23		0
	Schj. 7986..........	9			35·29	+61·77		1/2
	A. G. Leipzig 7871...	7·7			35·40	+80·50	2	1
	M_1 24107	8			35·48	+54·72	5	1/2
67*	Lal. 39195,97	8,7·5,8	20	17	14·84	— 4·34		0
	M_1 24237	7			14·94	+47·78	3	0
	A. G. Leipzig 7889...	7·8			14·92	+70·0	3	1
	Ar. II 2627	7·8			14·94	+77·22	5	1
68*	W. I 472	9	20	20	6·13	+21·7	1	0
	Rü. 8280				5·76	+43	1	0
	Schj. 8041..........	8·5			5·84	+61·8		1/2
	A. G. Leipzig 10078..	8·4			6·13	+84·6	2	1
69	W. I 705	9	20	28	50·70	+21·6		0
	M. I 25140	10			50·47	+57·22	2	1/2
	A. G. Leipzig 10191..	8·7			50·25	+84·6	2	1
70	M. I 25149	10	20	28	58·47	+41·68	2	1/2
	Pola M. B. 5254	9·3			58·22	+77·21	2	1
71	M. I 25171	10	20^h	29^m	16·07	+41·68	2	1
	Pola M. B. 5257.....	9·0			15·79	+77·73	2	1
	A. G. Leipzig 10202..	8·9			15·95	+84·6	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+16° 9' 20"4	+65·3	3	1	19ʰ 52ᵐ 30ˢ20	+0ˢ55	+16° 9' 20"3	−17"0
20·2	+70·7	2	1				
+14 18 33·6	+75·51	2		20 0 26·27	+0·48	+14 18 33·6	−16·4
+12 17 24·7			0	20 14 18·56	+0·37	+12 17 19·3	−15·6
18·9	+74·85	2	1				
19·7	+90·5	2	1				
+10 35 38·6	− 4·34		0	20 15 35·40	+0·35	+10 35 34·7	−15·2
36·9	+23		0				
37·2	+61·77		1/2				
33·8	+80·50	2	1				
33·9	+54·72	5	1/2				
+10 41 1·1	− 4·34		0	20 17 14·93	+0·34	+10 40 56·7	−15·1
40 59·6	+47·78	3	0				
57·0	+70·0	3	1				
56·5	+77·22	5	1				
+ 9 4 2·1	+21·7	1	1	20 20 6·03	+0·30	+ 9 3 33·2	−14·7
3 50·1	+43	1	1				
41·6	+61·8	—	1				
26·5	+84·6	2	1				
+ 7 10 33·4	+21·6		0	20 28 50·33	+0·23	+ 7 10 35·7	−14·0
39·5	+57·22	2	1/4				
34·7	+84·6	2	1				
+ 7 32 21·6	+41·68	2	1/2	20 28 58·31	+0·23	+ 7 32 21·4	−14·1
21·3	+77·21	2	1				
+ 6° 57' 28"6	+41·68	2	1	20ʰ 29ᵐ 15ˢ94	+0ˢ23	+ 6° 57' 28"8	−13"9
28·8	+77·78	2	1				
29·5	+84·6	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
72*	M. I 25438	8	20h	32m	59s21	+51·73	2	1/2
	A. G. Leipzig 10253..	8·3			59·08	+86·7	2	1
73	K. I 4107...........	8·9	20	34	58·18	+29·69	5	1/2
	M. I 25589	9			58·17	+41·63	2	1/2
	Berlin M. B. 5286....	8·8			58·24	+75·67	2	1
	A. G. Leipzig 10277..	8·8			58·24	+83·6	2	1
74	M. I 25598	9	20	35	2·05	+41·65	2	1/2
	A. G. Leipzig 10280..	8·8			1·92	+84·1	2	1
75	Lal. 40029	7·5	20	37	23·99	— 4·29		0
	W. I 933...........	8			24·87	+21·6		0
	M. I 25757	7			24·46	+53·20	2	1
	Schj. 8245..........	8			24·03	+61·9		1
	Gl. 5220	7·8			24·38	+70·81	3	1
	A. G. Albany 7244...	9·3			24·37	+81·0	3	1
	Cap_{85} 1420.........	6·8			24·28	+81·66	6	1
76	M. I 25838	9	20	38	27·93	+43·62	1	1/2
	A. G. Albany 7250...	8·7			28·03	+80·6	2	1
77	B. B. VI 4540.......	9·6	20	39	28·49	+54·68		
78	Anschluß an ✱77....		20	39	58·75			
79	Lal. 40104	9	20	40	5·64	— 4·30		0
	M. I 25958	9			5·82	+43·65	1	1/2
	Schj. 8270	9			5·35	+61·81		1
	A. G. Leipzig 10338..	8·4			5·51	+86·7	2	1
80	Wien, Micr. Vergl. Anschluß an ✱76.		20h	41m	19s29			

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+ 7° 22′ 2″4	+51·73	2	1/2	20h 32m 59s13	+0s21	+ 7° 22′ 1″9	−14″0
1·6	+86·7	2	1				
+ 5 43 39·7	+29·69	5	1/2	20 34 58·22	+0·18	+ 5 43 38·3	−13·5
39·8	+41·63	2	1/2				
37·3	+75·67	2	1				
37·8	+83·6	2	1				
+ 5 51 29·9	+41·65	2	1/2	20 35 1·97	+0·18	+ 5 51 29·0	−13·5
28·5	+84·1	2	1				
+ 4 56 21·5	− 4·29		0	20 37 24·30	+0·14	+ 4 56 17·3	−13·3
17·0	+21·6		0				
18·0	+53·20	2	1				
18·2	+61·9		1				
17·0	+70·81	3	1				
16·2	+81·0	3	1				
17·3	+82·30	3	1				
+ 4 26 19·6	+43·62	1	1/2	20 38 28·00	+0·14	+ 4 26 18·5	−13·1
18·0	+80·6	2	1				
+ 4 19 34·8	+54·68			20 39 28·49	+0·13	+ 4 19 34·8	−13·0
+ 4 22 31·8				20 39 58·75	+0·13	+ 4 22 31·8	−13·0
+ 5 45 43·2	− 4·30		0	20 40 5·51	+0·15	+ 5 45 36·8	−13·3
37·6	+43·65	1	1/2				
36·9	+61·81		1				
36·2	+86·7	2	1				
+ 4° 22′ 49″9				20h 41m 19s29	+0s12	+ 4° 22′ 49″9	−13″0

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
81	W. I 1034	6	20ʰ	41ᵐ	27ˢ17	+21·6		0
	M. I 26055	8			27·24	+54·08	3	1
	Schj. 8291	8·5			27·10	+62·80		1
	Gl. 5246	6			27·06	+72·43	5	1
	A. G. Albany 7269...	6·9			27·15	+80·70	2	1
82	Pi. 309.............	5·6	20	41	33·88		7	0
	M. I 26063	7			33·71	+41·63	1	0
	Ro. 4668	5·5			33·85	+75·1	4	1
	Au. 2688...........	5·8			33·83	+77·6	5	1
	A. G. Leipzig 10357	6·1			33·83	+84·3	3	1
	Gr. I 3472	5·5			33·82	+86·13	5	1
	Cap_{90} 2584	5·5			33·82	+93·23	6	1
83	Lal. 40229	7	20	43	42·64	— 4·30		0
	M. I 26204	6			43 33	+53·23	4	1
	Br. 9099	7			43·07	+65·39	3	1
	A. G. Leipzig 10391..	7·6			43·20	+83·6	2	1
84	Lal. 40266	8	20	44	52·16	— 5·39		0
	M. I 26272	9			52·64	+54·08	3	0
	Schj. 8325..........	9			52·37	+61·82		1
	Berlin M. B. 5329....	8·2			52·40	+75 67	2	1
	A. G. Albany 7299...	8·1			52·44	+80 2	2	1
85*	Lal. 40315	8	20	45	53·30	— 5 50		0
	M. I 26341	9			53·40	+59·27	2	$^1{}_2$
	Pola M. B. 5333.....	8·5			53·22	+77·44	3	1
	A. G. Albany 7309...	8·7			53·27	+80·1	2	1
86*	Lal. 40496	7	20ʰ	50ᵐ	43ˢ73	— 4·30		0
	W. I 1269	7			44·31	+21·6		0
	M. I 26667	6			43·69	+48·95	10	1
	Bö.-Cop. 5835	6·8			43·46	+67·68		1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+ 2° 50' 37"5	+21·6		0	20h 41m 27s14	+0s10	+ 2° 50' 40"1	—12"6
41·4	+54·08	3	1				
39·3	+62·80		1				
40·0	+72·22	4	1				
39·9	+80·70	2	1				
+ 5 32 47·5		8	0	20 41 33·83	+0·11	+ 5 32 47·9	—13·3
50·8	+41·63	1	0				
47·9	+75·1	4	1				
48·1	+77·6	5	1				
47·9	+84·3	3	1				
47·6	+85·99	7	1				
48·1	+93·23	6	1				
+ 5 4 42·7	— 4·30		0	20 43 43·20	+0·10	+ 5 4 39·2	—13·1
40·3	+53·23	4	1/2				
38·8	+68·22	4	1				
39·0	+83·6	2	1				
+ 3 1 5·5	— 5·39		0	20 44 52·40	+0·08	+ 3 1 7·4	—12·[illegible]
11·1	+54·08	3	0				
7·9	+61·82		1				
6·9	+75·67	2	1				
7·5	+80·2	2	1				
+ 2 59 18·3	— 5·50		0	20 45 53·28	+0·08	+ 2 59 14·5	—12·5
17·1	+59·27	2	0				
14·7	+77·44	3	1				
14·2	+80·1	2	1				
— 0° 0' 51"4	— 4·30		1	20h 50m 43s62	+0s01	0° 1' 1"0	—11"6
54·3	+21·6		1				
56·6	+48·95	10	1				
60·3	+67·68		1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
	Yarn. 9388	6·5	20^h 50^m 43^s67	+67·7	4	1
	Gl. 5299	7	43·59	+73·08	3	1
	A. G. Nicolajew 5318.	7·0	43·69	+84·8	2	1
87	Pola M. B. 5358	10·0	20 50 50·74	+77·72	2	
88	W. I 1274	8·9	20 50 52·60	+21·6		0
	M. I 26674	8	52·26	+50·25	2	1
	Schj. 8393..........	8·7	52·13	+62·81		1
	A. G. Albany 7341.	8·2	52·24	+80·6	2	1
89	Au. 2717...........	5·0	20 52 46·63	+65·7	3	1
	Ro. 4734	5·7	46·56	+75·2	4	1
	A. G. Albany 7352...	5·7	46·65	+80·6	3	1
	Gr. I 3508/9	5·4	47·03	+85·38	4	1/2
	Gr. II 5678/9........	6·2, 5·7	46·99	+92·30	3	1/2
90	M. I 26804	10	20 52 49·27	+46·44	3	1
	Schj. 8419/20	9, 9·5	49·36	+62·81		1
91	Lal. 40668	8	20 54 39·14	— 4·30		0
	W. I 1373	8	39·09	+21·6		0
	M. I 26911	8	38·44	+49·28	15	1
	Gl. 5315	8	38·41	+70·26	5	1
	A. G. Nicolajew 5337.	8·1	38·51	+83·3	4	1
92*	Lal. 40678	8	20^h 54^m 56^s89	— 4·30		0
	W. I 1382	8	57·21	+21·6		0
	M. I 26931	8	56·58	+49·28	15	1
	Gl. 5317	8	56·54	+69·16	2	1
	Pola M. B. 5372.....	8·0	56·63	+77·39	3	1
	A. G. Nicolajew 5341.	8·0	56·58	+83·6	2	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
− 0° 0' 60"5	+67·7	3	1	20ʰ 50ᵐ 43ˢ62	+0ˢ01	0° 1' 1"0	11"6
61·6	+77·29	4	1				
62·7	+84·8	2	1				
+ 1 45 17·6	+77·72	2		20 50 50·74	+0·03	+ 1 45 17·6	−12·1
+ 1 51 0·3	+21·6		0	20 50 52·21	+0·03	+ 1 51 2·1	−12·1
3·5	+50·25	2	1/2				
2·4	+62·81		1/2				
1·1	+80·6	2	1				
+ 3 48 41·7	+65·7	3	1	20 52 46·72	0·00	+ 3 48 41·7	− 11·7
41·2	+75·2	4	1				
40·3	+80·6	3	1				
42·4	+84·96	3	1				
42·8	+92·30	3	1				
+ 1 47 58·2	+46·44	3	1	20 52 49·32	+0·02	+ 1 47 58·3	−12·0
58·3	+61·81		1				
+ 0 32 38·7	− 4·30		0	20 54 38·44	−0·01	+ 0 32 34·8	11·7
36·9	+21·6		0				
36·0	+49·28	15	1				
33·2	+71·32	5	1				
35·2	+81·6	4	1				
+ 0° 34' 50"2	− 4·30		1	20ʰ 54ᵐ 56ˢ55	0ˢ02	+ 0° 31' 46"1	11"7
50·0	+21·6		1				
47·3	+49·28	15	1				
45·4	+72·26	3	1				
44·2	+77·39	3	1				
44·4	+83·6	2	1				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
93	Lal. 40749/50	8, 7	20^h	56^m	40·19	— 4·70		0
	W. I 1424	7			40·22	+21·6		0
	M. I 27024	6			39·62	+49·14	11	1/2
	Br. 9219	7			39·35	+69·53	5	1
	Gl. 5327	7			39·34	+73·70	5	1
	Ro. 4752	7·0			39·42	+75·0	5	1
	A. G. Albany 7373 ...	7·9			39 36	+80·4	3	1
94*	Lal. 40806	6	20	58	20·91	— 5·50		0
	M. I 27129	6			21·34	+50·48	7	1
	Ar. II 2763	7·0			21·45	+73·37	6	1
	A. G. Albany 7389 ...	6·6			21·56	+80·4	4	1
95	Lal. 40869	7·5	21	0	5·11	— 4·30		0
	W. I 1503	8			5·87	+21·6		0
	M. I 27233	7			5·46	+50·87	6	0
	Gl. 5345	7—8			5·30	+68·42	3	1
	Bö.-Cop. 5869/70	7·0			5·33	+68·82		1
	Ar. II 2770	7·0			5·40	+76·40	5	1
	A. G. Nicolajew 5361 .	7·0			5 33	+83·60	2	1
96	Lal. 41145	8	21	6	38·30	— 4·32	.	0
	W. I 91	8·9			38·47	+21·6		0
	M. I 27619	8			38·38	+47·68	13	1/2
	B. B. VI 4123	7 8			38·20	+58·67		1
	Cop.-Bö. 5905	8·0			38·15	+68·83		1
	A. G. Nicolajew 5394.	7·8			38 21	+80·6	2	1
97*	Anschl. an ✱ 100 Micr. Vergl. Schulhof ...		21^h	12^m	2^s99	+74		1/2
	Romberg Micr. Vergl. ..				2·73	+86		1
	Spitaler Micr. Vergl. ..				2·92	+91		1/2

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
+ 1° 2′ 18″8	− 4·70		0	20ʰ 56ᵐ 39ˢ40	−0ˢ03	+ 1° 2′ 16″1	−11″8
18·5	+21·6		0				
18·2	+49·14	11	0				
16·0	+69·71	3	1				
15·7	+69·78	3	1				
16·9	+75·0	5	1				
15·8	+80·4	3	1				
+ 1 46 44·4	− 5·50		1	20 58 21·45	−0·01	+ 1 46 20·6	−11·9
23·1	+50·48	7	1				
21·8	+73·48	5	1				
20·5	+80·3	4	1				
− 0 36 20·7	− 4·30		0	21 0 5·34	−0·08	− 0 36 30·9	−11·3
26·7	+21·60		0				
26·9	+50·87	6	0				
31·9	+68·42	3	1				
30·0	+68·82		1				
31·1	+76·40	5	1				
30·4	+83·60	2	1				
− 1 38 40·3	− 4·32		0	21 6 38·22	−0·12	− 1 38 48·8	−10·8
48·4	+21·6		0				
42·6	+47·68	13	0				
45·2	+58·70		0				
49·4	+68·83		1				
48·1	+80·6	2	1				
− 3° 39′ 33″3	+74		1/2	21ʰ 12ᵐ 2ˢ85	−0ˢ21	− 3° 39′ 34″7	−10″3
35·5	+86		1				
34·1	+91		1/2				

Nr.	Autorität	Mag.	α (1874·0)			Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht
98	Rü. 9186		21ʰ	21ᵐ	23ˢ61	+44·0	1	0
	M. I 28474	9			24·23	+45·22	2	0
	Schj. 8687	9			23·57	+62·62		1
	Br. 9482				23·65	+66·13	2	1
	Ottakr. B.				23·75	+92·57	2	1
99	Pi 162	3	21	24	55·30		103	0
	Yarn. 9654	3·0			55·46	+55·3	241	1
	Au 2797	3·0			55·45	+60·8	104	1
	Cap_{85} 1460	3·1			55·47	+81·51	67	1
	Gr. I 3593	3·1			55·45	+83·23	41	1
	Cap_{90} 2690	3·1			55·46	+87·58	40	1
	Gr. II 5878	3·1			55·47	+93·88	54	1
100*	W. I 334	7·8	21	15	53·93	+21·7		1
	M. I 28165	7			53·57	+48·75	3	1
	Gl. 5440	7·8			53·29	+70·41	3	1
a	B. B. VI 2286	9·5	12	45	44·27	+58·30		
b	Lal. 24026	8·5	12	47	6·96	− 5·76		0
	A. G. Leiden 4784 ...	8·3			6·37	+72·3	2	1
c	Lal. 24046		12	47	46·76	− 5·76		0
	W. II 953	8·9			46·23	+28·27	1	1/2
	A. G. Leiden 4787 ...	8·3			46·13	+82·3	2	1
d	Lal. 24190	8	12	53	0·01	− 5·71		0
	W. II 1038..........	8			0·44	+29·31		1/2
	A. G. Lund 5595	7·7			0·33	+93·3	2	1
e	B. B. VI 2392	9·3	13	1	54·34	+58·34		
f	A. G. Lund 5686	9·0	13	7	39·63	+84·0	3	
g	A. G. Lund 5687	9·4	13	7	40·34	+86·7	4	
h	W. II 261	8	13	14	52·28	+29·33	3	0
	A. G. Lund 5736	8·4			52·86	+80·2	2	1
i	W. II 961,2	9/9	14	45	12·11	+29·43		0
	A. G. Bonn 9630	9·1			11·98	+73·2	3	1
k	Rü. 6741		18ʰ	42ᵐ	23ˢ59	+44·0	1	1/2
	A. G. Cambr. 9238...	8·1			23·73	+82·3	3	1

δ (1874·0)	Epoche 1800+	Zahl d. Beob.	Gewicht	Angenommene Position			
				α (1874·0)	Red. ad l. app.	δ (1874·0)	Red. ad l. app.
−6° 10′ 0″49	+44·0	1	0	21^h 21^m 23^{s}66	−0^{s}30	− 6° 9′ 59″1	−9″56
1·6	+45·22	2	0				
9 57·6	+62·62		1				
59·4	+64·37	2	1				
10 0·2	+93·70	2	1				
− 6 7 23·7		31	0	21 24 55·46	−0·32	− 6 7 27·8	−9·40
28·0	+51·8	65	1				
27·8	+60·5	62	1				
27·6	+82·14	43	1				
27·8	+83·52	36	1				
27·4	+88·27	49	1				
28·1	+93·43	40	1				
3 39 54·7	+21·7		0	21 15 53·24	0^{s}20	− 3 39 57·0	10″2
53·7	+48·75	3	0				
57·0	+72·78	4	1				
+32 30 47·6	+58·30		1	12 45 44·27		+32 30 47·6	
+32 58 7·1	− 5·76		0	12 47 6·37		+32 58 14·5	
14·5	+72·3	2	1				
+33 11 38·2	− 5·76		0	12 47 46·17		+33 11 34·5	
37·3	+28·27	1	0				
34·5	+82·3	2	1				
+35 13 33·6	− 5·71		1	12 53 0·37		+35 13 34·4	
35·2	+29·31		1				
34·4	+93·3	2	1				
+34 29 58·7	+58·34		1	13 1 54·34		+34 29 58·7	
+35 56 24·0	+84·0	3		13 7 39·63		+35 56 24·0	
+36 24 0·7	+86·7	4		13 7 40·34		+36 24 0·7	
+37 20 24·9	+29·33	3	0	13 14 52·86		+37 20 18·7	
18·7	+80·2	2	1				
+42 59 6·3	+29·43		0	14 45 11·98		+42 59 8·3	
8·3	+73·2	3	1				
+28° 50′ 55″6	+44·0	1	0	18^h 42^m 23^{s}69		+28° 50′ 57″2	
57·2	+82·3	3	1				

Zusammenstellung der Beobachtungen.

In der folgenden Tabelle finden sich die Beobachtungen dieses Kometen zusammengestellt, die in den »A. N.«, Bd. 84, 85, 86, in den »Monthly Not. R. Astr. Soc.«, XXXIV, und in den »Wiener Annalen«, Bd. XXIV und XXV, publiziert sind.

1874	M. Z. Berlin der Beobachtung	α app.	Par. α	dα B—R	δ app.	Par. δ	dδ B—R	Zahl der Vergleiche	Vergl. ✱
Athen A. N. Bd. 84 — Beobachter: J. F. Schmidt. Instrument: 6zölliger Refraktor (Ringmikrometer).									
April 24....	24·59842	20ʰ 29ᵐ 36ˢ45	—0ˢ50	+0ˢ48	+ 7° 19′ 23″6	+6″8	+ 7″5	4 : 4	69
Mai 6....	6·38449	18 33 45·81	—0·96	+0·07	+30 35 27·8	+6·4	— 10·8	4 : 4	52
» 6....	6·41351	18 33 21·07	—0·99	+0·26	+30 39 13·0	+9·68	+ 4·4	4 : 4	53
» 12....	12·33796	16 58 16·27	—1·03	+0·96	+40 9 53·7	+4·7	— 21·9	4 : 4	44
» 13....	13·31857	16 41 46·60	—1·03	+0·29	+41 5 46·2	+4·7	— 30·9	4 : 4	43
» 18....	18·35731	15 24 21·25	—0·55	+6·60	+43 9 1·0	0·0	+101·1	4 : 4	35
Juni 9....	9·36202	12 59 26·18	+0·20	—0·21	+35 14 1·0	+0·6	— 11·8	2 : 2	8
» 10....	10·36386	12 57 2·88	+0·21	—0·68	+34 52 49·4	+0·7	+ 6·1	4 : 4	7
» 11....	11·36108	12 54 51·62	+0·21	0·00	+34 32 9·6	+0·7	+ 18·4	4 : 4	5
» 12....	12·36223	12 52 47·88	+0·22	—0·78	+34 11 22·8	+0·8	— 2·1	4 : 4	4
Juni 13....	13·35888	12ʰ 50ᵐ 55ˢ26	+0ˢ21	+0ˢ22	+33° 51′ 49″4	+0″8	+ 22″0	4 : 4	4

Berlin A. N. Bd. 88

Beobachter: Müller. Instrument: 9zölliges Äquatoreal.

April 21....	21·62473	20ʰ 46ᵐ 5ˢ32	—0ˢ39	+0ˢ03	+ 3° 2' 33″1	+8″0	+ 4″0	18 : 6	84
» 23....	23·59349	20 35 33·93	—0·46	+0·01	+ 5 47 28·0	+9·4	— 0·6	—	73
Mai 2....	2·55355	19ʰ 22ᵐ 36ˢ36	—0ˢ52	—1ˢ23	+22° 25' 12″0	+9″1	+10″2	26 : 11	60

Hamburg A. N. Bd. 86

Beobachter: Rümker und Pechüle.

April 20....	20·63812	20ʰ 50ᵐ 50ˢ14	—0ˢ37	—0ˢ74	+ 1° 46' 40″4	+ 8″9	— 2″1	24 : 5	88
» 21....	21·60357	20 46 10·80	—0·42	—0·81	+ 3 0 46·6	+ 9·1	— 2·0	25 : 8	85
» 22....	22·63187	20 40 52·83	—0·38	—0·27	+ 4 24 29·2	+ 9·2	— 1·6	28 : 7	76
» 23....	23·62106	20 35 23·74	—0·40	—0·63	+ 5 49 49·2	+ 9·4	— 6·1	24 : 6	79
» 26....	26·63572	20 16 3·13	—0·36	—0·83	—	—	—	12	66
» 26....	26·63942	—	—	—	+10 42 1·9	+ 9·5	— 1·4	3	66
» 27....	27·59713	20 8 56·36	—0·45	+0·58	+12 24 41·6	+ 9·8	—13·9	20 : 5	65
» 30....	30·54229	19 43 31·18	—0·56	—0·15	+18 9 52·1	+10·2	— 8·5	17 : 6	62
Mai 2....	2·51965	19 22 59·90	—0·61	—0·47	—	—	—	14	61
» 2....	2·52685	—	—	—	+22 21 32·2	+10·0	— 2·0	5	61
» 5....	5·49528	18 46 10·49	—0·65	—0·39	+28 44 39·1	+ 9·2	— 6·5	26 : 6	58
» 6....	6·48697	18ʰ 32ᵐ 16ˢ50	—0ˢ65	—0ˢ60	—	—	—	4	55
Mai 6....	6·49027	—	—	—	+30° 48' 25″7	+ 8″8	— 6″4	1	55

1874	M. Z. Berlin der Beobachtung	α app.	Par. α	dα B−R	δ app.	Par. δ	dδ B−R	Zahl der Vergleiche	Vergl. ✶
Mai 6....	6·61105	18ʰ 30ᵐ 28ˢ85	−0ˢ20	−0ˢ19	+31° 3′ 28″7	+ 6″4	+12″9	16 : 4	51
» 13....	13·54164	16 38 1·55	−0·07	−0·60	+41 17 28·1	+ 3·2	+ 3·5	21 : 6	42
» 14....	14·52542	16 21 51·00	−0·08	+0·66	+41 59 15·8	+ 3·0	− 3·2	20 : 5	41
» 15....	15·59341	16 4 46·68	+0·32	+0·28	—	—	—	14	40
» 15....	15·59613	—	—	—	+42 32 34·0	+ 3·3	+ 3·5	4	40
» 18....	18·52411	15 21 57·98	+0·16	−0·78	+43 7 26·2	+ 2·5	+ 0·4	21 : 6	34
» 19....	19·52111	15 9 0·35	+0·19	+0·03	+43 4 29·2	+ 2·5	− 1·5	24 : 6	32
» 20....	20·47178	14 57 25·87	+0·23	+0·22	+42 56 21·0	+ 2·3	− 8·0	16 : 4	29
» 21....	21·58513	14 54 50·43	+0·48	−0·02	+42 41 43·0	+ 3·8	− 2·7	3 : 1	24
» 24....	24·49459	14 16 38·39	+0·34	+0·22	+41 44 47·5	+ 3·0	− 1·7	14 : 4	23
» 24....	24·52444	14 16 22·02	+0·24	−0·86	+41 44 9·7	+ 2·6	+ 0·9	13 : 4	23
» 25....	25·49699	14 8 20·43	+0·27	−0·29	+41 21 15·3	+ 2·7	+ 0·9	20 : 5	21
» 26....	26·50214	14 0 40·11	+0·30	−0·87	+40 56 22·9	+ 2·9	− 2·2	15 : 5	20
» 27....	27·51590	13 53 35·14	+0·34	+1·10	+40 30 52·4	+ 3·1	+16·8	4 : 2	19
» 31....	31·51131	13 30 36·61	+0·34	+0·65	+38 46 13·9	+ 3·3	−14·4	20 : 5	18
Juni 7....	7·51474	13 4 19·58	+0·32	+0·14	+35 55 17·8	+ 3·6	+ 5·9	16 : 4	12
» 8....	8·50779	13 1 37·61	+0·31	+0·81	+35 33 2·6	+ 3·5	+ 7·7	4 : 1	11
Juni 10....	10·50274	12ʰ 56 45ˢ30	+0ˢ30	+0ˢ80	+34° 49′ 29″6	+ 3″5	−14″6	16 : 4	9

Kiel A. N. Bd. 85

Beobachter: C. F. W. Peters.

Mai 6....	6·46904	18^{h} 32^{m} $33^{s}67$	$-0^{s}08$	$+1^{s}05$	$+30°$ 46' 3"4	+ 9"5	+ 7"4	—	57
„ 18....	18·48340	15 22 33·48	−0·03	+1·67	+43 7 32·3	+ 2·5	+ 7·5	—	36
Mai 19....	19·46959	15 9 $40^{s}99$	$-0^{s}03$	$+1^{s}47$	$+43°$ 4' 40"4	+ 2"5	+ 0"9	—	30

Kremsmünster A. N. Bd. 84 und 85.

Beobachter: G. Strasser.

April 12....	12·63824	21^{h} 20^{m} $17^{s}15$	$-0^{s}37$	$-0^{s}57$	$-6°$ 10' 46"7	+ 6"9	− 1"0	2	99
„ 20....	20·64261	20 50 48·89	−0·39	−0·75	+ 1 47 6·4	+ 8·2	+ 3·0	5	94
„ 21....	21·61088	20 46 8·24	−0·45	−1·22	+ 2 59 51·2	+ 8·4	−92·8	10	84
„ 22....	22·63953	20 40 49·96	−0·39	−0·67	+ 4 25 8·2	+ 8·4	− 2·0	6	76
„ 24....	24·58989	20 29 37·66	−0·50	−1·47	+ 7 18 26·6	+ 8·8	− 0·6	6	72
Mai 5....	5·40743	18 47 21·36	−0·83	−1·25	+28 33 37·6	+10·6	+ 1·0	10	58
„ 6....	6·46287	18 32 37·59	−0·77	−0·43	+30 45 13·0	+ 8·1	+ 0·7	8	49
„ 16....	16·41028	15 52 10·50	−0·48	−2·19	+42 50 8·5	+ 2·4	+19·4	6	39
„ 19....	19·49787	15 9 17·71	+0·16	−0·21	+43 4 53·4	+ 1·2	+13·3	4	33
„ 21....	21·52736	14 45 26·88	+0·37	−1·31	+42 42 50·0	+ 1·8	+ 9·3	6	25
Juni 6....	6·46661	13 7 23·44	+0·31	−1·42	+36 19 5·5	+ 2·5	−13·3	6	14
Juni 6....	6·51468	13^{h} 7^{m} $15^{s}74$	$+0^{s}38$	$-2^{s}03$	$+36°$ 17' 53·8	+ 3"3	17"1	3	10

1874	M. Z. Berlin der Beobachtung	α app.	Par. α	dα B—R	δ app.	Par. δ	dδ B—R	Zahl der Vergleiche	Vergl. *
Leiden A. N. Bd. 89 und 107. Beobachter: E. F. van de Sande Bakhuyzen. Instrument: 6zölliger Refraktor.									
April 20....	20·66334	20h 50m 43s15	—0s37	— 0s67	+ 1° 48' 37"6	+ 8"7	+ 1"9	16 : 8	88
» 20....	20·67614	20 50 38·24	—0·34	— 1·96	+ 1 49 20·3	+ 8·7	—12·9	4 : 2	88
» 21....	21·64211	20 45 59·91	—0·40	— 0·15	+ 3 3 54·5	+ 8·9	+ 2·9	18 : 10	85
» 21....	21·65470	20 45 55·67	—0·38	— 0 60	+ 3 4 55·6	+ 8·9	+ 4·2	25 : 10	85
» 22....	22·63827	20 40 50·91	—0·41	— 0·15	+ 4 24 59·6	+ 9·1	— 3·6	20 : 10	80
» 23....	23·65481	20 35 12·31	—0·38	— 0·41	+ 5 52 55·2	+ 9·1	— 0·5	25 : 8	74
» 26....	26·62055	20 16 10·25	—0·45	— 0·32	+10 40 9·3	+ 9·5	+ 4·7	22 : 10	66
» 28....	28·64905	20 0 29·36	—0·37	0·59	+14 23 24·1	+ 9·2	— 2·7	22 : 9	64
» 29....	29·59781	19 52 18·35	—0·50	+ 0·49	+16 15 3·3	+ 9·5	+ 3·0	24 : 6	63
Mai 2....	2·62542	19 21 48·63	—0·37	— 0·48	+22 34 17·0	+ 8·2	— 2·9	29 : 10	59
» 5....	5·57101	18 45 8 36	—0·49	— 0·38	+28 54 20·9	+ 8·6	+ 0·6	30 : 13	56
» 6....	6·55439	18 31 17·92	—0·52	— 0·66	+30 56 16·5	+ 7·1	— 5·8	29 : 9	50
» 10....	10·50906	17 29 2·51	—0·52	— 0·43	+37 54 1·6	+ 5·2	+ 4·2	29 : 10	46
» 11....	11·50383	17 12 19·50	—0·48	— 0·53	+39 13 18·8	+ 4·6	+ 5·3	21 : 8	45
» 16....	16·45860	15 52 13·58	—0·35	+44·78	+42 50 39·9	+ 2·8	+ 1·7	11 : 6	39
» 19....	19·47364	15 9 35·36	—0·09	— 1·15	+43 4 57·2	+ 2·0	+ 9·6	30 : 10	31
» 20....	20·59869	14 55 55·59	+0·47	— 0·60	+42 54 54·7	+ 3·3	— 8·7	20 : 7	27
Mai 25....	25·59351	14h 7m 34s48	+0s49	— 0s22	+41° 18' 23"7	+ 4"0	—29"1	14 : 7	22

Leipzig A. N. Bd. 85.

Beobachter: C. Bruhns und G. Koch.

April 17....	17·60800	21ʰ 3ᵐ 40ˢ58	—0ˢ40	0ˢ72	— 1° 40' 15"3	+7"9	+ 1"4	18 : 6	96
» 21....	21·62315	20 46 5·79	—0·41	+ 0·03	+ 3 2 13·6	+8·8	— 8·1	20 : 10	85
» 22....	22·61556	20 40 57·66	—0·42	— 0·70	+ 4 23 4·4	+9·0	— 4·6	24 : 8	77
» 23....	23·59787	20 35 31·72	—0·45	— 0·67	+ 5 47 48·6	+9·2	— 3·4	24 : 8	73
» 24....	24·58594	20 29 40·26	—0·48	— 0·31	+ 7 17 53·2	+9·3	— 10·0	18 : 6	69
» 26....	26·56211	20 16 35·42	—0·53	— 0·24	+10 33 50·8	+9·7	— 6·9	12 : 4	66
Mai 6....	6·54979	18 31 22 35	—0·46	— 0·17	+30 55 55·7	+6·6	+ 6·5	15 : 5	54
» 19....	19·57284	15 8 21·01	+0·44	— 0·08	+43 4 2·1	+2·9	— 9·4	9 : 3	32
» 20....	20·56626	14 57 13·79	+0·44	+54·85	+42 57 24·1	+2·9	+119·3	15 : 5	28
» 21....	21·52987	14 45 26·94	+0·34	+ 0·34	+42 42 39·5	+2·4	+ 1·6	15 : 5	25
Juni 12....	12·50078	12ʰ 52ᵐ 31ˢ24	+0ˢ30	— 1ˢ04	+34° 8' 48"4	+1"7	+ 11"6	4 : 0	4

Mailand A. N. Bd. 83

Beobachter: W. Tempel.

April 18....	18·62989	20ʰ 59ᵐ 38ˢ72	—0ˢ45	+ 0ˢ77	— 0° 34' 27"4	+7"6	+ 4"5	2 : 1	95
» 19....	19·61015	20 55 30·04	—0·48	+ 0·74	+ 0 32 16·1	+7·7	— 4·0	8	91
» 20....	20·66806	20 50 43·33	—0·38	+ 0·82	+ 1 48 50·0	+7·8	— 7·6	2 : 3	88
» 21....	21·66699	20 45 53·04	—0·38	+ 0·45	+ 3 5 33·6	+7·9	—17·1	6	84
» 25....	25·65723	20 22 19·68	—0·38	+ 0·44	+ 9 1 31·8	+8·0	— 9·2	6	68
April 26....	26·63711	20ʰ 16ᵐ 4ˢ48	—0ˢ44	+ 1ˢ03	+10° 41' 43"7	+8"1	— 6"5	10	67

1874	M. Z. Berlin der Beobachtung	α app.	Par. α	dα B—R	δ app.	Par. δ	dδ B—R	Zahl der Vergleiche	Vergl. ★
Marseille Monthly Not. R. Astr. Soc. XXXIV. Beobachter: M. Stéphan.									
April 15....	15·67475	21^h 10^m 41^{s}81	—0^{s}38	—0^{s}71	— 3° 34' 42"8	+6"9	—11"6	?	100
Neapel A. N. Bd. 83. Beobachter: A. de Gasparis.									
April 19....	19·58679	20^h 55^m 36^{s}13	—0^{s}52	+0^{s}68	+ 0° 30' 19"2	+7"1	—23"2	—	86
» 19....	19·62214	20 55 23·37	—0·47	—2·79	+ 0 32 44·3	+7·1	—26·7	—	93
» 19....	19·63760	20 55 21·13	—0·45	—0·95	+ 0 33 51·4	+7·1	—25·0	—	86
» 19....	19·65051	20 55 18·63	—0·42	—0·04	+ 0 35 21·4	+7·1	+10·6	—	86
» 19....	19·65651	20 55 19·07	—0·42	+0·41	+ 0 35 14·3	+7·1	+ 3·5	—	93
» 20....	20·57443	20 51 7·22	—0·55	—1·64	+ 1 41 54·0	+7·3	— 5·6	—	89
» 20....	20·58222	20 51 4·82	—0·54	—1·87	+ 1 42 10·0	+7·2	—24·4	—	89
» 20....	20·58961	20 51 3·32	—0·53	—1·30	+ 1 43 10·0	+7·2	+ 2·7	—	89
» 20....	20·59798	20 51 1·52	—0·52	—0·74	+ 1 43 57·1	+7·2	— 2·7	—	89
» 20....	20·60560	20 50 59·52	—0·51	—0·60	+ 1 44 10·0	+7·2	— 8·8	—	89
April 21....	21·61630	20^h 46^m 7^{s}64	—0^{s}49	—0^{s}25	+ 3° 1' 37"5	+7"3	—13"2	—	81

April 21....	21·62457	20ʰ 46ᵐ 6ˢ14	—0ˢ48	+0ˢ74	+ 3° 2' 5"5	+7"3	—24"4	—	81
„ 21....	21·63306	20 46 1·84	—0·46	—0·99	+ 3 2 57·5	+7·3	—12·8	—	81
„ 21....	21·64089	20 46 0·54	—0·44	+0·07	+ 3 3 33·5	+7·2	—14·2	—	81
„ 21....	21·64707	20 45 58·64	—0·42	+0·03	+ 3 3 43·5	+7·2	—33·4	—	81
„ 22....	22·62340	20 40 55·44	—0·48	—0·47	+ 4 23 24·6	+7·4	—25·4	—	82
„ 22....	22·62762	20 40 54·70	—0·47	+0·15	+ 4 24 26·1	+7·3	+14·8	—	83
„ 22....	22·63471	20 40 52·30	—0·45	+0·06	+ 4 24 22·1	+7·3	—25·0	—	83
„ 22....	22·65187	20 40 47·44	—0·41	+0·74	+ 4 26 20·0	+7·3	+ 6·5	—	75
April 22....	22·65785	20ʰ 40ᵐ 44ˢ64	—0ˢ39	—0ˢ12	+ 4° 26' 32"0	+7"2	—11"7	—	75

Pola A. N. Bd. 87

Beobachter: J. Palisa.

April 19....	19·64393	20ʰ 55ᵐ 20ˢ36	—0ˢ41	—0ˢ02	+ 0° 34' 52"9	+7"8	+10"5	10	92
„ 20....	20·59739	20 51 2·02	—0·50	—0·38	+ 1 43 57·1	+7·9	+15·6	10	87
„ 21....	21·58962	20 46 15·41	—0·52	—0·47	+ 2 59 44·7	+8·1	+ 1·2	10	85
„ 24....	24·58361	20 29 39·93	—0·55	—1·56	+ 7 18 20·9	+8·5	+29·9	4	70
„ 24....	24·58361	20 29 42·29	—0·55	+0·80	+ 7 17 26·4	+8·5	—24·6	4	71
Juni 11....	11·41077	12 54 44·06	+0·23	—1·21	+34 30 52·5	+1·7	+ 3·9	7	6
„ 16....	16·49909	12 45 48·12	+0·33	+0·57	+32 52 14·8	+3·0	+ 4·4	10	3
Juni 17....	17·46585	12ʰ 44ᵐ 26ˢ86	+0ˢ26	—3ˢ20	+32° 34' 52"9	+2"1	—41"0	10	2

1874	M. Z. Berlin der Beobachtung	α app.	Par. α	dα B—R	δ app.	Par. δ	dδ B—R	Zahl der Vergleiche	Vergl. ✱
Straßburg A. N. Bd. 83 — Beobachter: Winnecke.									
April 19....	19·63626	20h 55m 22s71	—0s42	+0s31	+ 0° 34′ 9″1	+ 8″1	— 0″7	—	91
Wien A. N., Bd. 85 und Wiener Annalen, Bd. XXIV. — Beobachter: Schulhof und Weiß. — Instrument: 6zölliger Refraktor.									
April 12....	12·63923	21h 21m 17s33	—0s36	—0s21	— 6° 10′ 42″7	+6″9	+ 0″1		98
» 15....	15·62601	21 10 51·56	—0·36	—0·96	— 3 37 13·7	+7·5	+ 1·4		97
» 15....	15·64717	21 10 48·72	—0·33	+0·57	— 3 36 9·1	+7·5	— 5·1	6	97
» 20....	20·60701	20 50 59·23	—0·40	—0·39	+ 1 44 20·8	+8·3	— 3·2		90
» 20....	20·63131	20 50 53·89	—0·44	+1·02	+ 1 46 15·1	+8·3	+ 2·6	6	90
» 21....	21·61624	20 46 9·02	—0·43	+1·19	+ 3 1 52·0	+8·4	+ 2·7	10	84
» 22....	22·60937	20 41 1·03	—0·44	+0·66	+ 4 22 39·2	+8·6	+ 1·0	10	78
April 24....	24·63005	20h 29m 24s38	—0s39	+0s20	+ 7° 22′ 12″5	+8″6	— 0″2	8	72

Mai	6....	6·43790	18ʰ	33ᵐ	0ˢ28	—0ˢ81	+0ˢ66	+30°	42'	1"3	+8"8	— 7"1	5	55
»	7....	7·46335	18	17	51·92	—0·78	+0·32	+32	44	52·5	+7·6	+34·9	6	47
»	7....	7·46335	18	17	51·95	—0·78	+0·35	+32	44	48·7	+7·6	+31·1	6	48
»	16....	16·43449	15	51	51·95	—0·28	+1·40	+42	50	9·6	+1·6	— 5·3	3	37
»	16....	16·44600	15	51	40·96	—0·33	+0·76	+42	50	20·4	+1·8	— 5·9	3	38
»	19....	19·42216	15	10	15·59	—0·19	—0·09	+43	5	6·5	+1·3	+ 1·1	3	32
»	21....	21·38849	14	47	1·75	—0·23	+1·77	+42	44	50·4	+1·4	+ 4·9	6	26
Juni	3....	3·45265	13	17	48·78	+0·20	—0·01	+37	32	4·9	+2·3	+17·1	4	17
»	3....	3·46819	13	17	45·79	+0·33	+0·73	+37	31	15·1	+2·5	— 9·4	4	16
»	5....	5·45865	13	10	37·68	+0·31	+0·02	+36	43	8·2	+2·5	+ 5·9	6	15
»	6....	6·45619	13	7	25·59	+0·31	—1·20	+36	19	28·0	+2·5	— 5·4	10	13
»	7....	7·44649	13	4	31·54	+0·29	+0·45	+35	56	29·0	+2·4	—17·3	8	12
»	10....	10·45101	12	56	51·66	+0·29	+0·11	+34	50	28·4	+2·5	—22·5	8	7
»	16....	16·46089	12	45	51·96	+0·28	+1·05	+32	52	28·1	+2·8	—24·2	6	1
Mai	17....	17·45164	12ʰ	44ᵐ	27ˢ88	+0ˢ27	+0ˢ05	+32°	34'	39"8	+2"7	—24"3	8	2

Die folgende Tabelle der der Zeit nach geordneten Beobachtungen enthält in Kolumne 1 den Beobachtungsort und in Kolumne 2 die mittlere Berliner Zeit der Beobachtung, die mit jedenfalls hinreichender Genauigkeit auf zwei Dezimalen in Tagesbruchteilen angegeben ist. In Kolumne 3 und 6 findet sich die beobachtete Position des Kometen bezogen auf den Erdmittelpunkt, in Kolumne 4 und 7 der Ephemeridenort, in Kolumne 5 und 8 endlich sind die Differenzen Beobachtung—Rechnung als $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ angesetzt, während die vorletzte Kolumne die Nummer des zur Beobachtung gehörigen Vergleichssternes und die letzte Kolumne die Nummer der Beobachtung angibt. Von der Bildung des $\Delta\alpha \cos\delta$ wurde Abstand genommen, da die Deklination während des Zeitraumes, über den sich die einzelnen Normalorte erstrecken, nur verhältnismäßig geringen Änderungen unterworfen ist.

Bemerkungen zu den Beobachtungen.

Bei den Beobachtungen aus Neapel sind die Differenzen ☄—* nur auf Zehntel Zeitsekunden, respektive ganze Bogensekunden angegeben.

Die Beobachtungen 31, 103, 104, 114 und 148 weichen bedeutend von der Ephemeride ab, ohne daß die Ursache davon aufgedeckt werden konnte; daher blieben die genannten Beobachtungen bei der Bildung der Normalorte unberücksichtigt.

Beobachtung 5: Die Publikation der Beobachtung enthält nicht die Differenzen ☄—*; daher wurden die vom Beobachter gegebenen Positionen für den Vergleich benützt.

» 9: Vom Beobachter wurde ein falscher Vergleichsstern angegeben.

» 59: Wegen Mondschein und Dunst war der Komet nur unsicher einzustellen.

» 63: Statt der angegebenen Differenz ☄—* in AR. $+2^m\,43^s35$ wurde $+2^m\,13^s35$ gelesen.

» 66 und 67: Beobachtung in der Morgendämmerung angestellt; Komet ziemlich schwach.

Beobachtung 68: Das Zeichen der angegebenen Differenz ☌—✶ in AR. wurde geändert.

» 74: Das Zeichen der angegebenen Differenz ☌—✶ in D. wurde geändert.

» 80: Die Beobachtungszeit wurde um 1 Stunde korrigiert.

» 93: Vom Beobachter wurde ein falscher Vergleichsstern angegeben.

» 111: Komet sehr verwaschen.

» 112: Komet war sehr schwach und ohne Kern; da er sehr nahe dem Zenith stand, gelangen die Einstellungen weniger gut.

» 114: Komet schwach und verschwommen.

» 122: Heller Mondschein zur Zeit der Beobachtung.

» 127 und 128: Der Himmel nicht ganz rein, Komet schwach.

» 129: Die Beobachtung wurde durch die Nähe eines Sternchens $11 \cdot 5^m$ sehr erschwert.

» 133: Komet sehr schwach. Beobachtung unsicher.

» 135 und 139: Komet ist in der hellen Dämmerung an der Grenze der Sichtbarkeit.

» 136, 140, 142 und 144: Am Refraktor erscheint der Komet jetzt sehr bleich, kaum verdichtet und kernlos; die Passagen sind daher bereits sehr schwer zu beobachten.

» 138: Nicht rein. Komet steht einem Sterne $9 \cdot 5^m$ zu nahe. Beobachtung unsicher.

» 143: Komet so verschwommen, daß er nicht beobachtet werden konnte. Die Differenz in Deklination nur auf Bogensekunden genau gegeben.

» 146: Das Zeichen der Differenz ☌—✶ in AR. wurde geändert.

» 148: Beobachtungszeit wurde um +1 Stunde korrigiert.

Beobachtungs-ort	M. Z. Berlin der Beob.	Beob. α geoz.	$\alpha_{Eph.}$	Δα	Beob. δ geoz.	$\delta_{Eph.}$	Δδ	Vergl. *	Nr. d. Beob.
Kremsmünster	April 12·64	21^h 20^m 16^{s}78	21^h 20^m 17^{s}35	—0^{s}57	— 6° 10' 39"8	— 6° 10' 38"8	— 1"0	99	1
Wien	12·64	21 16·97	20 17·18	—0·21	6 10 35·8	6 10 35·9	+ 0·1	98	2
»	15·63	10 51·20	10 52·16	—0·96	3 37 6·2	3 37 7·6	+ 1·4	97	3
»	15·65	10 48·39	10 47·82	+0·57	36 1·6	35 56·5	— 5·1	97	4
Marseille.....	15·67	10 41·43	10 42·14	—0·71	3 34 35·9	3 34 24·3	—11·6	100	5
Leipzig	17·61	21 3 40·18	21 3 40·90	—0·72	1 40 7·4	1 40 8·8	+ 1·4	96	6
Mailand	18·63	20 59 38·27	20 59 37·50	+0·77	— 0 34 19·8	— 0 34 24·3	+ 4·5	95	7
Neapel	19·59	55 35·61	55 34·93	+0·68	+ 0 30 26·3	+ 0 30 49·5	—23·2	86	8
Mailand	19·61	55 29·56	55 28·82	+0·74	32 23·8	32 27·8	— 4·0	91	9
Neapel	19·62	55 22·90	55 25·69	—2·79	32 51·4	33 18·1	—26·7	93	10
Straßburg	19·64	55 22·29	55 21·98	+0·31	34 17·2	34 17·9	— 0·7	91	11
Neapel	19·64	55 20·68	55 21·63	—0·95	33 58·5	34 23·5	—25·0	86	12
Pola	19·64	55 19·95	55 19·97	—0·02	35 0·7	34 50·2	+10·5	92	13
Neapel	19·65	55 18·65	55 18·24	+0·41	35 21·4	35 17·9	+ 3·5	93	14
»	19·65	55 18·21	55 18·25	—0·04	0 35 28·5	0 35 17·9	+10·6	86	15
»	20·57	51 6·67	51 8·31	—1·64	1 42 1·3	1 42 6·9	— 5·6	89	16
»	20·58	51 4·28	51 6·15	—1·87	42 17·2	42 41·6	—24·4	89	17
»	April 20·59	20^h 51^m 2^{s}79	20^h 51^m 4^{s}09	—1^{s}30	+ 1° 43' 17"2	+ 1° 43' 14"5	+ 2"7	89	18

Pola	April 20·60	20^h 51^m 1^s52	51^m 1^s90	0^s38	+ 1° 44' $5''0$	+ 1° 43' $49''4$	$+15''6$	87	19
Neapel	20·60	51 1·00	51 1·74	—0·74	43 49·2	43 51·9	— 2·7	89	20
»	20·61	50 59·01	50 59·61	—0·60	44 17·2	44 26·0	— 8·8	89	21
Wien........	20·61	50 58·83	50 59·22	—0·39	44 29·1	44 32·3	— 3·2	90	22
»	20·63	50 53·45	50 52·43	+1·02	46 23·4	46 20·8	+ 2·6	90	23
Hamburg	20·64	50 49·77	50 50·51	—0·74	46 49·3	46 51·4	— 2·1	88	24
Kremsmünster	20·64	50 48·50	50 49·25	—0·75	47 14·6	47 11·6	+ 3·0	94	25
Leiden.......	20·66	50 42·78	50 43·45	—0·67	48 46·3	48 44·4	+ 1·9	88	26
Mailand	20·67	50 42·95	50 42·13	+0·82	48 57·8	49 5·4	— 7·6	88	27
Leiden.......	20·68	50 37·90	50 39·86	—1·96	1 49 29·0	1 49 41·9	—12·9	88	28
Pola	21·59	46 14·89	46 15·36	—0·47	2 59 52·8	2 59 51·6	+ 1·2	85	29
Hamburg.....	21·60	46 10·38	46 11·19	—0·81	3 0 55·7	3 0 57·7	— 2·0	85	30
Kremsmünster	21·61	46 7·97	46 9·01	[—1·22]	2 59 59·6	1 32·4	[— 92·8]	84	31
Wien........	21·62	46 8·59	46 7·40	+1·19	3 2 0·4	1 57·7	+ 2·7	84	32
Neapel	21·62	46 7·15	46 7·40	—0·25	1 44·8	1 58·0	—13·2	81	33
Leipzig	21·62	46 5·38	46 5·35	+0·03	2 22·4	2 30·5	— 8·1	85	34
Neapel	21·62	46 5·66	46 4·92	+0·74	2 12·8	2 37·2	—24·4	81	35
Berlin	21·62	46 4·93	46 4·90	+0·03	2 42·0	2 38·0	+ 4·0	84	36
Neapel	21·63	46 1·38	46 2·37	—0·99	3 4·8	3 17·6	—12·8	81	37
»	April 21·64	20^h 46^m 0^s10	46^m 0^s03	$+0^s07$	+ 3° 3' $40''7$	+ 3° 3' $54''9$	$—14''2$	81	38

Beobachtungsort	M. Z. Berlin der Beob.	Beob. α geoz.	$\alpha_{Eph.}$	Δα	Beob. δ geoz.	$\delta_{Eph.}$	Δδ	Vergl. *	Nr. d. Beob.
Leiden	April 21·64	20h 45m 59s51	45m 59s66	—0s15	+ 3° 4' 3"4	+ 3° 4' 0"5	+ 2"9	85	39
Neapel	21·65	45 58·22	45 58·19	+0·03	3 50·7	4 24·1	—33·4	81	40
Leiden	21·65	45 55·29	45 55·89	—0·60	5 4·5	5 0·3	+ 4·2	85	41
Mailand	21·67	45 53·66	45 52·21	+0·45	3 5 41·5	3 5 58·6	—17·1	84	42
Wien	22·61	41 0·59	40 59·93	+0·66	4 22 47·8	4 22 46·8	+ 1·0	78	43
Leipzig	22·62	40 57·24	40 57·94	—0·70	23 13·4	23 18·0	— 4·6	77	44
Neapel	22·62	40 54·96	40 55·43	—0·47	23 32·0	23 57·4	—25·4	82	45
»	22·63	40 54·23	40 54·08	+0·15	24 33·4	24 18·6	+14·8	83	46
Hamburg	22·63	40 52·45	40 52·72	—0·27	24 38·4	24 40·0	— 1·6	76	47
Neapel	22·63	40 51·85	40 51·79	+0·06	24 29·4	24 54·4	—25·0	83	48
Leiden	22·64	40 50·50	40 50·65	—0·15	25 8·7	25 12·3	— 3·6	80	49
Kremsmünster	22·64	40 49·57	40 50·24	—0·67	25 16·6	25 18·6	— 2·0	76	50
Neapel	22·65	40 47·03	40 46·29	+0·74	26 27·3	26 20·8	+ 6·5	75	51
»	22·66	40 44·25	40 44·37	—0·12	4 26 39·2	4 26 50·9	—11·7	75	52
Berlin	23·59	35 33·47	35 33·46	+0·01	5 47 37·4	5 47 38·0	— 0·6	73	53
Leipzig	23·60	35 31·27	35 31·94	—0·67	47 57·8	48 1·2	— 3·4	73	54
Hamburg	23·62	35 23·34	35 23·97	—0·63	49 58·6	50 4·7	— 6·1	79	55
Leiden	April 23·65	20h 35m 11s93	35m 12s34	—0s41	+ 5° 53' 4"3	+ 5° 53' 4"8	— 0"5	74	56

Pola	April	24·58	20h	29m	39s38	29m	40s94	1s56	+ 7°	18'	29"4	+ 7°	17'	59"5	+29"9	70	57
»		24·58		29	41·74	29	40·94	+0·80		17	34·9		17	59·5	−24·6	71	58
Leipzig		24·59		29	39·78	29	40·09	−0·31		18	2·5		18	12·5	−10·0	69	59
Kremsmünster		24·59		29	37·16	29	38·63	−1·47		18	34·4		18	35·0	− 0·6	72	60
Athen		24·60		29	35·95	29	35·47	+0·48		19	30·4		19	22·9	+ 7·5	69	61
Wien........		24·63		29	23·99	29	23·79	+0·20	7	22	21·1	7	22	21·3	− 0·2	72	62
Mailand		25·66		22	19·30	22	18·86	+0·44	9	1	39·8	9	1	49·0	− 9·2	68	63
Leipzig		26·56		16	34·89	16	35·13	−0·24	10	34	0·5	10	34	7·4	− 6·9	66	64
Leiden.......		26·62		16	9·80	16	10·12	−0·32		40	18·8		40	14·1	+ 4·7	66	65
Hamburg		26·64		16	2·77	16	3·60	−0·83		—			—		—	66	66
Mailand		26·64		16	4·04	16	3·01	+1·03		41	51·8		41	58·3	− 6·5	67	67
Hamburg		26·64		—		—		—	10	42	11·4	10	42	12·8	− 1·4	66	68
»		27·60		8	55·91	8	55·33	+0·58	12	24	51·4	12	25	5·3	−13·9	65	69
Leiden.......		28·65	20	0	28·99	0	29·58	−0·59	14	23	33·3	14	23	36·0	− 2·7	64	70
»		29·60	19	52	17·85	52	17·36	+0·49	16	15	12·8	16	15	9·8	+ 3·0	63	71
Hamburg		30·54		43	30·62	43	30·77	−0·15	18	10	2·3	18	10	10·8	− 8·5	62	72
»	Mai	2·52		22	59·29	22	59·76	−0·47		—			—		—	61	73
»		2·53		—		—		—	22	21	42·2	22	21	44·2	− 2·0	61	74
Berlin		2·55		22	35·84	22	37·07	−1·23		25	21·1		25	10·9	+10·2	60	75
Leiden.......	Mai	2·63	19h	21m	48s26	21m	48s74	−0s48	+22°	34'	25"2	+22°	34'	28"1	− 2"9	59	76

Beobachtungs-ort	M. Z. Berlin der Beob.	Beob. α geoz.	$\alpha_{Eph.}$	Δα	Beob. δ geoz.	$\delta_{Eph.}$	Δδ	Vergl. ✱	Nr. d. Beob.
Kremsmünster	Mai 5·41	18h 47m 20s53	18h 47m 21s78	—1s25	+28° 33' 48"2	+28° 33' 47"2	+ 1"0	58	77
Hamburg	5·50	46 9·84	46 10·23	—0·39	44 48·3	44 54·8	— 6·5	58	78
Leiden.......	5·57	45 7·87	45 8·25	—0·38	28 54 29·5	28 54 28·9	+ 0·6	56	79
Athen	6·38	33 44·85	33 44·78	+0·07	30 35 34·2	30 35 45·0	—10·8	52	80
»	6·41	33 29·08	33 19·82	+0·26	39 22·7	39 18·3	+ 4·4	53	81
Wien........	6·44	32 59·47	32 58·81	+0·66	42 10·1	42 17·2	— 7·1	55	82
Kremsmünster	6·46	32 36·82	32 37·25	—0·43	45 21·1	45 20·4	+ 0·7	49	83
Kiel.........	6·47	32 32·99	32 31·94	+1·05	46 12·9	46 5·5	+ 7·4	57	84
Hamburg	6·49	32 15·85	32 16·45	—0·60	—	—	—	55	85
»	6·49	—	—	—	48 34·5	48 40·9	— 6·4	55	86
Leipzig	6·55	31 21·89	31 22·06	—0·17	56 2·3	55 55·8	+ 6·5	54	87
Leiden.......	6·55	31 17·40	31 18·06	—0·66	30 56 23·6	30 56 29·4	— 5·8	50	88
Hamburg	6·61	30 28·65	30 28·84	—0·19	31 3 35·1	31 3 22·2	+12·9	51	89
Wien.......	7·46	17 51·14	17 50·82	+0·32	32 45 0·1	32 44 25·2	+34·9	47	90
»	7·46	18 17 51·17	18 17 50·82	+0·35	32 44 56·3	32 44 25·2	+31·1	48	91
Leiden.......	10·51	17 29 1·99	17 29 2·42	—0·43	37 54 11·8	37 54 7·8	+ 4·2	46	92
»	Mai 11·50	17h 12m 19s02	17h 12m 19s55	—0s53	+39° 13' 23"4	+39° 13' 18"1	+ 5"3	45	93

Athen	Mai	12·34	16ʰ	58ᵐ	15ˢ24	16ʰ	58ᵐ	14ˢ28	+ 0ˢ96	+40°	9'	58"4	+40°	10'	20"3	— 21"9	44	94
"		13·32		41	45·57		41	45·28	+ 0·29	41	5	50·9	41	6	21·8	— 30·9	43	95
Hamburg		13·54		38	1·48		38	2·08	— 0·60		17	31·3		17	27·8	+ 3·5	42	96
"		14·53		21	50·92		21	50·26	+ 0·66	41	59	18·8	41	59	22·0	— 3·2	41	97
"		15·59	16	4	47·00	16	4	46·72	+ 0·28		—			—		—	40	98
"		15 60		—			—		—	42	32	37·3	42	32	33·8	+ 3·5	40	99
Kremsmünster		16·41	15	52	10·02	15	52	12·21	— 2·19		50	10·9		49	51·5	+ 19·4	39	100
Wien........		16·43		51	51·67		52	50·27	+ 1·40		50	11·2		50	16·5	— 5·3	37	101
"		16·45		51	46·63		51	39·87	+ 0·76		50	22·2		50	28·1	— 5·9	38	102
Leiden.......		16·46		52	13·23		51	28·45	[+44·78]	42	50	42·7	42	50	41·0	[+ 1·7]	39	103
Athen		18·36		24	20·70		24	14·10	[+ 6·60]	43	9	1·0	43	7	19·9	[+101·1]	35	104
Kiel		18·48		22	33·45		22	31·78	+ 1·67		7	34·8		7	27·3	+ 7·5	36	105
Hamburg		18·52		21	58·14		21	58·92	— 0·78		7	28·7		7	28·3	+ 0·4	34	106
Wien........		19·42		10	15·40		10	15·49	— 0·09		5	7·8		5	6·7	+ 1·1	32	107
Kiel		19·47		9	40·96		9	39·49	+ 1·47		4	51·9		4	51·0	+ 0·9	30	108
Leiden.......		19·47		9	35·27		9	36·49	— 1·15		4	59·2		4	49·6	+ 9·6	31	109
Kremsmünster		19·50		9	17·87		9	18·08	— 0·21		4	54·6		4	41·3	+ 13·3	33	110
Hamburg		19·52		9	0·54		9	0·51	+ 0·03		4	31·7		4	33·2	— 1·5	32	111
Leipzig		19·57	15	8	21·45	15	8	21·53	— 0·08	43	4	5·0	43	4	14·4	— 9·4	32	112
Hamburg ...		20·47	14	57	26·10	14	57	25·88	+ 0·22	42	56	23·3	42	56	31·3	— 8·0	29	113
Leipzig	Mai	20·57	14ʰ	57	ᵐ14ˢ23	14ʰ	56ᵐ	19ˢ38	[+54ˢ85]	+42°	57'	27"0	+42°	55ᵐ	28"7	[+119"3]	28	114

Beobachtungs-ort	M. Z. Berlin der Beob.	Beob. α gecz.	$\alpha_{Eph.}$	Δα	Beob. δ gecz.	$\delta_{Eph.}$	Δδ	Vergl. *	Nr. d. Beob.
Leiden	Mai 20·60	14ʰ 55ᵐ 56ˢ06	14ʰ 55ᵐ 56ˢ66	−0ˢ60	+42° 54′ 58″0	+42° 55′ 6″7	− 8″7	27	115
Wien	21·39	47 1·52	46 59·75	+1·77	44 51·8	44 46·9	+ 4·9	26	116
Kremsmünster	21·53	45 27·25	45 28·56	−1·31	42 51·8	42 42·5	+ 9·3	25	117
Leipzig	21·53	45 27·28	45 26·94	+0·34	42 41·9	42 40·3	+ 1·6	25	118
Hamburg	21·59	44 50·91	44 50·93	−0·02	42 41 46·8	42 41 49·5	− 2·7	24	119
Hamburg	24·49	16 38·73	16 38·51	+0·22	41 44 50·5	41 44 52·2	− 1·7	23	120
»	24·52	16 22·26	16 23·12	−0·86	41 44 12·3	44 11·4	+ 0·9	23	121
»	25·50	8 20·70	8 20·99	−0·29	41 21 18·0	21 17·1	+ 0·9	21	122
Leiden	25·59	7 34·97	7 35·19	−0·22	41 18 27·7	18 56·8	−29·1	22	123
Hamburg	26·50	14 0 40·41	14 0 41·28	−0·87	40 56 25·8	56 28·0	− 2·2	20	124
»	27·52	13 53 35·48	13 53 34·38	+1·10	40 30 55·5	30 38·7	+16·8	19	125
»	31·51	30 36·95	30 36·30	+0·65	38 46 17·2	46 31·6	−14·4	18	126
Wien	Juni 3·45	17 48·98	17 48·99	−0·01	37 32 7·2	31 50·1	+17·1	17	127
»	3·47	17 46·12	17 45·39	+0·73	37 31 17·6	31 27·0	− 9·4	16	128
»	5·46	10 37·99	10 37·97	+0·02	36 43 10·7	43 4·8	+ 5·9	15	129
»	Juni 6·46	13ʰ 7ᵐ 25ˢ90	13ʰ 7ᵐ 27ˢ10	−1ˢ20	+36° 19′ 30″5	+36° 19′ 35″9	− 5″4	13	130

Kremsmünster	Juni	6·47	13ʰ	7ᵐ	23ˢ75	13ʰ	7ᵐ	25ˢ17	—1·42	+36°	19'	8"0	+36°	19'	21"3	13"3	14	131
»		6·51		7	16·12		7	16·35	—0·23	36	17	57·1	36	18	14·2	—17·1	10	132
Wien		7·45		4	31·83		4	31·38	+0·45	35	56	31·4	35	56	48·7	—17·3	12	133
Hamburg		7·51		4	19·90		4	19·76	+0·14		55	21·4		55	15·5	+ 5·9	12	134
Hamburg		8·51	13	1	37·92	13	1	37·11	+0ˢ81		33	6·1		32	58·4	+ 7·7	11	135
Athen		9·36	12	59	26·38	12	59	26·59	—0·21	35	14	1·6	35	14	13·4	—11·8	8	136
»		10·36		57	3·09		57	3·77	—0·68	34	52	50·1	34	52	44·0	+ 6·1	7	137
Wien		10·45		56	51·95		56	51·84	+0·11		50	30·9		50	53·4	—22·5	7	138
Hamburg		10·50		56	45·60		56	44·80	+0·80		49	33·1		49	47·7	—14·6	9	139
Athen		11·36		54	51·83		54	51·83	0·00		32	10·3		31	51·9	+18·4	5	140
Pola		11·41		54	44·29		54	45·50	—1·21		30	54·2		30	50·3	+ 3·9	6	141
Athen		12·36		52	48·10		52	48·88	—0·78		11	23·6		11	25·7	— 2·1	4	142
Leipzig		12·50		52	31·54		52	32·58	—1·04	34	8	50·1	34	8	38·5	+11·6	4	143
Athen		13·36		50	55·47		50	55·25	+0·22	33	51	57·5	33	51	35·5	+22·0	4	144
Wien		16·46		45	52·24		45	51·19	+1·05	32	52	30·9	32	52	55·1	—24·2	1	145
Pola		16·50		45	48·45		45	47·88	+0·57		52	17·8		52	13·4	+ 4·4	3	146
Wien		17·45		44	28·15		44	28·10	+0·05		34	42·5		35	6·8	—24·3	2	147
Pola	Juni	17·47	12ʰ	44ᵐ	27ˢ12	12ʰ	44ᵐ	30ˢ32	[—3ˢ20]	+32°	34'	55"0	+32°	35'	36"0	[—41"0]	2	148

Um diejenigen Glieder unseres Planetensystems zu finden, die eventuell in die Störungsrechnung mit einbezogen werden sollen, habe ich mit Ausnahme der Entfernung Δ der Erde vom Kometen, die ich bereits in der Ephemeride gegeben habe, die Entfernung Δ der Venus, des Mars, des Jupiter und des Saturn von dem Kometen für die in der folgenden Tabelle angegebene Zeiten ermittelt und sah mich auf Grund der ebenfalls in der folgenden Tabelle enthaltenen Werte der Entfernungen veranlaßt, mich auf Venus, Erde und Jupiter bei der Störungsrechnung zu beschränken.

	Datum			
	April 12·5	Mai 5·5	Mai 28·5	Juni 18·5
Venus				
Δ	1·70144	1·91410	1·79186	1·56289
Erde				
Δ	0·98444	0·54094	0·91525	1·56301
Mars				
Δ	2·49854	2·75414	2·86641	3·17471
Jupiter				
Δ	5·38782	4·93856	4·52816	4·19499
Saturn				
Δ	9·28646	9·58810	9·93695	10·26460

Die Störungen selbst wurden nach Encke's Methode, und zwar in Intervallen von vier Tagen gerechnet. Dabei wurde die Oskulation auf Mai 14·0, also genau in die Mitte des Beobachtungszeitraumes verlegt. Das folgende Schema, in welchem wegen der Kleinheit der störenden Kräfte diese nur von acht

zu acht Tagen angegeben sind, gibt an, in welchem Maß ein jeder Planet an der störenden Wirkung sich beteiligt, indem es die störenden Kräfte eines jeden Planeten in Einheiten der siebenten Dezimale enthält.

	April			Mai			Juni	
	14	22	30	8	20	28	5	13
				Venus				
(X)	−0·12	−0·08	−0·03	+0·02	+0·09	+0·12	+0·18	+0·21
(Y)	−0·16	−0·18	−0·19	−0·19	−0·18	−0·17	−0·12	−0·08
(Z)	−0·07	−0·08	−0·09	−0·09	−0·09	−0·09	−0·07	−0·05
				Erde				
(X)	+0·14	+0·15	+0·14	+0·13	+0·10	+0·09	+0·07	+0·05
(Y)	+0·17	+0·16	+0·16	+0·16	+0·15	+0·15	+0·15	+0·15
(Z)	+0·05	+0·04	+0·04	+0·04	+0·04	+0·04	+0·04	+0·04
				Jupiter				
(X)	−0·50	−0·53	−0·56	−0·57	−0·59	−0·60	−0·61	−0·62
(Y)	+0·65	+0·75	+0·83	+0·90	+0·97	+1·00	+1·02	+1·02
(Z)	+0·22	+0·21	+0·20	+0·17	+0·13	+0·09	+0·05	+0·01

Rechnet man nun daraus die Störungen in rechtwinkeligen Äquatorkoordinaten, so erhält man für die Summe der durch Venus, Erde und Jupiter verursachten Störungen die folgenden Werte:

	April			Mai			Juni	
	14	22	30	8	20	28	5	13
ξ	−11·1	− 6·2	−2·5	−0·5	−0·5	−2·4	5·7	−10·4
η	+24·2	+13·1	+5·4	+1·0	+1·0	+5·8	+14·6	+27·7
ζ	+ 4·0	+ 1·9	+0·7	+0·1	+0·1	+0·5	+ 1·1	+ 1·8

Um endlich die Änderungen in AR. und D. infolge der Störungen zu finden, wurden mit Benützung der Differentialformeln

$$d\alpha = \frac{\eta \cos\alpha - \xi \sin\alpha}{\Delta \cos\delta \,.\, 10^7 \sin 1''}$$

$$d\delta = \frac{\zeta \cos\delta - [\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha] \sin\delta}{\Delta \,.\, 10^7 . \sin 1''}$$

folgende Werte ermittelt:

	April			Mai			Juni	
	14	22	30	8	20	28	5	13
$d\alpha$	+0ˢ23	+0ˢ11	+0ˢ01	−0ˢ02	−0ˢ04	−0ˢ19	−0ˢ35	−0ˢ53
$d\delta$	+0·04	+0·08	+0·08	+0·03	+0·01	+0·02	+0·01	−0·01

aus denen für die Epochen der Normalorte die Korrektion derselben durch Interpolation gefunden wurde.

Bildung der Normalorte.

Die in der Tabelle der der Zeit nach geordneten Beobachtungen ersichtlichen Trennungsstriche zeigen an, welche Beobachtungen zur Bildung eines Normalortes zusammengefaßt wurden. Man sieht daraus, daß das ganze Beobachtungsmaterial sich auf sechs Normalorte aufteilt, die der weiteren Rechnung als Grundlage dienen. Für die Ephemeride ergaben sich folgende Korrektionen:

Normalort	Beobachtungen	Zeit	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Zahl der Beob.
I	April 12 bis April 20	April 18·58	−0ˢ26	−1ʺ07	28
II	» 21 » » 25	» 23·83	−0·16	−3·08	34
III	» 26 » Mai 7	Mai 2·72	−0·17	+0·13	28
IV	Mai 10 » » 21	» 17·62	+0·03	−0·32	25
V	» 24 » Juni 7	Juni 1·00	−0·08	−4·22	15
VI	Juni 8 » » 17	» 12·35	−0·02	−1·95	13

Bringt man nun diese Korrektion, sowie diejenige, welche durch die Störungen bedingt ist, an den Ephemeridenort der Normalorte an, nachdem man die Zeiten derselben auf Mittag oder Mitternacht abgekürzt hat, so erhält man folgende Übersicht der Normalorte:

I. Normalort.

Ephemeridenort	$21^h\,0^m\,9^s30$	—0° 42′ 58″72
Korr. der Ephemeride	—0·26	—1·07
Störungsbeitrag	+ 1	+ 6
—Red. ad l. med.	—0·25	+4·32
I. Normalort: April 18·5	315° 2′ 12″00	—0° 42′ 55″41

II. Normalort.

Ephemeridenort	$20^h\,33^m\,11^s76$	+6° 24′ 6″92
Korr. der Ephemeride....	—0·16	—3·08
Störungsbeitrag	0	+ 8
—Red. ad l. med.	—0·24	+4·81
II. Normalort: April 24·0	308° 17′ 50″40	+6° 24′ 8″73

III. Normalort.

Ephemeridenort	$19^h\,23^m\,12^s90$	+22° 18′ 16″11
Korr. der Ephemeride....	—0·17	+0·13
Störungsbeitrag	0	+ 6
—Red. ad l. med.	—0·23	+6·21
III. Normalort: Mai 2·5	290° 48′ 7″50	+22° 18′ 22″51

IV. Normalort.

Ephemeridenort	$15^h\,36^m\,10^s76$	+43° 3′ 25″92
Korr. der Ephemeride....	+0·03	—0·32
Störungsbeitrag	0	+ 1
—Red. ad l. med.	—0·60	+7·87
IV. Normalort: Mai 17·5	234° 2′ 32″85	+43° 3′ 33″48

V. Normalort.

Ephemeridenort	13h 28m 16s16	+38° 33′ 54″20
Korr. der Ephemeride....	—0·08	—4·22
Störungsbeitrag	— 1	+ 2
—Red. ad l. med.	—0·93	+6·71
V. Normalort: Juni 1·0	202° 3′ 47″10	+38° 33′ 56″71

VI. Normalort.

Ephemeridenort	12h 52m 32s66	+34° 8′ 39″43
Korr. der Ephemeride....	—0·02	—1·95
Störungsbeitrag	— 3	— 1
—Red. ad l. med.	—1·05	+6·64
VI. Normalort: Juni 12·5	193° 7′ 53″40	+34° 8′ 44″11

In Anbetracht des geringen heliozentrischen Bogens von 47°, währenddessen der Komet beobachtet wurde und der verhältnismäßig geringen Genauigkeit der Beobachtungen erschien es zweckmäßig, der ungleich rascheren Methode der Variation von M gegenüber der strengen Bahnbestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der definitiven Bahnbestimmung den Vorzug zu geben. Als Orte, durch welche die Bahnkurve gelegt wurde und die durch die Bahnelemente genau dargestellt werden sollen, wurde der I. und VI. Normalort verwendet. Unter Zugrundelegung des für die Zeiten April 18·5 und Juni 12·5 aus der Ephemeride sich ergebenden Wertes von

$$\lg M_1 = 0\cdot 1408227$$

und mit Benützung eines zweiten Wertes

$$\lg M_2 = \lg M_1 + 0\cdot 001 = 0\cdot 1418227$$

wurden folgende zwei auf die Ekliptik als Fundamentalebene bezogene parabolische Elementensysteme gefunden:

System I. $\lg M_1 = 0\cdot1408227$

T	März 13·972545 m. Z. Berlin
☊	274° 6′ 53″71
i	148 24 32·73
ω	331 44 48·10
$\lg q$	9·9473186

System II. $\lg M_2 = 0\cdot1418227$

T	März 13·923335 m. Z. Berlin
☊	273° 59′ 37″22
i	148 22 19·28
ω	331 30 44·21
$\lg q$	9·9463772.

Die aus diesen beiden Systemen für die Zeit der Normalörter abgeleiteten Kometenpositionen sind in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt. In dieselbe wurden auch der besseren Übersichtlichkeit halber die aus dem System III (Ellipse), über das später gesprochen werden wird, hervorgehenden Kometenörter aufgenommen.

Normalort	System I	System II	System III
	Rektascension		
I. 315° 2′ 12″00	12″16	11″90	12″02
II. 308 17 50·40	48·87	16′ 42·17	46·24
III. 290 48 7·50	5·66	43 54·34	7·40
IV. 234 2 32·85	30·00	55 39·55	29·98
V. 202 3 47·10	47·72	2′ 10·07	41·04
VI. 193 7 53·41	53″40	53″57	53″33
	Deklination		
I. — 0° 42′ 55″41	55″31	55″25	55″36
II. + 6 24 8·73	10·47	25′ 11·84	17·29
III. +22 18 22·51	20·08	21 26·69	38·10
IV. +43 3 33·48	30·36	3 54·34	57·13
V. +38 33 56·71	58·52	33′ 35·12	34′ 11·46
VI. +34 8 44·11	44″22	44″04	44″20

In dem folgenden Schema bedeutet nun $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Differenz der Positionen der Normalorte und der aus dem Elementensystem I abgeleiteten Kometenpositionen im Sinne Beobachtung – Rechnung, μ und ν die Differenz der aus dem Elementensystem I und II für die Zeit der Normalorte ermittelten Kometenpositionen im Sinne System II—I und endlich θ und η die Differenz der Positionen der Normalorte und der aus dem System III für die Zeit der Normalorte gerechneten Kometenpositionen im Sinne Beobachtung—Rechnung.

Normalort—System I			System II—System I			Normalort—System III		
$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$	μ	$\mu\cos\delta$	ν	θ	$\theta\cos\delta$	η
[-0ˢ16]	[-0ˢ16]	[-0ˢ10]	[- 0ˢ26]	[- 0ˢ26]	[+ 0ˢ06]	[-0ˢ02]	[-0ˢ02]	[+ 0ˢ05]
+1·53	+1·52	-1·74	- 66·70	- 66·28	+ 61·37	+4·16	+4·13	- 8·56
+1·84	+1·70	+2·43	-251·32	-232·51	+186·61	+0·10	+0·09	-15·59
+2·85	+2·08	+3·12	-410·45	-299·90	+ 23·98	+2·87	+2·10	-23·65
-0·62	-0·48	-1·81	- 97·65	- 76·35	- 23·40	+6·06	+4·74	-14·75
[-0ˢ01]	[-0ˢ01]	[-0ˢ11]	[+ 0ˢ17]	[+ 0ˢ14]	[+ 0ˢ11]	[+0ˢ07]	[+0ˢ06]	[- 0ˢ09]

Mit Benützung der Größen $\Delta\alpha\cos\delta$ und $\Delta\delta$ einerseits und $\mu\cos\delta$ und ν andrerseits lassen sich nun folgende acht Gleichungen zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes von Δx aufstellen, um welchen $\lg M_1$ der ersten Parabel zu verändern ist, um zu den Elementen der besten Parabel zu gelangen.

$$
\begin{aligned}
+1\cdot52 &= -\ \ 66\cdot28\,\Delta x\\
+1\cdot70 &= -232\cdot51\,\Delta x\\
+2\cdot08 &= -299\cdot90\,\Delta x\\
-0\cdot48 &= -\ \ 76\cdot35\,\Delta x\\
-1\cdot74 &= +\ \ 61\cdot37\,\Delta x\\
+2\cdot43 &= +186\cdot61\,\Delta x\\
+3\cdot12 &= +\ \ 23\cdot98\,\Delta x\\
-1\cdot81 &= -\ \ 23\cdot40\,\Delta x.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich als der wahrscheinlichste Wert von Δx:

$$\Delta x = -0\cdot 0031934.$$

Derselbe entspricht einer Änderung ΔM_1 des lg M_1 um

$$\Delta M_1 = -32$$

in Einheiten der 7. Dezimalstelle. Bringt man nun ΔM_1 an lg M_1 an und rechnet nun von diesem geänderten lg $M_1 =$ 0·1408195 ausgehend die beste Parabel, so führt diese Rechnung zu folgendem auf die Ekliptik als Fundamentalebene bezogenen Elementensystem:

$$\lg M = 0\cdot 1408195$$

T	März 13·972685 m. Z. Berlin	
ω	331° 44′ 51″22	Mittl. Äquin. 1874·0
Ω	274 6 55·22	
i	148 24 33·20	
lg q	9·9473224,	

welches in folgender Weise die Normalorte darstellt:

Normal-ort	$d\alpha$	$d\alpha \cos \delta$	$d\delta$	Datum	Zahl der Beob-achtungen
I	[+0″15]	[+0″15]	[−0″09]	April 18·5	28
II	+1·62	+1·62	−1·50	» 24·0	34
III	+1·43	+1·32	+3·13	Mai 2·5	28
IV	+1·70	+1·24	+3·38	» 17·5	25
V	−0·98	−0·77	−1·65	Juni 1·0	15
VI	[+0″07]	[+0″06]	[+0″01]	» 12·5	13

Obwohl diese Darstellung mit Rücksicht auf die große Ungenauigkeit der Beobachtungen, die wohl darauf zurückzuführen ist, daß der Komet wegen seines verwaschenen

Aussehens sehr schwer zu beobachten war, eine ziemlich befriedigende zu nennen ist, wurde noch nach der Hornstein-schen Methode die Untersuchung durchgeführt, nach welcher Seite sich die endgiltige Parabel verändert, falls man die Exzentrizität als Unbekannte in die Ausgleichung einführt. Nach dieser Methode wurde nun für

$$a = 50$$

und mit den Werten des I. Elementensystems folgendes elliptische Elementensystem, das auf die Ekliptik als Fundamentalebene bezogen ist, ermittelt:

T	1874 März 13·34937 m. Z. Berlin	
ω	330° 35′ 1″97	Mittl. Äquin. 1874·0
Ω	273 51 40·25	
i.........	148 21 10·13	
lg a	1·6989700	
e	0·9824317	
lg q	9·9436994.	

Dieses elliptische Elementensystem, von dem schon früher als System III die Rede war, liefert die früher angegebene Darstellung. Da die Größe Δy, um welche a, und die Größe Δx, um welche lg M_1 zu korrigieren ist, damit man diejenigen elliptischen Elemente findet, welche die Normalorte am besten darstellen, der Bedingung entsprechen, daß

$$\Sigma[d\alpha - \mu\Delta x - \eta\Delta y]^2 \cos^2\delta + [d\delta - \nu\Delta x - \theta\Delta y]^2$$

ein Minimum wird, ergeben sich zur Bestimmung von Δx und Δy folgende zwei Gleichungen:

$$193934\cdot38\Delta x + 4333\cdot26 y = -620\cdot21$$
$$4333\cdot26\Delta x + 1293\cdot49 y = +\ 93\cdot26.$$

Mit den aus diesen Gleichungen gefundenen Werten

$$\Delta x = -0\cdot005200$$
$$\Delta y = +0\cdot089597$$

wurde für die beste Ellipse folgendes auf die Ekliptik bezogene System gefunden:

T	1874 März 13·917283	
☊	274° 5′ 34″77	Mittl. Äquin. 1874·0
i	148 24 15·65	
ω	331 38 42·47	
lg a	2·7466762	[a = 558·054]
e	0·9984139	
lg q	9·9470046	
u	13183ª	

In welcher Weise endlich durch die Elemente der besten Ellipse die Normalorte dargestellt werden, zeigt die folgende Tabelle.

Normalort	$d\alpha_t$	$d\alpha_t \cos\delta$	$d\delta_t$	Datum	Zahl der Beob-achtungen
I	[—0″02]	[—0″02]	[—0″17]	April 18·5	28
II	+1·53	+1·52	—2·07	» 24·0	34
III	+0·43	+0·40	+1·78	Mai 2·5	28
IV	+0·80	+0·58	+0·99	» 17·5	25
V	—0·45	—0·35	—3·01	Juni 1·0	15
VI	[0″00]	[0″00]	[—0″02]	» 12·5	13

Bildet man noch zum Schlusse die Summe der Fehlerquadrate für die erste Parabel (System I), die beste Parabel und die beste Ellipse, so gelangt man zu folgender Übersicht:

	I. Parabel	Beste Parabel	Beste Ellipse
$\Sigma\, d\alpha^2 \cos^2\delta$	14·23	8·52	2·93
$\Sigma\, d^2\delta$	21·94	26·19	17·43
$\Sigma\, v^2$	36·17	34·71	20·36

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich ist, stellt zwar rechnungsmäßig das Elementensystem der besten Ellipse die Beobachtungen am besten dar, aber auch die Fehlerquadratsumme in der Darstellung der Normalorte durch die Elemente der besten Parabel ist verhältnismäßig so klein und die Umlaufszeit in der elliptischen Bahn so groß, daß kein Grund vorhanden ist, von der parabolischen Bahn abzuweichen. Es dürfen daher die Elemente der besten Parabel:

$$\lg M = 0{\cdot}1408195$$

T	1874 März 13·972685 m. Z. Berlin	
ω	331° 44′ 51″22	Mittl. Äquin. 1874·0
☊	274 6 55·22	Mittl. Äquin. 1874·0
i	148 24 33·20	Mittl. Äquin. 1874·0
lg q	9·9473224	

für den Kometen 1874 II (Winnecke) als definitiv angesehen werden.

Zum Schlusse bin ich zu ganz besonderem Danke Herrn Hofrat Prof. Dr. E. Weiß verpflichtet für die liebenswürdige Unterstützung, die er in jeder Beziehung meiner Arbeit angedeihen ließ.

Die Anomalien der Witterung auf Island in dem Zeitraume 1851 bis 1900 und deren Beziehungen zu den gleichzeitigen Witterungsanomalien in Nordwesteuropa

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1904.)

Teisserenc de Bort hat für die dauernden großen Luftdruckmaxima und -Minima der außertropischen Zonen die glückliche Bezeichnung »Aktionszentren der Atmosphäre« gefunden. Für den ganzen Westen von Europa spielen diese Rolle das subtropische Hochdruckgebiet bei den Azoren und das tiefe barometrische Minimum bei Island. Die beste kartographische Darstellung derselben hat G. Rung geliefert.[1] Mit den zeitweiligen Verlagerungen dieser Gebiete stehen die Witterungsanomalien in Westeuropa in enger kausaler Beziehung.

Einen Beitrag zu der Feststellung solcher Beziehungen soll die nachfolgende kleine Abhandlung liefern. Ich war stets von der Überzeugung durchdrungen, daß durch die Sammlung der Ergebnisse möglichst langjähriger homogener Beobachtungsreihen uns allmählich ein Einblick in die Wechselwirkung der Witterungsanomalien weit voneinander gelegener Teile der Erdoberfläche erschlossen werden dürfte. Zugleich bilden die Ergebnisse solcher langjähriger Beobachtungsreihen das Materiale für die Untersuchung von Periodizitäten in der Aufeinanderfolge der Witterungsanomalien, nach denen man gerade

[1] Répartition de la pression atmosphérique sur l'océan atlantique. Copenhague, 1894. 13 Karten Großfolio.

jetzt wieder sehr eifrig Nachschau hält. Die »Meteorologische Zeitschrift« enthält viele derartige Beiträge von mir, durch welche ich Materiale zu den oben erwähnten Untersuchungen geliefert zu haben glaube. Leider taxiert man solche Zusammenstellungen vieljähriger Beobachtungsergebnisse, welche nicht allein viel Mühe und Arbeit erfordern, sondern auch, wenn sie wissenschaftlich verwendbar sein sollen, meist auch eingehende Kritik und sichere Handhabung der Methoden meteorologischer Forschung erfordern, häufig etwas geringschätzig, bloß als eine statistische und klimatologische Leistung. Und doch liefern sie allein die absolut notwendige Grundlage für alle Untersuchungen über etwaige langjährige Perioden, denen die Zustände unserer Atmosphäre unterworfen sein mögen.

Schon vor einiger Zeit, nach dem Eintreffen des Jahrganges 1900 des II. Bandes (Bilandene) der Jahrbücher des norwegischen meteorologischen Institutes mit den höchst interessanten Beobachtungsergebnissen der meteorologischen Stationen auf Island und Grönland, habe ich begonnen, zunächst die Temperaturmittel von Stykkisholm auf Island zusammenzustellen, die bis ins Jahr 1845 zurückreichen. Diese lange Beobachtungsreihe, welche alle meteorologischen Elemente umfaßt, rührt größtenteils von einem einzigen Beobachter her, dem Herrn Olaf Thorlacius, der von November 1845 bis Ende 1891 die Aufzeichnungen lückenlos fortgeführt hat. Sie ist deshalb von besonders hohem Interesse, weil Stykkisholm auf Island, unter 65° 5′ nördlicher Breite und 22° 46′ westlicher Länge von Greenwich gelegen, dem einen der beiden »Aktionszentren« des nordatlantischen Ozeans angehört, d. i. dem tiefen barometrischen Minimum, welchem Nordwest- und Mitteleuropa hauptsächlich sein mildes ozeanisches Klima verdankt. Die Ergebnisse der Luftdruckbeobachtungen namentlich, die Monats- und Jahresmittel des Barometerstandes zu Stykkisholm von 1846 bis 1900 gestatten uns, die Variationen in der Intensität der Aktion dieses atmosphärischen Zentrums 55 Jahre hindurch zu verfolgen und so einem Hauptfaktor des Klimas von Nordwest- und Mitteleuropa gleichsam beständig den Puls zu fühlen.

Meine Zusammenstellung wurde deshalb später auch auf den Luftdruck ausgedehnt, gerade das wichtigste meteorologische Element für die vorliegende Untersuchung, und überdies auch auf die Niederschlagsmenge, die allerdings fast nur lokale Bedeutung hat.

Die Monatsmittel (und zum Teile auch die Extreme) von Temperatur und Luftdruck und die Niederschlagsmengen sind entnommen dem Journal of the Scottish Meteorological Society. New Series, Vol. II, p. 285; A. Buchan: On the Meteorology of Iceland, Mean Pressure of the Atmosphere, Nov. 1845—Dec. 1868; Amount of Rain and melted snow, Oct. 1856—Dec. 1868. — Vol. III, p. 304. Second Article. The mean Temperature of Stykkisholm from Nov. 1845 to December 1871. Die Mittel der späteren Jahrgänge sind derselben meteorologischen Zeitschrift entnommen, welche in ihren folgenden Jahrgängen Vol. IV etc. für einzelne Quartale, später auch für ganze Jahre die wesentlichsten Beobachtungsergebnisse zu Stykkisholm enthält (bis 1887). Von 1880 an konnten aber die Mittel (schon in metrischem Maße) der II. Abteilung (Bilandene) der Jahrbücher des dänischen meteorologischen Institutes entnommen werden. Die Luftdruckmittel bei Buchan sind den Aufzeichnungen um Mittag entnommen, die in den dänischen Jahrbüchern beziehen sich auf die Beobachtungstermine 8, 2, 9. Bei dem höchst geringfügigen täglichen Gange des Luftdruckes in dieser Breite bedingt dies keine Unterbrechung der Homogenität der Reihe, die, wie es scheint, überhaupt eine vortreffliche ist. Die Seehöhe ist die ganze Zeit hindurch ungeändert geblieben.

Die älteren Instrumente von Thorlacius sind verglichen worden mit jenen, welche das britische Handelsamt durch die Schottische Meteorologische Gesellschaft nach Stykkisholm gesendet hat. Bei den Temperaturmitteln spielen natürlich die Beobachtungstermine eine wichtigere Rolle als beim Luftdrucke, weshalb deren Einfluß zu untersuchen war.

Anfänglich waren die Beobachtungszeiten im Winterhalbjahre von September bis April inklusive 7^h a., Mittag und 10^h p., von Mai bis August aber 7^h, Mittag und 11^h. Dies gilt für die Temperaturtabellen 1845 bis 1871. Später teilt Buchan

nur die Mittel der täglichen Extreme mit. In den dänischen Jahrbüchern sind die Mittel aus den späteren Beobachtungsterminen 8, 2, 9 gebildet, es werden aber auch die mittleren täglichen Maxima und Minima mitgeteilt. In meiner Tabelle sind nur diese verwendet worden, um sie mit den aus dem Journal der Scottish Met. Society entnommenen direkt vergleichbar zu erhalten.

Buchan vergleicht für Upsala (Upsala rund 60° N, Stykkisholm 65° mit geringerer täglicher Wärmeschwankung) die Mittel der täglichen Extreme und die Mittel der obigen Terminbeobachtungen mit den wahren 24stündigen Mitteln und findet folgende Differenzen:

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
(Max. + Min.) : 2 — Wahre Mittel. Cels.												
−0·3	−0·3	0·3	0·0	−0·2	−0·2	0·0	0·0	0·0	0·0	−0·2	−0·2	−0·1
Dreimalige tägliche Beobachtungen (siehe oben) — Wahre Mittel												
0·0	−0·1	0·0	−0·1	−0·1	−0·2	−0·3	−0·2	−0·2	0·0	0·0	0·0	−0·1

Man kann demnach diese Mittel als genähert wahre Mittel gelten lassen.

Von 1888 bis 1900 sind die Temperaturmittel den dänischen Jahrbüchern entnommen worden, aber nur die Mittel der täglichen Extreme.[1]

[1] In diesen Jahrbüchern werden aber direkt nur die Mittel aus den drei Beobachtungsterminen 8^h, 2^h, 9^h mitgeteilt. Ich habe diese Mittel mit jenen

Auf diese Weise sind die am Schlusse dieser Abhandlung enthaltenen langjährigen Monats- und Jahresmittel (und Summen) des Luftdruckes, der Temperatur und des Regenfalles zu Stykkisholm zusammengestellt worden.[1]

der täglichen Extreme verglichen und fand im Durchschnitte von 1891 bis 1900 folgende Differenzen:

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
A. Mittel der täglichen Extreme 1891 bis 1900												
-1·9	-2·3	-2·3	1·4	4·9	8·8	10·8	10·0	7·0	3·2	0·3	-1·7	3·2
B. Mittel aus 8 + 2 + 9 berechnet												
-1·6	-2·1	-2·2	1·2	4·7	8·4	10·2	9·5	6·9	3·5	0·5	-1·2	3·15
B—A												
+0·3	+0·2	+0·1	-0·2	-0·2	-0·4	-0·6	-0·5	-0·1	+0·3	+0·2	+0·5	0·0

Im Jahresmittel ist der Unterschied Null, aber die jährliche Periode der Differenzen ist sehr erheblich.

Inzwischen hat mir Herr Direktor A. Paulsen auf meine Anfrage gütigst mitgeteilt, daß mit Rücksicht auf den täglichen Gange der Temperatur zu Stykkisholm (siehe später) die Mittel für Stykkisholm (und für Angmagsalik) nach der Formel

$$[2(8^h + 2^h) + 5 \times 9^h] : 9$$

berechnet werden.

Die obigen Differenzen werden dadurch schwer erklärlich, besonders nachdem auch, wie sich später zeigen wird, meine Mittel der täglichen Extreme 1846 bis 1900 mit den 25jährigen wahren Mitteln, welche das dänische meteorologische Institut publiziert hat, fast vollkommen übereinstimmen.

[1] Für Jakobshavn, Westgrönland, habe ich an einer anderen Stelle (Meteorol. Zeitschr., Bd. XXV, 1890, p. 113) die Mitteltemperaturen und deren Abweichungen vom Gesamtmittel für den Zeitraum 1840 bis 1851 und 1857 bis 1888 veröffentlicht, später Bd. XXVI, 1891, p. 110, auch die Luftdruckmittel 1842 bis 1851 (neu berechnet) und 1866 bis 1889. Ein Vergleich

Ich habe auch versucht, die Temperaturtabellen für Stykkisholm nach rückwärts auf die Jahrgänge 1829 bis 1837 auszudehnen mit Hilfe der Beobachtungen zu Reykjavík aus dieser Zeit.[1] Die Beobachtungen beginnen schon mit 1823, die ersteren Jahrgänge sind aber kaum verwendbar. Erst mit August 1829 scheint eine ziemlich homogene Reihe zu beginnen, die Temperaturmittel sind aus den täglichen Extremen berechnet. Bedenklich ist die fast kontinuierliche Abnahme der Jahrestemperatur, die beiden ersten Jahrgänge stimmen aber gut mit den neueren (1891 bis 1900). Die Mittel aller Elemente sowie die Extreme habe ich zusammengestellt in der Zeitschr. der Österr. Meteorol. Gesellsch., Bd. VI, 1871, p. 44.

Die Reduktion dieser älteren Temperaturmittel auf die Lokalität von Stykkisholm erfolgte mittels der Temperaturdifferenzen Stykkisholm—Reykjavík der zehn Jahrgänge 1891 bis 1900.

Temperaturmittel: Reykjavík—Stykkisholm
1891 bis 1900.

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
0·3	1·2	1·3	2·1	2·0	1·8	1·1	1·4	0·6	0·1	0·5	0·4	1°1

Es ist natürlich strenge genommen kaum gestattet, diese Differenzen an die Temperaturmittel von Thorstenson anzubringen, um sie auf Stykkisholm zu reduzieren. Der Charakter der Temperaturanomalien während der Periode 1829 bis 1837 wird aber sicherlich dadurch nicht alteriert und dieselben werden durch diese Reduktion mit jenen der Periode 1846 bis 1900 besser vergleichbar.

Ich kann nun übergehen zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung, d. i. zu den

mit den hier für Island gelieferten Daten würde manche interessante Folgerungen gestatten, doch kann hier auf eine solche Gegenüberstellung nicht eingegangen werden.

[1] Observ. Meteorologicae a 1 Jan. 1823 ad 1 Aug. 1837 in Islandia factae a Thorstensenio. Medico. Hafniae 1839.

I. Abweichungen des Luftdruckes, der Temperatur und Regenmenge zu Stykkisholm vom 50jährigen (respektive 55- und 44jährigen) Mittel und ihre Beziehungen zu den gleichzeitigen Anomalien in Westeuropa.

Die Tabellen der Abweichungen finden sich am Schlusse der Abhandlung. Als Vergleichsstation für die korrespondierenden Temperaturanomalien in Nordwesteuropa wurde Greenwich gewählt. Die Temperaturmittel für Greenwich 1881 bis 1900 in Celsiusgraden finden sich bei A. Angot: »Études sur le climat de la France. Température« (Annales du Bureau Central. Mémoires de 1900). Die Abweichungen wurden leider übersehen, so daß sie für den vorliegenden Zweck neu berechnet werden mußten. Eine ähnliche Zusammenstellung der Luftdruckmittel von Greenwich 1851 bis 1900 existiert nicht. Ich habe deshalb die Luftdruckmittel von Brüssel für meine Zwecke benützt, die in bequemer Form veröffentlicht vorliegen.[1] Die Abweichungen aber mußten erst berechnet werden. Dagegen konnten die Abweichungen der Temperatur und des Regenfalles zu Brüssel, soweit sie für die vorliegende Untersuchung zur Verwendung kamen, dem »Annuaire Mét. pour 1902, publié par A. Lancaster, Bruxelles 1902«, entnommen werden mit den geringen Korrektionen, welche zu deren Reduktion auf die Mittel 1851 bis 1900 nötig waren. Die Abweichungen des Luftdruckes und der Temperatur zu Wien sind meiner Abhandlung über »Die Meteorologie von Wien« entnommen.

A. Die gleichzeitigen Anomalien der Wintermonate zu Stykkisholm, Greenwich, Brüssel und Wien.

Wenn deutlich ausgesprochene Beziehungen zwischen den Witterungsanomalien auf Island und jenen in Nordwest- und Mitteleuropa bestehen, so werden sich dieselben wohl in den Wintermonaten am leichtesten auffinden lassen. Zu diesem Zwecke wurden die nachfolgenden Tabellen entworfen.

---

[1] Données Météorologiques recueillies à l'Observ. Royal de Belgique de 1833 à 1900. Bruxelles 1901.

Durch die Nebeneinanderstellung der Abweichungen desselben meteorologischen Elementes springen Gleichheit oder Gegensatz des Sinnes der Abweichung an den Vergleichsorten sogleich in die Augen.

Abweichungen vom 50jährigen Mittel 1851 bis 1900.

	Luftdruck			Temperatur				Regen *mm*	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
				Dezember					
1851	— 0·8	8·7	5·9	4·3	0·4	0·6	0·6	—	—41
1852	— 0·2	— 2·9	0·3	— 1·9	4·4	4·9	3·6	—	1
1853	9·7	— 1·3	—1·1	3·3	— 3·2	— 5·2	—4·0	—	—34
1854	— 4·7	— 2·1	—4·3	— 2·9	0·9	2·0	3·5	—	39
1855	3·5	— 0·7	—0·4	0·9	— 2·3	— 2·6	—5·3	—	26
1856	4·2	— 3·2	—2·7	— 2·9	0·3	1·3	—0·6	—20	— 1
1857	— 5·6	10·6	9·5	— 0·5	2·9	2·2	1·8	87	—40
1858	— 9·2	0·3	1·5	2·0	0·7	1·2	1·1	1	— 3
1859	5·3	— 3·4	—2·6	— 2·9	— 1·6	— 2·2	—2·7	—13	9
1860	8·1	— 7·8	—7·0	0·0	— 1·9	— 1·2	—0·5	—26	—20
1861	0·8	4·6	4·0	2·4	0·7	0·7	—1·2	40	—23
1862	— 6·1	1·9	1·9	0·9	2·1	2·6	—0·1	3	— 3
1863	— 2·9	3·4	1·7	— 2·8	1·9	2·7	2·7	—14	9
1864	1·1	2·5	3·6	2·1	— 0·7	— 2·6	—3·1	—17	—54
1865	— 5·8	7·8	7·3	2·4	1·6	0·7	0·3	82	—53
1866	— 2·8	0·7	1·0	— 3·1	1·8	2·0	—0·1	— 3	— 1
1867	1·4	0·4	—5·0	1·7	— 1·2	— 1·7	—1·1	4	27
1868	— 5·6	— 7·4	—2·5	1·3	3·5	5·0	4·2	—28	43
1869	2·3	— 4·0	—2·1	— 1·6	— 1·0	— 0·6	1·8	6	13
1870	13·1	— 2·1	—5·3	1·6	— 3·4	— 3·7	—3·5	—19	4

	Luftdruck			Temperatur				Regen	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
				Dezember (Fortsetzung)					
1871	0·3	4·0	2·7	2·3	—0·8	—2·5	—6·0	25	—28
1872	3·2	—7·9	—3·7	—0·6	1·8	3·7	4·0	—60	57
1873	—2·2	8·3	5·8	—1·9	0·5	1·2	1·8	63	—39
1874	8·5	—5·8	—7·6	—0·2	—3·6	—2·5	—0·4	—30	4
1875	—2·3	3·5	0·3	2·5	—0·6	—1·1	—1·3	51	—24
1876	1·6	—9·9	—6·4	1·4	2·4	3·4	2·5	—50	27
1877	—5·8	1·4	0·6	—0·6	0·7	0·6	0·4	51	— 6
1878	15·9	—6·7	—6·5	—3·3	—3·4	—2·1	—1·4	—53	1
1879	—0·5	8·8	7·1	1·7	—4·0	—7·7	—6·9	26	—23
1880	9·1	—1·3	—1·6	—6·4	2·0	3·4	4·3	—41	82
1881	—8·4	1·7	3·2	0·6	0·1	0·2	1·2	—15	—23
1882	7·2	—6·7	—4·5	—1·1	0·3	0·9	2·1	—55	28
1883	—0·8	3·1	0·0	0·3	0·4	0·7	1·5	18	— 1
1884	—7·1	—2·9	—2·1	0·3	0·8	1·0	2·2	—20	84
1885	3·7	5·6	3·4	—1·7	—0·4	—0·4	—0·4	39	—10
1886	2·0	—7·3	—6·4	—2·7	—1·7	—0·2	1·9	—34	62
1887	6·6	—2·8	—3·8	—1·4	—1·0	—1·0	—0·6	—49	28
1888	—7·6	2·0	3·2	0·3	0·6	1·8	0·8	49	—36
1889	—7·2	6·3	6·0	1·0	—1·2	—1·9	—3·3	—37	—21
1890	3·6	0·9	1·6	2·5	—5·5	—7·0	—4·8	18	—50
1891	—5·7	1·8	2·7	0·1	0·8	2·0	1·8	11	21
1892	4·9	—0·1	—1·3	—2·4	—1·7	—1·8	—1·2	—22	—15
1893	—7·1	2·1	3·2	—2·4	0·5	0·6	1·1	2	—34
1894	—0·6	0·5	0·8	—1·5	1·5	2·0	0·4	21	— 6
1895	—0·1	—4·8	—4·7	—0·6	0·3	0·2	0·1	—10	35

	Luftdruck			Temperatur				Regen	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
Dezember (Fortsetzung)									
1896	—6·9	—3·9	—1·6	1·7	0·3	0·5	0·6	10	—21
1897	—2·5	0·8	3·7	1·7	0·9	1·6	0·2	— 4	—18
1898	—5·5	3·3	3·6	—0·2	3·4	3·5	3·0	7	—33
1899	2·6	—1·5	—0·3	0·0	—1·5	—3·0	—4·0	21	0
1900	—7·2	0·5	1·4	0·0	3·3	3·4	2·0	—19	40
Jänner									
1851	—11·9	—1·2	1·6	3·2	2·4	2·5	0·3	—	—18
1852	— 7·7	—2·6	0·2	0·2	1·9	2·6	2·5	—	23
1853	— 8·7	—5·2	—3·2	—0·7	2·1	3·2	2·5	—	28
1854	— 6·1	—3·3	—1·8	0·8	0·2	0·5	0·5	—	0
1855	13·9	3·8	—0·3	0·1	—2·1	—2·7	—1·1	—	—14
1856	4·1	—8·4	—6·5	—3·9	0·4	1·9	1·6	—	— 2
1857	5·9	—5·0	—6·0	—2·3	—1·1	—0·8	0·0	5	17
1858	— 3·3	9·2	6·8	0·5	—0·6	—1·3	—1·8	83	— 8
1859	— 2·6	6·8	5·8	—1·0	1·0	1·3	1·0	8	— 5
1860	—12·8	—6·1	—3·7	—0·1	0·6	2·3	2·8	—13	13
1861	1·9	5·1	2·4	3·1	—2·7	—4·6	—2·8	7	—17
1862	— 3·0	—2·0	—2·9	2·3	0·2	—0·2	—1·3	16	14
1863	— 3·1	—3·8	—1·5	—0·2	1·7	2·5	4·7	—41	— 2
1864	— 5·9	6·7	8·1	2·0	—1·2	—2·2	—5·1	— 8	— 8
1865	— 0·3	—9·9	—8·1	—3·4	—1·3	—0·4	1·5	—33	19
1866	— 2·2	—1·0	1·7	—5·9	2·2	3·6	2·7	—34	18
1867	12·2	—7·6	—6·6	—5·5	—2·5	—1·1	0·9	—60	31
1868	— 0·3	—1·0	—2·3	1·0	—0·8	—1·5	0·1	6	— 2
1869	— 9·0	3·5	5·5	3·0	1·4	0·5	—0·6	21	— 1
1870	1·9	1·0	0·4	1·7	—0·2	0·5	0·5	— 4	—20

	Luftdruck			Temperatur				Regen	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
				Jänner (Fortsetzung)					
1871	— 2·0	— 3·3	— 3·7	1·0	—3·0	—4·0	—2·7	23	—27
1872	— 3·9	— 6·2	— 2·9	—0·4	1·5	2·1	0·1	—30	— 1
1873	— 6·7	— 3·8	— 0·9	—0·4	1·9	2·9	2·9	— 4	12
1874	— 5·2	3·2	3·1	—6·3	1·7	2·3	0·9	28	5
1875	2·3	0·3	0·7	0·5	2·6	2·4	1·4	—36	56
1876	— 2·5	7·4	6·0	3·1	—0·9	—2·3	—3·1	111	—20
1877	— 5·8	— 2·0	— 0·2	—0·7	2·4	3·7	3·0	—11	53
1878	6·3	3·5	0·3	0·3	1·0	0·2	0·1	10	34
1879	6·9	0·3	— 0·8	2·2	— 3·8	— 2·9	—0·4	—38	3
1880	4·1	9·5	6·1	2·2	— 3·0	— 2·6	—0·6	63	—45
1881	18·8	— 3·2	— 3·0	— 6·1	— 3·9	— 4·7	—3·1	—40	—13
1882	— 2·6	10·3	9·8	1·0	1·0	0·6	2·2	11	—33
1883	— 5·5	— 0·3	1·2	1·5	1·5	1·4	—0·1	— 4	— 1
1884	— 1·9	3·8	2·3	— 0·3	2·9	2·3	4·0	—19	9
1885	0·5	— 1·5	0·8	2·5	—1·1	—2·4	—2·3	—32	— 2
1886	4·8	— 8·1	— 6·9	—3·8	—1·3	—1·0	—0·1	—33	82
1887	— 8·9	1·7	2·1	0·2	—1·6	—1·9	—2·2	— 9	—39
1888	10·1	6·5	3·4	1·3	—0·4	—1·7	—1·0	93	—15
1889	0·9	4·7	3·1	—0·7	—0·8	—1·3	—0·9	1	—33
1890	—11·5	0·4	1·0	0·3	2·4	3·2	2·9	—40	41
1891	4·5	3·4	0·3	1·7	—2·5	—3·2	—4·6	—35	—15
1892	2·3	— 3·6	— 4·3	—1·9	—1·1	—0·5	0·5	37	6
1893	11·1	0·9	— 1·3	1·3	—1·8	—4·0	—6·2	—54	— 9
1894	— 2·6	— 1·6	2·2	0·0	—0·1	0·5	—2·5	—25	1
1895	11·1	— 8·9	—10·5	0·0	—2·8	—2·5	—1·0	4	5

	Luftdruck			Temperatur				Regen	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
Jänner (Fortsetzung)									
1896	7·0	8·1	5·6	—0·5	1·0	0·3	—2·9	2	—29
1897	10·5	—4·1	—4·5	1·0	—1·8	—1·1	0·5	61	—33
1898	— 5·0	8·5	7·2	1·5	2·8	2·6	2·1	42	—31
1899	3·1	—3·4	—2·8	—0·5	2·3	3·0	4·1	—48	19
1900	— 4·2	—2·1	—3·4	1·5	1·0	2·0	2·1	15	23
Februar									
1851	— 3·3	2·0	0·7	2·3	0·3	0·2	0·0	—	—21
1852	1·2	0·3	— 3·0	2·0	0·7	0·6	2·2	—	30
1853	12·9	—9·4	—11·2	1·3	—3·4	—2·9	—0·7	—	— 5
1854	— 3·8	4·6	— 1·1	0·5	—0·2	—0·3	—0·2	—	14
1855	13·8	—6·2	— 6·9	—5·0	—5·8	—7·2	—3·9	—	11
1856	3·3	2·1	0·5	2·0	1·4	1·8	2·4	—	—13
1857	—13·4	4·6	6·1	—0·4	—0·2	—0·3	—3·4	28	—30
1858	0·3	0·9	3·7	3·1	—2·8	—2·7	—7·3	22	—36
1859	— 5·6	1·2	— 0·3	—2·5	2·0	2·3	2·8	6	0
1860	0·6	—0·8	— 4·3	0·5	—2·1	—2·6	—0·7	5	17
1861	— 2·7	—1·9	0·0	1·2	1·4	2·3	2·5	— 3	—19
1862	6·4	2·2	0·9	1·2	0·9	1·1	—0·5	—10	—14
1863	— 9·6	8·9	6·6	0·4	1·4	1·5	2·8	46	—29
1864	0·3	—1·5	— 1·7	1·1	—2·0	—2·2	—0·5	7	—16
1865	5·8	—2·4	— 2·9	—0·3	—1·6	—2·5	—5·0	—26	34
1866	— 1·2	—6·2	— 3·4	—7·7	0·5	2·5	3·5	—32	50
1867	— 4·5	3·3	3·3	—2·1	2·9	4·0	4·4	—23	15
1868	— 9·5	4·7	2·0	—3·0	1·9	2·3	3·6	38	—20
1869	— 7·6	1·0	2·0	—2·2	3·2	4·4	4·9	7	31
1870	6·5	—2·2	— 0·2	1·6	— 1·9	—3·4	—5·5	—32	—28

	Luftdruck			Temperatur				Regen	
	Stykkisholm	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Greenwich	Brüssel	Wien	Stykkisholm	Brüssel
Februar (Fortsetzung)									
1871	1·8	2·2	2·8	1·1	1·6	1·1	—1·2	—44	2
1872	0·3	— 1·8	1·9	3·6	2·9	3·5	0·3	—42	—10
1873	8·1	1·2	0·1	1·7	—2·9	—2·3	0·1	5	— 4
1874	— 3·1	2·2	1·1	— 0·5	—0·5	0·0	0·0	29	—11
1875	7·0	0·8	—0·6	2·7	—2·4	—2·9	—4·9	8	—24
1876	2·5	— 4·2	—3·1	0·4	0·9	0·7	—0·6	10	61
1877	— 1·4	— 2·9	—3·5	—1·1	2·5	3·1	2·5	— 1	80
1878	0·7	7·9	5·4	2·8	1·5	1·0	2·7	16	—10
1879	— 1·5	—11·2	—9·9	—0·4	—0·7	—0·9	1·4	—24	35
1880	— 8·3	— 2·8	0·8	0·9	1·4	1·8	—1·6	23	19
1881	7·9	— 4·2	—1·5	—6·5	—0·9	0·3	—0·8	—53	19
1882	— 1·5	7·0	6·3	—2·4	1·4	1·2	1·8	21	—20
1883	—12·4	4·3	5·5	1·6	1·9	2·4	1·4	—34	—22
1884	— 6·4	0·0	2·8	1·5	1·4	2·2	1·5	—29	— 3
1885	4·2	— 4·7	—0·5	—4·1	2·4	3·4	1·5	—58	10
1886	3·6	2·3	2·2	—1·6	—3·3	—3·5	—2·4	— 1	—36
1887	— 3·9	8·3	7·8	1·0	—0·4	—1·0	—1·8	29	—32
1888	3·5	—3·0	—4·1	1·2	—2·4	—4·5	—3·3	— 4	22
1889	8·9	—0·1	—8·0	—1·5	—1·3	—2·0	—0·9	—40	5
1890	4·6	5·2	5·1	2·9	—1·2	—2·1	—2·3	93	— 41
1891	— 6·0	3·3	10·0	3·2	—0·5	0·1	—2·4	35	—40
1892	10·2	—3·7	—5·3	—4·1	—0·3	0·1	0·9	—34	8
1893	— 3·8	0·8	—3·8	0·2	1·0	2·0	2·1	—23	44
1894	—14·9	— 1·7	1·3	—0·5	1·2	0·9	2·6	5	0
1895	14·2	— 9·0	—3·7	3·5	—5·8	—7·5	—5·4	—24	—36
1896	— 6·5	8·0	6·6	2·7	0·5	0·2	—0·3	149	—33
1897	— 3·4	— 4·2	2·6	0·0	2·0	2·0	2·1	4	24
1898	— 4·9	8·4	—3·1	—1·4	1·0	1·1	2·1	—21	33
1899	— 1·3	— 3·5	0·3	1·2	1·3	2·1	0·8	22	—21
1900	12·2	—10·1	—7·2	—0·4	—0·6	0·4	3·2	—62	9

1. Luftdruckabweichungen. Im Dezember finden wir nur in zehn Fällen von 50 die Luftdruckanomalie zu Stykkisholm von gleichem Sinne wie zu Brüssel und Wien. Letztere beiden Orte stimmen dagegen fast immer im Sinne der Abweichung miteinander überein. Die Wahrscheinlichkeit eines Gegensatzes in der Luftdruckabweichung zu Stykkisholm gegen jene in Nordwest- und Mitteleuropa ist daher im Dezember sehr groß, sie beträgt 0·80. Eine ähnliche Prüfung für Februar und März ergibt als allgemeines Resultat:

Wahrscheinlichkeit eines Gegensatzes in der Luftdruckabweichung zu Stykkisholm gegen jene von Nordwest- und Mitteleuropa.

Dezember	Jänner	Februar	Mittel
0·80	0·58	0·74	0·70

Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung im entgegengesetzten Sinne ist demnach mehr als doppelt so groß als jene einer Abweichung im gleichen Sinne. Die Vertiefung des Luftdruckminimums bei Island scheint demnach in 70% der Fälle mit einer Erhöhung des Luftdruckes über Nordwest- und Mitteleuropa verbunden zu sein. Vom physikalischen Standpunkte aus betrachtet muß dieses Resultat befriedigen, da eine Vertiefung eines stationären Barometerminimums eine Erhöhung des Luftdruckes außerhalb theoretisch zur Folge haben muß.[1]

2. Temperaturabweichungen. Bei der Temperatur sind die Resultate viel unbestimmter.

	Dezember	Jänner	Februar	Summe
Temperaturabweichung gleich	22	15	21	58
Temperaturabweichung entgegengesetzt	28	32	24	84
Resultat unbestimmt	—	3	5	8

[1] Wir möchten aufmerksam machen auf die lange Folge negativer Luftdruckabweichungen im November zu Stykkisholm in den letzten 13 Jahren etwa (seit 1888) und die entsprechende Folge positiver Luftdruckabweichungen zu Wien. Von 1868 bis 1878 hatten wir in Wien im November, eine ununterbrochene Folge negativer Luftdruckabweichungen während zu Stykkisholm gleichzeitig der Luftdruck fast immer sehr hoch war.

In der Mehrzahl der Fälle ist auch die Temperaturabweichung zu Stykkisholm jener in Nordwesteuropa entgegengesetzt. Die Wahrscheinlichkeit eines Gegensatzes ist aber bloß 0·56. Man kann demnach auf einen Gegensatz nur mit geringer Sicherheit rechnen. Das Resultat war kaum anders zu erwarten, da die Temperaturanomalie eines einzigen bestimmten Ortes oft recht lokal bedingt ist. Es ist auch ein physikalischer Grund zu einem Gegensatze zwischen den Temperaturabweichungen im Zentrum und auf der rechten Seite eines stationären Luftdruckminimums nicht vorhanden. Da aber im Winter höherer Luftdruck meist mit einer niedrigeren Lufttemperatur vorbunden ist, steht das obige Resultat mit dem vorigen in guter Übereinstimmung. Im allgemeinen ist demselben aber keine Bedeutung beizulegen.

3. Abhängigkeit der Temperaturanomalie in Nordwesteuropa von der Luftdruckanomalie auf Island. Wenn wir die bei negativen und positiven Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm gleichzeitig in Nordwest- und Mitteleuropa auftretenden Temperaturabweichungen aufsuchen, so ergeben sich folgende Resultate:

Luftdruckabweichung zu Stykkisholm negativ.

Wahrscheinlichkeit einer gleichzeitigen positiven Temperaturabweichung in Nordwest- und Mitteleuropa.

Dezember	Jänner	Februar	Winter
0·90	0·71	0·84	0·82

Luftdruckabweichung zu Stykkisholm positiv.

Wahrscheinlichkeit einer negativen Temperaturabweichung in Nordwest- und Mitteleuropa.

Dezember	Jänner	Februar	Winter
0·74	0·82	0·64	0·73

Diese Resultate sind entschieden und bestätigen den Zusammenhang zwischen der Intensität des Luftdruckminimums bei Island mit den gleichzeitigen Temperaturanomalien in Nordwest- und Mitteleuropa, zunächst für den Winter.

Eine Vertiefung des Luftdruckminimums bei Island bedingt eine Erhöhung der Wintertemperatur über Nordwest- und Mitteleuropa, eine Abschwächung desselben eine Erniedrigung derselben. Inwieweit die Intensität dieses nordatlantischen Barometerminimums von der positiven oder negativen Temperaturanomalie des Meerwassers im Nordatlantic abhängt, diese Frage selbst nur zu streifen, liegt außerhalb der Zielpunkte dieser Abhandlung. Ein derartiger Zusammenhang ist sehr wahrscheinlich, aber es bleibt schwierig, Ursache und Wirkung auf diesem Gebiete stets entschieden auseinander zu halten.[1]

4. Niederschlagsanomalie zu Stykkisholm und Brüssel im Winter. Die letzten Kolumnen unserer Tabellen gestatten, die gleichzeitigen Abweichungen des Niederschlages zu Stykkisholm und Brüssel auf ihre Übereinstimmung oder auf ihren Gegensatz zu prüfen. Im vorhinein ist zu beachten, daß dem Resultate, wie es auch ausfallen mag, eine größere Bedeutung nicht zuerkannt werden kann, weil der Niederschlag ein zu lokales Phänomen ist. Im Winter allerdings noch am wenigsten.

Die Abzählung der entgegengesetzten Zeichen der Abweichungen zu Stykkisholm und Brüssel ergibt:

In 133 Fällen hatte die Abweichung der Niederschlagsmenge des Monates zu Brüssel 91mal das entgegengesetzte Vorzeichen von jener zu Stykkisholm. Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung der Niederschlagsmenge im entgegengesetzten Sinne an beiden Orten ist demnach 0·68! Ein ziemlich entschiedenes Resultat, viel entschiedener wie bei der Temperatur.

[1] Wir verweisen auf O. Pettersson: Über die Beziehungen zwischen hydrographischen und meteorologischen Phänomenen. Meteorol. Zeitschrift, 1896 (Bd. XXXI, p. 285) und W. Meinardus: Der Zusammenhang des Winterklimas in Mittel- und Nordwesteuropa mit dem Golfstrom. Zeitschrift der Gesellsch. für Erdkunde zu Berlin, Bd. XXXIII, 1898, p. 183.

5. Verhalten der größeren gleichzeitigen Luftdruck- und Temperaturabweichungen in allen Monaten. Ich habe allen größeren Luftdruckabweichungen der Monate zu Stykkisholm die gleichzeitigen Temperaturabweichungen zu Greenwich und Brüssel (Mittel beider) beigeschrieben und dann die Mittelwerte dieser korrespondierenden Abweichungen gebildet.

Von Oktober bis inklusive April habe ich alle Monatsabweichungen des Luftdruckes zu Stykkisholm von 5 *mm* und darüber ausgeschrieben, im Mai und September jene $\gtreqless$ 3·5 *mm*, im Juni, Juli, August jene $\gtreqless$ 3 *mm*. Im Sommer sind ja Abweichungen der Monatsmittel des Barometers von 3 *mm* und darüber schon ziemlich selten, selbst zu Stykkisholm.

Die folgende Tabelle lehrt, daß im Jahresdurchschnitt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·74 aus einer größeren positiven Luftdruckabweichung zu Stykkisholm (im Mittel von 6·9 *mm*) auf eine negative Temperaturabweichung von 1° zu Greenwich und Brüssel geschlossen werden kann; mit der noch größeren Wahrscheinlichkeit von 0·84 kann aus einer größeren negativen Luftdruckabweichung zu Stykkisholm (im Mittel von 6·6 *mm*) auf eine positive Temperaturabweichung zu Greenwich und Brüssel von 1° und darüber gerechnet werden. Je tiefer das Luftdruckminimum bei Island ist, desto stärker tritt, wie zu erwarten, seine Wirkung in der Temperaturerhöhung des Nordwestens von Europa in Erscheinung. Die folgende Tabelle ist einer der direktesten Beweise, die bisher geliefert worden sind, für den Einfluß, den die Barometerdepression bei Island auf die klimatische Begünstigung des Nordwestens von Europa hat. Ist das Minimum bei Island abgeschwächt, so macht sich dies in einer Temperaturerniedrigung des Nordwestens von Europa (und auch von Mitteleuropa, wie wir früher gesehen haben) geltend. Schwankungen der mittleren Jahrestemperatur um mehr als 2° sind die Folge, wenn sich die Monatsmittel des Luftdruckes um 6 bis 7 *mm* nach entgegengesetzten Seiten von dem Durchschnitte entfernen.

Größere Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm und gleichzeitige Temperaturabweichungen zu Greenwich und Brüssel.

Monat	Zahl der Fälle	Mittlere Luftdruckabweichung zu Stykkisholm	Mittlere Temperaturabweichung zu Brüssel und Greenwich	Zeichen nicht übereinstimmend mit dem des Mittels
I. Positive Luftdruckabweichungen				
Jänner	11	+10·3	−1·8°	2
Februar	12	+ 9·5	−2·3	1
März	10	+ 7·8	−0·6	3
April	10	+ 5·7	−0·7	3
Mai	7	+ 4·2	−0·2	4
Juni	9	+ 4·5	−0·2	4
Juli	9	+ 3·6	−0·7	2
August	10	+ 4·8	−0·3	3
September	10	+ 5·6	−0·7	3
Oktober	10	+ 7·4	−1·0	2
November	14	+ 8·5	−1·4	2
Dezember	10	+ 8·9	−1·7	3
Jahr	122	+ 6·9	−1·0	32
II. Negative Luftdruckabweichungen				
Jänner	14	− 7·9	+1·4	2
Februar	12	− 8·8	+1·4	2
März	11	− 7·7	+1·7	0
April	8	− 6·7	+0·4	2
Mai	7	− 5·7	+1·4	1
Juni	11	− 4·3	+0·4	3
Juli	7	− 4·2	+0·2	3
August	7	− 4·6	+1·1	0
September	10	− 4·9	+0·7	3
Oktober	8	− 7·4	+0·5	1
November	12	− 7·7	+1·4	1
Dezember	15	− 6·7	+1·5	1
Jahr	122	− 6·6	+1·1	19

Am größten ist selbstverständlich der Einfluß größerer Luftdruckabweichungen bei Island auf die Temperatur in Nordwesteuropa im Winterhalbjahre. Im Sommer ist ja die mittlere Temperatur viel weniger von den vorherrschenden Winden abhängig als im Winter und die größeren Luftdruckabweichungen bei Island sind dann viel seltener. Ost-, Nordost- und Nordwinde, mit heiterem Wetter verbunden, erhöhen im Sommer die Temperatur in Nordwesteuropa, so daß eine Abschwächung des Barometerminimums auch eine Temperaturerhöhung zur Folge haben kann. Man erkennt diese Verminderung des klimatischen Einflusses des isländischen Barometerminimums im Sommer deutlich genug aus der obigen Tabelle. Viel bestimmter ergibt sich der Einfluß der Jahreszeiten aus folgenden Zahlen:

Einfluß der Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm.

	Zahl	Mittlere Luftdruckabweichung	Temperaturabweichung zu Greenwich und Brüssel	Wahrscheinlichkeit derselben
Winterhalbjahr....	67	+8·6 *mm*	−1°47	0·81
Sommerhalbjahr...	55	+3·8	−0·48	0·65
Winterhalbjahr....	72	−7·7	+1·36	0·90
Sommerhalbjahr...	50	−5·0	+0·66	0·76

Im Winterhalbjahre bedingt eine größere Luftdruckabweichung bei Island mit einer mittleren Wahrscheinlichkeit von 0·8 bis 0·9 eine beträchtliche Temperaturanomalie von entgegengesetztem Sinne in Nordwesteuropa, im Sommer ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Einflusses geringer, 0·7 etwa, und der Temperatureffekt ein viel geringerer.[1]

[1] Die Mittel für die Jahreszeiten sind:

Winter.....	+ 9·6 *mm*	— 2°0	— 7·7 *mm*	+ 1·42
Frühling ...	+ 6·1	— 0·5	— 6·8	+ 1·23
Sommer....	+ 4·4	— 0·4	— 4·3	+ 0·52
Herbst.....	+ 7·0	— 1·1	— 6·7	+ 0·93

6. Die größten Temperaturabweichungen der Monats- und Jahresmittel zu Greenwich und die korrespondierenden Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm. Es ist natürlich ratsam, die Frage auch umzukehren. Welche Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm herrschen bei den größten positiven und negativen Temperaturanomalien der Monate und Jahre zu Greenwich (1851 bis 1900)? Die folgende Tabelle gibt Antwort auf diese Frage. Ich habe für jeden Monat die drei größten positiven wie negativen Temperaturanomalien aufgesucht und daneben die entsprechenden Luftdruckanomalien zu Stykkisholm geschrieben.

Wie zu erwarten, entspricht das Ergebnis vollständig dem früheren, wo wir von den Luftdruckanomalien auf Island auf die Temperaturanomalien zu Greenwich zu schließen versucht haben.

Die 42 größten positiven Temperaturanomalien von 50 Jahren zu Greenwich ergeben, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·83 auf eine gleichzeitige negative Luftdruckanomalie zu Stykkisholm geschlossen werden kann; 41 Fälle der größten negativen Temperaturanomalien zu Greenwich fallen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·85 mit gleichzeitigen positiven Luftdruckanomalien zu Stykkisholm zusammen. Die Mittelwerte sind:

Zahl der Fälle	Abweichung der Monatsmittel der Temperatur zu Greenwich	Gleichzeitige Abweichung der Monatsmittel des Luftdruckes zu Stykkisholm	Wahrscheinlichkeit des Zutreffens
42	+2·73°	−2·98 *mm*	0·83
41	−2·80	+4·71	0·85

7. Korrespondierende Abweichungen der Jahresmittel des Luftdruckes von Stykkisholm und der Temperatur zu Greenwich. Die kleine Tabelle auf p. 205 enthält die entsprechenden Zahlenwerte.

Die wärmsten und kältesten Monate in Greenwich und die gleichzeitige Luftdruckanomalie auf Island.

	Jahre			Temperaturabweichung			Luftdruckabweichung zu Stykkisholm		
a) Die wärmsten Monate									
Jänner	1875	1884	1898	2·6	2·9	2·8	2·3	— 1·9	—5·0
Februar	1867	1869	1872	2·9	3·2	2·9	—4·5	— 7·6	0·3
März	1859	1882	1893, 1896	2·7	2·9	2·5	—1·3	—10·7	—3·6, —7·4
April	1865	1893	1894	2·9	2·2	2·2	—1·6	— 1·8	—4·0
Mai	1865, 1889	1868	1893	2·0	2·7	2·7	—3·2, —4·6	— 6·6	—1·4
Juni	1858	1877	1896	3·3	1·8	2·4	—2·0	— 1·2	1·0
Juli	1859	1868	1852, 1887, 1900	3·2	2·8	2·3	—0·5	— 2·6	0·5
August	1857	1893	1899	2·1	2·1	2·1	—1·5	2·2	3·4
September	1865	1895	1898	3·7	2·6	2·7	—4·8	— 3·4	—2·4
Oktober	1861	1886	1898	2·8	1·9	2·3	—4·5	— 2·5	—1·2
November	1852	1881	1899	3·2	3·2	2·7	2·4	—10·8	—4·9
Dezember	1852	1868	1898	4·4	3·5	3·4	—0·2	— 5·6	—5·5
Jahr	1868	1898	1857, 1893	1·2	1·1	0·9	—3·5	— 2·8	—1·5, 0·3

	Jahre			Temperaturabweichung			Luftdruckabweichung zu Stykkisholm		
				b) Die kältesten Monate					
Jänner	1871, 1880	1879	1881	—3·0	—3·8	—3·9	—2·0, 4·1	6·9	18·8
Februar	1853	1855	1895	—3·4	—5·8	—5·8	12·9	13·8	14·2
März	1865	1883	1892	—2·7	—2·9	—2·4	2·3	10·2	3·4
April	1860	1879	1888	—2·3	—2·0	—2·0	— 0·6	1·3	5·7
Mai	1855	1879	1876, 1877	—2·0	—2·2	—1·7	2·4	— 2·4	0·7, 3·7
Juni	1860	1869	1871	—2·3	—2·1	—2·3	3·4	2·9	5·2
Juli	1860	1879	1888	—2·7	—2·3	—2·5	0·3	2·1	3·9
August	1860	1885	1891	—2·2	—1·7	—1·6	— 1·8	6·9	0·5
September	1860	1877	1863	—2·1	—2·2	—1·9	1·3	5·7	— 6·1
Oktober	1881	1887	1888	—2·5	—2·6	—2·1	3·7	5·0	6·1
November	1851	1871	1879	—2·9	—3·1	—2·6	7·8	10·3	8·2
Dezember	1874	1879	1890	—3·6	—4·0	—5·5	8·8	— 0·5	3·6
Jahr	1855	1860	1879	—1·3	—1·3	—1·7	1·8	0·0	0·6

Abweichungen der Jahresmittel des Luftdruckes über 0·5 *mm* zu Stykkisholm.

Jahr	Stykkisholm Luftdruck-	Greenwich Temperatur-	Jahr	Stykkisholm Luftdruck-	Greenwich Temperatur
	Abweichung			Abweichung	
1852	1·1	0·7	1876	0·8	0·4
1853	0·6	—1·0	1878	3·1	0·1
1855	1·8	—1·3	1879	0·6	—1·7
1856	2·6	—0·2	1880	1·5	0·0
1867	2·2	—0·4	1881	1·1	—0·3
1869	0·7	0·1	1885	1·1	—0·4
1870	2·3	—0·4	1887	1·5	—0·8
1871	1·3	—0·4	1888	2·3	—0·9
1872	0·9	0·7	1892	2·8	—0·7
1875	0·9	—0·1	1895	1·4	—0·0
1854	—2·5	—0·2	1877	—0·6	0·3
1857	—1·5	0·9	1882	—0·7	0·3
1858	—0·6	—0·1	1883	—1·9	0·0
1861	—0·8	0·0	1884	—2·1	0·7
1862	—2·4	0·1	1890	—2·0	—0·4
1863	—3·8	0·5	1894	—2·7	0·4
1866	—0·8	0·2	1896	—0·8	0·5
1868	—3·5	1·2	1898	—2·8	1·1
1874	—1·4	0·0			

Einer positiven Abweichung der Jahresmittel des Luftdruckes zu Stykkisholm um 0·5 *mm* und darüber entspricht mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·70 eine negative Abweichung des Jahresmittels der Temperatur zu Greenwich; andrerseits fällt einer negativen Abweichung des Jahresmittels des Luftdruckes zu Stykkisholm um 0·5 *mm* und darüber in 60% der Fälle mit einer positiven Abweichung des Jahresmittels der Temperatur zu Greenwich zusammen. Der entgegengesetzte Sinn der Abweichungen tritt bei den

Jahresmitteln erheblich weniger regelmäßig auf als bei den Monatsmitteln. Es ist dies offenbar dem Einflusse der Sommertemperaturen zuzuschreiben, welche von dem Minimum bei Island unabhängiger sind.

8. Abweichungen der jährlichen Regenmengen vom Gesamtmittel. Schließlich habe ich noch die folgende Tabelle zusammengestellt, welche die Beziehungen zwischen den gleichzeitigen Niederschlagsmengen zu Stykkisholm und zu Brüssel zu beurteilen gestattet.

Gleichzeitige Abweichungen der jährlichen Regenmenge (in Zentimetern) zu Stykkisholm und Brüssel.

	Stykkisholm	Brüssel		Stykkisholm	Brüssel
1857	14	—26	1879	— 7	— 2
1858	15	—21	1880	0	15
1859	— 4	3	1881	—28	6
1860	— 9	9	1882	—15	19
1861	— 1	6	1883	— 8	— 3
1862	0	— 5	1884	— 7	— 1
1863	0	—13	1885	—12	0
1864	—12	—27	1886	— 0	3
1865	7	— 5	1887	— 6	—13
1866	— 1	8	1888	9	13
1867	—12	10	1889	6	4
1868	21	— 1	1890	6	13
1869	— 1	10	1891	—12	— 5
1870	1	— 5	1892	—15	—13
1871	0	— 8	1893	1	—13
1872	—14	19	1894	2	4
1873	16	— 8	1895	— 5	3
1874	10	—10	1896	22	— 1
1875	23	— 5	1897	16	— 2
1876	8	10	1898	0	—18
1877	— 9	23	1899	17	— 5
1878	—16	33	1900	— 1	— 4

Die Tabelle zeigt, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·70 auf einen entgegengesetzten Charakter der Abweichungen der jährlichen Niederschlagsmengen zu Stykkisholm und Brüssel geschlossen werden kann. Sehr lehrreich ist aber das fast entgegengesetzte Verhalten der ersten 22 Jahrgänge gegenüber den letzten 22 Jahren.

Die Jahre 1857 bis 1878 haben fast stets das entgegengesetzte Zeichen der Niederschlagsabweichungen. Die Wahrscheinlichkeit einer entgegengesetzten Anomalie ist 0·90! In der zweiten Reihe aber ist diese Wahrscheinlichkeit bloß 0·45, nur halb so groß und es ist also hier die Wahrscheinlichkeit einer Übereinstimmung des Charakters der Anomalie größer, (0·55). Man sieht hieraus, wie leicht kürzere Beobachtungsreihen zu Fehlschlüssen führen können.

Im allgemeinen ist, wie schon bemerkt, auf die gleichsinnigen oder entgegengesetzten Anomalien der Niederschlagsmenge einzelner Lokalitäten wenig zu bauen, man müßte regionale Jahresmengen den Vergleichen zugrunde legen und vor allem lange Jahresreihen. Anderenfalls kann man leicht zu Fehlschlüssen verleitet werden, wie obige Tabelle eindringlich predigt.

A. Buchan war wohl der erste, der den Zusammenhang zwischen den Luftdruckanomalien zu Stykkisholm und den Temperaturanomalien über den britischen Inseln erkannt hat, zu einer Zeit, wo die Zurückführung der Witterungsverhältnisse auf die herrschende Luftdruckverteilung selbst unter den Fachmeteorologen noch gar nicht allgemein anerkannt war. In der mehrfach interessanten Abhandlung: »On the cold weather of March 1867, as illustrating the relation between temperature and pressure of the Atmosphere«[1] weist Buchan im Detail nach, wie die Kälteperiode des März 1867 durch die damalige Druckverteilung über Europa bedingt war: durch Hochdruck über Island und Nordschottland und niedrigen Druck über dem Kanal und Südwesteuropa. Vom 11. bis 18. März war der Luftdruck auf Island 769·4, bei den Faröern 766·1 (vom 1. bis 6.

[1] Journal of the Scottish Meteorol. Society. New Series, Vol. II, p. 66, August 1867.

sogar 777·2), hingegen über dem Golf von Biscaya nur zirka 753·4. Die Temperatur über Schottland war 5° bis 8° C. unter der Normalen und bemerkenswerterweise war diese negative Abweichung bei den hochgelegenen Stationen am größten, im Innern des Landes größer als an den Küsten. Bei der großen Kälteperiode um Weihnacht 1860, welche Buchan schon früher untersucht hatte,[1] waren die negativen Abweichungen an den unteren Stationen am größten und die Temperatur an den hochgelegenen Orten war relativ mild. Mit Recht führt Buchan diesen Gegensatz im Verhalten der beiden Kälteperioden darauf zurück, daß die Kälte um Weihnacht 1860 bei Windstille eintrat (Strahlungskälte war), während die Kälte des März 1867 von heftigen Nordwest- und Nordwinden begleitet war. Ginsterbüsche am Loch Lomond, die mindestens 30 Jahre alt waren und den intensiven Frost von Weihnacht 1860 überstanden hatten, erfroren bei den kalten Winden des März 1867 und ebenso Heidekraut. Mit einer totalen Änderung der Druckverteilung zu Ende des März trat wieder eine Erwärmung ein, der Luftdruck war nun im Süden höher als im Norden und die Temperatur stieg über das Mittel.

Die mittlere Temperaturabweichung des März 1867 zu Edinburgh war deshalb doch nur —1·8°, jene des Dezember 1860 dagegen —3·0°, der Dezember 1859 war eher noch etwas kälter gewesen.[2] Fast ebenso kalt waren die Februarmonate 1864 und 1865 und die Märzmonate der gleichen Jahre. Wenn man unsere Tabelle der Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm nachsieht, wird man für alle diese Monate nur positive Abweichungen vorfinden:

Dezember	1859....	+5·3 *mm*;
	1860....	+8·1 »
Februar	1864....	+0·3 »
	1865....	+5·8 »

besonders interessant sind folgende Zahlenreihen für den März:

[1] Report Scottish Met. Soc. for the Quarter ending December 1860.

[2] Abweichungen vom Mittel 1851 bis 1900. Mossmann, The Meteorology of Edinburgh. Trans. R. Soc. Edinburgh. Vol. XL. Part III, 1902.

1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869
März. Luftdruckabweichung zu Stykkisholm								
—9·5	5·7	—6·8	0·8	2·3	3·6	12·0	—10·7	6·9
März. Temperaturabweichung zu Edinburgh								
0·8	—1·6	1·5	—1·7	—2·0	—1·7	— 1·8	2·1	—1·2

Die Luftdruckabweichung zu Stykkisholm ist geradezu der Index für eine Temperaturabweichung im entgegengesetzten Sinne zu Edinburgh. Ähnliche Reihen wie die obigen ließen sich mehrfach aufstellen. Und Herr A. Buchan hat zuerst auf diese Beziehungen hingewiesen.

In der späteren, oben schon zitierten Arbeit: »On the Meteorology of Iceland«, Journal, Vol. II, p. 287/288, führt Buchan diese Beziehungen zwischen den Luftdruckanomalien auf Island und den Temperaturanomalien in Schottland noch weiter durch. Im Juli 1868 herrschte große Hitze in Schottland, zu Stykkisholm war der Luftdruck sehr niedrig (Abweichung —2·6), ebenso war der September 1865 sehr schön und warm, Stykkisholm hatte sehr niedrigen Luftdruck (—4·8), über Schottland war in beiden Fällen der Luftdruck hoch.

Aber es gibt auch Ausnahmen. Wenn z. B. der Luftdruck auf Island zwar niedrig ist, das Barometermaximum bei den Azoren aber sich verlagert hat und der hohe Luftdruck über Mittel- oder über Nordeuropa liegt, dann können trotzdem negative Temperaturanomalien in Mittel- und Nordwesteuropa die Folge sein. Der außerordentlich kalte Dezember 1879 ist dafür ein Beispiel (Barometermaximum über Mitteleuropa, Strahlungskälte, Stykkisholm —0·5 *mm*, Temperaturabweichung +1·7°). Der strengste Winter Mitteleuropas, der von 1829 bis 1830, hatte sicherlich den gleichen Charakter. Die Luftdruckabweichung zu Wien war:

Dezember	1829....	+6·2 *mm*,
Jänner	1830....	+1·3
Februar	1830....	+1·6

Temperaturabweichung:

Dezember	1829....	—7·1°,
Jänner	1830....	—6·3
Februar	1830....	—3·7
Winter	....	—5·7

der kälteste Winter in einer 125jährigen Beobachtungsreihe. Zu Reykjavik waren die Luftdruckabweichungen damals:

Dezember	1829....	—3·5 *mm*,
Jänner	1830....	+2·8
Februar	1830....	—5·4

im ganzen also negativ; die Temperaturabweichung dagegen war zu Reykjavik:

Dezember	1829....	+2·1°,
Jänner	1830....	+2·7
Februar	1830....	+0·3
Winter	....	+1·7.

Welcher Gegensatz der Temperatur zu Wien und zu Reykjavik im Jänner 1830! Wien —8·3°, Reykjavik +1·1°. Ähnliche Gegensätze sind:

Jänner 1833..... Wien —5·8°, Reykjavik +0·5°

und umgekehrt:

Dezember	1833....	Wien	+5·4°,	Reykjavik	—3·5°,
Jänner	1835....	»	+4·2	»	—6·4.

Schade, daß vom Dezember 1840 keine Beobachtungen mehr von Island vorliegen, wo Wien seinen kältesten Dezember mit —9·3 hatte.

II. Beziehungen zwischen den Luftdruckschwankungen zu Stykkisholm und jenen zu Ponta Delgada oder zwischen den beiden „Aktionszentren der Atmosphäre" des nordatlantischen Ozeans.

Schon vor längerer Zeit[1] habe ich auf eine merkwürdige Verlagerung der beiden Aktionszentren der Atmosphäre bei den Azoren und bei Island aufmerksam gemacht, welche im Jänner 1881 sich eingestellt hat, wo das Monatsmittel des Barometerstandes zu Ponta Delgada 749·5 *mm* war, hingegen zu Stykkisholm 764·4. Stykkisholm hatte damals die größte positive Abweichung und Ponta Delgada gleichzeitig die größte negative Anomalie des Luftdruckes. Seither hat Herr Meinardus die Verlagerung der beiden genannten Aktionszentren im Mittel des ganzen Winters (1880/81) näher beleuchtet, kartographisch dargestellt und die Beziehung zu der entsprechenden Wintertemperatur von Nordwest- und Mitteleuropa nachgewiesen. Dieser Winter war sehr kalt. Den Gegensatz hiezu bildete der nächste Winter 1881/82 sowohl in Beziehung auf die Luftdruckverteilung als auch auf die Temperatur.[2] Die mittlere Abweichung des Luftdruckes war:

Winter 1880/81..	Ponta Delgada	—5·2,	Stykkisholm	+11·9,
» 1881/82..	» »	+2·8,	»	— 4·2.

Sind diese Gegensätze in den Abweichungen als vereinzelte zufällige Erscheinungen zu betrachten oder besteht eine Art Wechselwirkung zwischen den Druckverhältnissen bei den Azoren und jenen bei Island. Stehen diese beiden Aktions-

[1] Die Verteilung des Luftdruckes über Mittel- und Südeuropa. Wien, 1887, p. 74.

[2] Meinardus, Das Winterklima von Nordwesteuropa und der Golfstrom. Berliner Zeitschrift für Erdkunde, XXXIII (1898), p. 197, mit 2 Karten. Da der Dezember 1880 in Mitteleuropa sehr warm war, einer der wärmsten des Zeitraumes 1851 bis 1900, so würde die Darstellung des Spätwinters (Jänner und Februar 1881) allein ein noch schärferes Bild geliefert haben, wenigstens für die Temperatur. Auf Hoffmeyers bezügliche wichtige Arbeit mag im Zusammenhange auch hingewiesen werden, wenn sie gleich allen Meteorologen bekannt ist (Meteorol. Zeitschr., Bd. XIII (1878), p. 337 und XIV, p. 73.

zentren der Atmosphäre in einer Art Abhängigkeitsverhältnis zueinander, wenigstens in bezug auf die Intensität ihres Auftretens oder läßt sich keine nähere Beziehung zwischen denselben feststellen?

Zur Beantwortung dieser Frage habe ich die gleichzeitigen Abweichungen der Monatsmittel des Luftdruckes zu Ponta Delgada in dem Zeitraume 1865 bis 1890 mit jenen zu Stykkisholm verglichen.[1]

Ich habe zunächst alle Abweichungen der Monatsmittel des Barometerstandes zu Ponta Delgada (vom Mittel 1865 bis 1890) von 3 *mm* und darüber herausgeschrieben und die gleichzeitigen Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm danebengestellt. Diese Abweichungen wurden dann zu Mittelwerten vereinigt. So entstand folgende Tabelle.

Beziehungen zwischen den Luftdruckabweichungen zu Ponta Delgada und jenen zu Stykkisholm.

Monat	Zahl	Ponta Delgada	Stykkisholm	Entgegengesetztes Vorzeichen	Monat	Zahl	Ponta Delgada	Stykkisholm	Entgegengesetztes Vorzeichen
Positive Abweichungen zu Ponta Delgada									
Winterhalbjahr					Sommerhalbjahr				
Oktober	3	+3·8	—4·5	3	April ..	5	+4·1	—0·4	4
Nov....	7	+4·1	—5·5	7	Mai ...	2	+3·1	+0·2	1
Dez....	6	+4·9	—2·9	5	Juni...	1	+2·9	+1·8	0
Jänner .	4	+5·1	+2·5	1	Juli ...	0	0	0	0
Februar	4	+5·3	—2·4	3	August	1	+3·3	—3·4	1
März ..	8	+5·1	—2·0	4	Sept. ..	1	+2·6	—1·5	1
Mittel ..	(32)	+4·7	—2·7	(23)	Mittel .	(10)	+3·6	—0·4	(7)

Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Zeichens der Abweichung: 0·71 und 0·70

[1] Die Luftdruckmittel von Ponta Delgada 1865 bis 1885 habe ich in meiner oben zitierten Abhandlung zusammengestellt, nachdem ich die in den ersten Jahrgängen vorkommenden Lücken in den Beobachtungen durch die Aufzeichnungen zu Angra do Heroismo ergänzt habe. Die publizierten, mir (Anfang Jänner 1904) zugänglichen Beobachtungsresultate von Ponta Delgada reichen leider nur bis 1890. Die regelmäßigen Beobachtungen auf den Azoren beginnen mit 1865. Siehe Meteorol. Zeitschrift, Bd. VII, 1871, p. 310.

Monat	Zahl	Ponta Delgada	Stykkisholm	Entgegengesetztes Vorzeichen	Monat	Zahl	Ponta Delgada	Stykkisholm	Entgegengesetztes Vorzeichen
Negative Abweichungen zu Ponta Delgada									
Winterhalbjahr					Sommerhalbjahr				
Oktober	4	—5·7	+6·3	4	April ..	6	—4·2	+3·5	6
Nov....	4	—5·5	+5·0	3	Mai ...	2	—3·5	+1·2	1
Dez....	6	—4·9	+2·6	3	Juni...	2	—3·1	+1·0	1
Jänner .	4	—7·5	+8·7	3	Juli ...	0	0	0	0
Februar	4	—5·8	+4·2	4	August	2	—3·8	+4·3	2
März ..	6	—5·5	+5·2	6	Sept. ..	1	—4·1	+2·0	1
Mittel..	(28)	—5·7	+5·1	(23)	Mittel .	(13)	—3·9	+2·8	(11)

Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Vorzeichens der Abweichung zu Stykkisholm: 0·82 und 0·85.

Zusammenfassung zu Jahresmitteln.

Zahl der Fälle	Zahl der entgegengesetzten Zeichen	Mittlere Abweichung zu Ponta Delgada	Mittlere Abweichung zu Stykkisholm	Wahrscheinlichkeit des Gegensatzes
I. Ponta Delgada + 3 *mm* und darüber.				
42	30	+4·5	−2·4	0·71
II. Ponta Delgada — 3 *mm* und darüber.				
41	34	—5·1	+4·4	0·83

Es ist demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·77 auf einen Gegensatz der Luftdruckabweichungen zu Ponta Delgada und Stykkisholm zu schließen.[1] Auf 83 Monate

[1] Ich darf nicht unterlassen, hier auch auf die Abhandlung von H. Hildebrandsson hinzuweisen: »Quelques recherches sur les centres d'action de l'atmosphère«. Abhandl. der k. schwedischen Akademie, Bd. 29, Nr. 3, Stockholm, 1897, p. 5. Relations entre les écarts des regions différentes. Graphische Darstellungen der Monatsabweichungen 1875 bis 1884 inkl.

kommen bloß 19 mit gleichem Vorzeichen der Abweichung; 64 Monate haben Abweichungen im entgegengesetzten Sinne. Wenn eine größere negative Luftdruckabweichung zu Ponta Delgada besteht, so kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0·83 auf eine positive Abweichung zu Stykkisholm schließen, mit etwas geringerer Wahrscheinlichkeit 0·71 von einer positiven Abweichung zu Ponta Delgada auf eine negative zu Stykkisholm. Eigentümlich ist, daß zwischen Winter- und Sommerhalbjahr darin kein Unterschied besteht.

Die Gegensätze zwischen den Luftdruckabweichungen zu Ponta Delgada und zu Stykkisholm, wie sie vorhin für die Winter 1880/81 und 1881/82 aufgezeigt worden sind, waren deshalb keine vereinzelten Erscheinungen, sie waren nur extreme Fälle durchschnittlich auftretender Verhältnisse.

Nun wollen wir auch hier wieder die Fragestellung umkehren und nachsehen, welche Luftdruckabweichungen zu Ponta Delgada mit den größten positiven und negativen Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm korrespondieren. Ich habe deshalb aus den Jahren 1865 bis 1890 je zwei größte positive und negative Abweichungen zu Stykkisholm herausgeschrieben und denselben die gleichzeitigen Luftdruckabweichungen zu Ponta Delgada zur Seite gestellt. Auf diese Weise ist die folgende Tabelle entstanden.

Diese Tabelle weist nach, daß den größten positiven Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm in 80% der Fälle negative Abweichungen zu Ponta Delgada entsprechen und der größten negativen Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm in 87% der Fälle positive Abweichungen zu Ponta Delgada. Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung im entgegengesetzten Sinne überhaupt ist 0·83. Das Resultat ist demnach dasselbe wie im vorigen Falle, nur noch etwas bestimmter.

Man wird demnach behaupten dürfen, daß die beiden Aktionszentren der Atmosphäre im nordatlantischen Ozean, das Luftdruckmaximum bei den Azoren und das Luftdruckminimum bei Island in einer gewissen Wechselbeziehung stehen. Nun ist dabei folgendes zu beachten.

Beziehungen zwischen den größten Luftdruckabweichungen zu Stykkisholm zu den gleichzeitigen Druckabweichungen zu Ponta Delgada.

		Winterhalbjahr					Sommerhalbjahr		
		Stykkisholm	Ponta Delgada	Differenz			Stykkisholm	Ponta Delgada	Differenz
Größte positive Abweichungen zu Stykkisholm									
Oktober	1880	+13·4	— 8·8	22·2	April	1873	+ 5·5	— 4·4	9·9
	1888	+ 6·1	— 4·3	10·4		1888	+ 5·7	+ 2·8	2·9
November	1871	+10·3	— 2·1	12·4	Mai	1867	+ 5·5	— 4·1	9·6
	1878	+10·9	— 1·8	12·7		1869	+ 5·1	— 1·9	7·0
Dezember	1870	+13·1	— 2·4	15·5	Juni	1871	+ 5·2	+ 0·9	4·3
	1878	+15·9	— 8·8	24·7		1882	+ 3·3	+ 1·6	1·7
Jänner	1867	+12·2	— 7·7	19·9	Juli	1880	+ 4·0	— 2·5	6·5
	1881	+18·8	—14·5	33·3		1889	+ 5·2	— 1·2	6·4
Februar	1873	+ 8·1	+ 1·0	7·1	August	1877	+ 5·8	— 4·4	10·2
	1889	+ 8·9	+ 6·0	2·9		1885	+ 6·9	— 2·7	9·6
März	1867	+12·0	—10·6	22·6	September	1868	+ 6·7	— 1·3	8·0
	1883	+10·2	— 2·8	13·0		1876	+ 7·4	— 2·4	9·8
Mittel		+11·7	— 4·7	16·4	Mittel		+ 5·5	— 1·7	7·2

		Winterhalbjahr					Sommerhalbjahr		
		Stykkis-holm	Ponta Delgada	Differenz			Stykkis-holm	Ponta Delgada	Differenz
Größte negative Abweichungen zu Stykkisholm									
Oktober	1868	— 7·5	+ 4·8	12·3	April	1874	— 6·6	+ 1·6	8·2
	1883	— 7·1	+ 2·7	9·8		1883	— 4·7	+ 1·6	6·3
November	1877	— 8·8	+ 3·0	11·8	Mai	1868	— 6·6	+ 1·2	7·8
	1881	—10·8	— 0·4	10·4		1875	— 9·3	0·0	9·3
Dezember	1881	— 8·4	+ 4·7	13·1	Juni	1868	— 5·9	+ 1·4	7·3
	1888	— 7·6	+ 0·7	8·3		1876	— 5·5	+ 2·2	7·7
Jänner	1869	— 9·0	— 1·6	7·4	Juli	1876	— 5·9	— 0·4	5·5
	1890	—11·5	+ 2·1	13·6		1882	— 3·6	+ 0·8	4·4
Februar	1868	— 9·5	+ 6·5	16·0	August	1867	— 4·8	+ 1·0	5·8
	1883	—12·4	+ 2·4	14·8		1886	— 6·7	+ 1·5	8·2
März	1868	—10·7	+ 6·8	17·5	September	1879	— 7·0	+ 2·1	9·1
	1882	—10·2	+ 7·0	17·2		1866	— 4·4	+ 2·5	6·9
Mittel		— 9·5	+ 3·2	12·7	Mittel		— 5·9	+ 1·3	7·2

Ist der Luftdruck bei den Azoren höher als im Mittel und gleichzeitig der Druck bei Island unter dem Mittel, wie das in mehr als 70% der Fälle stattfindet, so wird das normale Luftdruckgefälle über dem atlantischen Ozean verstärkt, die atmosphärische Maschine arbeitet dann intensiver, die klimatische Begünstigung von Europa erfährt zugleich eine Steigerung. Umgekehrt, ist das Barometermaximum bei den Azoren abgeschwächt, so ist zumeist gleichzeitig der Luftdruck bei Island höher als im Mittel, das normale Druckgefälle von S nach N über dem atlantischen Ozean wird abgeschwächt, ja kann ganz unterdrückt werden, die klimatische Begünstigung von Nordwest- und Mitteleuropa geht dadurch mehr oder weniger verloren.

Aus den dieser Abhandlung beigegebenen Luftdruckmitteln für Ponta Delgada und Stykkisholm wird man für alle interessierenden Fälle das Druckgefälle zwischen Ponta Delgada und Stykkisholm bequem entnehmen können. Das mittlere oder normale Gefälle ergibt sich aus folgenden Luftdruckmitteln, die für die Periode 1851 bis 1880 gelten.

Luftdruckmittel im Meeresniveau mit Schwerekorrektion.

	Ponta Delgada	Stykkisholm	Differenz
Jänner	764·8 *mm*	746·5 *mm*	**18·3**
Februar	**65·4**	51·1	14·3
März	65·0	55·2	9·8
April	64·2*	58·0	6·2
Mai	65·7	60·2	5·5*
Juni	68·1	57·7	10·4
Juli	**68·5**	57·0	**11·5**
August	67·0	57·1	9·9
September	65·9	54·7	11·2
Oktober	65·4	53·4	12·0
November	63·5*	56·0	7·5*
Dezember	65·1	50·4	14·7
Jahr	765·7 *mm*	754·8 *mm*	10·9

Im Jänner erreicht die Druckdifferenz zwischen den Azoren und Island ihr Hauptmaximum, ein zweites kleineres im Juli, das geringste Druckgefälle nach Norden herrscht im Mai und dann wieder im November. Die Azoren und Island liegen sehr nahe im Herzen der beiden »Aktionszentren«, die obigen Differenzen repräsentieren somit das größte Druckgefälle zwischen dem subtropischen Druckmaximum und dem Druckminimum des nordatlantischen Ozeans. Ponta Delgada und Stykkisholm liegen so ziemlich unter gleichem Meridian und ihr Breitenabstand beträgt 27·3°.

	Korrektion auf das Meeresniveau und 45° Breite
Ponta Delgada 37° 45′ N, 25°5 W, 20 *m*..	+1·4 *mm*
Stykkisholm 65° 4′ N, 22°7 W, 11·3 *m*	+2·3 *mm*

Der Gradient beträgt daher selbst im Jänner kaum 0·7 *mm* (pro Grad). Aus den Tabellen am Schluse ersieht man, daß die Druckdifferenz zwischen den Azoren und Island im Winterhalbjahre nicht so selten ganz aufgehoben wird oder sich sogar umkehrt. Aus der Tabelle der negativen Abweichungen zu Stykkisholm (p. 216) hingegen ersieht man die Verstärkungen des Druckgefälles. Zum Beispiel:

Wahrer Luftdruck im Meeresniveau.

	Dez. 1881	Jänner 1890	Februar 1868	Februar 1883	März 1868	März 1882
Stykkisholm..	740·8	736·8	741·7	738·8	744·3	744·3
Ponta Delgada	769·9	768·0	771·9	767·8	771·9	772·1
Differenz.....	29·1	31·2	30·2	29·0	27·6	27·8

Die Luftdruckdifferenz zwischen den Azoren und Ponta Delgada steigt demnach zuweilen bis auf 31 *mm*. Alle oben angeführten Monate mit diesen großen Druckdifferenzen waren in Nordwest- und Mitteleuropa zu warm.

	Dez. 1881	Jänner 1890	Februar 1868	Februar 1883	März 1868	März 1882
Greenwich...	+0·1	+2·4	+1·9	+1·9	+1·4	+2·9
Brüssel.....	+0·1	+3·4	+2·3	+2·4	+1·7	+2·9
Wien.......	+1·2	+2·9	+3·6	+1·4	+0·6	+5·0

Das gesteigerte Druckgefälle nach N überflutet West- und Mitteleuropa mit den warmen ozeanischen Westwinden. Dieselben bleiben aus, wenn dieses Druckgefälle unterdrückt oder gar umgekehrt ist. Z. B. Februar 1895, Luftdruck zu Stykkisholm 765·4, zu Ponta Delgada 751·5; Temperaturabweichung Greenwich —5·8, Brüssel —7·5, Wien —5·4.

Die Fälle, in welchen der Luftdruck bei den Azoren gesteigert und wie dies zumeist der Fall ist, bei Island gleichzeitig vermindert ist, sind theoretisch die interessantesten. Wenn umgekehrt der Luftdruck bei den Azoren niedriger und bei Island höher ist, so kann dies, und das ist wohl zumeist der Fall, wie im Winter 1880/81, durch eine Verlagerung der Hochdruckzone nach N verursacht sein, an welche Erscheinung sich zunächst keine theoretischen Beziehungen knüpfen lassen.

Anders, wenn der Luftdruck bei den Azoren ungewöhnlich hoch ist. Das kann nicht als eine bloße Verlagerung des subtropischen Hochdruckgürtels aufgefaßt werden, sondern nur als eine größere Intensität desselben infolge einer gesteigerten Tätigkeit der atmosphärischen Zirkulation. Wenn der Nordostpassat viel kräftiger weht als durchschnittlich, wird er das Maximum zu seiner Rechten stärker aufstauen. Dadurch wird aber auch der atmosphärische Wirbel über dem nordatlantischen Ozean verstärkt und damit auch das Luftdruckminimum in seinem Zentrum bei Island vertieft: der gesteigerte Hochdruck bei den Azoren und die meist damit verbundene Vertiefung des Luftdruckminimums bei Island können somit wie Ursache und Wirkung verknüpft sein. Dadurch erhält die oben nachgewiesene Tatsache, daß stärkere positive Luftdruckabweichungen bei den Azoren mit negativen Druckabweichungen bei Island zusammen eintreten, ein größeres theoretisches Interesse.

Daß die Wahrscheinlichkeit dieser Verknüpfung nur 70 bis 80% beträgt, kann darin liegen, daß wir selbe nur auf Grund der Luftdruckverhältnisse an zwei Punkten ableiten konnten, so daß seitliche Verschiebungen der Druckzentren leicht scheinbare Ausnahmen zur Folge haben können. Wenn das Luftdruckminimum in der Davisstraße auf Kosten jenes

bei Island stärker entwickelt ist oder letzteres sich mehr in das europäische Nordmeer hinauf verlagert hat oder das Luftdruckmaximum bei den Azoren nach Nordafrika oder nach Süd- und Mitteleuropa gewandert ist (wie Dezember 1879), so werden unsere beiden Stationen allein uns nicht das richtige Druckgefälle liefern können. Nur Isobarenkarten des atlantischen Ozeans würden in allen Fällen die richtige Auskunft geben können. Dazu wären aber, um einen Zeitraum von 50 Jahren überblicken zu können, 600 Monatskarten nötig und es würden noch ein paar Dezennien nötig sein, bis die »Hoffmeyerschen Karten« das genügende Alter erreicht haben. Dieses Kartenwerk wird einst ein ausgezeichnetes Mittel bieten, die hier angedeuteten Beziehungen gründlich und nach allen Seiten zu untersuchen. Aber auch dann noch werden die Druckdifferenzen zwischen unseren beiden Stationen Ponta Delgada und Stykkisholm in den meisten Fällen den bequemsten und kürzesten Ausdruck für das Luftdruckgefälle über dem nordatlantischen Ozean darbieten.

III. Die Meteorologie von Stykkisholm.

Die hervorragende Bedeutung der Station Stykkisholm infolge ihrer Lage nahe der Mitte des nordatlantischen Luftwirbels, dem Sitze eines der beiden »Aktionszentren der Atmosphäre, dann infolge der langen Reihe meteorologischer Aufzeichnungen, die von derselben vorliegen, rechtfertigt es, auf die Meteorologie dieses Ortes näher einzugehen. Ich habe in einer folgenden Tabelle alle wichtigeren Mittelwerte und Extreme der meteorologischen Elemente vereinigt zu einem übersichtlichen Bilde der atmosphärischen Vorgänge nahe dem Zentrum eines der größten permanenten Luftwirbel der Erde. Die Quellen, die zur Herstellung dieses Bildes gedient haben, sind im wesentlichen schon im Eingange dieser Abhandlung angegeben worden. Die mit * bezeichneten Mittelwerte oder Extreme sind teils einer Schrift des dänischen meteorologischen Institutes[1] entnommen, teils verdanke ich sie brieflichen

[1] Éléments météorologiques des îles Féroé, de l'Islande et du Groenland. Kjøbenhavn, 1899.

Mitteilungen des Subdirektors dieses Institutes, Herrn V. Willaume-Jantzen.

Luftdruck. Herr Willaume-Jantzen teilt in der obigen Publikation die folgenden auf das Meeresniveau reduzierten und mit Schwerekorrektion versehenen 22jährige Luftdruckmittel von Stykkisholm mit:

	Mittel	Absolute Extreme		Diff.
Jänner......	749·7	785·2	705·7	79·5
Februar.....	51·7	**89·1**	10·2	78·9
März.......	54·6	88·5	12·3	76·2
April.......	58·4	79·4	24·4	55·0
Mai........	**60.7**	83·5	30·3	53·2
Juni........	57·9	75·7	25·2	50·5
Juli........	57·7	74·0	34·1	39·9
August.....	57·1	73·6	24·0	49·6
September..	54·8	75·0	21·3	53·7
Oktober....	54·8	82·7	20·6	62·1
November...	52·6	80·3	13·2	67·1
Dezember...	49·6*	79·2	03·7*	75·5

In meinen 50jährigen Mitteln hat der Jänner den niedrigsten Luftdruck 747·9, der Mai hat 760·5, das Jahr 754·7 (red.). Herr Jantzen hat 755·0, der Unterschied ist nur im Jännermittel erheblich. Bei der außerordentlichen Unruhe des Luftdruckes zu Stykkisholm sind solche Unterschiede verschiedener Reihen begreiflich. Der Unterschied der extremen Jännermittel beträgt 31·6 *mm*! Auch noch im Februar 29·1, die mittlere Veränderlichkeit der Monatsmittel übersteigt vom November bis Februar 5 *mm*, die durchschnittliche Monatsschwankung beträgt von Dezember bis März im Mittel 45 *mm*, die größten Schwankungen innerhalb 30 Tagen erreichen öfter 70 *mm*, ja sie können selbst auf 80 *mm* anwachsen. Diese Unruhe des Barometerstandes ist höchst bezeichnend für den inneren Teil eines Luftwirbels, dessen Zentrum ja stets Verlagerungen erfährt.

Sehr merkwürdig sind die großen Druckunterschiede desselben Monates in sich unmittelbar folgenden Jahren:

März 1867.	Abweich.	+12·0	März 1882.	Abweioh.	—10·7
» 1868.	»	—10·7	» 1883.	«	+10·2

Februar	1894...	Abweichung	—14·9
»	1895...	»	+14·2
Jänner	1881...	»	+18·8
»	1882...	»	— 2·6
Dezember	1877...	»	— 5·8
»	1878...	»	+15·9 etc.

An diesem Orte niedrigsten durchschnittlichen Barometerstandes kommen doch auch alljährlich sehr hohe Barometermaxima vor, wie folgende Tabelle lehrt, welche ich nach einer gefälligen brieflichen Mitteilung des Herrn W. Jantzen zusammengestellt habe.

Die mittleren Jahresextreme sind 782·6 und 715·2, mittlere jährliche Schwankung also 67·4 *mm*; die absoluten Extreme waren 789·1 und 703·7, absolute Schwankung 85·4 *mm.*

Temperatur. Bei der Temperatur habe ich die Abweichungen der ganzen Reihe 1846 bis 1900 genommen, der Unterschied der Mittel aus der Periode 1851 bis 1900 gegen erstere ist, wie die Tabelle lehrt, ganz gering. Die Mittel der täglichen Extreme, auf welche ich für die ganze Reihe angewiesen war, unterscheiden sich wenig von den wahren Mitteln, wie die Tabelle zeigt, in welche ich die »wahren Mittel« von einigen 20 Jahren nach W. Jantzen aufgenommen habe. Das dänische »Polarwerk« (Observations faites à Godthaab 1882—1883) enthält T. II, p. 60 Daten über den täglichen Gang der Temperatur zu Stykkisholm, nach welchen die Mittel aus 8, 2, 9 in den Jahrbüchern auch stets korrigiert werden. Da vom November bis Februar die tägliche Amplitude fast Null ist (die unperiodische tägliche Schwankung ist aber dabei doch 5°4), so müssen die Korrektionen einen großen Teil des Jahres hindurch sehr klein ausfallen.

Die Veränderlichkeit der Monatsmittel der Temperatur ist relativ gering, auch deren absolute Schwankung, wenn man vom März absieht. In dem für Island schrecklichen Eisjahre 1881 sank dessen Temperatur auf —13·6 (Jantzen hat —13°3), eine Temperatur, die kein anderer Monat in der Periode 1846 bis 1900 erreicht hat.

Das kälteste Jahr war das Jahr 1866 mit —1°3 (Abweichung —4°1!), alle Monate blieben unter dem Mittel, selbst noch im

Jahresextreme des Luftdruckes zu Stykkisholm im Meeresniveau und mit Schwerekorrektion. 700 *mm* +

	Maximum	Minimum	Differenz
1873	81·4	11·0	70·4
1874	77·4	18·5	58·9
1875	80·5	13·9	66·6
1876	79·0	21·8	57·2
1877	78·7	11·4	67·3
1878	78·7	25·5	53·2*
1879	83·5	10·9	72·6
1880	82·7	17·7	65·0
1881	81·6	13·8	67·8
1882	78·9	12·3	66·6
1883	88·5	13·2	75·3
1884	78·6	14·2	64·4
1885	79·8	21·6	58·2
1886	82·7	21·5	61·2
1887	86·3	19·1	67·2
1888	83·9	3·7*	**80·2**
1889	87·1	14·6	72·5
1890	88·4	18·0	70·4
1891	85·2	9·3	75·9
1892	**89·1**	9·6	79·5
1893	80·3	21·0	59·3
1894	82·2	5·7	76·5
1895	82·7	23·8	58·9
1896	85·3	14·8	70·5
1897	79·7	18·3	61·4
1898	81·0	17·4	63·6
1899	83·9	11·2	72·7
1900	84·1	17·8	66·3
1901	85·4	8·2	77·2
Mittel	82·6	15·2	67·4

Bei dem Minimum 703·7 zu Stykkisholm am 23. Dezember 1888 stand das Barometer zu Reykjavik auf 696·8 *mm* (W. Jantzen).

folgenden Jahre 1867 bis zum November. Die Ursache solcher Unglücksjahre für Island ist die Besetzung der Insel mit dem Polareis, das in unregelmäßigen Perioden mit dem Polarstrome herabkommt. Dagegen hatte der März 1856 bei anhaltenden Südwinden eine mittlere Temperatur von 4·5, welche die eines normalen März in Wien etwas übertrifft.

Die mittleren Jahresextreme der Temperatur habe ich aus den 30 Jahrgängen 1872 bis 1901 abgeleitet. Sie sind nach den Dezennien und im Mittel:

Mittlere Maxima			
1872/1881	1882/1891	1892/1901	Mittel
16·2	16·3	18·3	16·9

Mittlere Minima			
1872/1881	1882/1891	1892/1901	Mittel
—17·8	—15·8	—15·3	—16·3

Die mittleren Jahresminima gehen wenig unter jene von Wien herab. Das absolute Minimum war —26·0 Jänner 1881, der März 1881 hatte aber auch —25·0. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Jahresminimum unter —20° hinabsinkt, ist bloß 0·17, daß es unter —15° sinkt, auch nur 0·47, aber alle Minima blieben unter —10°. Die höchste Temperatur trat am 1. und 2. Juli 1894 ein mit Südost- und Ostwinden. Das Tagesmittel des 2. Juli war 18°4, die relative Feuchtigkeit 62%, das Maximum 22°9.

Niederschlagsverhältnisse. Die größte Niederschlagsmenge fällt von September bis Februar inklusive, 62% der Jahresmenge, die trockensten Monate sind April und Mai, wo das Meer kalt ist, das Land aber sich rasch erwärmt. Die Regenwahrscheinlichkeit ist im Winter sehr groß, im Dezember und März 0·65, im Juli bloß 0·44. Im Winter fällt etwa die Hälfte der Niederschläge in Form von Schnee, im Jahresdurchschnitte etwas über ein Viertel. Aber nur der August hatte noch keinen Schneetag. Die größte Häufigkeit von Nebeln hat der Sommer, wie dies an nordischen Küsten (auch noch in England) überhaupt der Fall ist. Gewitter sind sehr selten und treten am häufigsten im Winter bei Stürmen auf. Meine Daten sind nach Buchan; Jantzen gibt im Mittel bloß einen Tag mit Gewitter an (Dage med Torden), bei Buchan sind

vielleicht auch ferne Gewitter (bloß Blitze sichtbar, es heißt aber Thunderstorms) mitgezählt.

Die vorherrschenden Winde sind NE, E und SE, was der Lage von Stykkisholm auf der Nordostseite des nordatlantischen Barometerminimums entspricht. Nur im Sommer erreichen die Westwinde eine etwas größere Häufigkeit.

Einige allgemeinere Beschreibungen der klimatischen Eigentümlichkeiten von Island mögen hier angeschlossen werden.[1]

Die Temperatur von Island hängt in hohem Grade ab von den Eisverhältnissen. Dieselben sind aber sehr variabel. Bald fehlt das Eis an den Küsten mehrere Jahre hindurch, bald blockiert es Island während mehrerer sich folgender Jahre, bald wieder nur in einzelnen Jahren. Im allgemeinen erscheint das Eis zuerst beim Kap Nord, von Nord- und Nordwestwinden herbeigetrieben, dann erfüllt es auch das Meer an der Nordküste in größerer oder geringerer Entfernung vom Lande. Oft erreicht es die Ostküste nicht mehr, aber zuweilen blockiert es auch diese und, wenn gleich selten, wird auch an der Südküste Eis gesehen bis Vestmannoe, doch ist dies nur der Fall während großer Eisjahre und auch dann erscheint das Eis hier nur in einzelnen Blöcken. In seltenen Fällen kommt das Eis zuerst an der Ostküste an. Am seltensten erreicht das Eis von Kap Nord herab auch die Westküste.

Während durchschnittlich die Temperaturdifferenz zwischen Vestmannoe (Insel an der Südküste) und Grimsey (Insel an der Nordküste) von Jänner bis März sich zwischen $3^1/_2$ und $5^1/_2$° hält, stieg diese Differenz in dem schrecklichen Eisjahre 1881 auf $10^1/_2$ bis 14° bis in den Sommer hinein; ja selbst zwischen Vestmannoe und Stykkisholm kann die Temperaturdifferenz der Monate Jänner bis März auf 7 bis 10° steigen, während die normale Differenz bloß 3 bis 4° ist.

Zum Schlusse noch Bemerkungen über den Temperaturcharakter einzelner Jahrgänge, welche zur Erläuterung der Tabelle der Temperaturabweichungen dienen.

Witterungsnotizen aus Briefen von Thorlacius, Journal Scottish Met. Soc., Vol. II, p. 3. Der letzte Winter (Brief vom

[1] Zum Teile nach V. Willaume-Jantzen, Sous-Directeur à l'Institut Mét. Danois: Climat du Littoral Islandais. Copenhague, 1902.

15. Oktober 1866) war sehr streng. Spitzbergeneis umgab die Nord- und Nordwestküste von Island vom Jänner bis zum Ende des August in größerem oder geringerem Grade und verschwand erst völlig Mitte September. Der Effekt auf die Temperatur des Sommers war sehr groß. Welche enorme Massen von Eis im Jänner, Februar und März den Ozean im Norden von Island erfüllten, kann aus der Tatsache erschlossen werden, daß bei klarem Wetter der »Eisblink« von Stykkisholm aus, also auf 20 geographische Meilen gesehen werden konnte, nicht allein bei Tag, sondern auch bei Nacht. Das Jahr 1866 war deshalb auch das kälteste der ganzen Beobachtungsreihe.

Vom Winter 1869/1870 meldet Thorlacius (Vol. III, p. 53): Die ungewöhnliche Ankunft von Spitzbergeneis im November 1869 verursachte starken Frost bis zum 22. Dezember, dann wurde das Wetter milder, namentlich im Februar 1870, wo aller Schnee wegschmolz und das Land im allgemeinen grün anzusehen war. Am 12. Dezember gab es einen Orkan von NE, den heftigsten, dessen man sich erinnert.

Über den Sommer 1870 liegt ein anderer Bericht vor (Journal, Vol. II, p. 68). Die Temperatur war relativ sehr hoch, aber im ganzen trotzdem nicht günstig zum Heumachen. Der Himmel war jeden Tag bedeckt und die Sonnenstrahlen konnten selten die dicke, neblige Atmosphäre durchdringen. Dieser Sommer war ein sehr merkwürdiger. Man denke sich ein ständiges nebliges Wetter bei einer Temperatur von 60° F. (15°6 C., für Island sehr hoch), begleitet von beständiger, ganz ungewöhnlicher Windstille, ohne einen Sturm durch volle fünf Wochen, mit sehr geringem Temperaturunterschiede zwischen Tag und Nacht. In manchen Teilen der Insel war die Hitze fast unerträglich, namentlich in den Tälern, wo sie auf 20 bis 21° gestiegen sein soll. Der Effekt dieser andauernden Hitze auf die schneebedeckten Berge und auf die Gletscher war auffallend. Eis und Schnee schmolz zum großen Teile weg und große Gletscher wurden klein und unbedeutend. Man erinnert sich keiner ähnlichen Witterung.

Über das Wetter auf Island im Winterhalbjahre 1877/1878 hat Capt. Hoffmeyer ausführlicher berichtet in der Meteorologischen Zeitschrift, Bd. XIII (1878), p. 145. (Föhnwinde auf

der Westseite von Island bei heftigen Weststürmen am 18. und 20. September wo die Temperatur auf 18 bis 20° C. stieg bei 33% Feuchtigkeit. Der warme Wind kam von den Eisfeldern des Inneren! Entgegengesetzte Temperaturanomalien auf Island und in Dänemark.)

Der Winter 1881/1882 war auf Island außerordentlich milde bei sehr niedrigem Luftdrucke. England hatte gleichzeitig sehr hohen Luftdruck und niedrige Temperatur. Am 14. Jänner 1882 war zu Greenwich der Luftdruck 776·5, die Temperatur 5°6, zu Stykkisholm dagegen 718·6 bei Südsturm und einer Temperatur von 8°1. Am 18. Jänner, 10^h a. m., stieg der Luftdruck zu Greenwich auf 786·7, die Maximumtemperatur war 1°2, zu Stykkisholm war gleichzeitig der Luftdruck 748·4, das Temperaturmaximum 8°1, ein heftiger Südsturm setzte um Mittag ein und währte bis zum anderen Tage. Die mittlere Luftdruckdifferenz Greenwich—Stykkisholm erreichte im Jänner 27·2 *mm*, die normale Barometerdepression über dem nordatlantischen Ozean war bedeutend verstärkt und nach NW hin verschoben.

Nach Mitte März unterlag aber die Witterung auf Island einer völligen Änderung. Die Südwinde hörten auf, hoher Luftdruck herrschte und zyklonische Störungen mit Nordoststürmen trieben das arktische Eis nach Süden und ließen es an den N- und NE-Küsten von Island stranden. Unter diesen Umständen gestaltete sich das Wetter ungewöhnlich rauh und winterlich und Thorlacius berichtet, daß niemand sich eines so strengen und unglücklichen Frühlings erinnert, wie es der diesjährige (1882) war. Um Ostern war alles Futter für Pferde, Schafe und Rinder aufgezehrt und es starben diese Tiere in großer Anzahl. Die Bevölkerung befand sich am Rande einer großen Hungersnot. Die Schafe gingen fast alle zugrunde. Infolge der großen Kälte und des Mangels an Regen zeigt sich nur spärliches Gras. Das Eis umgibt noch (1. Juli 1882) den ganzen Norden und Nordosten der Insel in ungeheuren Massen und macht die Küste für Schiffe unzugänglich. An der Nordostküste hat das Eis zirka 50 große Walfische an den Strand getrieben, welche einen unerwarteten Sukkurs für die Bevölkerung der Küstendistrikte abgaben (Nature, August 3, 1882).

Stykkisholm, 65° 4′ nördl. Br., 22° 46′ westl. v. Gr. Seehöhe 11·3 *m*.

	Luftdruck						Temperatur					
	Mittel [1] 1851/1900	Extreme Abweichungen		Differenz	Mittlere Veränderlichkeit	Mittlere Monats- u. Jahresschwankg. 16 Jahre	Mittel der täglichen Extreme 1846/1900	Mittel der täglichen Extreme 1851/1900	Wahre Mittel [2] 25 Jahre	Mittlere tägliche Extreme [2]		Tägliche Amplitude
Jänner	745·59	—12·8	18·8	31·6	5·79	44·1	—2·2	—2·4	—2·2	—5·2	0·4	5·6
Februar	48·91	—14·9	14·2	29·1	5·63	47·4	—2·7	—2·7	—2·6	—5·6	0·1	5·7
März	52·72	—10·7	12·0	22·7	4·55	46·7	—2·3	—2·5	—2·5	—5·6	0·4	6·0
April	55·33	—11·1	8·2	19·3	3·48	36·3	0·8	0·7	0·8	—1·8	3·5	5·3
Mai	58·19	— 9·3	5·5	14·8	2·55	32·8	4·3	4·2	4·1	1·6	7·0	5·4
Juni	55·72	— 5·9	6·4	12·3	2·54	30·1	7·8	7·8	7·9	5·4	10·7	5·3
Juli	54·91	— 5·9	5·2	11·1	1·97*	22·1	9·7	9·7	9·7	7·2	12·4	5·2
August	54·75	— 6·7	8·7	15·4	2·54	25·1	9·2	9·2	9·2	6·7	11·8	5·1
September	52·12	— 7·0	8·4	15·4	3·06	33·3	6·8	6·8	7·2	4·6	9·4	4·8
Oktober	51·78	—12·3	13·4	25·7	4·08	40·1	3·2	3·1	3·6	1·0	5·7	4·7
November	51·38	—12·1	10·9	23·0	5·14	40·7	0·5	0·5	0·7	—2·1	2·9	5·0
Dezember	46·86	— 9·2	15·9	25·1	4·80	42·0	—1·3	—1·5	—1·7	—4·8	0·7	5·5
Jahr	**52·36**	— 3·8	3·1	6·9	1·30	67·4	2·8	2·7	2·9	0·1	5·4	5·3

	Wärmster Monat 1851/1900	Kältester Monat 1851/1900	Differenz	Mittlere Veränderlichkeit	Mittlere Monats- und Jahresextreme		Differenz	Absolute Extreme[2] 22 Jahre		Feuchtigkeit[2] 22 Jahre	Bewölkung[2] 22 Jahre
Jänner	0·9	— 8·6	9·5	1·72	6·8	—13·7	20·5	9·4	—26·0	88	7·1
Februar	0·9	—10·4	11·3	2·01	6·4	—14·5	20·9	8·9	—22·5	88	7·1
März	4·5	—13·6	18·1	2·19	6·6	—14·7	21·3	9·6	—25·0	87	6·7
April	5·5	— 6·8	12·3	1·90	8·7	— 9·7	18·4	12·3	—21·0	87	6·5
Mai	6·9	— 0·3	7·2	1·44	11·9	— 4·3	16·2	14·7	— 8·2	83	6·1
Juni	10·1	5·3	4·8	0·99	14·6	0·4	14·2	19·9	— 2·0	82	6·4
Juli	12·8	6·8	6·0	0·99	15·3	3·7	11·6	22·9	0·8	83	5·7
August	12·2	6·1	6·1	1·02	15·2	2·5	12·7	22·0	— 0·2	83	5·9
September ..	9·4	2·9	6·5	0·86*	13·2	— 0·5	13·7	16·1	— 4·7	84	6·7
Oktober	6·6	0·3	6·3	1·23	10·7	— 4·6	15·3	15·1	— 8·6	86	6·8
November ..	3·6	— 3·1	6·7	1·23	8·4	— 9·0	17·4	11·4	—17·9	87	7·1
Dezember...	3·0	— 7·7	10·7	1·71	6·9	—11·9	18·8	9·2	—21·1	88	7·0
Jahr	4·3	— 1·3	5·6	0·81	16·3	—17·6	33·9	22·9	—26·0	86	6·6

[1] In 11·3 *m* ohne Schwerekorrektion. [2] Nach W. Jantzen.

	Niederschlags- Menge	Niederschlags- mittlere Veränderlichkeit	Niederschlags- Tage	Schneetage [1]	Schneemenge : Niederschlagsmenge	Tage mit Nebel [1]	Tage mit Gewitter	Tage mit Sturm [1]
	1847/1900				12 Jahre	23 Jahre		
Jänner	72	29·5	19·9	15	·53	0·3	1·2	7
Februar	68	27.9	17·9	14	·47	0·3	0·7	8
März	50	21·2	18·0	13	·63	0·3	0·4	8
April	39	17·6	16·3	7	·34	0·8	0·3	5
Mai	35	16·1	15·3	3	·17	1·5	0·1	5
Juni	41	16·0	15·7	0·4	·03	1·5	0	3
Juli	41	15·9	13·7	0·2	·06	1·6	0·1	2
August	44	18·7	14·2	0	·00	1·0	0	2
September	71	26·0	17·5	1	·02	0·7	0·2	6
Oktober	70	26·4	18·6	4	·16	0·3	0·2	6
November	64	23·1	18·3	9	·33	0·3	0·6	7
Dezember	67	28·5	20·3	14	·42	0·4	1·1	6
Jahr	662	88·4	205·2	81	·277	9·0	4·9	65

Häufigkeit der Winde und Kalmen in Prozenten [1]

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Kalmen
Winter	3	17	20	17	**12**	**16**	5	1	9
Frühling	2	20	**22**	17	11	7	7	2	12
Sommer	4	13	19	13	11	6	**13**	**7**	**14**
Herbst	**4**	**22**	18	**18**	11	10	5	2	10
Jahr	3	18	20	16	11	10	7	3	12

[1] Nach V. W. Jantzen.

IV. Die Temperatur an der Ostküste von Grönland, Stykkisholm gegenüber.

Von sehr hohem Interesse sind die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen zu Angmagsalik an der Küste von Grönland in sehr nahe gleicher Breite mit Stykkisholm, aber $14^1/_2$° westlicher gelegen, was in dieser Breite einer Entfernung von nur 670 *km* entspricht.

Angmagsalik, 65° 37′ nördliche Breite, 37° 16′ westliche Länge, liegt auf einer Insel am Eingange des Sermilikfjord auf der Westseite der Dänemarkstraße, welche Island von diesem Teile der Ostküste Grönlands (König Christian IX. Land) trennt. Während an der Westküste von Island eine warme Strömung (der Irmingerstrom) vom Atlantischen Ozean heraufkommt, die sich bis an die Nordküste der Insel fortsetzt, geht auf der anderen Seite der Dänemarkstraße der kalte, eisführende Ostgrönland-Polarstrom herab. Dies bedingt einen großen Temperaturgegensatz zwischen beiden Küsten, welcher aber ziffermäßig erst in neuester Zeit durch die Gründung der meteorologischen Station zu Angmagsalik festgestellt werden konnte, was im folgenden zum erstenmale geschehen soll.

Nachdem durch die Überwinterung einer dänischen Expedition unter Holm zu Angmagsalik 1884 bis 1885 die ersten meteorologischen Daten für diesen Ort gewonnen worden waren,[1] begann mit November 1894 die Tätigkeit einer ständigen meteorologischen Station zu Angmagsalik, deren sehr wertvolle Aufzeichnungen in den dänischen Jahrbüchern in extenso veröffentlicht werden. Es ist dies ja die einzige ständige Beobachtungsstation an der durch den Eisstrom als sehr unzugänglich bekannten Ostküste Grönlands. Nur bei Angmagsalik ist die Zugänglichkeit eine leichtere.

Ich habe deshalb die jetzt vorliegenden sieben Jahrgänge dieser Beobachtungen (1895 bis 1901) dazu benützt, um den

[1] Die Ergebnisse hat spezieller Willaume-Jantzen bearbeitet. Appendix zum II. Bande des dänischen Polarwerkes. Siehe auch Meteorol. Zeitschrift, XXV. Bd., 1880, p. 137 mein Referat darüber.

Temperaturunterschied zu beiden Seiten der Dänemarkstraße, unter dem Polarkreise kann man sagen, festzustellen.

Die Temperaturdifferenzen Angmagsalik — Stykkisholm wurden Monat für Monat berechnet. Diese Differenzen stellten sich im Sommer als sehr konstant heraus, im Winterhalbjahre ist aber die Veränderlichkeit derselben ziemlich groß. Ich konnte da aber auch Beobachtungen von acht Jahrgängen benützen. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

Angmagsalik-Stykkisholm. Differenzen sämtlich negativ.

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
6·8	**8·1**	6·0	5·1	4·7	3·8	4·3	4·4	4·4	4·7	5·4	5·9

Der Winter (Dezember—März) ist also zu Angmagsalik um 6°7 kälter als zu Stykkisholm unter nahe gleicher Breite, der Sommer nur um 4°2, das Jahr um 5°3. Die Temperaturdifferenz pro Grad (111 *km*) ist deshalb im Winter 1°1, im Sommer 0°7, im Jahre fast 0°9, im Februar sogar fast 1°4. Solche Temperaturdifferenzen unter gleicher Breite ohne Gebirgsscheidewand auf freier Meeresfläche sind sehr selten. Sie werden bedingt durch den Gegensatz zwischen dem warmen Irmingerstrom an der Küste von Island und dem kalten Polarstrom an der Küste von Ostgrönland.

Von Interesse dürfte in dieser Beziehung folgende kleine Tabelle sein. Bronö liegt an der Westküste von Norwegen.

Ort	Breite	Länge	Februar	Juli	Jahr
Bronö	65° 28′ N,	12° 13′ E	— 1·4	12·8	5·2
Stykkisholm ..	65 4 N,	22 46 W	— 2·7	9·7	2·8
Angmagsalik ..	65 37 N,	37 16 W	—10·8	5·4	—2·6

Zwischen Island und Norwegen über den Atlantischen Ozean hin nimmt auf 35° Längenunterschied die Februartemperatur nur um 1°3 ab, zwischen Island und der Ostküste von Grönland auf $14^1/_2$° aber um 8°1!, im Juli sind die Differenzen 3°1 und 4°3, im Jahresmittel 2°4 und 5°4. Diese Zahlen geben eine vortreffliche Illustration der Temperaturunterschiede zwischen Ost- und Westküsten, verstärkt durch die entsprechenden kalten und warmen Meeresströmungen.

Bringt man die obigen Differenzen an die vieljährigen Monatsmittel der Temperatur von Stykkisholm an, so erhält man Normalmittel für Angmagsalik. Ich füge denselben auch die mittleren und absoluten Monatsminima und Maxima der Temperatur von sieben bis acht Jahren bei, sowie die mittlere Temperatur von Godthaab an der Westküste von Grönland, $1^1/_4{}^\circ$ südlicher gelegen, aber ebenfalls an der Außenseite eines Fjords. Diese Mittel sind 22jährige, aber nicht aus einem korrespondierenden Zeitraume.

Die geographischen Koordinaten von Godthaab sind: 64° 11′ N, 51° 46′ W, 11·3 *m*. Angmagsalik 65° 37′ N, 37° 16′ W (14 und 32 *m*).

Temperatur an der Ost- und Westküste von Grönland.

	Angmagsalik	Godthaab	Angmagsalik, Temperaturextreme: Mittlere Extreme		Diff.	Absolute Extreme	
Jänner	— 9·2	— 9·7	—22·0	3·4	25·4	—28·9	8·9
Februar	—10·8	—10·5	—23·7	4·1	27·8	—30·7	15·2
März	— 8·5	— 8·1	—19·9	6·2	26·1	—23·7	10·8
April	— 4·4	— 3·7	—18·8	8·2	27·0	—24·1	10·9
Mai	— 0·5	0·9	—10·5	10·1	20·6	—15·7	13·2
Juni	4·0	4·5	— 2·5	14·6	17·1	— 3·6	19·7
Juli	5·4	6·7	— 1·1	16·7	17·8	— 2·5	20·7
August	4·8	6·2	— 2·7	16·7	19·4	— 5·7	25·2
September	2·4	2·9	— 4·4	11·3	15·7	— 7·4	15·4
Oktober	— 1·6	—1·0	— 9·5	8·3	17·8	—12·0	13·4
November	— 4·9	—4·6	—17·3	5·2	22·5	—23·4	12·7
Dezember	— 7·4	—7·9	—19·5	3·8	23·3	—21·3	7·4
Jahr	— 2·6	—2·0	—26·1	18·7	44·8	—30·7	25·2

Diese Tabelle lehrt uns zunächst, daß die Ostküste von Grönland unter 64 bis 65° etwas kälter zu sein scheint als die Westküste, man hätte aber den Unterschied größer erwartet. Die Ursache ist wohl, daß der Polarstrom bei Angmagsalik nicht mehr sehr breit ist und die Nähe des warmen nordatlantischen Ozeans sich doch noch fühlbar macht. Die größten Wärmeunterschiede scheinen im Sommer zu bestehen, Angmagsalik 4°7, Godthaab 5°8, Dezember und Jänner dürften in Angmagsalik ein wenig wärmer sein.

Da in den Jahren 1895 bis 1900 keine regelmäßigen Beobachtungen von Godthaab vorliegen, dieselben erst wieder 1901 beginnen, so konnte ich keine sicheren Temperaturdifferenzen ableiten. Was ich aber fand, stimmt ziemlich gut mit den obigen. Es ergab sich: Angmagsalik—Godthaab: November bis Jänner +0·7, Februar bis März —0·7, Sommer —0·3 (aus wenigen Monaten nur).

Reduziert man die mittleren Jahresextreme von Angmagsalik auf die 30jährigen Mittel von Stykkisholm durch Differenzen von sieben bis acht Jahren, so erhält man:

Angmagsalik, mittlere Jahresextreme —27·3 und 17·5.

Die Differenzen sind im Mittel bei den Maximis +0·6, bei den Minimis —11·0, die Jahresschwankung ist demnach um 11°6 größer als zu Stykkisholm.

Einer brieflichen Mitteilung des Herrn Willaume Jantzen verdanke ich die nachfolgenden mittleren Monats- und Jahresextreme von Godthaab.

Mittlere Monats- und Jahresextreme von Godhaab.

	Mittlere Extreme		Absolute Extreme	
Jänner	—20·0	4·0	—28·2	11·0
Februar	—21·4	2·5	—27·5	9·6
März	—20·6	4·3	—28·2	9·0
April	—14·3	6·3	—21·1	9·8
Mai	— 6·5	9·4	—11·0	13·6
Juni	— 1·6	15·3	— 3·9	23·2
Juli	0·7	16·6	— 1·1	19·6
August	— 0·2	15·6	— 2·6	17·9
September	— 3·6	10·5	— 7·8	16·0
Oktober	— 9°7	6°8	—14·6	10·3
November	—13·6	5·4	—17·4	14·2
Dezember	—17·9	5·7	—25·6	15·0

Die mittleren Jahresextreme sind —23·0 und 18·2. Die Extreme sind demnach in Godthaab viel gemäßigter als in Angmagsalik. Die hohen absoluten Temperaturmaxima November

bis Jänner sind auf den grönländischen Föhn zurückzuführen (Maximum im Dezember höher als im Mai!).

Ich habe auch versucht, die Luftdruckmittel von Angmagsalik auf Stykkisholm zu reduzieren, die Differenzen erwiesen sich aber als so unregelmäßig, daß ich den Versuch aufgeben zu müssen glaubte.

Die Niederschlagsmenge zu Angmagsalik scheint viel größer zu sein als jene von Stykkisholm. Das wäre sehr interessant, denn man hätte das Gegenteil annehmen zu müssen vermeint (Ostküste, Polarstrom). Die Aufzeichnungen sind nur in zwei Jahren vollständig: 1898, 1009 *mm*; 1901, 1293 (Stykkisholm 666 und 722).

In der Tabelle der Monatsmaxima der Temperatur von Angmagsalik fallen gewiß sogleich die hohen Beträge derselben auf, besonders 15·2! im Februar und 25·2 im August.

Man weiß schon seit der ersten Überwinterung daselbst unter Holm, daß Angmagsalik einen Nordwestföhn hat, der aus dem Inneren des Landes, von dem eisbedeckten Plateau herabkommt. Dieselbe Beobachtung hat man später auch weiter nördlich im Scoresbysund, 70½° N, gemacht, wo es sehr heftige und sehr warme Föhnwinde aus NW gibt.[1]

Da die meteorologischen Aufzeichnungen zu Angmagsalik in extenso publiziert werden, so kann man bei der Durchsicht derselben im Winter häufig genug stärkere Erwärmungen und niedrige relative Feuchtigkeit bei Nordwestwind finden. Ich will nun aber die zwei sehr bemerkenswerten Fälle, welche die beiden oben angeführten sehr hohen Temperaturmaximis betreffen, spezieller nach dem Beobachtungsjournal beschreiben.

Zuerst, weil schneller abgetan, den Fall vom August 1899.

	1. August			2. August		
	8^h	2^h	9^h	8^h	2^h	9^h
Temperatur	12·9	19·3	19·1	23·6	24·8	10°
Rel. Feuchtigkeit ...	37	30	20	20	20	60%
Wind	E	NW_1	NW_2	NW_2	NW_2	E

[1] A. Woeikoff, Klima und Föhne der Dänemarkinsel, Scoresbysund. Meteorol. Zeitschr., XXXVI. Bd., 1901, p. 5.

Das Maximum am 2. war 25°. Also ein typischer Föhnwind, der vom Inlandeis kommt! Das Tagesmittel des eigentlichen Föhntages war 22°5 und das der relativen Feuchtigkeit 20°. Fast unter dem Polarkreise bei einem Augustmittel von 4°8, eine Temperaturerhöhung um nahe 18°.

Das hohe Temperaturmaximum von 15° trat am 2. und 3. Februar 1901 bei starkem Nordwest auf. Bis zum 30. Jänner hatten große Kältegrade geherrscht —20 bis —16°, am 29. Jänner tritt ein Barometermaximum ein, 788·7 *mm* (Tagesmittel), Maximum 9ʰ abends 789·6 *mm*, am 30. steigt die Temperatur auf +4·6 (Vorabend noch —16·5) bei fallendem Barometer und Nordwest, die starke bleibende Erwärmung tritt aber erst am 1. Februar ein. Abgekürzt mögen die Aufzeichnungen vom 1. bis 3. Februar hier Platz finden.

Angmagsalik

Febr. 1901	Luftdruck	Temperatur 8	Temperatur 2	Temperatur 9	Relative Feuchtigkeit 8	Relative Feuchtigkeit 2	Relative Feuchtigkeit 9	Wind 8	Wind 2	Wind 9
1	762·2	9·9	7·2	7·8	38	52	50	NW_1	O	W_1
2	766·0	11·3	13·5	10·0	31	23	33	NW_3	NNW_2	NNW_2
3	764·4	5·9	14·5	5·4	41	11	56	N_1	NNW_2	O

Die Temperaturmaxima waren 15·2, 15·0, 14·7. Am 4. tritt bei Windstille wieder Kälte ein. Ein Tagesmittel von 11°8 im Februar unter dem Polarkreise, am Eismeere, bei 29°/₀ relativer Feuchtigkeit ist gewiß eine höchst bemerkenswerte meteorologische Erscheinung. Die normale Temperatur des Februar ist —10·8, die Erwärmung somit selbst im Tagesmittel 22°6!

Zu Stykkisholm weiter im Westen zeigt sich an diesen Tagen nichts Bemerkenswertes. Das Barometermaximum am 29. war daselbst niedriger, 783·0, am 1., 2., 3. Februar war der Luftdruck respektive 760·1, 761·9, 759·8, also niedriger als zu Angmagsalik, der Wind starker Nordwest wie dort. Die Luft kam somit dort aus dem Inneren von Grönland, zu Stykkisholm aber über das Meer her, die Temperatur hält sich um 0° herum (0·8, —0·8, —0·8), die Feuchtigkeit ist hoch (96 bis 100°/₀) im Mittel an jedem der drei Tage.

Aber sehr bemersenswert sind die gleichzeitigen Beobachtungen zu Jakobshavn auf der anderen Seite von Grönland 69° 13′ N, also nicht ganz 4° nördlicher.

Auch hier finden wir, aber schon früher am 27., ein Barometermaximum 783·3 *mm*, Temperatur an diesem Tage —30°2, das Barometer fällt dann, die Temperatur erhebt sich über 0° bei Südostwind aus dem Inneren des Landes. Höchste Temperatur am 30.: Maximum 9^h^ abends 8°7, in der Nacht Maximum 9°5 bei Südost. Feuchtigkeitsbeobachtung fehlt. Dann treten Niederschläge ein, das Barometer bleibt hoch. Am 1., 2. und 3. Februar waren die Stände 765·5, 768·0, 771·6, die Temperaturen 0°0, 2°2, —0°6, Maxima 9°5, 7°2 und 5°6, die Feuchtigkeit sinkt aber nur am 2. um 8^h^ morgens auf 59% herab.

Es hatte sich also offenbar Ende Jänner ein hohes Barometermaximum über Grönland eingestellt, dessen Kern über dem Inlandeis zu suchen ist. Die Luft fließt nach beiden Seiten gegen das Meer hin ab, in Angmagsalik haben wir Nordwest, in Jakobshavn Südost. Wird das Luftdruckgefälle nach außen stärker und damit auch der Wind aus dem Inneren, so kommt es zu Föhnerscheinungen, die auf beiden Seiten zugleich auftreten können und aus dem Inneren des Barometermaximums herauswehen. Woeikof hat auf einen solchen Föhn aus einem Barometermaximum über dem Inneren von Grönland (am 14. Februar 1892, 793·4) in Scoresbysund 70½° N nach den Beobachtungen der Expedition Ryder besonders aufmerksam gemacht.[1] Bei sinkendem, aber noch hohem Barometerstande, 775 bis 763 *mm*, steigt die Temperatur rasch bis auf 8°5 bei Westnordwest.

Für die Theorie der Föhnerscheinungen sind solche Fälle höchst lehrreich, sie sprechen ganz entschieden gegen die von H. Wild geäußerten Vorschläge über die Einschränkung des Begriffes Föhnwind.

Das Inlandeis von Grönland muß im Winter häufig der Sitz von Barometermaximis sein, von denen aus die Winde in die Fjorde hinabfallen und dort besonders in deren Hinter-

---

[1] Meteorol. Zeitschrift, 1901, p. 6.

grund, seltener an deren Außenrand,[1] gelegentlich sich bis zu Föhnwinden verstärken. An der Westküste sind es dann Ostwinde, an der Ostküste Westwinde, wie die Beobachtungen auch ergeben.

In Beziehung auf die obigen Ausführungen ist im hohen Grade interessant, was Lieutenant E. A. Peary über die Winde auf dem Inlandeis des nördlichen Grönland sagt.[2]

»Der Wind weht stetig auf dem Eiskap und weht fast immer in Richtungen des Terraingefälles vom Inneren her. Die Regelmäßigkeit der Winde auf dem »großen Eis« von Grönland, wie ich dies bei einem Aufenthalte von mehr als sieben Monaten auf dem Eiskap und bei öfteren Besuchen von geringerer oder größerer Dauer in jedem Monate des Jahres gefunden habe, ist geradezu phänomenal. Ausgenommen atmosphärische Störungen von ungewöhnlicher Größe, welche Stürme über dem ganzen Land hervorrufen und alle gewöhnlichen Regeln umstoßen, ist die Richtung des Windes auf dem großen Inlandeise von Grönland unveränderlich radial, vom Zentrum auswärts, und senkrecht auf den nächsten Landstreifen der Küste. So stetig ist dieser Wind und so genau hält er sich an seinen normalen Kurs, daß ich ihn nur vergleichen kann mit dem Abfließen einer Wasserschichte längs dem Gefälle aus dem Inneren des Landes gegen die Küste. Die Richtung des nächsten Landes ist stets leicht bestimmbar auf diesem Wege. Die Nähe größerer Fjorde gibt sich stets durch einen Wechsel der Windrichtung zu erkennen und eine Wasserscheide durch eine Area variabler Winde oder durch Kalmen, dann folgen abwärts Winde von der früheren entgegengesetzten Richtung, unabhängig von einer Änderung des Luftdruckes.«

Peary erörtert dann die Bedeutung dieser den Schnee mit sich führenden Winde für die Verhinderung des Anwachsens der Höhe des Inlandeises.

---

[1] Siehe in Meteorol. Zeitschr., Bd. XXV, 1890, p. 103 das Verhalten der Station Kornok im Inneren des Godthaabfjords bei Südostföhn.

[2] The Geographical Journal, Vol. XI, p. 233.

Da die Luft von dem Rücken des Inlandeises so stetig nach außen abfließt, kann die Temperatur auf demselben nicht besonders niedrig sein mit Rücksicht auf die Seehöhe, sie muß ja aus der Höhe herabsinken und nur stagnierende Luft erkaltet im Polargebiete zu jenen hohen Kältegraden, welche den ostsibirischen Kältepol im Winter auszeichnet. Leider sind meteorologische Beobachtungen von Peary's Expeditionen im Inneren Grönlands noch nicht bekanntgemacht worden. Sie wären von höchstem Interesse für die Meteorologie.

I. Stykkisholm. Luftdruckabweichungen.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1851	—11·9	— 3·3	— 1·5	3·9	— 2·5	2·0	2·9	1·0	1·5	— 2·1	7·8	— 0·8	—0·24
52	— 7·7	1·2	7·3	3·5	— 2·7	0·0	0·2	— 2·4	5·8	5·4	2·4	— 0·2	1·07
53	— 8·7	12·9	2·0	8·2	1·0	— 0·6	— 3·9	2·9	— 3·4	— 0·7	—12·1*	9·7	0·61
54	— 6·1	— 3·8	— 5·0	— 0·5	— 3·5	0·5	2·5	— 2·6	— 3·3	— 5·0	1·6	— 4·7	—2·45
55	13·9	13·8	— 3·6	— 4·5	2·4	— 1·1	— 0·8	— 1·1	— 1·3	— 0·7	1·0	3·5	1·80
56	4·1	3·3	7·5	— 1·9	2·6	— 3·6	0·2	8·7	1·9	— 1·2	8·7	4·2	2·55
57	5·9	—13·4	— 4·5	0·9	— 1·0	4·2	— 5·0	— 1·5	2·7	— 3·1	1·9	— 5·6	—1·53
58	— 3·3	0·3	4·8	— 0·4	— 0·6	— 2·0	2·0	— 2·1	— 5·5	2·3	6·5	— 9·2*	—0·59
59	— 2·6	— 5·6	— 1·3	6·5	— 5·1	4·6	— 0·5	— 5·3	0·7	7·1	0·4	5·3	0·36
60	—12·8*	0·6	— 3·6	— 0·6	3·0	3·4	0·3	— 1·8	1·3	— 7·1	9·4	8·1	0·03
1861	1·9	— 2·7	— 9·5	4·5	1·1	0·6	— 5·1	— 2·2	1·5	— 4·5	3·5	0·8	—0·83
62	— 3·0	6·4	5·7	— 1·3	— 7·2	— 5·5	— 0·2	— 0·9	— 1·2	—12·3*	— 3·1	— 6·1	—2·38
63	— 3·1	— 9·6	— 6·8	—11·1*	1·9	— 1·3	1·4	2·3	— 6·1	— 5·0	— 5·2	— 2·9	—3·78*
64	— 5·9	0·3	0·8	— 2·1	2·7	— 3·0	— 3·0	3·3	— 0·6	9·8	— 4·3	1·1	—0·07
65	— 0·3	5·8	2·3	— 1·6	— 3·2	— 0·6	0·8	0·5	— 4·8	5·9	— 2·5	— 5·8	—0·28

1866	−2·2	−1·2	3·6	2·9	1·4	−3·1	1·0	−0·7	4·4	−2·3	−1·7	−2·8	−0·78
67	12·2	−4·5	**12·0**	−2·5	**5·5**	1·2	3·4	−4·8	−0·8	−4·4	7·4	1·4	2·18
68	−0·3	−9·5	−10·7*	−4·5	−6·6	−5·9*	−2·6	−1·3	6·7	−7·5	5·5	−5·6	−3·52
69	−9·0	−7·6	6·9	−0·5	5·1	2·9	0·2	3·6	0·4	5·0	−0·8	2·3	0·72
70	1·9	6·5	6·3	−4·5	−3·4	0·6	−1·3	5·1	−0·3	−2·4	5·8	13·1	2·29
1871	−2·0	1·8	−5·3	5·1	1·3	5·2	−1·9	−3·0	5·4	−1·4	10·3	0·3	1·33
72	−3·9	0·3	1·3	1·9	0·4	−0·5	3·3	4·6	4·4	−1·5	−2·2	3·2	0·93
73	−6·7	8·1	−5·3	5·5	3·6	−3·5	−0·2	−3·4	4·0	−3·0	5·7	−2·2	0·23
74	−5·2	−3·1	−1·8	−6·6	2·4	3·0	−2·0	−1·4	−2·5	−7·0	−0·5	8·8	−1·35
75	2·3	7·0	1·8	2·7	−9·3*	−5·0	3·5	−0·3	1·3	−0·8	9·5	−2·3	0·88
76	−2·5	2·5	−0·6	6·0	0·7	−5·5	−5·9*	−1·2	7·4	0·8	5·9	1·6	0·78
77	−5·8	−1·4	−0·2	5·2	3·7	−1·2	−1·1	5·8	5·7	−3·4	−8·8	−5·8	−0·60
78	6·3	0·7	3·6	0·8	−3·1	1·6	−0·4	2·7	−2·8	1·3	**10·9**	**15·9**	**3·13**
79	6·9	−1·5	−2·1	1·3	−2·4	−0·4	2·1	−0·6	−7·0	2·5	8·2	−0·5	0·55
80	4·1	−8·3	−0·1	−3·7	0·3	1·8	4·0	−1·1	1·0	**13·4**	−3·0	9·1	1·47
1881	**18·8**	7·9	1·0	2·7	−0·8	−1·6	−2·5	0·8	2·1	3·7	−10·8	−8·4	1·08
82	−2·6	−1·5	−10·7*	5·4	1·2	3·3	−3·6	0·0	−1·5	−3·0	−2·9	7·2	−0·72
83	−5·5	−12·4	10·2	−4·7	−0·3	2·5	3·2	−2·3	1·6	−7·1	−7·7	−0·8	−1·93
84	−1·9	−6·4	−6·6	1·3	−0·5	−1·8	3·3	−4·8	−3·0	−1·8	2·8	−7·1	−2·10
85	0·5	4·2	1·0	−1·5	2·6	−3·0	−0·1	6·9	−3·3	3·5	−1·4	3·7	1·10

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1886	4·8	3·6	0·3	0·5	3·6	— 2·8	— 0·7	— 6·7*	1·4	— 2·5	— 5·0	2·0	—0·12
87	— 8·9	— 3·9	2·7	5·3	— 0·7	1·8	— 0·2	2·5	3·9	5·0	4·1	6·6	1·53
88	10·1	3·5	5·2	5·7	2·3	2·9	3·9	1·6	2·0	6·1	— 8·3	— 7·6	2·29
89	0·9	8·9	2·3	— 0·7	— 4·6	— 3·7	**5·2**	— 2·8	4·2	— 0·6	— 4·6	— 7·2	—0·30
90	—11·5	4·6	— 7·0	— 2·8	— 0·2	— 0·5	— 0·4	— 1·7	— 3·2	1·9	— 7·8	3·6	—2·04
1891	4·5	— 6·0	3·6	3·6	2·4	**6·4**	0·8	0·5	— 3·8	— 8·4	— 0·8	— 5·7	—0·23
92	2·3	10·2	3·4	1·9	4·8	3·7	1·3	1·1	— 5·7	7·5	— 2·3	4·9	2·77
93	11·1	— 3·8	— 3·6	— 1·8	— 1·4	0·8	1·5	2·2	— 0·3	— 0·7	6·7	— 7·1	0·31
94	— 2·6	—14·9*	— 9·9	— 4·0	3·5	— 5·7	0·0	0·3	**8·4**	3·9	—11·3	— 0·6	—2·73
95	11·1	**14·2**	— 3·0	— 0·6	— 2·2	1·7	— 1·2	0·8	— 3·4	4·0	— 4·8	— 0·1	1·38
96	7·0	— 6·5	— 7·4	— 4·0	— 0·8	1·0	— 3·0	3·2	0·3	8·9	— 1·1	— 6·9	—0·77
97	10·5	— 3·4	— 3·3	—10·1	— 1·7	**6·4**	— 0·8	— 2·5	1·3	1·7	2·0	— 2·5	—0·19
98	— 5·0	— 4·9	2·1	— 7·9	0·8	— 0·5	1·1	— 4·2	— 2·4	— 1·2	— 5·9	— 5·5	—2·78
99	3·1	— 1·3	5·2	2·5	3·2	— 0·7	— 2·7	3·4	— 1·0	— 1·7	— 4·9	2·6	0·65
1900	— 4·2	12·2	11·3	— 2·0	— 0·2	1·8	1·5	0·5	— 4·4	1·8	— 5·0	— 7·2	0·52
Mittel	5·79	5·63	4·55	3·48	2·55	2·54	1·97	2·54	3·06	4·08	5·14	4·80	1·30

II. Stykkisholm. Temperaturabweichungen.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1846	1·0	3·4	0·0	0·9	2·1	**2·5**	0·6	1·8	1·3	— 0·7	2·9	0·9	1·4
47	**5·5**	2·2	5·5	1·0	1·7	1·6	2·0	0·6	— 1·7	1·6	— 1·4	— 0·7	**1·5**
48	1·4	— 5·7	1·6	— 2·2	— 0·1	— 1·0	— 0·9	— 1·1	— 0·5	1·3	— 0·9	0·4	—0·6
49	— 1·0	— 1·3	0·4	0·2	0·9	— 0·6	0·8	0·9	1·4	— 0·2	0·0	3·2	0·4
50	0·8	— 0·6	1·3	2·6	— 0·6	— 1·4	— 0·8	— 2·5	1·3	0·0	0·3	3·7	0·4
1851	3·1	2·3	2·8	1·9	1·5	— 2·1	— 1·0	— 1·1	0·2	0·5	1·7	**4·3**	1·2
52	0·1	2·0	4·6	**4·7**	1·7	0·8	0·5	0·0	0·0	1·2	— 0·5	— 1·9	1·1
53	— 0·8	1·3	3·2	1·1	0·9	0·2	— 1·0	— 0·3	1·1	— 0·7	0·8	3·3	0·8
54	0·7	0·5	3·3	0·7	— 1·2	0·3	1·3	0·6	0·2	— 1·8	— 0·2	— 2·9	0·1
55	0·0	— 5·0	— 1·3	0·3	— 0·3	0·2	1·7	— 0·2	0·0	— **2·9**	2·1	0·9	—0·4
56	— 4·0	2·0	6·8	3·4	1·9	0·7	0·0	1·7	0·0	**3·4**	— 0·3	— 2·9	1·1
57	— 2·4	— 0·4	1·0	— 1·7	2·1	0·2	— 0·2	1·6	2·5	0·7	**3·1**	— 0·5	0·5
58	0·4	3·1	— 0·2	0·4	— 1·1	0·2	0·2	0·6	0·0	— 1·4	1·5	2·0	0·5
59	— 1·1	— 2·5	— 7·5	— **7·6**	0·0	0·2	0·4	— 0·5	— 0·3	— 0·8	— 0·8	— 2·9	—1·9
60	— 0·2	0·5	— 2·6	0·6	— 2·6	— 1·1	1·7	— 0·3	— 0·3	— 1·1	1·1	0·0	—0·3
1861	3·0	1·2	— 0·9	3·0	0·6	1·0	— 0·2	— 0·5	1·1	0·6	— 2·9	2·4	0·7
62	2·2	1·2	— 1·4	— 3·4	1·5	— 0·9	— 2·5	0·2	0·0	0·3	— 1·2	0·9	0·0

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1863	— 0·3	0·4	1·0	— 0·7	— 3·1	— 1·7	— 0·6	— 0·7	— 1·0	— 1·3	— 1·8	— 2·8	—1·0
64	1·9	1·1	— 1·3	1·8	1·9	— 0·3	0·1	0·1	0·3	1·4	2·5	2·1	1·0
65	— 3·5	— 0·3	0·9	— 1·5	— 1·7	— 0·1	— 0·8	0·5	— 0·4	— 0·6	— 0·8	2·4	—0·5
66	— 6·0	— **7·7**	— 8·6	— 2·1	— **4·6**	— **2·5**	— **2·9**	— **3·1**	— **3·9**	— 0·9	— **3·6**	— 3·1	—**4·1**
67	— 5·6	— 2·1	— 2·4	— 3·9	— 1·7	— 1·2	— 0·6	— 0·7	— 0·2	— 0·3	2·1	1·7	—1·2
68	0·9	— 3·0	— 0·6	1·4	0·2	— 1·4	— 0·8	— 1·8	0·1	— 1·6	1·3	1·3	—0·3
69	2·9	— 2·2	— 2·3	— 2·3	— 2·2	— 0·8	— 2·5	— 0·9	— 2·9	0·4	— 3·4	— 1·6	—1·5
70	1·6	1·6	— 1·4	— 1·2	2·3	— 0·9	— 0·3	1·5	— 1·1	1·0	1·6	1·6	0·5
1871	0·9	1·1	— 2·5	— 1·2	1·4	2·3	— 0·3	— 1·3	— 0·7	0·4	0·0	2·3	0·2
72	— 0·5	**3·6**	0·7	— 2·1	— 0·7	0·1	1·8	1·7	0·4	— 0·6	0·0	— 0·6	0·3
73	— 0·5	1·7	3·4	2·8	— 0·7	— 0·1	— 0·8	— 0·2	— 1·0	— **2·9**	— 1·9	— 1·9	—0·2
74	— **6·4**	— 0·5	0·1	— 0·6	0·8	0·5	— 0·5	— 1·1	— 1·4	— 2·2	0·2	— 0·2	—0·9
75	0·4	2·7	4·9	3·6	1·3	— 0·5	— 0·2	0·4	1·3	1·2	— 0·1	2·5	**1·5**
76	3·0	0·4	— 1·5	— 5·1	1·9	— 0·1	— 0·3	1·4	1·1	1·6	2·6	1·4	0·5
77	0·8	— 1·1	— 0·9	— 1·9	— 0·1	— 0·9	— 0·7	0·8	**2·6**	0·4	— 1·3	— 0·6	— 0·5
78	0·2	2·8	0·9	— 0·4	— 1·4	1·9	1·1	1·0	— 0·6	— 1·4	— 1·2	— 3·3	0·0
79	2·1	— 0·4	— 0·4	0·6	0·5	0·5	— 0·4	1·0	— 1·5	1·2	2·2	1·7	0·6
80	2·1	0·9	4·7	**3·8**	1·5	1·5	2·6	**3·0**	0·0	— 1·0	— 2·6	— **6·4**	0·9

1881	−6·2	−6·5	−11·3	1·8	0·6	−0·5	−0·5	1·1	2·6	1·6	1·2	0·6	−1·4
82	0·9	−2·4	−3·0	−3·6	−2·5	2·2	−1·8	−2·0	−1·2	3·2	0·8	−1·1	−1·4
83	1·4	1·6	1·1	0·8	−2·7	−0·4	0·2	−0·7	0·4	0·4	1·4	0·3	0·3
84	−0·4	1·5	3·3	2·0	−1·5	0·2	0·0	0·0	0·2	−1·0	−0·2	0·3	0·4
85	2·4	−4·1	−1·1	−1·8	−1·7	−1·9	−1·3	−0·3	−0·4	−1·5	−0·7	−1·7	−1·2
86	−3·9	−1·6	0·2	−2·4	−2·0	−1·6	−1·3	−1·8	−0·2	1·4	0·4	−2·7	−1·3
87	0·1	1·0	0·0	−2·4	−1·0	0·1	−2·1	−1·3	0·3	−1·1	−2·1	−1·4	−0·9
88	1·2	1·2	−2·6	−1·1	−2·7	0·3	−0·4	−0·9	−0·3	−0·4	1·1	0·3	−0·3
89	−0·8	−1·5	0·3	0·0	**2·6**	1·2	1·2	1·3	1·5	2·0	1·5	1·0	0·9
90	0·2	2·9	−0·2	1·5	1·8	−0·6	−0·1	−0·1	0·2	−0·5	0·5	2·5	0·7
1891	1·6	3·2	−3·2	1·3	−0·3	2·0	1·6	0·5	0·4	2·2	0·3	0·1	0·8
92	−2·0	−4·1	−2·1	−0·9	−1·9	−1·2	−0·7	−0·8	−1·2	0·6	−0·7	−2·4	−1·4
93	1·2	0·2	0·3	1·8	1·9	2·0	1·5	1·4	−0·2	−1·4	−1·2	−2·4	0·4
94	−0·1	−0·5	1·1	3·2	1·2	2·3	**3·1**	2·4	2·0	1·3	1·0	−1·5	1·3
95	−0·1	3·5	1·6	−0·7	2·5	1·7	1·0	0·5	0·4	−1·6	0·4	−0·6	0·7
96	−0·6	2·7	−0·6	1·3	1·9	0·0	0·9	0·4	−0·4	−2·3	−0·2	1·7	0·4
97	0·9	0·0	1·7	1·4	0·0	−0·2	1·0	0·4	0·0	1·2	0·8	1·7	0·8
98	1·4	−1·4	1·3	0·7	0·5	1·4	0·6	−0·2	1·1	2·4	−0·8	−0·2	0·6
99	−0·6	1·2	−1·5	−2·8	0·9	1·0	0·5	1·9	−1·0	−1·2	−1·4	0·0	−0·2
1900	1·4	−0·4	1·3	0·4	−0·3	1·4	1·5	1·7	0·8	−0·9	0·2	0·0	0·7
Mittel	1·72	2·01	2·19	1·90	1·44	0·99	0·99	1·02	0·86	1·23	1·23	1·71	0·81

III. Stykkisholm. Niederschlagsabweichungen.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1857	5	28	11	−6	−17	−12	0	17	−34	41	23	87	143
58	83	22	−13	−1	32	9	2	56	−1	−5	−37	1	147
59	8	6	−6	−21	30	−1	0	6	−21	−55	30	−13	−38
60	−13	5	−4	48	−26	−38	12	−15	−28	5	−8	−26	−89
1861	7	−3	4	−13	−5	38	2	−28	−34	5	−23	40	−11
62	16	−10	−9	−11	0	−5	−35	1	21	20	10	3	0
63	−41	46	32	23	3	−16	20	−27	−18	−1	−3	−14	3
64	−8	7	−23	−5	7	−11	19	−9	−5	−43	−33	−17	−122
65	−33	−26	−2	3	−7	19	1	−9	92	−57	11	82	73
66	−34	−32	−30	8	−3	24	24	−22	−16	78	−5	−3	−12
67	60	−23	−20	−27	−25	−7	−28	7	50	4	4	4	−122
68	6	38	24	30	24	66	46	6	−30	44	−19	−28	206
69	21	7	−5	15	−17	−8	−8	26	−29	−30	10	6	−13
70	−4	−32	−6	59	5	−18	29	1	41	−28	−21	−19	6

1871	23	—44	— 4	—36	1	— 9	2	— 5	7	58	—16	25	1
72	—30	—42	— 8	29	— 6	3	—19	10	—26	41	—30	—60	—130
73	— 4	5	73	21	— 6	7	— 7	16	19	— 3	—25	63	158
74	28	29	29	— 8	17	19	5	0	— 1	17	— 8	—30	96
75	—36	8	74	—16	90	22	2	—11	81	3	—32	51	235
76	111	10	—39	—19	15	1	— 1	— 2	—20	31	48	—50	84
77	—11	— 1	15	— 6	—18	— 5	— 7	—22	—29	—18	—34	51	— 86
78	10	16	19	—16	—17	4	— 3	— 2	—37	—32	—43	—53	—155
79	—38	—24	33	—27	9	—30	—34	—34	— 8	39	19	26	— 70
80	63	23	10	16	22	—17	—27	— 3	12	—18	—35	—41	4
1881	—40	—53	—28	—21	—18	—19	—36	—40	17	—14	—13	—15	—281
82	11	21	43	—29	13	—25	—19	—16	—38	—14	—44	—55	—153
83	— 4	—34	—23	5	— 2	1	— 7	—13	—14	0	— 6	18	— 80
84	—19	—29	—10	—18	—21	6	— 3	31	— 7	22	— 4	—20	— 73
85	—32	—58	—14	—22	—24	— 2	49	—16	— 8	—16	—16	39	—121
86	—33	— 1	—15	17	—26	4	— 6	21	—23	53	42	—34	— 2
87	— 9	29	— 5	— 4	2	11	—18	—14	4	26	— 28	—49	— 56
88	93	— 4	— 8	—25	— 9	— 4	—36	—32	68	—14	10	49	87
89	1	—40	— 9	—21	23	64	—14	86	30	—37	18	—37	63
90	—40	93	—29	15	—25	—17	—25	43	— 9	35	2	18	60

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1891	—35	35	—37	—24	—18	—12	19	—19	—27	0	—14	11	—122
92	37	—34	8	6	—33	—30	1	—36	8	—40	—11	—22	—147
93	—54	—23	18	28	9	— 6	10	—15	29	— 6	18	2	9
94	—25	5	67	19	—26	—10	4	—11	—51	— 3	29	21	18
95	4	—24	—19	—12	24	27	—14	—15	39	—47	1	—10	— 47
96	2	149	—19	13	34	—14	— 3	9	—10	—18	63	10	215
97	61	4	—32	8	3	—18	31	13	—25	66	56	— 4	162
98	42	—21	—15	— 4	—17	1	— 1	9	12	—33	24	7	2
99	—48	22	21	13	5	30	38	39	—17	— 5	52	21	170
1900	15	—62	—28	14	— 5	—13	34	9	50	—37	33	—19	— 10
Mittel	29·5	27·9	21·2	17·6	16·1	16·0	15·9	18·7	26·0	26·4	23·1	28·5	88·4

IV. Stykkisholm. 65° 5′ n. Br., 22° 46′ w. v. Gr. Seehöhe 11·3 *m*. Luftdruckmittel 700 *mm* +

Schwerekorrektion bei 752 *mm* +1·26 nicht angebracht.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1846	44·8	52·3	51·8	59·2	52·5	50·9	50·0	53·1	52·9	46·4	52·3	58·4	52·05
47	43·2	51·9	56·7	51·9	54·8	52·7	52·8	52·0	56·3	49·2	41·7	36·7	49·99
48	45·1	47·8	45·5	59·9	52·9	60·0	56·4	51·7	51·2	57·0	53·8	41·0	51·86
49	40·7	46·6	49·9	55·7	57·1	59·3	53·5	56·6	56·5	51·6	47·9	54·7	52·51
50	53·6	39·1	59·7	55·2	58·5	53·0	55·2	56·0	55·6	53·9	47·5	41·6	52·41
1851	33·7	45·6	51·2	59·2	55·7	57·7	57·8	55·8	53·6	49·7	59·2	46·1	52·11
52	37·9	50·1	60·0	58·8	55·5	55·7	55·1	52·4	57·9	57·2	53·8	46·7	53·42
53	36·9	61·8	54·7	63·5	59·2	55·1	51·0	57·7	48·7	51·1	39·3	56·6	52·96
54	39·5	45·1	47·7	54·8	54·7	56·2	57·4	52·2	48·8	46·8	53·0	42·6	49·90
55	59·5	62·7	49·1	50·8	60·6	54·6	54·1	53·7	50·8	51·1	52·4	50·4	54·15
56	49·7	52·2	60·2	53·4	60·8	52·1	55·1	59·5	54·0	50·6	60·1	51·1	54·90
57	51·5	35·5	48·2	56·2	57·2	59·9	49·9	53·3	54·8	48·7	53·3	41·3	50·82
58	42·3	49·2	57·5	54·9	57·6	53·7	56·9	52·7	46·6	54·1	57·9	37·7	51·76
59	43·0	43·3	51·4	61·8	53·1	60·3	54·4	49·5	52·8	58·9	51·8	52·2	52·71
60	32·8	49·5	49·1	54·7	61·2	59·1	55·2	53·0	53·4	44·7	60·8	55·0	52·38

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1861	47·5	46·2	43·2	59·8	59·3	56·3	49·8	52·6	53·6	47·3	54·9	47·7	51·52
62	42·6	55·3	58·4	54·0	51·0	50·2	54·7	53·9	50·9	39·5	48·3	40·8	49·97
63	42·5	39·3	45·9	44·2	60·1	54·4	56·3	57·1	46·0	46·8	46·2	44·0	48·57
64	39·7	49·2	53·5	53·2	60·9	52·7	51·9	58·1	51·5	61·6	47·1	48·0	52·28
65	45·3	54·7	55·0	53·7	55·0	55·1	55·7	55·3	47·3	57·7	48·9	41·1	52·07
66	43·4	47·7	56·3	58·2	59·6	52·6	55·9	54·1	47·7	49·5	49·7	44·1	51·57
67	57·8	44·4	64·7	52·8	63·7	56·9	58·3	50·0	51·3	47·4	58·8	48·3	54·53
68	45·3	39·4	42·0	50·8	51·6	49·8	52·3	53·5	58·8	44·3	56·9	41·3	48·83
69	36·6	41·3	59·6	54·8	63·3	58·6	55·1	58·4	52·5	56·8	50·6	49·2	53·07
70	47·5	55·4	59·0	50·8	54·8	56·3	53·6	59·9	51·8	49·4	57·2	60·0	54·64
1871	43·6	50·7	47·4	60·4	59·5	60·9	53·0	51·8	57·5	50·4	61·7	47·2	53·68
72	41·7	49·2	54·0	57·2	58·6	55·2	58·2	59·4	56·5	50·3	49·2	50·1	53·28
73	38·9	57·0	47·4	60·8	61·8	52·2	54·7	51·4	56·1	48·8	57·1	44·7	52·58
74	40·4	45·8	50·9	48·7	60·6	58·7	52·9	53·4	49·6	44·8	50·9	55·7	51·03
75	47·9	55·9	54·5	58·0	48·9	50·7	58·4	54·5	53·4	51·0	60·9	44·6	53·23

1876	43·1	51·4	52·1	61·3	58·9	50·2	49·0	53·6	59·5	52·6	57·3	48·5	53·13
77	39·8	47·5	52·5	60·5	61·9	54·5	53·8	60·6	57·8	48·4	42·6	41·1	51·75
78	51·9	49·6	56·3	56·1	55·1	57·3	54·5	57·5	49·3	53·1	62·3	62·8	55·48
79	52·5	47·4	50·6	56·6	55·8	55·3	57·0	54·2	45·1	54·3	59·6	46·4	52·90
80	49·7	40·6	52·6	51·6	58·5	57·5	58·9	53·7	53·1	65·2	48·4	56·0	53·82
1881	64·4	56·8	53·7	58·0	57·4	54·1	52·4	55·6	54·2	55·5	40·6	38·5	53·43
82	43·0	47·4	42·0	60·7	59·4	59·0	51·3	54·8	50·6	48·8	48·5	54·1	51·63
83	40·1	36·5	62·9	50·6	57·9	58·2	58·1	52·5	53·7	44·7	43·7	46·1	50·42
84	43·7	42·5	46·1	56·6	57·7	53·9	58·2	50·0	49·1	50·0	54·2	39·8	50·25
85	46·1	53·1	53·7	53·8	60·8	52·7	54·8	61·7	48·8	55·3	50·0	50·6	53·45
86	50·4	52·5	53·0	55·8	61·8	52·9	54·2	48·1	53·5	49·3	46·4	48·9	52·23
87	36·7	45·0	55·4	60·6	57·5	57·5	54·7	57·3	56·0	56·8	55·5	53·5	53·88
88	55·7	52·4	57·9	61·0	60·5	58·6	58·8	56·4	54·1	57·9	43·1	39·3	54·64
89	46·5	57·8	55·0	54·6	53·6	52·0	60·1	52·0	56·3	51·2	46·8	39·7	52·05
90	34·5	53·5	45·7	52·5	58·0	55·2	54·5	53·1	48·9	53·7	43·6	50·5	50·31
1891	50·1	42·9	56·3	58·9	60·6	62·1	55·7	55·3	48·3	43·4	50·6	41·2	52·12
92	47·9	59·1	56·1	57·2	63·0	59·4	56·2	55·9	46·4	59·3	49·1	51·8	55·12
93	56·7	45·1	49·1	53·5	56·8	56·5	56·4	57·0	51·8	51·1	58·1	39·8	52·66
94	43·0	34·0	42·8	51·3	61·7	50·0	54·9	55·1	60·5	55·7	40·1	46·3	49·62
95	56·7	63·1	49·7	54·7	56·0	57·4	53·7	55·6	48·7	55·8	46·6	46·8	53·73

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1896	52·6	42·4	45·3	51·3	57·4	56·7	51·9	58·0	52·4	60·7	50·3	40·0	51·58
97	56·1	45·5	49·4	45·2	56·5	62·1	54·1	52·3	53·4	53·5	53·4	44·4	52·16
98	40·6	44·0	54·8	47·4	59·0	55·2	56·0	50·6	49·7	50·6	45·5	41·4	49·57
99	48·7	47·6	57·9	57·8	61·4	55·0	52·2	58·2	51·1	50·1	46·5	49·5	53·00
1900	41·4	61·1	64·0	53·3	58·0	57·5	56·4	55·3	47·7	53·6	46·4	39·7	52·87
1846/1850	45·48	47·54	52·72	56·38	55·16	55·18	53·58	53·88	54·50	51·62	48·64	46·48	51·76
1851/1860	42·68	49·50	52·91	56·81	57·56	56·44	54·69	53·98	52·14	51·29	54·16	47·97	52·51
1861/1870	44·82	47·29	53·76	53·23	57·93	54·29	54·36	55·29	51·14	50·03	51·86	46·45	51·70
1871/1880	44·95	49·51	51·83	57·12	57·96	55·25	55·04	55·01	53·79	51·89	55·00	49·71	53·09
1881/1890	46·11	49·75	52·54	56·42	58·46	55·41	55·71	54·15	52·52	52·32	47·24	46·10	52·23
1891/1900	49·38	48·48	52·54	53·06	59·04	57·19	54·75	55·33	51·00	53·38	48·66	44·09	52·24
Mittel 1851/1900	45·59	48·91	52·72	55·33	58·19	55·72	54·91	54·75	52·12	51·78	51·38	46·86	52·355

V. Temperatur von Reykjavig, reduziert auf Stykkisholm.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1829	—	—	—	—	—	—	—	12·4	7·2	1·2	—1·2	0·4	—
30	0·8	—3·9	—3·2	—0·7	8·0	9·7	11·4	11·0	8·5	5·3	—1·7	—5·1	3·3
31	—0·7	—4·3	0·6	1·9	2·7	10·8	10·0	7·9	8·0	3·8	—2·2	0·0	3·1
32	—0·7	—3·8	—4·8	0·4	2·1	6·7	8·9	6·5	4·1	2·1	0·2	—2·2	1·6
33	0·2	—3·3	—0·2	—0·1	4·2	8·6	9·9	7·5	5·9	1·6	—0·9	—3·9	2·5
34	—2·0	—3·1	—1·7	0·4	3·2	6·6	10·1	7·2	5·6	1·3	—1·0	1·6	2·3
35	—6·7	—5·6	—4·5	—1·5	2·0	6·6	10·4	9·7	6·6	—0·4	0·7	—0·2	1·4
36	—3·9	—7·2	—5·2	—3·6	4·5	7·9	11·6	6·8	5·1	0·5	—3·1	—4·3	0·8
37	—2·0	—2·7	—5·4	—2·2	2·4	8·6	12·9	—	—	—	—	—	—

VI. Stykkisholm. Monats- und Jahrestemperaturen. Genähert wahre Mittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1845	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·2	—4·0	—
46	—1·2	0·7	—2·3	1·7	6·4	10·3	10·3	11·0	8·1	2·5	3·4	—0·4	4·2
47	3·3	—0·5	3·2	1·8	6·0	9·4	11·7	9·8	5·1	4·8	—0·9	—2·0	4·3
48	—0·8	—8·4	—0·7	—1·4	4·2	6·8	8·8	8·1	6·3	4·5	—0·4	—0·9	2·2
49	—3·2	—4·0	—1·9	1·0	5·2	7·2	10·5	10·1	8·2	3·0	0·5	1·9	3·2
50	—1·4	—3·3	—1·0	3·4	3·7	6·4	8·9	6·7	8·1	3·2	0·8	2·4	3·2
1851	0·9	—0·4	0·5	2·7	5·8	5·7	8·7	8·1	7·0	3·7	2·2	3·0	4·0
52	—2·1	—0·7	2·3	5·5	6·0	8·6	10·2	9·2	6·8	4·4	0·0	—3·2	3·9
53	—3·0	—1·4	0·9	1·9	5·2	8·0	8·7	8·9	7·9	2·5	1·3	2·0	3·6
54	—1·5	—2·2	1·0	1·5	3·1	8·1	11·0	9·8	7·0	1·4	0·3	—4·2	2·9
55	—2·2	—7·7	—3·6	1·1	4·0	8·0	11·4	9·0	6·8	0·3	2·6	—0·4	2·4
56	—6·2	—0·7	4·5	4·2	6·2	8·5	9·7	10·9	6·8	6·6	0·2	—4·2	3·9
57	—4·6	—3·1	—1·3	—0·9	6·4	8·0	9·5	10·8	9·3	3·9	3·6	—1·8	3·3
58	—1·8	0·4	—2·5	1·2	3·2	8·0	9·9	9·8	6·8	1·8	2·0	0·7	3·3
59	—3·3	—5·2	—9·8	—6·8	4·3	8·0	10·1	8·7	6·5	2·4	—0·3	—4·2	0·9
60	—2·4	—2·2	—4·9	1·4	1·7	6·7	11·4	8·9	6·5	2·1	1·6	—1·3	2·5

1861	0·8	— 1·5	— 3·2	3·8	4·9	8·8	9·5	8·7	7·9	3·8	—2·4	1·1	3·5
62	0·0	— 1·5	— 3·7	—2·6	5·8	6·9	7·2	9·4	6·8	3·5	—0·7	—0·4	2·8
63	—2·5	— 2·3	— 1·3	0·1	1·2	6·1	9·1	8·5	5·8	1·9	—1·3	—4·1	1·8
64	—0·3	— 1·6	— 3·6	2·6	6·2	7·5	9·8	9·3	7·1	4·6	3·0	0·8	3·8
65	—5·7	— 3·0	— 1·4	—0·7	2·6	7·7	8·9	9·7	6·4	2·6	—0·3	1·1	2·3
66	—8·2	—10·4	—10·9	—1·3	—0·3	5·3	6·8	6·1	2·9	2·3	—3·1	—4·4	—1·3
67	—7·8	— 4·8	— 4·7	—3·1	2·6	6·6	9·1	8·5	6·6	2·9	2·6	0·4	1·6
68	—1·3	— 5·7	— 2·9	2·2	4·5	6·4	8·9	7·4	6·9	1·6	1·8	0·0	2·5
69	0·7	— 4·9	— 4·6	—1·5	2·1	7·0	7·2	8·3	3·9	3·6	—2·9	—2·9	1·3
70	—0·6	— 1·1	— 3·7	—0·4	6·6	6·9	9·4	10·7	5·7	4·2	2·1	0·3	3·3
1871	—1·3	— 1·6	— 4·8	—0·4	5·7	10·1	9·4	7·9	6·1	3·6	0·5	1·0	3·0
72	—2·7	0·9	— 1·6	—1·3	3·6	7·9	11·5	10·9	7·2	2·6	0·5	—1·9	3·1
73	—2·7	— 1·0	1·1	3·6	3·6	7·7	8·9	9·0	5·8	0·3	—1·4	—3·2	2·6
74	—8·6	— 3·2	— 2·2	0·2	5·1	8·3	9·2	8·1	5·4	1·0	0·7	—1·5	1·9
75	—1·8	0·0	2·6	4·4	5·6	7·3	9·5	9·6	8·1	4·4	0·4	1·2	4·3
76	0·8	— 2·3	— 3·8	—4·3	6·2	7·7	9·4	10·6	7·9	4·8	3·1	0·1	3·3
77	—3·0	— 3·8	— 3·2	—1·1	4·2	6·9	9·0	8·4	9·4	3·6	—0·8	—1·9	2·3
78	—2·0	0·1	— 1·4	0·4	2·9	9·7	10·8	10·2	6·2	1·8	—0·7	—4·6	2·8
79	—0·1	— 3·1	— 2·7	1·4	4·8	8·3	9·3	10·2	5·3	4·4	2·7	0·4	3·4
80	—0·1	— 1·8	2·4	4·6	5·8	9·3	12·3	12·2	6·8	2·2	—2·1	—7·7	3·7

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1881	—8·4	—9·2	—13·6	2·6	4·9	7·3	9·2	8·1	9·4	4·8	1·7	—0·7	1·4
82	—1·3	—5·1	— 5·3	—2·8	1·8	5·6	7·9	6·3	5·6	6·4	—0·3	—2·4	1·4
83	—0·8	—1·1	— 1·2	1·6	1·6	7·4	9·9	8·5	7·2	3·6	1·9	—1·0	3·1
84	—2·6	—1·2	1·0	2·8	2·8	8·0	9·7	9·2	7·0	2·2	0·3	—1·0	3·2
85	0·2	—6·8	— 3·4	—1·0	2·6	5·9	8·4	8·9	6·4	1·7	—0·2	—3·0	1·6
86	—6·1	—4·3	— 2·1	—1·6	2·3	6·2	8·4	7·4	6·6	4·6	0·9	—4·0	1·5
87	—2·1	—1·7	— 2·3	—1·6	3·3	7·9	7·6	7·9	7·1	2·1	—1·6	—3·7	1·9
88	—1·0	—1·5	— 4·9	—0·3	1·6	8·1	9·3	8·3	6·5	2·8	1·6	—1·0	2·5
89	—3·0	—4·2	— 2·0	0·8	6·9	9·0	10·9	10·5	8·3	5·2	2·0	—0·3	3·7
90	—2·0	0·2	— 2·5	2·3	6·1	7·2	9·6	9·1	7·0	2·7	1·0	1·2	3·5
1891	—0·6	0·5	— 5·5	2·1	4·0	9·8	11·3	9·7	7·2	5·4	0·8	—1·2	3·6
92	—4·2	—6·8	— 4·4	—0·1	2·4	6·6	9·0	8·4	5·6	3·8	—0·2	—3·7	1·4
93	—1·0	—2·5	— 2·0	2·6	6·2	9·8	11·2	10·6	6·6	1·8	—0·7	—3·7	3·2
94	—2·3	—3·2	— 1·2	4·0	5·5	10·1	12·8	11·6	8·8	4·5	1·5	—2·8	4·1
95	—2·3	0·8	— 0·7	0·1	6·8	9·5	10·7	9·7	7·2	1·6	0·9	—1·9	3·5

1896	—2·8	0·0	—2·9	2·1	6·2	7·8	10·6	9·6	6·4	0·9	0·3	0·4	3·2
97	—1·3	—2·7	—0·6	2·2	4·3	7·6	10·7	9·6	6·8	4·4	1·3	0·4	3·6
98	—0·8	—4·1	—1·0	1·5	4·8	9·2	10·3	9·0	7·9	5·6	—0·3	—1·5	3·4
99	—2·8	—1·5	—3·8	—2·0	5·2	8·8	10·2	11·1	5·8	2·0	—0·9	—1·3	2·6
1900	—0·8	—3·1	—1·0	1·2	4·0	9·2	11·2	10·9	7·6	2·3	0·7	—1·3	3·5
Mittel:													
1830/1837	—1·9	—4·2	—3·0	—1·0	3·6	8·2	10·6	8·7	6·4	1·9	—1·1	—1·7	3·3
1846/1850	—0·7	—3·1	—0·5	1·3	5·1	8·0	10·0	9·1	7·2	3·6	0·7	0·2	3·4
1851/1860	—2·6	—2·3	—1·3	1·2	4·6	7·8	10·1	9·4	7·1	2·9	1·3	—1·4	3·1
1861/1870	—2·5	—3·7	—4·0	—0·1	3·6	6·9	8·6	8·7	6·0	3·1	—0·1	—0·8	2·1
1871/1880	—2·1	—1·6	—1·4	0·7	4·7	8·3	9·9	9·7	6·8	2·9	0·3	—1·8	3·0
1881/1890	—2·7	—3·5	—3·6	0·3	3·4	7·3	9·1	8·4	7·1	3·6	0·7	—1·6	2·4
1891/1900	—1·9	—2·3	—2·3	1·4	4·9	8·8	10·8	10·0	7·0	3·2	0·3	—1·7	3·2
1851/1900	—2·4	—2·7	—2·5	0·7	4·2	7·8	9·7	9·2	6·8	3·1	0·5	—1·5	2·8
1846/1900	—2·2	—2·7	—2·3	0·8	4·3	7·8	9·7	9·2	6·8	3·2	0·5	—1·3	2·8

VII. Stykkisholm. Niederschlagsmenge Regen und Schnee.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1856	—	—	—	—	—	—	—	—	—	167	42	47	—
57	77	96	61	38	18	29	41	62	37	111	87	154	806
58	155	90	37	38	67	50	43	100	70	65	27	68	810
59	80	74	44	18	65	40	41	50	50	15	94	54	625
60	59	73	46	87	9	3	53	29	48	75	56	41	574
1861	79	65	54	26	30	79	43	16	37	75	41	107	652
62	88	58	41	28	35	36	6	45	92	90	74	70	663
63	31	114	82	62	38	25	61	17	53	69	61	53	666
64	64	75	27	34	42	30	60	35	66	27	31	50	541
65	39	42	48	42	28	60	42	35	163	13	75	149	736
66	38	36	20	47	32	65	65	22	55	148	59	64	651
67	12	45	30	12	10	34	13	51	121	74	68	71	541
68	78	106	74	69	59	107	87	50	41	114	45	39	869
69	93	75	45	54	18	33	33	70	42	40	74	73	650
70	68	36	44	98	40	23	70	45	112	42	48	48	669

1871	95	24	46	3	36	32	43	39	78	128	48	92	664
72	42	26	42	68	29	44	22	54	45	111	34	7	524
73	68	73	123	60	29	48	34	60	90	67	39	130	821
74	100	97	79	31	52	60	46	44	70	87	56	37	759
75	36	76	124	23	125	63	43	33	152	73	32	118	898
76	183	78	11	20	50	42	40	42	51	101	112	17	747
77	61	67	65	33	17	36	34	22	42	52	30	118	577
78	82	84	69	23	18	45	38	42	34	38	21	14	508
79	34	44	83	12	44	11	7	10	63	109	83	93	593
80	135	91	60	55	57	24	14	41	83	52	29	26	667
1881	32	15	22	18	17	22	5	4	88	56	51	52	382
82	83	89	93	10	48	16	22	28	33	56	20	12	510
83	68	34	27	44	33	42	34	31	57	70	58	85	583
84	53	39	40	21	14	47	38	75	64	92	60	47	590
85	40	10	36	17	11	39	90	28	63	54	48	106	542
86	39	67	35	56	9	45	35	65	48	123	106	33	661
87	63	97	45	35	37	52	23	30	75	96	36	18	607
88	165	64	42	14	26	37	5	12	139	56	74	116	750
89	73	28	41	18	58	105	27	130	101	33	82	30	726
90	32	161	21	54	10	24	16	87	62	105	66	85	723

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1891	37	103	13	15	17	29	60	25	44	70	50	78	541
92	109	34	58	45	2	11	42	8	79	30	53	45	516
93	18	45	68	67	44	35	51	29	100	64	82	69	672
94	47	73	117	58	9	31	45	33	20	67	93	88	681
95	76	44	31	27	59	68	27	29	110	23	65	57	616
96	74	217	31	52	69	27	38	53	61	52	127	77	878
97	133	72	18	47	38	23	72	57	46	136	120	63	825
98	114	47	35	35	18	42	40	53	83	37	88	74	666
99	24	90	71	52	40	71	79	83	54	65	116	88	833
1900	87	6	22	53	30	28	75	53	121	33	97	48	653
1861/1870	59	65	47	47	33	49	48	39	78	69	57	72	663
1871/1880	84	66	70	33	46	40	32	39	71	82	48	65	676
1881/1890	65	60	40	29	26	43	30	49	73	74	60	58	607
1891/1900	72	73	46	45	33	36	53	42	72	58	89	69	688
Mittel 1857/1900	72	68	50	39	35	41	41	44	71	70	64	67	662

VIII. Greenwich. Temperaturabweichungen.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1851	2·4	0·3	0·6	—1·3	—0·9	—0·1	—1·3	0·3	—1·8	1·5	—2·9	0·4	—0·11
52	1·9	0·7	—0·1	—0·7	—0·6	—1·6	2·3	0·2	—0·2	—1·1	**3·2**	**4·4**	0·69
53	2·1	—3·4	—1·7	—1·1	—0·3	—0·4	—1·2	—0·9	—1·1	0·6	—0·6	—3·2	—0·95
54	0·2	—0·2	1·1	0·7	—0·9	—1·8	—1·2	—0·4	0·5	—0·2	—1·5	0·9	—0·24
55	—2·1	—5·8*	—2·0	—0·7	—2·0	—0·6	—0·1	0·4	0·0	0·8	—1·0	—2·3	—1·29
56	0·4	1·4	—1·5	—0·2	—1·7	—0·1	—0·7	1·1	—1·1	1·0	—1·4	0·3	—0·22
57	—1·1	—0·2	0·1	—0·8	0·8	1·6	1·2	**2·1**	1·4	1·7	1·5	2·9	0·92
58	—0·6	—2·8	—0·1	—0·5	—0·5	**3·3**	—1·0	0·2	1·7	0·5	—2·0	0·7	—0·10
59	1·0	2·0	2·7	—0·3	0·3	1·3	**3·2**	1·0	—0·3	0·6	—0·7	—1·6	0·75
60	0·6	—2·1	—0·2	—2·3*	0·7	—2·3*	—2·7*	—2·2*	—2·1	0·4	—1·3	—1·9	—1·29
1861	—2·7	1·4	1·3	—1·6	—0·3	0·1	—0·8	0·8	—0·1	**2·8**	—1·3	0·7	0·02
62	0·2	0·9	0·9	0·7	1·6	—1·5	—1·8	—1·2	0·3	1·1	—1·9	2·1	0·11
63	1·7	1·4	1·3	1·1	—0·3	—0·5	—0·9	0·1	—1·9	1·0	1·4	1·9	0·52
64	—1·2	—2·0	—0·1	0·6	0·7	—0·9	—0·3	—1·2	—0·2	0·4	—0·6	—0·7	—0·47
65	—1·3	—1·6	—2·7	**2·9**	2·0	0·7	0·8	—1·0	**3·7**	0·6	0·9	1·6	0·54

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1866	2·2	0·5	—0·6	0·4	—1·3	1·1	—0·8	—1·3	—0·4	0·8	0·6	1·8	0·24
67	—2·5	2·9	—2·1	1·0	0·5	—0·5	—1·7	0·2	0·2	—0·6	—1·0	—1·2	—0·41
68	—0·8	1·9	1·4	0·5	**2·7**	1·7	2·8	1·1	1·8	—1·1	—0·9	3·5	**1·21**
69	1·4	**3·2**	—2·2	1·8	—1·1	—2·1	1·2	—0·5	1·0	—0·5	—0·1	—1·0	0·08
70	—0·2	—1·9	—1·1	1·0	0·5	1·1	1·7	—0·3	—0·8	0·0	—0·9	—3·4	—0·37
1871	—3·0	1·6	1·9	0·3	—0·3	—2·3*	—0·4	1·7	0·1	—0·2	—3·1*	—0·8	—0·38
72	1·5	2·9	1·7	0·7	—0·9	0·1	1·4	—0·4	0·1	—1·1	1·2	1·8	0·74
73	1·9	—2·9	0·2	—0·7	—1·1	—0·1	0·5	0·6	—1·4	—1·1	0·6	0·5	—0·26
74	1·7	—0·5	1·2	1·6	—1·1	—0·6	1·1	—0·8	0·4	1·0	—0·6	—3·6	—0·03
75	2·6	—2·4	—0·6	—0·4	1·4	0·0	—1·9	0·7	1·7	—0·7	—0·5	—0·6	—0·07
76	—0·9	0·9	—0·2	0·0	—1·7	—0·3	1·9	1·1	—0·8	1·7	0·5	2·4	0·37
77	2·4	2·5	—0·3	—0·6	—1·7	1·8	—0·5	0·3	—2·2*	—0·2	1·6	0·7	0·31
78	1·0	1·5	0·4	0·5	1·4	0·7	0·4	0·4	—0·2	0·9	—1·9	—3·4	0·13
79	—3·8	—0·7	—0·2	—2·0	—2·2*	1·1	—2·3	—0·8	—0·5	—0·3	—2·6	—4·0	—1·72*
80	—3·0	1·4	1·5	0·0	0·0	—0·8	—0·5	0·6	1·4	—1·9	—0·2	2·0	0·03

1881	—3·9*	—0·9	0·6	—0·7	0·8	—0·2	1·7	—1·4	—0·8	—2·5	3·2	0·1	—0·34
82	1·0	1·4	2·9	0·5	1·1	—1·3	—1·2	—1·0	—1·4	0·7	0·4	0·3	0·25
83	1·5	1·9	—2·9*	—0·1	0·3	—0·1	—1·5	0·3	—0·2	0·5	0·3	0·4	0·02
84	2·9	1·4	1·6	—1·0	0·9	—0·5	0·4	1·9	1·2	—0·3	—0·3	0·8	0·74
85	—1·1	2·4	—0·7	0·3	—1·5	0·3	0·7	—1·7	—1·0	—1·8	0·2	—0·4	—0·37
86	—1·3	—3·3	—1·0	—0·3	0·4	—0·7	0·4	0·3	1·1	1·9	0·7	—1·7	—0·30
87	—1·6	—0·4	—2·0	—1·6	—1·3	1·1	2·3	0·4	—1·6	—2·6*	—1·3	—1·0	—0·81
88	—0·4	—2·4	—1·8	—2·0	0·3	—0·4	—2·5	—1·4	—0·7	—2·1	2·2	0·6	—0·89
89	—0·8	—1·3	—0·5	—0·8	2·0	1·3	—0·8	—0·9	—0·7	—0·6	0·6	—1·2	—0·32
90	2·4	—1·2	1·0	—0·8	1·3	—0·4	—1·6	—1·3	1·3	—0·1	0·3	—5·5*	—0·37
1891	—2·5	—0·5	—0·7	—1·6	—1·2	0·7	—1·3	—1·6	0·9	0·7	0·0	0·8	—0·53
92	—1·1	—0·3	—2·4	—0·3	1·3	—0·5	—1·6	0·0	—0·4	—2·4	1·1	—1·7	—0·70
93	—1·8	1·0	2·5	2·2	2·7	1·4	0·3	2·1	—0·1	0·9	—0·6	0·5	0·92
94	—0·1	1·2	1·6	2·2	—1·2	—0·2	—0·3	—1·1	—1·6	0·3	2·1	1·5	0·36
95	—2·8	—5·8*	0·7	0·4	1·9	1·3	0·2	0·2	2·6	—1·7	2·4	0·3	—0·03
96	1·0	0·5	2·5	1·0	1·2	2·4	1·5	—1·3	—0·2	—1·8	—1·5	0·3	0·46
97	—1·8	2·0	2·0	—0·5	—0·1	1·3	1·2	0·7	—0·9	0·7	1·5	0·9	0·57
98	2·8	1·0	—0·9	0·5	—0·3	—0·7	—0·3	1·7	2·7	2·3	1·6	3·4	1·14
99	2·3	1·3	—0·3	0·0	—0·8	0·8	1·9	2·1	0·6	—0·3	2·7	—1·5	0·72
1900	1·0	—0·6	—1·4	0·4	—0·4	0·2	2·3	—0·5	0·4	0·8	1·8	3·3	0·60
Mittel	1·65	1·69	1·24	0·88	1·05	0·94	1·23	0·92	1·00	1·03	1·26	1·65	0·50

IX. Brüssel. Luftdruckabweichungen.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1851	—1·2	2·0	—2·8	—1·4	1·6	2·6	—2·4	1·8	3·8	0·4	—2·0	8·7	0·9
52	—2·6	0·3	6·0	4·4	—0·3	—4·9*	1·0	—2·6	—1·5	—1·2	—5·7	—2·9	—0·8
53	—5·2	— 9·4	1·1	—1·5	—1·7	—2·5	—0·2	0·4	—0·3	—3·2	4·8	—1·3	—1·6
54	—3·3	4·6	**10·9**	4·9	—2·0	—2·1	0·3	2·2	5·2	—0·5	—3·0	—2·1	1·2
55	3·8	— 6·2	—5·3	3·6	—3·2	0·9	—1·1	2·2	3·2	—5·0	2·0	—0·7	—0·5
56	—8·4	2·1	6·0	—3·2	—3·9	1·8	1·3	—1·1	—3·6	**6·6**	1·7	—3·2	—0·3
57	5·0	4·6	0·2	—2·7	—0·2	1·3	1·4	0·6	0·1	—0·3	4·7	**10·6**	1·3
58	9·2	0·9	0·0	1·0	0·2	2·1	—0·9	0·3	2·0	3·6	—0·4	0·3	**1·4**
59	6·8	1·2	2·2	—2·9	—1·4	—1·4	3·6	1·0	—2·0	—4·3	1·8	—3·4	0·1
60	—6·1	— 0·8	—1·8	—0·2	—0·6	—3·5	0·6	—4·4	—1·4	3·3	—1·8	—7·8	—2·1
1861	5·1	— 1·9	—2·8	5·4	2·4	—1·2	—3·3	2·5	—1·7	3·2	—4·1	4·6	0·7
62	—2·0	2·2	—5·2	3·0	—0·6	—2·3	0·1	—0·3	1·0	0·8	—0·6	1·9	—0·2
63	—3·8	**8·9**	—0·6	1·7	1·2	—1·5	3·6	—0·2	—2·0	—0·9	3·8	3·4	1·1
64	**6·7**	**—1·5**	**—5·7**	4·2	0·4	—0·5	1·2	2·7	0·1	—1·2	—2·1	2·5	0·6
65	—9·9*	—2·4	—1·8	5·0	0·6	**5·0**	0·4	—1·5	**6·4**	—6·6*	0·0	7·8	0·2

1866	—1·0	—6·2	—5·2	0·4	0·6	—0·5	—0·9	—3·4	—4·4	4·6	0·0	0·7	—1·3
67	—7·6	3·3	—2·9	—2·2	—0·9	2·2	—1·0	1·3	2·5	0·5	7·7	0·4	0·3
68	—1·0	4·7	1·9	1·0	2·1	3·9	1·3	—0·6	—2·4	1·4	1·6	—7·4	0·5
69	3·5	1·0	—4·5	2·2	—3·2	2·0	3·2	4·0	—2·7	2·7	—0·6	—4·0	0·3
70	1·0	—2·2	1·9	6·1	3·3	2·9	0·3	—1·4	2·7	—3·7	—2·9	—2·1	0·5
1871	—3·3	2·2	4·4	—2·0	2·7	—2·4	—1·6	2·2	—2·5	1·8	0·4	4·0	0·5
72	—6·2	—1·8	—1·9	—0·2	—1·1	—0·6	—0·5	0·0	—2·4	—3·3	—4·7	—7·9	—2·6*
73	—3·8	1·2	—2·5	0·0	0·2	—0·2	0·8	0·5	—0·2	—0·7	—1·1	8·3	0·2
74	3·2	2·2	7·1	—0·5	—0·6	2·6	1·2	0·6	0·1	0·8	0·0	—5·8	0·9
75	0·3	0·8	5·0	—1·4	2·0	—0·8	—0·6	1·7	1·8	—2·5	—4·2	3·5	0·8
76	7·4	—4·2	—8·5*	—0·7	3·0	—0·3	—2·6	—0·4	—4·4	0·9	—1·0	—9·9*	—1·3
77	—2·0	—2·9	—4·3	—3·8	—2·1	1·3	—0·5	—1·5	1·0	3·1	—3·9	1·4	—1·2
78	3·5	7·9	2·1	2·2	—3·2	—0·8	0·7	—4·8*	—0·1	—2·5	—5·9	—6·7	—1·0
79	0·3	—11·2*	1·7	—6·2*	0·7	—3·0	—3·6	—1·9	0·0	4·4	4·8	8·8	—0·4
80	9·5	—2·8	5·0	—1·1	1·9	—2·5	—0·9	—0·8	0·3	—1·6	1·2	—1·3	0·6
1881	—3·2	—4·2	—0·2	—0·3	3·4	—0·3	0·9	—2·3	—0·9	1·1	2·9	1·7	—0·1
82	10·3	7·0	2·7	—2·2	2·2	—1·5	—1·5	—1·2	—3·7	—1·7	—6·1*	—6·7	—0·2
83	—0·3	4·3	—1·1	1·6	—0·4	—0·7	—2·3	1·7	—3·5	1·4	—1·7	3·1	0·1
84	3·8	0·0	1·0	—3·2	1·5	0·4	0·3	1·2	1·0	3·0	5·1	—2·9	0·9
85	—1·5	—4·7	3·1	—3·8	—3·4	0·5	4·6	—0·6	—2·3	—5·7	—0·5	5·6	—0·7

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1886	—8·1	2·3	2·0	0·0	0·1	—1·7	—0·6	0·4	1·2	—2·2	—0·2	—7·3	—1·2
87	1·7	8·3	3·1	0·9	—0·1	4·1	1·9	0·4	—1·0	2·8	—5·3	—2·8	1·2
88	6·5	—3·0	—7·5	—1·3	3·0	—1·4	—4·2*	1·6	3·5	3·6	—1·6	2·0	0·1
89	4·7	—0·1	1·6	—4·4	—2·6	0·0	—0·9	—1·1	0·6	—4·2	7·1	6·3	0·6
90	0·4	5·2	—1·3	—3·4	—3·2	0·9	—1·6	—1·8	4·9	3·9	—1·9	0·9	0·3
1891	3·4	3·3	—3·1	0·3	—4·2*	0·3	—0·6	—2·4	1·7	—1·6	—1·4	1·8	0·4
92	—3·6	—3·7	1·5	1·0	0·8	0·1	0·4	—0·5	0·5	—5·2	3·2	—0·1	—0·6
93	0·9	0·8	5·3	5·1	2·0	0·0	—1·8	2·0	—3·0	0·2	—0·4	2·1	0·5
94	—1·6	— 1·7	1·6	—1·0	—1·6	0·3	—1·4	—0·9	1·6	—0·5	2·1	0·5	0·1
95	—8·9	— 9·0	—4·2	—0·4	1·7	1·3	—1·7	0·0	4·1	—2·3	0·2	—4·8	—1·2
96	8·1	8·0	—2·5	4·6	4·6	—1·3	0·7	0·4	—4·6*	—4·6	3·3	—3·9	1·0
97	—4·1	— 4·2	—4·4	—2·1	—0·8	0·4	0·4	—2·1	—0·2	6·1	6·2	0·8	0·3
98	8·5	8·4	—2·9	—0·2	—3·4	—0·7	2·3	1·5	3·1	—1·6	—1·7	3·3	0·5
99	—3·4	—3·5	3·7	—2·3	0·7	1·2	2·1	2·8	—3·2	4·0	6·8	—1·5	0·8
1900	—2·1	—10·1	0·6	1·1	—0·1	—1·4	0·7	—0·5	3·5	1·5	—4·3	0·5	—0·9
Mittel	4·36	3·91	3·29	2·29	1·75	1·56	1·44	1·49	2·20	2·66	2·81	3·84	0·74

X. Ponta Delgada, 37° 45′ N, 25° 32′ W. Seehöhe 20 *m*.

Mittel 9, 3, 9. Ohne Schwerekorrektion. 700 *mm*.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1865	60·8	61·1	66·0	62·9	62·6	66·4	68·9	68·4	66·2	62·5	60·8	63·7	64·2
66	64·4	66·8	63·9	60·3	62·2	66·4	67·8	65·9	67·1	62·5	61·9	63·7	64·4
67	56·4	65·5	53·1	67·5	60·3	67·6	67·1	66·7	66·6	67·2	57·8	64·6	63·4
68	66·1	70·5	70·5	66·1	65·6	68·3	66·7	67·8	63·3	68·9	61·6	60·5	66·3
69	62·4	69·4	69·2	63·4	62·5	64·6	67·2	67·0	64·6	63·3	67·9	65·3	65·6
70	66·3	54·8	59·8	64·0	66·2	67·3	67·5	63·9	65·0	65·2	61·2	61·4	63·6
1871	70·5	62·7	63·6	60·7	62·7	67·8	67·5	64·8	63·8	63·8	60·7	67·9	64·7
72	65·4	59·7	59·9	64·0	67·2	66·4	66·0	65·3	63·9	67·7	64·4	64·2	64·5
73	64·9	65·0	64·9	58·9	65·2	67·8	67·2	69·0	63·1	66·9	61·8	64·7	65·0
74	66·6	64·7	65·7	64·9	63·7	68·3	67·3	66·8	66·2	65·0	63·3	69·3	66·0
75	61·7	63·1	61·4	61·3	64·4	69·2	67·8	63·7	63·0	64·2	60·2	60·8	63·4
76	65·4	61·6	65·2	66·9	67·3	69·1	66·9	66·2	62·2	59·7	54·4	58·1	63·6
77	63·6	67·5	63·6	59·3	61·6	65·4	68·8	61·3	62·2	62·4	65·8	69·2	64·2
78	69·1	62·5	67·0	57·3	61·5	65·2	67·9	62·5	65·5	61·4	61·0	55·0	63·0
79	63·7	66·1	67·1	64·9	67·1	63·7	68·1	65·0	66·7	64·9	57·2	59·9	64·5
80	59·4	62·3	62·2	65·6	64·1	67·2	64·8	65·1	63·6	55·3	65·5	62·3	63·1

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1881	49·5	63·9	54·7	60·9	66·5	67·6	68·6	65·5	62·1	64·0	62·4	68·5	62·9
82	66·3	64·8	70·7	64·7	63·2	68·5	68·1	67·5	67·2	63·3	67·5	63·7	66·3
83	63·2	66·4	60·9	64·9	67·7	63·8	65·9	67·0	64·7	66·8	65·5	66·2	65·3
84	65·1	62·6	64·0	59·8	65·5	66·9	65·3	64·8	66·0	66·9	62·5	67·0	64·7
85	62·1	57·3	67·8	66·7	63·4	67·5	67·9	62·9	66·8	65·5	59·8	62·0	64·2
86	67·6	64·8	60·0	61·5	64·8	66·1	68·1	67·1	63·7	64·7	66·2	64·6	64·9
87	65·2	65·5	57·6	59·1	65·8	63·9	67·1	64·3	65·9	58·6	63·2	59·0	62·9
88	63·0	61·1	61·1	66·2	63·5	65·2	67·2	66·7	60·6	59·7	66·1	64·6	63·8
89	69·1	69·9	64·5	68·9	63·4	67·3	66·2	67·1	65·0	66·6	66·7	70·4	67·1
90	66·6	63·0	66·8	67·5	63·8	69·1	69·2	67·1	65·8	65·5	68·1	63·5	66·3
1891	67·1	63·3	61·2	62·4	65·0	63·0	64·4	67·0	66·0	62·5	63·9	66·5	64·4
92	66·9	61·3	60·0	64·1	63·5	65·7	68·2	66·8	66·0	60·4	65·1	62·6	64·2
93	61·0	64·5	59·3	62·7	61·8	62·3	68·6	63·3	67·9	65·0	61·2	67·8	63·8
94	64·7	68·2	63·3	66·1	64·9	67·3	68·1	66·1	61·3	57·8	64·4	66·3	64·9
95	63·2	50·1	65·1	61·4	64·4	66·2	66·0	65·2	62·4	58·6	59·6	63·1	62·1

1896	64·1	63·3	68·6	68·1	66·5	65·3	68·1	67·4	65·4	62·2	60·7	66·9	65·6
97	63·7	66·3	65·2	66·8	63·8	65·0	64·8	66·1	66·5	59·0	63·7	65·2	64·7
98	66·0	65·7	62·7	64·6	62·8	62·7	65·1	64·6	61·4	60·6	63·3	63·5	63·6
99	60·2	55·1	58·3	64·8	63·6	68·0	67·8	63·5	66·1	57·3	63·0	63·4	62·6
1900	68·9	57·1	62·5	64·8	65·8	65 6	66·0	66·6	65·9	63·8	67·8	64·7	65·0
Mittel:													
1866/1870	63·12	65·40	63·30	64·26	63·36	66·84	67·26	66·26	65·32	65·42	62·08	63·10	64·65
1871/1875	5·82	3·04	3·10	1·96	4·64	7·90	7·16	5·92	4·00	5·52	2·08	5·38	64·71
1876/1880	4·24	4·00	5·02	2·80	4·32	6·12	7·30	4·02	4·04	0·74	0·78	0·90	63·69
1881/1885	1·24	3·00	3·62	3·40	5·24	6·86	7·16	5·54	5·36	5·50	3·54	5·48	64·66
1886/1890	6·30	4·86	2·00	4·64	4·26	6·32	7·56	6·46	4·20	3·02	6·06	4·42	65·01
1891/1895	4·58	1·48	1·78	3·34	3·92	4·90	7·06	5·68	4·72	0·86	2·84	5·26	63·87
1896/1900	4·58	1·50	3·46	5·82	4·50	5·32	6·36	5·64	5·06	0·58	3·70	4·74	64·27
Mittel	64·27	63·32	63·18	63·75	64·32	66·32	67·14	65·65	64·67	63·09	63·01	64·18	64·41
	Korrektionen des Mittels (9+3+9) : 3 auf ein wahres 24stündiges Mittel												
	— ·02	— ·03	— ·06	— ·13	— ·16	— ·17	— ·12	— ·13	— ·10	— ·11	— ·07	— ·03	— ·09

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. II. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

18

Die elektromagnetischen Schwingungen des Rotationsellipsoides

von

Dr. **Felix Ehrenhaft.**

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Februar 1904.)

Seit Heinrich Hertz war der Ablauf der elektrischen Schwingungen um einen metallischen Erreger mehrfach Gegenstand mathematischer Analyse. Beim geometrisch einfachsten Körper, der Kugel, wurde das Problem von einer Reihe von Autoren behandelt, trotzdem gerade dieser Fall einer direkten experimentellen Prüfung nicht zugänglich erscheint. Erst in der allerneuesten Zeit gewannen diese Untersuchungen direkt physikalisches Interesse, als die Erscheinung der optischen Resonanz daraus erklärbar schien.[1]

Ein zweiter Fall unmittelbar praktischen Interesses ist der stabförmige Leiter als Erreger elektrischer Wellen. Die Behandlung dieses Problems findet eingehende Berücksichtigung durch M. Abraham's Studien.[2] Unter einem Stab wird ein Rotationsellipsoid verstanden, das so gestreckt ist, daß der Quotient aus der kleinen Halbachse durch den halben Abstand des Brennpunktes verschwindend klein ist. Die Eigenschwingungen dieses Stabes ergeben sich durch drei Bedingungen. Die elektrische und magnetische Kraft genügt im Felde dem System der Maxwell'schen Gleichungen, an der Oberfläche

---

[1] Vergl. vom Verfasser »Das optische Verhalten der Metallkolloide und deren Teilchengröße«. Diese Sitzungsberichte, 112. Bd., Abt. II a, Februar 1903 oder Annalen der Physik, 1903, Bd. 11.

[2] Annalen der Physik, 1898, Bd. 66, p. 435. Annalen der Mathematik, 1899, Bd. 52, p. 81. Inauguraldissertation, Berlin 1897, Mayer und Müller.

des metallischen Erregers enden die elektrischen Kraftlinien durchaus senkrecht und in größerer Entfernung vom Erreger sind bloß divergierende Wellen vorhanden.

Wir formulieren im folgenden das Problem für den metallischen Erreger. Die elektrische und die magnetische Kraft genügen außerhalb desselben dem System der Maxwell'schen Gleichungen für das Dielektrikum, innerhalb des Erregers ebendiesem System, modifiziert für Leiter des elektrischen Stromes und an der Oberfläche des Erregers herrscht Kontinuität. Es reguliert also in einem Teile des Raumes gewisse Vorgänge ein System von Differentialgleichungen, in einem zweiten Teile des Raumes ein zweites. Gesucht werden Lösungen dieser Differentialgleichungen, die sich längs der gemeinsamen Randfläche dieser Räume, den Oberflächenbedingungen entsprechend, aneinanderschließen. Diese Grenzbedingung gibt eine transzendente Gleichung, die als Wurzeln jene ausgezeichneten Parameterwerte enthält, die für Schwingungszahlen und Dämpfung der divergierenden Wellen charakteristisch werden.

In dieser Allgemeinheit wurde das Problem an der Kugel und insbesondere an einer unendlich gut leitenden Kugel behandelt. Nähere Literaturangaben hierüber finden sich in J. J. Thomson's Notes on recent researches in Elektricity and Magnetism; hiezu kommen die Untersuchungen von A. Lampa[1] über die Schwingungen einer Kugel, sowie jener, die von einer konzentrischen dielektrischen Schicht umschlossen ist. Gerade bei letzterem Falle ist die zweimalige Erfüllung vorgegebener Randwerte nötig; denn die Kontinuitätsbedingung ist zu erfüllen einmal an der Grenzfläche zwischen der leitenden Kugel und der dielektrischen Kugelschicht, ein zweitesmal zwischen letzterer und dem unendlichen äußeren Dielektrikum.

Im Anschluß an diese Untersuchungen wird im nachfolgenden diese allgemeine Behandlungsweise auch bei verlängerten Rotationsellipsoiden, die von der Kugel nicht zu stark abweichen, für Schwingungen entlang der großen Achse durchgeführt.

---

[1] A. Lampa, diese Sitzungsberichte, Bd. CXII. Abt. IIa, Jänner 1903.

In die Maxwell'schen Gleichungen in orthogonalen Koordinaten werden hiezu die elliptischen Koordinaten eingeführt, bei welchen die Punkte des Raumes als Schnittpunkte einer Schar konfokaler Rotationsellipsoide, zweischaliger Rotationshyperboloide und der durch die Rotationsachse gelegten Meridianebenen bestimmt werden. Unter Annahme von in allen Meridianebenen gleichen elektromagnetischen Vorgängen reduziert sich die Lösung des Problems auf die Integration zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich nur in ihren Konstanten unterscheiden. Ein Partikulärintegral derselben stellt sich dar als Produkt zweier Funktionen, von welchen jede einzelne der Differentialgleichung des Zylinders dritter Ordnung genügt. Für das Innere von Rotationsellipsoiden hat schon Niven in »On the Conduction of Heat in Ellipsoids of Revolution«[1] diese Funktionen in Reihen nach Zugeordneten von Kugelfunktionen respektive Besselfunktionen von der Ordnung $n+{}^1/_2$ entwickelt, während die Reihenentwicklungen, welche den vom Erreger divergierenden Wellen entsprechen, daraus leicht folgen und im nachfolgenden angeführt werden. Es gelingt bei gegebenem Anfangszustand, die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte im Metall und im Dielektrikum aufzustellen. Die Grenzbedingung, Kontinuität der Tangentialkomponenten dieser Kräfte an der Oberfläche des Erregers, liefert eine transzendente Gleichung, die im letzten Abschnitte speziell für das vollkommen leitende Rotationsellipsoid spezialisiert wird. Die Wurzeln dieser Gleichung, die für Schwingungszahl und Dämpfung der vom Erreger zur unendlich fernen Kugel divergierenden Wellen charakteristisch werden, ergeben sich aus ihr durch Reihenreversion.

Die Maxwell'schen Gleichungen in orthogonalen Koordinaten.

Im nachfolgenden werden die Cartesischen Koordinaten mit x, y, z, die Parameter der orthogonalen Koordinaten, die jeden Punkt des Raumes als Schnittpunkt dreier sich senkrecht durchschneidender Flächen fixieren, mit u, v, w bezeichnet.

---

[1] Transactions of the R. Soc. of London, 1880, I, p. 117 bis 151.

Es wird den elektrischen und magnetischen Größen das elektromagnetische Maßsystem zu Grunde gelegt. Wir bezeichnen in demselben in der Richtung der wachsenden u, v, w die Komponenten des magnetischen Kraftvektors mit α, β, γ, die Komponenten der magnetischen Induktion mit a, b, c, die Komponenten des elektrischen Kraftvektors mit P, Q, R. Um die für den Leiter gültigen Größen von jenen im Dielektrikum zu unterscheiden, werden die ersteren mit dem Index 0 versehen.

Bezüglich der Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen in orthogonalen Koordinaten sei auf Max Abraham's Arbeit »Differentialgleichung der Schwingungsprobleme«, Mathem. Annalen, Band 52, 1899, verwiesen. Ich entnehme derselben das für den Gang dieser Rechnung Nötige.

Beim Fortschreiten um das Element ds erfahren u, v, w Zuwächse, so daß

$$ds = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}.$$

U, V und W sind als eindeutige Funktionen von u, v, w gegeben durch die Festsetzung, daß man für sie die positiven Wurzeln aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{1}{V^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \qquad 1) \\ \frac{1}{W^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \end{aligned}$$

nimmt.

In einem Leiter vom spezifischen Widerstand σ und der Permeabilität μ_0 sind die elektromagnetischen Vorgänge definiert durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\pi}{\sigma} P_0 &= VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\beta_0}{V}\right)\right] \\ \frac{4\pi}{\sigma} Q_0 &= WU\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\alpha_0}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right)\right] \\ \frac{4\pi}{\sigma} R_0 &= UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\beta_0}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\alpha_0}{U}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad 2_0\, a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} &= VW\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{Q_0}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_0}{W}\right)\right] \\
\mu_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial t} &= WU\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_0}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{P_0}{U}\right)\right] \\
\mu_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} &= UV\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P_0}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_0}{V}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad 2_0\,b)$$

Im Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante D und der Permeabilität μ durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
D \frac{\partial P}{\partial t} &= VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\beta}{V}\right)\right] \\
D \frac{\partial Q}{\partial t} &= WU\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\alpha}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{W}\right)\right] \\
D \frac{\partial R}{\partial t} &= UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\beta}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\alpha}{U}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad 2\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= VW\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{Q}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{W}\right)\right] \\
\mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= WU\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{P}{U}\right)\right] \\
\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= UV\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{V}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad 2\,b)$$

Man benötigt für das Folgende bloß den Fall des Rotationskörpers. Es herrscht dann in Bezug auf die Rotationsachse Symmetrie. Die Flächen $u =$ constans sind Rotationsflächen, deren eine die Oberfläche des Erregers darstellt, $v =$ constans eine Schar von Rotationsflächen, die die erstere orthogonal durchschneidet. $w =$ constans ist die Schar der Meridianebenen durch die Rotationsachse. U, V, W werden von w unabhängig. Setzen wir in allen Meridianebenen gleiche Zustände voraus — was vom physikalischen Standpunkte immer gewährleistet ist — dann wirkt keine elektrische Kraft senkrecht zu den Meridianebenen und keine magnetische Kraft in denselben. Die so vereinfachten Gleichungen lauten für den Leiter:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\pi}{\sigma} P_0 &= VW \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right) \\ \frac{4\pi}{\sigma} Q_0 &= -WU \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right) \\ \mu_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} &= UV\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P_0}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_0}{V}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad 2'_0)$$

für das Dielektrikum:

$$\left.\begin{aligned} D \frac{\partial P}{\partial t} &= VW \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma}{W}\right) \\ D \frac{\partial Q}{\partial t} &= -WU \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{W}\right) \\ \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= UV\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{V}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad 2')$$

Für die magnetische Kraft im Leiter folgt aus $2'_0$:

$$\frac{4\pi\mu_0}{\sigma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{WU}{V} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{WV}{U} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right)\right\}\right] \qquad 3_0)$$

und für dieselbe im Dielektrikum aus 2')

$$\mu D \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{WU}{V} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{W}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{WV}{U} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma}{W}\right)\right\}\right]. \qquad 3)$$

Charakterisieren wir die zeitliche Veränderung derselben durch den Faktor e^{ipt} und setzen demzufolge $\gamma_0 = e^{ipt}\Phi_0$ und $\gamma = e^{ipt}\Phi$, so gehen die beiden Gleichungen über in

$$\frac{4\pi\mu_0 ip}{\sigma} \Phi_0 = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{WU}{V} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Phi_0}{W}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{WV}{U} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Phi_0}{W}\right)\right\}\right]. \qquad 4_0)$$

$$-\mu D p^2 \Phi = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{WU}{V} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Phi}{W}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{WV}{U} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Phi}{W}\right)\right\}\right]. \qquad 4)$$

Beide Gleichungen sind bis auf eine Konstante identisch. Wir schreiben sie in der Form

$$-\lambda^2\Psi = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{WU}{V}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Psi}{W}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{WV}{U}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Psi}{W}\right)\right\}\right] \quad 5)$$

Die Integration dieser Gleichung gibt die magnetischen Kräfte und aus diesen folgen bei gegebenem Anfangszustande die elektrischen Kräfte P_0, Q_0 und P, Q. Schließlich folgt aus der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente der magnetischen und der elektrischen Kraft an der Oberfläche des Erregers eine Gleichung, deren Wurzeln die Periode und Dämpfung der freien Eigenschwingungen des Erregers geben.

Anwendung auf das Rotationsellipsoid.

Die Oberfläche des Erregers sei ein Rotationsellipsoid um die x-Achse. Man führt als orthogonale Koordinaten die elliptischen ein und setzt

$$\begin{aligned} x &= cu \cos v \\ y &= c\sqrt{u^2-1}\sin v \cos w \\ z &= c\sqrt{u^2-1}\sin v \sin w. \end{aligned} \quad 6)$$

Es bedeutet dann $u =$ constans die Schar konfokaler Rotationsellipsoide um die x-Achse mit dem Brennpunktsabstande c vom Ursprung, der großen Halbachse $a = cu$ und der kleinen Halbachse $b = c\sqrt{u^2-1}$; $v =$ constans die Schar der zugehörigen zweischaligen Rotationsellipsoide; $w =$ constans die Schar der Meridianebenen durch dieselbe Achse. Die Größen U, V, W der Gleichungen 1) stellen sich in elliptischen Koordinaten dar durch

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{u^2-1}{u^2-\cos^2 v}} \\ V &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{u^2-\cos^2 v}} \\ W &= \frac{1}{c\sin v\sqrt{u^2-1}}. \end{aligned} \quad 7)$$

Führt man nach Substitution der Größen 7 in die Gleichung 5) die angezeigten Operationen aus und ersetzt cos v durch ν, so geht diese über in

$$\lambda^2 c^2 (u^2-1)\Psi + \frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2-1)\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right] - \frac{1}{u^2-1}\Psi =$$

$$= \lambda^2 c^2 (\nu^2-1)\Psi + \frac{\partial}{\partial \nu}\left[(\nu^2-1)\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right] - \frac{1}{\nu^2-1}\Psi. \qquad 8)$$

Dieselbe gehört jener Type von Differentialgleichungen an, welchen durch das Produkt einer Funktion von u und einer Funktion von ν genügt wird.[1]

Substituieren wir also

$$\Psi = U(u)\Theta(\nu),$$

so genügt Ψ der Gleichung 8), wofern U und Θ — die zueinander komplementären Funktionen[2] — endlich bleibende Lösungen der Gleichungen

$$(1-\nu^2)\frac{d^2\Theta}{d\nu^2} - 2\nu\frac{d\Theta}{d\nu} - \frac{1}{1-\nu^2}\Theta = \lambda^2 c^2 \nu^2 \Theta - z\Theta \qquad 9\alpha)$$

$$(1-u^2)\frac{d^2U}{du^2} - 2u\frac{dU}{du} - \frac{1}{1-u^2}U = \lambda^2 c^2 u^2 U - zU \qquad 9\beta)$$

darstellen. In diesen Gleichungen bedeutet z eine zunächst noch willkürliche Konstante. Suchen wir Lösungen für die Vorgänge im Leiter des elektrischen Stromes, dann ist, wie aus den Gleichungen 4_0) und 4) ersichtlich ist,

$$\lambda_0^2 = -\frac{4\pi\mu_0 ip}{\sigma},$$

dagegen ist für Lösungen im Dielektrikum

$$\lambda^2 = \mu D^2 p^2.$$

Θ und U sind Zylinderfunktionen der dritten Ordnung. Zur Fortsetzung des vorliegenden Problems ist es nötig, auf diese näher einzugehen.

---

[1] H. Weber, Mathem. Annalen, I, p. 27.

[2] Abraham, Mathem. Annalen, LII, p. 97.

Zylinderfunktionen dritter Ordnung.

Schon Heine[1] versuchte nach dem Vorbilde der von ihm entwickelten Funktionen des elliptischen Zylinders auch hier vorzugehen. Bei den ersteren ist die Auswahl der Werte der Konstanten z beschränkt durch den Umstand, daß die Funktion die Periode 2π besitzen muß. Entwickelt man daher nach Heine die Funktionen des elliptischen Zylinders in konvergente trigonometrische Reihen, so erhält man aus der Bedingung, daß der Koeffizient des unendlich hohen Gliedes der Reihe verschwinden muß, nicht bloß die notwendige, sondern, wie nachgewiesen, auch hinreichende Bedingung zur Bestimmung von z.

Bei den Zylinderfunktionen dritter Ordnung (Gleichungen 9 α und β) liegt der Fall analog. Es ist nachzuweisen, daß man für jedes λ Zahlen z bestimmen kann, die ein endliches Integral U und Θ liefern. Ferner ist zu beachten, daß Θ, da $\nu = \cos v$ ist, eine periodische Funktion von v sein muß. Die Versuche Heine's, auch diese Funktionen in konvergente trigonometrische Reihen zu entwickeln, schlugen aber fehl.

Erst C. Niven[2] ist es in der Untersuchung »On the Conduction of Heat in Ellipsoids of Revolution« gelungen, eben diese Funktionen in Reihen nach den Zugeordneten der Kugelfunktionen, respektive Besselfunktionen von der Ordnung $n+\frac{1}{2}$ zu entwickeln. Da aber beim Wärmeleitungsprobleme bloß Reihen von Interesse sind, die für $+1$ und -1 endliche Werte ergeben und es bei dem vorliegenden Probleme insbesondere auch darauf ankommt, Reihenentwicklungen zu erhalten, die den vom Erreger divergierenden Wellen entsprechen, ist es nötig, nicht bloß Niven's Entwicklungen zu übernehmen, sondern auch für den zweiten Fall zu ergänzen. Ebendieser Aufgabe soll der nachfolgende Teil gerecht werden, der die Funktionen des Zylinders dritter Ordnung, die auch bei anderen Problemen der mathematischen Physik auftreten, enthält.

---

[1] Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 1878, II, p. 331; I, p. 405.

[2] Transactions of the R. Soc. of London. 1880, p. 117 bis 151.

Die allgemeinen Differentialgleichungen dieser Funktionen, die Grenzfälle der Lame'schen Funktionen dritter Ordnung sind, lauten:

$$(1-\nu^2)\frac{d^2\Theta}{d\nu^2}-2\nu\frac{d\Theta}{d\nu}-\frac{m^2}{1-\nu^2}\Theta=\lambda^2c^2\nu^2\Theta-z\Theta \qquad 10\alpha)$$

$$(1-u^2)\frac{d^2U}{du^2}-2u\frac{dU}{du}-\frac{m^2}{1-u^2}U=\lambda^2c^2u^2U-zU. \qquad 10\beta)$$

Dabei ist in ersterer $\nu = \cos v$. Setzt man in ihnen $m=1$, so gehen sie über in das Gleichungspaar 9 α und β.

Wir gehen nun daran, nach Niven Θ in Reihen nach Zugeordneten von Kugelfunktionen zu entwickeln und bezeichnen mit $P_m^n(\nu)$ die zugeordnete Kugelfunktion m^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades. Zwischen den Funktionen der verschiedenen Grade bestehen nachfolgende Rekursionen:[1]

$$\nu P_m^n = P_m^{n+1}+\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}P_m^{n-1}$$

$$\nu^2 P_m^n = P_m^{n\div 2}+\frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}P_m^n+ \qquad 11)$$

$$+\frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)}P_m^{n-2}.$$

Es ist daher evident, daß man ganz allgemein $\nu^{2i}P_m^n$ in Reihen nach Zugeordneten von Kugelfunktionen von geradem oder ungeradem Grade entwickeln kann, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

Setzen wir in die Differentialgleichung 10 α)

$$(1-\nu^2)\frac{d^2\Theta}{d\nu^2}-2\nu\frac{d\Theta}{d\nu}-\left(\frac{m^2}{1-\nu^2}+\lambda^2c^2\nu^2-z\right)\Theta=0$$

für

$$\Theta = C(\alpha_0 P_m^m-\alpha_1 P_m^{m+2}+\alpha_2 P_m^{m+4}-\ldots\pm\alpha_r P_m^{m+2r}+\ldots)$$

oder 12)

$$\Theta = D(\beta_0 P_m^{m+1}-\beta_1 P_m^{m+3}+\beta_2 P_m^{m+5}-\ldots\pm\beta_s P_m^{m+2s+1}+\ldots)$$

---

1 Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I, p. 258 (48).

und brechen zunächst bei dem Gliede $C\alpha_r P_m^{m+2r}$ ab, so sieht man unter Berücksichtigung der für die Zugeordneten der Kugelfunktionen gültigen Differentialgleichung

$$\left\{(1-\nu^2)\frac{d^2 P_m^n}{d\nu^2} - 2\nu\frac{dP_m^n}{d\nu} - \frac{m^2}{1-\nu^2}P_m^n + zP_m^n\right\} =$$
$$= -\{n(n+1)-z\}P_m^n,$$

sowie der Rekursionen 11), daß durch Einsetzen der Reihen 12) in die Differentialgleichung sich aus dem Umstande, daß der Koeffizient der Kugelfunktionen jeden Grades verschwinden muß, nachfolgende Rekursionen zur Bestimmung der α und β ergeben.

I.	II.
$p_1\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_0 - z)\alpha_0$	$p'_1\beta_1 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa'_0 - z)\beta_0$
$p_2\alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_1 - z)\alpha_1 - \alpha_0$	$p'_2\beta_2 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa'_1 - z)\beta_1 - \beta_0$
$p_3\alpha_3 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_2 - z)\alpha_2 - \alpha_1$	$p'_3\beta_3 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa'_2 - z)\beta_2 - \beta_1$
$\vdots$	$\vdots$
$p_{r+1}\alpha_{r+1} = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_r - z)\alpha_r - \alpha_{r-1}$	$p'_{s+1}\beta'_{s+1} = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa'_s - z)\beta_s - \beta_{s-1},$

13)

in welchen

$$\varepsilon = \lambda^2 c^2$$

$$\varkappa_r = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon + n(n+1),$$

$$p_r = \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)}$$

$$\text{für } n = m+2r$$

14)

$$\varkappa'_s = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon + n(n+1),$$

$$p'_s = \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)}$$

$$\text{für } n = m+2s+1$$

bedeuten.

Durch die erste der Substitutionen 10) wird die Gleichung nur dann befriedigt, wenn auch der Rest

$$C(-\varepsilon\alpha_r P_m^{m+2r}+\varepsilon\alpha_{r+1}P_m^{m+2r+2})$$

verschwindet. Wählen wir daher die bisher willkürliche Konstante z so, daß α_r und α_{r+1} mit wachsendem r unendlich klein werden, d. h. bestimmen wir z als Wurzel der Gleichung $\alpha_\infty = 0$, dann ist die Gleichung 10 α) befriedigt.

In derselben Weise ergibt sich für die zweite Reihenentwicklung 10) für ungerade $n-m$ die Bedingung, daß z Wurzel der Gleichung $\beta_\infty = 0$ sein muß. Niven hat die Berechnung von z als Wurzel der Gleichung $\alpha_\infty = 0$, sowie die Berechnung der Koeffizienten α selbst genau nach jenen Methoden vorgenommen, die Heine in seinem Handbuch der Kugelfunktionen, I, p. 406, für die Koeffizienten der Funktionen des elliptischen Zylinders verwendet hat.

Wir wenden uns jetzt der Behandlung der Gleichung 10 β)

$$(1-u^2)\frac{d^2U}{du^2}-2u\frac{dU}{du}-\frac{m^2}{1-u^2}U=\lambda^2c^2u^2U-zU$$

zu. u ist in derselben der elliptische Parameter.

Setzen wir an seine Stelle eine neue Variable ξ durch die Substitution

$$\xi=\lambda c\sqrt{1-u^2}.$$

Für $u=u_0$ wird

$$\frac{\xi_0}{\lambda}=c\sqrt{1-u_0^2}=b$$

der kleinen Halbachse des u_0 zugehörigen Ellipsoides.

Gleichung 10 β) geht dadurch über in

$$\xi^2\frac{d^2U}{d\xi^2}+2\xi\frac{dU}{d\xi}+\xi^2U-zU+$$
$$+\lambda^2c^2\left(\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dU}{d\xi}+U-\frac{m^2}{\xi^2}U\right)=0. \quad 15)$$

Für $c = 0$ wird das Ellipsoid zur Kugel. Setzt man für diesen Fall $z = n(n+1)$ und ferner $U = R$, dann wird aus Gleichung 15)

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{dR}{d\xi} + R\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0$$

und aus dieser für $\xi = \lambda r$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + R\left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] = 0. \qquad 16)$$

Bezüglich ausführlicher Behandlung dieser Gleichung sei verwiesen auf J. J. Thomson, Recent Researches, p. 362. Das für das folgende Wichtige wird von dort entnommen.

Die Lösung von Gleichung 16) lautet:

$$R(r) = \xi^n \left\{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}^n \frac{Ae^{i\xi} + Be^{-i\xi}}{\xi},$$

aus welcher sich folgende Partikularintegrale ergeben:

$$R = \xi^n \left\{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}^n \frac{\sin\xi}{\xi} = S_n(\xi) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \xi^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$$

$$R = \xi^n \left\{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}^n \frac{\cos\xi}{\xi} = T_n(\xi) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \xi^{-\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$$

$$R = \xi^n \left\{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}^n \frac{e^{-i\xi}}{\xi} = E_n^-(\xi) \qquad 17)$$

$$R = \xi^n \left\{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}^n \frac{e^{+i\xi}}{\xi} = E_n^+(\xi).$$

S_n bleibt endlich auch in einem Bereiche, in dem $\xi = 0$ wird. Es wird daher die innerhalb der Kugel brauchbare Lösung. E_n^- entspricht den von der Kugel divergierenden, dagegen E_n^+ den konvergierenden Wellen.

Dieselben Gesichtspunkte werden auch maßgebend für die Entwicklung der Partikularintegrale U der Gleichung 10β).

Für die Partikularintegrale 17) gelten Rekursionen. Für den vorliegenden Fall ist es wichtig, daß dieselben allen gemeinsam sind, was durch die zusammenfassende Bezeichnung R angedeutet wird.

$$\frac{dR_n}{d\xi} = R_{n+1} + \frac{n}{\xi} R_n \quad \text{(Rec. Res. Thomson, p. 364)}$$

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} = R_{n+2} + \frac{2n+1}{\xi} R_{n+1} + \frac{n(n-1)}{\xi^2} R_n,$$

ferner

$$R_{n+2} + \frac{2n+3}{\xi} R_{n+1} + R_n = 0, \tag{18}$$

daher

$$\frac{2n+1}{\xi} R_n + R_{n+1} + R_{n-1} = 0$$

und

$$(2n+1)\frac{dR_n}{d\xi} = (n+1)R_{n+1} - nR_{n-1}.$$

Bildet man durch Addition der jedem Gliede linker Hand aus den Rekursionen entspringenden Werte die Größe

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dR_n}{d\xi} + R_n\left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right),$$

so ergibt sich:

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dR_n}{d\xi} + R_n\left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) = \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} R_{n+2} +$$

$$+ \frac{2n^2 + 2n - 2m^2 - 1}{(2n-1)(2n+3)} R_n + \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} R_{n-2}.$$

oder unter Anwendung der von Niven p. 128 (30) angegebenen Substitution

$$R_n = \frac{1.3.5\,(2n-1)}{(\overline{n-1}^2 - m^2)(\overline{n-3}^2 - m^2)\ldots(\overline{m-1}^2 - m^2)} R'_n \tag{19}$$

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d R'_n}{d\xi} + R'_n\left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) =$$

$$= R'_{n+2} + \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)} R'_n +$$

$$+ \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)} R'_{n-2}. \qquad 20)$$

Gesucht wird das Integral der Differentialgleichung 15)

$$\xi^2\left[\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + U\left(1 - \frac{n(n-1)}{\xi^2}\right)\right] - zU +$$

$$+ n(n+1)U + \lambda^2 c^2\left[\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + U - \frac{m^2}{\xi^2}U\right] = 0.$$

Setzen wir unter Berücksichtigung von 20) in dieser

$$U = C_1(\alpha_0 R'_m - \alpha_1 R'_{m+2} + \alpha_2 R'_{m+4} \ldots (-1)^r \alpha_r R'_{m+2r} + \ldots),$$

so genügt die Reihe, wofern erstens die Koeffizienten der Funktionen R' jeden Grades gleich 0 gesetzt werden und zweitens, wofern der Rest der Reihe verschwindet.

Aus der ersten Bedingung ergeben sich wieder die Rekursionen 13, I, zur Bestimmung der Koeffizienten α, aus der zweiten folgt, daß auch hier z eine Wurzel der Gleichung $\alpha_\infty = 0$ sein muß.

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von 19) das Integral

$$U(\xi) = C_1\left[\alpha_0 R_m - \frac{1}{2m+3}\alpha_1 R_{m+2} +\right.$$

$$+ \frac{1.3}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 R^{m+4} -$$

$$\left. - \frac{1.3.5}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 R_{m+6}\ldots\right], \qquad 21)$$

in welches für die R jeden Grades jedes der Partikularintegrale 17) eintreten kann. Diese Entwicklung gilt für gerade $n-m$.

Für ungerade $n-m$ verwenden wir mit Niven

$$U = \left[1+\frac{\lambda^2 c^2}{\xi^2}\right]^{\frac{1}{2}} \overline{U}.$$

Gleichung 10β) geht sodann über in

$$\xi^2 \frac{d^2\overline{U}}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d\overline{U}}{d\xi} + \xi^2 \overline{U} - z\overline{U} +$$
$$+ \lambda^2 c^2 \left(\frac{d^2\overline{U}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d\overline{U}}{d\xi} + \overline{U} + \frac{1-m^2}{\xi^2}\overline{U}\right) = 0. \qquad 22)$$

Berechnet man sodann vermöge der Rekursionen 18) den rechts in der Klammer von 22) stehenden Ausdruck

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{dR_n}{d\xi} + R_n + \frac{1-m^2}{\xi^2} R_n = \frac{(n+2)^2-m^2}{(2n+1)(2n+3)} R_{n+2} +$$
$$+ \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)} R_n + \frac{(n-1)^2-m^2}{(2n-1)(2n+1)} R_{n-2},$$

setzt man ferner

$$R_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(n^2-m^2)(\overline{n-2}^2-m^2)\quad(\overline{m+1}^2-m^2)} \overline{R}_n$$

für ungerade $n-m$, so ergibt sich

$$\frac{d^2\overline{R}_n}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d\overline{R}_n}{d\xi} + \overline{R}_n + \frac{1-m^2}{\xi^2}\overline{R}_n =$$
$$= \overline{R}_{n+2} + \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\overline{R}_n +$$
$$+ \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)}\overline{R}_{n-2}.$$

Daraus erhellt, daß $\overline{U}$ sich in nachfolgende Reihe entwickelt:

$$\overline{U} = \beta_0 \overline{R}_{m+1} - \beta_1 \overline{R}_{m+3} + \beta_2 \overline{R}_{m+5} + \ldots$$

und hieraus folgt

$$U(\xi) = \frac{(\xi^2+\lambda^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi} \Big\{ \beta_0 R_{m+1} - \frac{3}{2m+5} \beta_1 R_{m+3} + \frac{3.5}{(2m+7)(2m+9)} \beta_2 R_{m+5} - \frac{3.5.7}{(2m+9)(2m+11)(2m+13)} \beta_3 R_{m+7} \ldots \Big\} \qquad 23)$$

Diese Reihe ist gültig für jedes der Partikularintegrale R.

Die zweite Entwicklung für U wird im folgenden skizziert.

Man setzt in die Definitionsgleichung der U

$$\eta = \lambda c u$$

als neue Independente. Für $u = u_0$ wird $\frac{\eta_0}{\lambda} = c u_0 = a$ der großen Halbachse des u_0 zugehörigen Ellipsoides.

Die Differentialgleichung 10β) geht sodann über in

$$(\eta^2-\lambda^2 c^2)\frac{d^2 U}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dU}{d\eta} - m^2 c^2 \lambda^2 \frac{U}{\eta^2 - \lambda^2 c^2} + \eta^2 U - zU = 0.$$

Um zu vermeiden, daß die als ganze Funktionen dargestellten Koeffizienten vom vierten Grade werden, setze man

$$U = (\eta^2 - \lambda^2 c^2)^{\frac{m}{2}} \Omega,$$

woraus

$$(\eta^2-\lambda^2 c^2)\frac{d^2\Omega}{d\eta^2} + 2(m+1)\eta \frac{d\Omega}{d\eta} + m(m+1)\Omega + \eta^2 \Omega - z\Omega = 0.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir Ω durch $\frac{\omega}{\eta^m}$. Sie geht dann über in

$$\eta^2 \frac{d^2\omega}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\omega}{d\eta} + \eta^2\omega - z\omega = \lambda^2 c^2 \left[\frac{d^2\omega}{d\eta^2} - \frac{2m}{\eta}\frac{d\omega}{d\eta} + \frac{m(m+1)}{\eta^2}\omega\right].$$

Man bestimmt aus den Rekursionen 18) zunächst wieder den Wert von

$$\frac{d^2R_n}{d\eta^2} - \frac{2m}{\eta}\frac{dR_n}{d\eta} + \frac{m(m+1)}{\eta^2}R_n = \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}R_{n+2} - \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}R_n + \\ + \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n+1)}R_{n-2},$$

setzt hierin

$$R_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n+m)}\overline{\overline{R}}_n$$

so daß man für gerade und ungerade $n-m$

$$\frac{d^2\overline{\overline{R}}_n}{d\eta^2} - \frac{2m}{\eta}\frac{d\overline{\overline{R}}_n}{d\eta} + \frac{m(m+1)}{\eta^2}\overline{\overline{R}}_n = \overline{\overline{R}}_{n+2} - \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\overline{\overline{R}}_n + \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(4n^2-1)(4\overline{n-1}^2-1)}\overline{\overline{R}}_{n-2}$$

erhält.

Daraus werden die Reihenentwicklungen

$$\omega = \alpha_0\overline{\overline{R}}_m + \alpha_1\overline{\overline{R}}_{m+2} + \alpha_3\overline{\overline{R}}_{m+4} + \ldots$$
$$\omega = \beta_0\overline{\overline{R}}_{m+1} + \beta_1\overline{\overline{R}}_{m+3} + \beta_2\overline{\overline{R}}_{m+5} + \ldots$$

ersichtlich. Vermöge dieser wird

$$U = \frac{(\eta^2 - \lambda^2 c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta^m}\, \omega,$$

worin noch die Funktionen $\overline{\overline{R}}$ durch die R zu ersetzen sind.

Im folgenden werden die Reihenentwicklungen der Zylinderfunktionen dritter Ordnung zusammengestellt. Bei den Reihenentwicklungen für die Integrale von 10α) Θ_m^n bedeutet m die Ordnung und n den Grad der in der Reihe führenden Kugelfunktion. Bei den Integralen von 10β) zeigt der Index, nach welchem der Partikularintegrale 17) die Entwicklung vorgenommen wird und von welcher Ordnung diese Funktion im Anfangsgliede ist. Das Argument in der Klammer kennzeichnet die große oder kleine Halbachse.

Für gerade $n - m$:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_m^m &= \alpha_0 P_m^m - \alpha_1 P_m^{m+2} + \alpha_2 P_m^{m+4} - \alpha_3 P_m^{m+6} + \dots \\
U_{S_m}(\eta) &= \frac{(\eta^2 - \lambda^2 c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta^m} \left\{ \alpha_0 S_m + \frac{2(m+1)}{2m+3} \alpha_1 S_{m+2} + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)} \alpha_2 S_{m+4} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)} \alpha_3 S_{m+6} + \dots \right\} \\
U_{S_m}(\xi) &= \alpha_0 S_m - \frac{1}{2m+3} \alpha_1 S_{m+2} + \frac{1.3}{(2m+5)(2m+7)} \alpha_2 S_{m+4} - \\
&\qquad - \frac{1.3.5}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)} \alpha_3 S_{m+6} + \dots
\end{aligned}\right\} \quad 25)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
U_{E_m^-}(\eta) = \frac{(\eta^2-\lambda^2 c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta^m} \Big\{ \alpha_0 E_m^- + \frac{2(m+1)}{2m+3} \alpha_1 E_{m+2}^- + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)} \alpha_2 E_{m+4}^- + \\
+ \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)} \alpha_3 E_{m+6}^- + \ldots \Big\} \\
U_{E_m^-}(\xi) = \alpha_0 E_m^- - \frac{1}{2m+3} \alpha_1 E_{m+2}^- + \frac{1.3}{(2m+5)(2m+7)} \alpha_2 E_{m+4}^- - \\
- \frac{1.3.5}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)} \alpha_3 E_{m+6}^- - \ldots
\end{aligned}
\right\} \quad 25)
$$

Für ungerade $n-m$:

$$
\left.
\begin{aligned}
\Theta_m^{m+1} = \beta_0 P_m^{m+1} - \beta_1 P_m^{m+3} + \beta_2 P_m^{m+5} - \beta_3 P_m^{m+7} + \ldots \\
U_{S_{m+1}}(\eta) = \frac{(\eta^2-\lambda^2 c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta^m} \Big\{ \beta_0 S_{m+1} + \frac{2(m+1)}{(2m+5)} \beta_1 S_{m+3} + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+7)(2m+9)} \beta_2 S_{m+5} + \\
+ \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+9)(2m+11)(2m+13)} \beta_3 S_{m+7} + \ldots \Big\} \\
U_{S_{m+1}}(\xi) = \frac{(\xi^2+\lambda^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi} \Big\{ \beta_0 S_{m+1} - \frac{3}{2m+5} \beta_1 S_{m+3} + \frac{3.5}{(2m+7)(2m+9)} \beta_2 S_{m+5} - \\
- \frac{3.5.7}{(2m+9)(2m+11)(2m+13)} \beta_3 S_{m+} + \ldots \Big\}
\end{aligned}
\right\} \quad 26)
$$

$$U_{E^-_{m+1}}(\eta) = \frac{(\eta^2-\lambda^2c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta^m}\Big\{\beta_0 E^-_{m+1} + \frac{2(m+1)}{2m+5}\beta_1 E^-_{m+3} + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+7)(2m+9)}\beta_2 E^-_{m+5} + $$
$$+ \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+9)(2m+11)(2m+13)}\beta_3 E^-_{m+7} + \ldots\Big\}$$

$$U_{E^-_{m+1}}(\xi) = \frac{(\xi^2+\lambda^2c^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi}\Big\{\beta_0 E^-_{m+1} - \frac{3}{2m+5}\beta_1 E^-_{m+3} + \frac{3.5}{(2m+7)(2m+9)}\beta_2 E^-_{m+5} - $$
$$- \frac{3.5.7}{(2m+9)(2m+11)(2m+13)}\beta_3 E^-_{m+7} + \ldots\Big\}$$

Von diesen Reihen entsprechen die Funktionen U_{S_m} den Lösungen innerhalb des Ellipsoides, die $U_{E^-_m}$ den Lösungen für die vom Erreger divergierenden Wellen, die zu einer unendlich fernen Kugel laufen; die den konvergierenden Wellen entsprechenden Reihen $U_{E^+_m}$ erhält man, indem man in $U_{E^-_m}$ jedes i durch $-i$ ersetzt. Es ist klar, daß U_{T_m} gebildet wird, indem man in den bezüglichen Reihen für die U_{S_m} die Funktionen S durch die T ersetzt. Übrigens gilt auch die Beziehung

$$U_{E^-_m} = U_{T_m} - iU_{S_m}.$$

Jede der Funktionen 25) und 26) ist noch mit einer willkürlichen Konstanten zu multiplizieren.

Bevor wir zu dem physikalischen Thema zurückkehren, ist es nötig, die Konvergenz der Reihe der α nachzuweisen, z als Wurzel der Gleichung $\alpha_\infty = 0$ zu bestimmen und schließlich die α selbst zu berechnen.

Das System lautet:

$$p_1 \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_0 - z)\,\alpha_0$$

$$p_2 \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_1 - z)\,\alpha_1 - \alpha_0$$

$$p_3 \alpha_3 = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_2 - z)\,\alpha_2 - \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$p_{r+1} \alpha_{r+1} = \frac{1}{\varepsilon}(\varkappa_r - z)\,\alpha_r - \alpha_{r-1}.$$

Die p_r, $\varkappa_r$ und ε haben die bereits p. 11 angegebene Bedeutung. Die Diskussion dieses Systems ist von Niven in der schon zitierten Schrift, p. 133 bis 144, ausgeführt. Es treten dabei genau jene Methoden in Verwendung, die Heine bei der Diskussion der Rekursionen der Koeffizienten der Funktionen des elliptischen Zylinders entwickelt.[1] Soweit es für das Folgende erforderlich ist, werde ich die dort abgeleiteten Resultate angeben.

Setzt man $\alpha_0 = 1$, so sind die α ganze Funktionen von z, und zwar ist α_r vom Grade r und daher α_∞ in z transzendent.

Durch Anwendung der Sturm'schen Sätze überzeugt man sich, daß alle Wurzeln der Gleichung $\alpha_r = 0$ reell und verschieden sind und alle unter $\varkappa_r$ liegen. Überdies liegt nur eine von ihnen zwischen $\varkappa_{r-1}$ und $\varkappa_r$. Analog, wie bei den Funktionen des elliptischen Zylinders, hat jede von den Gleichungen $\alpha_{r+1} = 0$, $\alpha_{r+2} = 0$ eine Wurzel zwischen jedem Paar von Wurzeln von $\alpha_r = 0$. Es ist daraus ersichtlich, daß jede von den Funktionen $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_r$ für Werte von z einmal verschwindet, die in den Intervallen zwischen $-\infty$, $\varkappa_0$, $\varkappa_1 \ldots$ liegen. Denkt man sich dann die Kurven $\alpha_{r+1} = f_1(z)$, $a_r = f_2(z)$, $\alpha_{r-1} = f_3(z)$ konstruiert, so streben die Punkte, in welchen die Kurve

[1] Handbuch der Kugelfunktionen, p. 406 bis 412.

$\alpha_r = f_2(z)$ die z-Achse durchschneidet, für sehr große r bestimmten Punkten zu und in der Nachbarschaft dieser Punkte konvergieren $\alpha_{r-3}, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}$ sehr stark.

Die nächste Aufgabe ist, z als Wurzel der Gleichung $\alpha_\infty = 0$ zu bestimmen. Für nicht zu große $\varepsilon = \lambda^2 c^2$ führt Niven dies durch das Verfahren der sukzessiven Approximation aus. Er setzt in dem Gleichungssystem 13) $x_r - z = \Phi_r$ und bestimmt aus demselben $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \ldots$; es folgt so:

$$\varepsilon^1 p_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \Phi_0$$

$$\varepsilon^2 p_1 p_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \Phi_0 \Phi_1 \left(1 - \varepsilon^2 \frac{p_1}{\Phi_0 \Phi_1}\right)$$

$$\varepsilon^3 p_1 p_2 p_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_0} = \Phi_0 \Phi_1 \Phi_2 \left\{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{p_1}{\Phi_0 \Phi_1} + \frac{p_2}{\Phi_1 \Phi_2}\right)\right\} \qquad 27)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon^r p_1 p_2 \ldots p_r \frac{\alpha_r}{\alpha_0} =$$

$$= \Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_{r-1} (1 - \varepsilon^2 {}_{r-1}\Sigma_1 + \varepsilon^4 {}_{r-1}\Sigma_2 - \varepsilon^6 {}_{r-1}\Sigma_3 + \ldots).$$

${}_r\Sigma_1$ ist die Summe der Größen $\frac{p_1}{\Phi_0 \Phi_1}, \frac{p_2}{\Phi_1 \Phi_2} \ldots \frac{p_r}{\Phi_{r-1} \Phi_r}$, ${}_r\Sigma_2$ und ${}_r\Sigma_3$ die Summe aller Produkte von zwei, respektive drei nicht benachbarten Gliedern dieser Reihe u. s. w.

Die Gleichung $\alpha_\infty = 0$, deren Wurzel z gesucht wird, lautet daher:

$$\Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_\infty (1 - \varepsilon^2 {}_\infty\Sigma_1 + \varepsilon^4 {}_\infty\Sigma_2 - \ldots) = 0. \qquad 28)$$

Die erste Näherung der $r+1$ Wurzel ergibt sich aus

$$\Phi_r = 0, \text{ d. h. } z = n(n+1) + \frac{2n^2 + 2n - 2m - 1}{(2n-1)(2n+3)} \varepsilon.$$

Das an Gleichung 28) wiederholt angewendete Verfahren der sukzessiven Approximation ergibt als Näherungswert für:

$$z = n(n+1) + \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{(n-m+2)(n-m+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)^3(2n+5)} - \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-3)(2n-1)^3(2n+1)}\right\}\varepsilon^2$$

$$+(4m^2-1)\left\{\frac{(n-m+2)(n-m+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^5(2n+5)(2n+7)} - \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)^5(2n+1)(2n+3)}\right\}\varepsilon^3$$

$$+\dots \qquad \text{worin } n = m+2r.$$

Bei Berechnung der Koeffizienten selbst behandelt Niven den allgemeinen Fall, daß das Anfangsglied der Reihen den Koeffizienten α_r hat. Wenn α_r endlich und vom Grade ε^0 ist, dann enthält α_0 keinen Ausdruck, dessen Ordnung niedriger ist als ε^r, α_1 keinen, der niedriger ist als ε^{r-1}, $\dots \alpha_{r-1}$, keinen, der niedriger ist als ε. Schließlich wird α_{r-1} vom Grade ε, α_{r+2} vom Grade ε^2 u. s. f.

Die im nachfolgenden angeführten Koeffizienten werden Niven, p. 141, entnommen und deren Bestimmung hier an einem Beispiele skizziert. Man entnehme den Rekursionen 27) den Quotienten $\frac{\alpha_r}{\alpha_0}$, sodann $\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_0}$ und entwickle den hieraus gebildeten Quotienten $\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}$ in Potenzreihen nach ε. Niven erhält so nachfolgende Ausdrücke:

$$\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} = \frac{\varepsilon}{2(2n+3)} - \frac{(2m+1)(2m-1)}{(2n-1)(2n+3)^3(2n+7)}\varepsilon^2 + K_3\varepsilon^3 + \ldots{}^1$$

$$\frac{\alpha_{r+2}}{\alpha_r} = \frac{\varepsilon^2}{8(2n+3)(2n+5)} - \frac{1}{2}\,\frac{4m^2-1}{(2n-1)(2n+3)^3(2n+5)(2n+11)}\varepsilon^3 + \ldots$$

$$\frac{\alpha_{r+3}}{\alpha_r} = \frac{\varepsilon^3}{48(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \ldots \qquad 29)$$

$$\frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} = -\frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)}{(2n+1)(2n-1)^3(2n-3)}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{4m^2-1}{(2n-5)(2n-1)^3(2n+3)}\varepsilon^2 + H_3\varepsilon^3 + \ldots\right]^1$$

$$\frac{\alpha_{r-2}}{\alpha_r} = \frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)(\overline{n-2}^2-m^2)(\overline{n-3}^2-m^2)}{8(2n-7)(2n-5)^2(2n-3)^3(2n-1)^3(2n+1)}\left[\varepsilon^2 - 4\,\frac{4m^2-1}{(2n-9)(2n-1)^2(2n-3)}\varepsilon^3 + \ldots\right]$$

$$\frac{\alpha_{r-3}}{\alpha_r} = -\frac{(n^2-m^2)(\overline{n-1}^2-m^2)(\overline{n-2}^2-m^2)(\overline{n-3}^2-m^2)(\overline{n-4}^2-m^2)(\overline{n-5}^2-m^2)}{48(2n-11)(2n-9)^2(2n-7)^2(2n-5)^3(2n-3)^3(2n-1)^3(2n+1)}\varepsilon^3 + \ldots,$$

worin für $n = m+2r$ zu setzen ist.

Bezüglich der Ableitung dieser Formeln sowie der ausführlich durchgeführten Diskussion verweise ich auf Niven, p. 133 bis 143.

---

1 K_3 und H_3 siehe l. c. Niven.

Berechnung des elektromagnetischen Feldes.

Die Integration der Gleichungen 10α) und β) ermöglicht es, die elektrischen und magnetischen Kräfte zu bestimmen. Die für dieselben charakteristischen Gleichungen 9α) und β) entstehen aus dem Gleichungspaar 10α) und β) durch die Substitution $m = 1$. Wir behalten zunächst die Größe m bei und beachten, daß in den Resultaten $m = 1$ zu setzen ist.

Für die elektromagnetischen Kräfte im Metall ist durchaus

$$\lambda_0^2 = -\frac{4\pi\mu i p}{\sigma}.$$

Da $\Psi = U\Theta$, folgt unter Berücksichtigung einer willkürlichen Konstanten, mit der jede der Reihen 25) und 26) zu multiplizieren war:

$$\gamma_0 = A e^{ipt} U_{S_m}(\lambda_0 c u)\Theta_m^m(\cos v).$$

Die elektrischen Kräfte im Metall ergeben sich hieraus vermöge der Gleichungen $2_0'$. Es wird

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right) = A c e^{ipt}\sqrt{u^2-1}\, U_{S_m}\frac{\partial}{\partial v}(\Theta_m^m \sin v)$$

und daher

$$P_0 = \frac{A\sigma e^{ipt} U_{S_m}\frac{\partial}{\partial v}(\Theta_m^m \sin v)}{4\pi c \sin v\sqrt{u^2-\cos^2 v}},$$

ferner wird

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_0}{W}\right) = A c e^{ipt}\Theta_m^m \sin v\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2-1}\, U_{S_m})$$

und daher

$$Q_0 = -\frac{A\sigma e^{ipt}\Theta_m^m}{4\pi c\sqrt{u^2-\cos^2 v}}\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2-1}\, U_{S_m}).$$

Für die elektromagnetischen Größen im Dielektrikum ist

$$\lambda^2 = \mu D p^2.$$

Es wird $\gamma = B e^{ipt} U_{E_m^-}(\lambda c u) \Theta_m^m(\cos v)$ und hieraus ergeben sich die elektrischen Kräfte im Dielektrikum vermöge der Gleichungen 2'.

Es wird ähnlich wie bei den analogen Größen im Metall

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{B e^{ipt} U_{E_m^-}}{D c \sin v \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial v} (\Theta_m^m \sin v)$$

und

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{B e^{ipt} \Theta_m^m}{D c \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 - 1}\, U_{E_m^-})$$

und daraus

$$P = \frac{B e^{ipt} U_{E_m^-}}{i p D c \sin v \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial v} (\Theta_m^m \sin v) + f_1(u, v)$$

und

$$Q = \frac{B e^{ipt} \Theta_m^m}{i p D c \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 - 1}\, U_{E_m^-}) + f_2(u, v).$$

Zur Bestimmung von $f_1(u, v)$ und $f_2(u, v)$ ist in Betracht zu ziehen, daß bei jedem gegebenen Anfangszustande, der sich selbst überlassen wird, die Kräfte mit der Zeit abnehmen und daß nach unendlicher Zeit alle elektromagnetischen Zustände im Felde erloschen sein müssen.

Es muß also für

$$t = \infty, \quad \gamma = 0,$$

daher für

$$t = \infty \quad e^{ipt} = 0$$

werden. Demgemäß werden

$$P_{t=\infty} = f_1(u, v)$$
$$Q_{t=\infty} = f_2(u, v)$$

und daher sind wieder nach der zweiten Bedingung

$$f_1(u, v) = f_2(u, v) = 0$$

zu setzen.

Wir stellen nunmehr die sechs für das elektromagnetische Feld charakteristischen Größen zusammen. Dieselben sind gegeben im Leiter durch:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= A e^{ipt} U_{S_m}(\lambda_0 c u) \Theta_m^m(\cos v) \\
P_0 &= \frac{A \sigma e^{ipt} U_{S_m}(\lambda_0 c u)}{4\pi c \sin v \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial v} [\sin v\, \Theta_m^m(\cos v)] \\
Q_0 &= - \frac{A \sigma e^{ipt} \Theta_m^m(\cos v)}{4\pi c \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial u} [\sqrt{u^2 - 1}\, U_{S_m}(\lambda_0 c u)],
\end{aligned}\right\} 30_0)$$

im Dielektrikum durch:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= B e^{ipt} U_{E_m^-}(\lambda c u) \Theta_m^m(\cos v) \\
P &= \frac{B e^{ipt} U_{E_m^-}(\lambda c u)}{Dip \sin v \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial v} [\sin v\, \Theta_m^m(\cos v)] \\
Q &= - \frac{B e^{ipt} \Theta_m^m(\cos v)}{Dipc \sqrt{u^2 - \cos^2 v}} \frac{\partial}{\partial u} [\sqrt{u^2 - 1}\, U_{E_m^-}(\lambda c u)].
\end{aligned}\right\} 30)$$

Dabei ist durchaus für $m = 1$ zu setzen, ein Umstand, der bewirkt, daß z. B. die Θ nach zonalen Kugelfunktionen fortschreiten.

Es ist nun in Betracht zu ziehen, daß längs der Berandungsfläche, in diesem Falle der Grenzfläche zwischen Leiter und Dielektrikum, die Lösungen kontinuierlich ineinander übergehen müssen. Diese Bedingung erheischt Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen und Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Kraft an der Oberfläche des Erregers. Für das dem Parameter u_0 zugehörige Ellipsoid mit der großen Halbachse a als Erregeroberfläche wird daher

$$\gamma_{0\,u=u_0} = \gamma_{u=u_0}$$

$$Q_{0\,u=u_0} = Q_{u=u_0}.$$

Substituieren wir in diesen beiden Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte die Werte aus 30_0) und 30) und bilden sodann zur Elimination der beiden willkürlichen Konstanten A und B den Quotienten dieser, so ergibt sich die wichtige Gleichung:

$$\frac{\sigma D i p}{4\pi} \frac{\frac{d}{d u_0}\left[\sqrt{u_0^2-1}\, U_{S_m}(\lambda_0 c u_0)\right]}{U_{S_m}(\lambda_0 c u_0)} = \frac{\frac{d}{d u_0}\left[\sqrt{u_0^2-1}\, U_{E_{\bar{m}}}(\lambda c u_0)\right]}{U_{E_{\bar{m}}}(\lambda c u_0)} . \tag{31}$$

Die Wurzeln λ dieser Gleichung sind die ausgezeichneten Parameterwerte, die über den physikalischen Vorgang um den Erreger Aufklärung geben. Von besonderem Interesse sind die Vorgänge um einen unendlich gut leitenden Erreger, wie wir ihn z. B. durch ein Ellipsoid aus Kupfer herstellen können. Die entstehenden Schwingungen zeichnen sich durch hohe Frequenz aus und ihre Wellenlänge wird von einer mit den Dimensionen des Erregers vergleichbaren Größenordnung.

Wir gehen nun daran, Gleichung 31) für den Grenzfall von Ellipsoiden mit unendlich kleinem spezifischen Widerstande zu spezialisieren. Berücksichtigen wir die Substitution $\eta = \lambda c u$, dann geht Gleichung 31) über in

$$\frac{\sigma D i p}{4\pi} \cdot \frac{\frac{d}{d\eta_0}\left[\sqrt{\eta_0^2-\lambda_0^2 c^2}\, U_{S_m}(\eta_0)\right]}{U_{S_m}(\eta_0)} = \frac{\frac{d}{d\eta}\left[\sqrt{\eta^2-\lambda^2 c^2}\, U_{E_{\bar{m}}}(\eta)\right]}{U_{E_{\bar{m}}}(\eta)} . \tag{32}$$

Nun ist $\eta_0 = \lambda_0 c u_0 = \lambda_0 a = a\sqrt{-\frac{4\pi\mu i p}{\sigma}}$ für sehr kleine σ sehr groß. Man wird also dem Idealfall unendlicher Leitungsfähigkeit des Erregers zunächst dadurch gerecht, daß man in Gleichung 32) im zweiten Faktor linker Hand zur Grenze für $\eta_0 = \infty$ übergeht.

Durch Substitution der Reihe für $U_{S_m}(\eta_0)$ von p 19) ergibt sich für diesen:

$$L = \lim_{\eta_0=\infty} \frac{\frac{d}{d\eta_0}\left[\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m+1}{2}}}{\eta_0^m}\left(\alpha_0 S_m(\eta_0) + \frac{2(m+1)}{2m+3}\alpha_1 S_{m+2}(\eta_0) + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 S_{m+4}(\eta_0) + \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 S_{m+6}(\eta_0) + \ldots\right)\right]}{\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta_0^m}\left(\alpha_0 S_m(\eta_0) + \frac{2(m+1)}{2m+3}\alpha_1 S_{m+2}(\eta_0) + \frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 S_{m+4}(\eta_0) + \frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 S_{m+6}(\eta_0) + \ldots\right)}$$

Bezeichnet man die in der runden Klammer stehende Reihe mit M, so geht der Ausdruck über in:

$$L = \lim_{\eta_0=\infty} \frac{\frac{d}{d\eta_0}\left[\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m+1}{2}}}{\eta_0^m} M\right]}{\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta_0^m} M} = \lim_{\eta=\infty} \frac{\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m+1}{2}}}{\eta_0^m}\frac{dM}{d\eta_0} + M\frac{d}{d\eta_0}\left[\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m+1}{2}}}{\eta_0^m}\right]}{\frac{(\eta_0^2-\lambda_0^2c^2)^{\frac{m}{2}}}{\eta_0^m} M}. \qquad 33)$$

Da $\lim\limits_{\eta_0=\infty} \frac{d}{d\eta_0}[S_m(\eta_0)] = S_m(\eta_0)_{\eta_0=\infty}$ ist, folgt unmittelbar:

$$\lim_{\eta_0=\infty} \frac{dM}{d\eta_0} = M_{\eta_0=\infty}. \qquad 34)$$

Führt man im letzten Ausdrucke 33) die angezeigten Operationen aus, so erhält man unter Berücksichtigung von 34), sowie der Substitutionen $\eta_0 = \lambda_0 a$ und $c = ea$, worin c die lineare, e die nunmehrige Exzentrizität des Ellipsoides bedeutet für

$$L = (1-e^2)\lambda_0 a + \frac{1+me^2}{(1-e)^{1/2}}.$$

L wird also für große $\eta_0 = \lambda_0 a$ von der Größenordnung $\lambda_0 a$ selbst.

Da $\eta_0 = \lambda_0 a = a\sqrt{-\frac{4\pi\mu i p}{\sigma}}$ ist, wird aus 32)

$$\frac{\frac{d}{d\eta}[\sqrt{\eta^2-\lambda^2 c^2}\, U_{E\bar{m}}(\eta)]}{U_{E\bar{m}}(\eta)}$$

von der Größenordnung $\frac{\lambda a D i p \sigma}{4\pi}$.

Bedeutet k die Dielektrizitätskonstante im elektrostatischen Maßsystem, V die Lichtgeschwindigkeit im Äther, so daß $D = \frac{k}{V^2}$, so wird

$$\frac{\lambda a D i p \sigma}{4\pi} = \frac{k}{4\pi V^2}\sigma i p a \sqrt{-\frac{4\pi\mu i p}{\sigma}}. \qquad 35)$$

Da die Wellenlänge der elektromagnetischen Schwingungen von der Größenordnung der Dimensionen des Erregers und daher die Größe p von der Größenordnung $\frac{V}{a}$ ist, wird die Größenordnung vom Ausdruck 35) analog dem Falle des kugelförmigen Erregers

$$\sqrt{\frac{\sigma}{aV}},$$

eine Größe, die für unendlich gut leitende Körper sich der Grenze 0 nähert, da σ unendlich klein wird.

Es wird daher für den metallischen Erreger

$$\frac{\frac{d}{d\eta}[\sqrt{\eta^2-\lambda^2 c^2}\, U_{E\bar{m}}(\eta)]}{U_{E\bar{m}}(\eta)} = 0$$

oder, da der Nenner endlich bleibt,

$$\frac{d}{d\eta}\left[\sqrt{\eta^2-\lambda^2c^2}\,U_{E_m^-}(\eta)\right]=0. \qquad 36)$$

Dies Resultat ist physikalisch mit der Tatsache identisch, daß der Vektor der elektrischen Kraft bei elektrischen Schwingungen auf dem Metalle senkrecht steht, demgemäß die Tangentialkomponente der elektrischen Kraft an der Oberfläche des Erregers verschwindet. Man erhielte diese für Eigentöne und Dämpfung des ellipsoidischen Erregers charakteristische Gleichung 36) daher auch direkt aus der Gleichung 30:

$$Q=0.$$

Berechnung von Schwingungszahl und Dämpfung des metallischen Erregers.

Man setze aus 26) für $U_{E_m^-}$ in die Gleichung

$$\frac{d}{d\eta}\left[\sqrt{\eta^2-\lambda^2c^2}\,U_{E_m^-}(\eta)\right]$$

seinen Wert, führe dann die angezeigten Differentiationen aus, ersetze alle Differentialquotienten durch die bezüglichen Werte vermöge der Rekursionen

$$\frac{dE_{m+\nu}^-}{d\eta}=E_{m+\nu+1}^-+\frac{m+\nu}{\eta}E_{m+\nu}^-,$$

ferner η durch λa und λc durch λae und multipliziere schließlich die so erhaltenen Reihen, deren Summe verschwindet, mit dem von Null verschiedenen Faktor

$$(1-e^2)^{-\frac{m+1}{2}}.$$

Wir begnügen uns im folgenden, das Resultat dieser Rechnungen anzuführen.

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1+me^2)(1-e^2)^m\Big[\alpha_0 E_m^-(\lambda a)+\frac{2(m+1)}{(2m+3)}\alpha_1 E_{m+2}^-(\lambda a)+\frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 E_{m+4}^-(\lambda a)+\\
&\qquad+\frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 E_{m+6}^-(\lambda a)+\dots\Big]+\\
&+\lambda a(1-e^2)^{m+1}\Big[\alpha_0 E_{m+1}^-(\lambda a)+\frac{2(m+1)}{(2m+3)}\alpha_1 E_{m+3}^-(\lambda a)+\frac{2^2(m+1)(m+2)}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 E_{m+5}^-(\lambda a)+\\
&\qquad+\frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 E_{m+7}^-(\lambda a)+\dots\Big]+\\
&+(1-e^2)^{m+1}\Big[\alpha_0 m E_m^-(\lambda a)+\frac{2(m+1)(m+2)}{(2m+3)}\alpha_1 E_{m+2}^-(\lambda a)+\frac{2^2(m+1)(m+2)(m+4)}{(2m+5)(2m+7)}\alpha_2 E_{m+4}^-(\lambda a)+\\
&\qquad+\frac{2^3(m+1)(m+2)(m+3)(m+6)}{(2m+7)(2m+9)(2m+11)}\alpha_3 E_{m+6}^-(\lambda a)+\dots\Big]=0.
\end{aligned}
\right\} \quad 37)
$$

In Gleichung 37) ist $m = 1$ zu setzen. Man fasse in derselben die Glieder auf nachfolgende Weise zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
&2\alpha_0 E_1^-(\lambda a)+\alpha_0\lambda a(1-e^2)E_2^-(\lambda a)+2\cdot\frac{4}{5}\alpha_1(2-e^2)E_3^-(\lambda a)+\frac{4}{5}\alpha_1\lambda a(1-e^2)E_4^-(\lambda a)+\\
&\qquad+2\,.\,\frac{8}{21}\alpha_2(3-2e^2)E_5^-(\lambda a)+\frac{8}{21}\alpha_2\lambda\alpha(1-e^2)E_6^-(\lambda a)+\\
&\qquad+\,.\,2\frac{64}{429}(4-3e^2)\alpha_3 E_7^-(\lambda a)+\frac{64}{429}\alpha_3\lambda a(1-e^2)E_8^-(\lambda a)+\ldots=0.
\end{aligned}\right\}\quad 38)$$

Es erübrigt noch, das System der Rekursionen der α anzugeben. Man setze hiezu im System 29) $m=1$ und $n=1+2r$, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}&=\frac{1}{2\,(4r+7)}\lambda^2e^2a^2-\frac{1\cdot 3}{(4r+1)(4r+5)^3(4r+9)}\lambda^4e^4a^4+\ldots\\
\frac{\alpha_{r+2}}{\alpha_r}&=\frac{1}{8\,(4r+5)(4r+7)}\lambda^4e^4a^4-\frac{1\cdot 3}{2\,(4r+1)\,(4r+5)^3\,(4r+7)\,(4r+13)}\lambda^6e^6a^6+\ldots\\
\frac{\alpha_{r+3}}{\alpha_r}&=\frac{1}{48\,(4r+5)\,(4r+7)\,(4r+9)}\lambda^6e^6a^6+\ldots\\
\frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}&=-\frac{(4r^2+4r)\,(4r^2-1)}{(4r+3)\,(4r+1)^3\,(4r-1)}\left[\frac{1}{2}\lambda^2e^2a^2-\frac{3}{(4r-3)\,(4r+1)\,(4r+5)}\lambda^4e^4a^4+\ldots\right]\\
\frac{\alpha_{r-2}}{\alpha_r}&=\frac{(4r^2+4r)\,(4r^2-1)\,(4r^2-4r)\,(8r^2-8r+3)}{8\,(4r-5)\,(4r-3)^2\,(4r-1)^3\,(4r+1)^3\,(4r+3)^3}\left[\lambda^4e^4a^4-\frac{3\cdot 4}{(4r-7)\,(4r+1)^2\,(4r-1)}\lambda^6e^6a^6+\ldots\right]
\end{aligned}\right\}\quad 39)$$

$$\frac{\alpha_{r-3}}{\alpha_r} = -\frac{(4r^2+4r)(4r^2-1)(4r^2-4r)(4r^2-8r+3)(4r^2-12r+8)(4r^2-16r+15)}{48(4r-9)(4r-7)^2(4r-5)^2(4r-3)^3(4r-1)^3(4r+1)^3(4r+3)}\lambda^6 e^6 a^6 + \ldots \qquad 39)$$

Die Wurzeln λ der transzendenten Gleichung 38) geben Schwingungszahlen und Dämpfung der vom Erreger zur unendlich fernen Kugelfläche divergierenden Wellen für Schwingungen um die große Achse. Man erhält aus denselben für $r = 0$ und $\alpha_0 = 1$ den Grundton, für $r = 1, 2, 3 \ldots$ und α_1 respektive α_2, $\alpha_3 \ldots = 1$ die Reihe der geradzahligen Obertöne.

Für $e = 0$ wird das Ellipsoid zur Kugel. Gleichung 38) geht für diesen Grenzfall über in

$$\frac{d}{da}[a E^{-}_{2r+1}(\lambda a)] = 0,$$

deren Wurzeln λ nach J. J. Thomson, Rec. res., p. 365 für $r = 0$ den Grundton, für $r = 1, 2, 3 \ldots$ die Reihe der geradzahligen Obertöne der freien Eigenschwingungen der metallischen Kugel ergeben.

Für das Relationsellipsoid und hieraus durch $e = 0$ für die Kugel erhielte man vermöge der Integrale 26 p 22, sowie der hiezu noch zu berechnenden Rekursionen der β für $s = 0, 1, 2 \ldots$ die für die ungeradzahligen Obertöne charakteristischen Gleichungen.

Nunmehr gehen wir daran, die Wurzeln λ der transzendenten Gleichung 37) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke benützen wir das Reversionstheorem der Reihe und setzen

3*

$$\lambda a = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} X_{2\nu} e^{2\nu}. \qquad 40)$$

Die Koeffizienten $X_0, X_2 \ldots$ sind zu bestimmen. Hiezu entwickle man die Funktionen $E^-(X_0 + X_2 e^2 + X_4 e^4 \ldots)$ in Potenzreihen, die nach e^2 fortschreiten, substituiere diese sowie den Wert 40) für $\lambda\alpha$ in Gleichung 37) und ordne diese nach Potenzen von e^2. Da die Reihe für Ellipsoide verschiedener Exzentrizität gilt, kann sie nur dann verschwinden, wenn alle Koeffizienten der Potenzen von e^2 verschwinden. Durch Nullsetzen letzterer erhält man so viel Gleichungen, als man Koeffizienten X bestimmen will.

Zur Berechnung des Koeffizienten X_0 setzt man $e = 0$. Es wird $\lambda\alpha = X_0$.

X_0 sind die der Kugel entsprechenden Wurzeln.[1] Sie berechnen sich für den Grundton aus

$$\frac{d}{da}[aE_1^-(\lambda a)] = 0$$

oder

$$e^{-i\lambda a}\left[\frac{1}{(\lambda a)^2} + \frac{i}{\lambda a} - 1\right] = 0$$

$$\lambda a = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2},$$

für den ersten Oberton aus einer kubischen Gleichung mit einem Paar komplex konjugierter, für den zweiten Oberton aus einer Gleichung vierten Grades mit zwei Paaren komplex konjugierter Wurzeln. Also bereits bei der Kugel ist die Bestimmung der Wurzeln allgemein für den n-Oberton nicht mehr ausführbar. Wir müssen daher auch beim Ellipsoide verzichten, X_0 allgemein zu bestimmen und demgemäß das Reversionstheorem der transzendenten Gleichung allgemein anzusetzen. Doch gibt dasselbe für bestimmte r oder s für Ellipsoide Wurzeln, die sich an die Kugelwurzeln anschließen und nach Quadraten der numerischen Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ fortschreiten. Es möge dies im nachfolgenden für den Grundton gezeigt werden.

[1] J. J. Thomson, Rec. res., p. 371.

Berechnung von Wellenlänge und Dämpfung des Grundtones.

Man setze in

$$\left.\begin{aligned}2\alpha_0 E_1^-(\lambda a)+\alpha_0\lambda a(1-e^2)E_2^-(\lambda a)+2\cdot\frac{4}{5}\alpha_1(2-e^2)E_3^-(\lambda a)+\frac{4}{5}\alpha_1\lambda a(1-e_2)E_4^-(\lambda a)+\\+2\cdot\frac{8}{21}\alpha_2(3-2e^2)E_5^-(\lambda a)+\frac{8}{21}\alpha_2\lambda a(1-e^2)E_6^-(\lambda a)+\ldots=0.\end{aligned}\right\}\quad 38)$$

$r=0$ und

$$\begin{aligned}\alpha_0&=1\\ \alpha_1&=\frac{\lambda^2a^2e^2}{10}-\frac{\lambda^4a^4e^4}{375}+\frac{31}{5^3 7^2.10.11}\lambda^6a^6e^6+\ldots\\ \alpha_2&=\frac{\lambda^4a^4e^4}{280}-\frac{3}{2.5^3.7.13}\lambda^6a^6e^6+\ldots{}^{1}\\ &\vdots\end{aligned}\quad 42)$$

Für die Funktionen E^- gibt Thomson p. 365 eine Tabelle bis E_3^-. E_4^-, E_5^- und E_6^- erhält man aus ihnen durch Rekursion von *p.* 32. Es ist:

[1] Bei Niven, p. 142, letzte Zeile, bei α_2 im ersten Gliede ein Irrtum.

$$\left.\begin{aligned}
E_0^-(\eta) &= \frac{e^{-i\eta}}{\eta} \\
E_1^-(\eta) &= -\frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(i+\frac{1}{\eta}\right) \\
E_2^-(\eta) &= -\frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(1-\frac{3i}{\eta}-\frac{3}{\eta^2}\right) \\
E_3^-(\eta) &= \frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(i+\frac{6}{\eta}-\frac{15i}{\eta^2}-\frac{15}{\eta^3}\right) \\
E_4^-(\eta) &= \frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(1-\frac{10i}{\eta}-\frac{45}{\eta^2}+\frac{105i}{\eta^3}+\frac{105}{\eta^4}\right) \\
E_5^-(\eta) &= -\frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(i+\frac{15}{\eta}-\frac{105i}{\eta^2}-\frac{420}{\eta^3}+\frac{945i}{\eta^4}+\frac{945}{\eta^5}\right) \\
E_6^-(\eta) &= -\frac{e^{-i\eta}}{\eta}\left(1-\frac{21i}{\eta}-\frac{210}{\eta^2}+\frac{1260i}{\eta^3}+\frac{4725}{\eta^4}-\frac{10395i}{\eta^5}-\frac{10395}{\eta^6}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 42)$$

Nunmehr setzen wir das Reversionstheorem der Reihe 41) an. Es wird da, den divergierenden Wellen entsprechend, für X_0 von den Wurzeln $\frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ (siehe p. 35). Das positive Zeichen gilt für eine Entwicklung inklusive e^4:

$$\lambda a = \frac{i+\sqrt{3}}{2} + X_2 e^2 + X_4 e^4 + \dots$$

Die Resultate der nötigen numerischen Zwischenrechnungen sind:

$$\lambda^2 a^2 = \frac{i\sqrt{3}+1}{2} + (i+\sqrt{3}) X_2 e^2 + [X_2^2 + (i+\sqrt{3}) X_4] e^4 + \dots$$

$$\lambda^2 a^2 e^2 = \frac{i\sqrt{3}+1}{2} e^2 + (i+\sqrt{3}) X_2 e^4 + \dots \qquad \text{zu 42)}$$

$$\lambda^4 a^4 e^4 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2} e^4 + \dots$$

Man setze die Werte für $\lambda^2 a^2 e^2$ und $\lambda^4 a^4 e^4$ in die Potenzreihen 42) ein und erhält so α_0, α_1, α_2 bis inklusive e^4. α_3 ist bereits von der Ordnung e^6. Da $E_7^-(\lambda\alpha)$ in 41) mit α_3 multipliziert erscheint, genügt es für die Näherung bis e^4, die Funktionen E_1^- bis E_6^- in Potenzreihen zu entwickeln. Es folgen die numerischen Resultate für diese. Zur Kürzung setzen wir den allen gemeinsamen Faktor

$$\frac{e^{-\frac{i(i+\sqrt{3})}{2}}}{\frac{i+\sqrt{3}}{2}} = K$$

$$E_1^- = -K\left[\frac{i+\sqrt{3}}{2} - X_2 e^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-5i}{4} X_2^2 - X_4\right) e^4 + \dots\right]$$

$$E_2^- = -K\left[-2 + \frac{5\sqrt{3}-7i}{2} X_2 e^2 + \right. \qquad 43)$$
$$\left. + \left\{(6i\sqrt{3}-4) X_2^2 + \frac{5\sqrt{3}-7i}{2} X_4\right\} e^4 + \dots\right]$$

$$E_3^- = +K\left[\frac{-9\sqrt{3}+11i}{2} + (14-20i\sqrt{3}) X_2 e^2 + \right.$$
$$\left. + (14-20i\sqrt{3}) X_4 e^4 + \dots\right]$$

$$E_4^- = +K[26-35i\sqrt{3}+(322i+27\sqrt{3})X_2e^2+ \\ +(322i+27\sqrt{3})X_4e^4+\ldots] \quad 43)$$

$$E_5^- = -K[-584i-45\sqrt{3}+\ldots]$$

$$E_6^- = -K\left[-\frac{7961+5859i\sqrt{3}}{2}+\ldots\right].$$

Setzt man die Resultate 42) und 43 in 38) ein, ordnet diese Gleichung nach Potenzen von e^2, so erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten von e^2 und e^4 zwei Gleichungen zur Bestimmung von X_2 und X_4 und somit

$$\lambda a = \frac{i+\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{15}\sqrt{3}\,e^2+\frac{6797\sqrt{3}-3339i}{110250}e^4+\ldots \quad 44)$$

als Reversionstheorem für den Grundton.

Es ist aus

$$p = \frac{V}{\sqrt{\mu.k}}\lambda.$$

Der imaginäre Teil von ip gibt die Schwingungsdauer, der reelle die Dämpfung. Es wird

$$p = \frac{V}{a\sqrt{\mu k}}\left[\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{15}e^2+\frac{6797}{110250}e^4+\ldots\right)+ \\ +i\left(\frac{1}{2}-\frac{3339}{110250}e^4+\ldots\right)\right]$$

Die Schwingungsdauer des Grundtones τ_1 folgt aus

$$\frac{2\pi}{\tau_1} = \frac{V}{a\sqrt{\mu k}}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{15}e^2+\frac{6797}{110250}e^4+\ldots\right),$$

somit

$$\tau_1 = \frac{2\pi a\sqrt{\mu k}}{V\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{15}e^2+\frac{6797}{110250}e^4+\ldots\right)}. \quad 45)$$

Die Zeit, nach welcher die Amplitude auf den $\frac{1}{e}$ Teil ihres Anfangswertes sinkt, wird

$$\vartheta = \frac{a\sqrt{\mu k}}{V\left(\frac{1}{2} - \frac{3339}{110250}e^4 \ldots\right)} \tag{46}$$

Aus τ_1 ergibt sich als Wellenlänge der Grundschwingung im freien Raume für ein metallisches Rotationsellipsoid mit der großen Halbachse a und der numerischen Exzentrizität $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ für Schwingungen entlang der großen Achse:

$$\Lambda = \frac{2\pi a}{\sqrt{3}\,(0 \cdot 5 + 0 \cdot 133\, e^2 + 0 \cdot 061\, e^4 + \ldots)},$$

ein Wert hinreichender Näherung für Ellipsoide, die von der Kugel nicht zu stark abweichen.

Eine eventuelle experimentelle Prüfung hoffe ich in Zukunft mitteilen zu können.

Zur Theorie der Exner-Pollak'schen Versuche

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

In der Abhandlung: »Beitrag zur Resonanztheorie der Tonempfindungen« (Zeitschr. für Psych. und Phys. der Sinnesorgane, Bd. 32, p. 304 bis 332, 1903) haben die Herren Sigm. Exner und Jos. Pollak eine Reihe von Versuchen veröffentlicht, welche den Zweck hatten, Gehörsempfindungen zu studieren, die ein Ton erzeugt, dessen Schwingungszustand periodisch derart verändert wird, daß in gleichen Zeitabständen eine plötzliche Umkehr der Bewegungsrichtung hergestellt wird. Es wurde dies auf verschiedene Art erreicht: Erstens dadurch, daß ein Ton von einem Telephon aufgenommen, zu einem zweiten fortgeleitet und von diesem abgehört wurde; die Leitung selbst enthielt einen Kommutator, so daß bei jeder Umschaltung eine Umkehr der Bewegungsrichtung im Empfangstelephon bewirkt wurde, was in gleichen Zeitabschnitten geschah. Zweitens erhielt man diesen Wechsel auf folgende Art: Zwei Resonatoren, die mit ihren Schwingungsdauern mit jener einer Stimmgabel übereinstimmten, wurden in deren Nähe derart angebracht, daß der eine seine Öffnung der äußeren Fläche der Stimmgabelzinke zukehrte, während der andere den Ton dem Raume zwischen den beiden Zinken entnahm. Diese beiden Töne besitzen eine Phasenverschiebung um eine halbe Schwingungsdauer. Die Töne der Resonatoren wurden durch gleich lange Schläuche einem Hahne zugeführt, der mit einem

dritten Schlauche verbunden war, welcher den Ton dem Ohre des Beobachters zuführte. Der Hahn funktionierte derart, daß durch kontinuierliches rasches Umdrehen abwechselnd die Töne der beiden Resonatoren dem Ohre zugeführt wurden. Es trat also auch hier bei jedem Hahnwechsel eine plötzliche Umkehr des Bewegungszustandes der schwingenden Luft ein.

Mit Benützung der geschilderten Vorrichtungen erzielt man bei langsamem Wechsel der Bewegungsrichtung den Eindruck von Schwebungen. Bei zunehmender Zahl sinkt die Tonstärke herab und schließlich verschwindet der Ton gänzlich und macht einem Geräusche Platz. Und zwar tritt dieser letztgenannte Fall schon bei einer Wechselzahl ein, die im Vergleiche zur Schwingungszahl des Tones stets als kleine Größe angesehen werden kann.

Zur Erklärung dieser Erscheinungen gehen wir, wie es die Herren S. Exner und J. Pollak ebenfalls tun, von der Mitschwingungstheorie der Gehörsempfindung aus. Wir nehmen also an, daß im Gehörsorgan ein elastischer Körper durch die ihn treffenden Schallwellen ins Schwingen gerät und dadurch die Gehörsempfindungen auslöst. Die Schwingungen dieses Körpers sollen so vor sich gehen, daß sie durch die Veränderung einer einzigen Koordinate beschrieben werden können, d. h. er soll nur einen bestimmten Eigenton besitzen. Wir können dann seine Bewegung mathematisch so darstellen, als hätten wir es mit der Bewegung eines Massenpunktes zu tun. Ist dessen Masse m, der von ihm zurückgelegte Weg von seiner Ruhelage aus gerechnet, s, so muß $m\frac{d^2s}{dt^2}$ gleich sein der Summe sämtlicher Kräfte, welche auf ihn wirken. Diese sind erstens die elastische Kraft, welche den Körper in seine Ruhelage zurückzuziehen trachtet, wir setzen sie proportional dem Weg, also $= -\alpha s$; zweitens der Widerstand des Mittels, in welchem sich der Körper bewegt. Diesen setzen wir proportional der Geschwindigkeit des Körpers, also: $-\beta\frac{ds}{dt}$. Drittens die Einwirkung der Schallwellen, wir setzen sie: $A\sin 2\pi nt$. Es ist also A die Amplitude und n die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft.

Um nun den Exner-Pollak'schen Versuchen gerecht zu werden, muß diese Amplitude eine plötzliche periodische Umkehr erfahren. Zu dem Zwecke schlagen wir folgendes Verfahren ein.

Die Reihe:

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

hat den Wert $\frac{\pi}{4}$ für $0 < x < \pi$; hingegen den Wert $\frac{-\pi}{4}$ für $\pi < x < 2\pi$; dann wiederum den Wert $\frac{+\pi}{4}$ für $2\pi < x < 3\pi$ u. s. w. Wir sehen demnach, daß x abwechselnd den Wert $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{-\pi}{4}$ annimmt, wenn wir es von 0 an wachsen lassen. Setzen wir $x = 2\pi m t$, so wird ebenfalls diese Reihe für $0 < 2\pi m t < \pi$ den Wert $\frac{\pi}{4}$ annehmen, d. h. es behält die unendliche Reihe ihren konstanten Wert von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2m}$. Nun ist aber $\frac{1}{m} = \tau$ die Schwingungsdauer des tiefsten Tones unserer Reihe, folglich tritt der gekennzeichnete Wechsel im Summenwert unserer Reihe nach Verlauf je einer halben Schwingungsdauer des tiefsten Tones ein.

Setzen wir:

$$\frac{A}{m} = B\left(\sin 2\pi m t + \frac{1}{3}\sin 6\pi m t + \frac{1}{5}\sin 10\pi m t + \ldots\right), \quad \ldots 1)$$

so besitzt tatsächlich A abwechselnd die Werte $\frac{4mB}{\pi}$ und $\frac{-4mB}{\pi}$. Wir haben somit folgende Gleichung zu lösen:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s - \beta\frac{ds}{dt} + A\sin 2\pi n t$$

oder:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2b\frac{ds}{dt} + a^2 s = \frac{A}{m}\sin 2\pi n t. \quad \ldots 2)$$

wobei:

$$\frac{\alpha}{m} = a^2, \quad \frac{\beta}{m} = 2b$$

gesetzt wurde. Das ergibt für die rechte Seite der Gleichung eine unendliche Reihe aus Gliedern von der Form:

$$B \sin 2\pi kmt \sin 2\pi nt,$$

wenn wir für k jede ungerade Zahl von 1 bis ∞ substituieren.

Ein jedes Glied rührt also von einem Ton her, dessen Amplitude eine Sinusfunktion ist. Nun können wir aber einen derartigen Ton uns ersetzen durch zwei Töne, indem ja:

$$\sin 2\pi mt \sin 2\pi nt =$$

$$= \frac{-1}{2} \cos 2\pi(n+m)t + \frac{1}{2} \cos 2\pi(n-m)t =$$

$$= \frac{-1}{2} \cos 2\pi n_1 t + \frac{1}{2} \cos 2\pi n_2 t,$$

wenn wir $n+m = n_1$ und $n-m = n_2$ setzen. Würden wir also nur das erste Glied unserer Reihe in Betracht ziehen, so würde unser Körper ins Mitschwingen geraten, indem gleichzeitig die zwei Töne mit den Schwingungszahlen n_1 und n_2 auf ihn einwirken. Beziehen wir dies auf die Gehörsempfindung, so heißt das nichts anderes, als daß wir gleichzeitig diese beiden Töne hören würden. Es ist das, wie auch in der Exner-Pollak'schen Arbeit zitiert[1] wird, eine bereits seit langem von Radau, Stefan und anderen beobachtete und in der von uns angegebenen Weise erklärte Tatsache.

Wollen wir jedoch etwas darüber aussagen, welcher Art die Bewegung des mitschwingenden Körpers ist, so genügt es, von dem Satz auszugehen, daß die Bewegungen, welche verschiedene Kräfte hervorrufen, sich einfach superponieren. Nachdem es nun in einfacher Weise gelingt, die Gleichung 2) zu lösen, wenn die Amplitude $C = \frac{A}{m}$ konstant ist, so sind

[1] L. c. p. 309 und 312.

wir auch in der Lage, die Aufgabe zu lösen, wenn C eine periodische Funktion der Zeit ist. Da nämlich in unserer unendlichen Reihe jedes einzelne Glied durch zwei Töne ersetzt werden kann, so wird die Lösung für unsere Aufgabe ebenfalls eine unendliche Reihe sein. Die Schwierigkeit, welche sich uns bietet, liegt darin, die erhaltene Lösung zu diskutieren.

Wir wollen vorerst annehmen, daß in unserer ursprünglichen Differentialgleichung nur das erste Glied der unendlichen Reihe vorhanden sei. Wir können demnach schreiben:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2b\frac{ds}{dt} + a^2 s = B \sin 2\pi mt \sin 2\pi nt =$$

$$= \frac{-B}{2}\cos 2\pi(n+m)t + \frac{B}{2}\cos 2\pi(n-m)t =$$

$$= \frac{-B}{2}\cos 2\pi n_1 t + \frac{B}{2}\cos 2\pi n_2 t.$$

Wäre nur ein Ton vorhanden, z. B. der erste, der zum Mitschwingen anregt, so ist eine Lösung für die Gleichung:

$$s = B_1 \cos(2\pi n_1 t - \varepsilon_1)$$

und wir bekommen für die Amplitude B_1 und die Phasenverschiebung ε_1 die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{-4\pi n_1 b}{-4\pi^2 n_1^2 + a^2}. \quad \ldots 3)$$

$$B_1 = \frac{-B}{2}\,\frac{\sin \varepsilon_1}{4\pi n_1 b}. \quad \ldots 4)$$

Für das Vorhandensein des zweiten Tones allein bekommen wir analog:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{-4\pi n_2 b}{4\pi^2 n_2^2 + a^2},$$

$$B_2 = \frac{-B}{2}\,\frac{\sin \varepsilon_2}{4\pi n_2 b}.$$

Es wird also unser Körper tatsächlich die Schwingungen beider Körper mitmachen; die Intensität jedoch, mit welcher dies geschieht, ist für jeden Ton verschieden und hängt in erster Linie von der Größe a ab, durch welche die Zahl der Eigenschwingungen gegeben ist, welche der Körper macht, wenn er, ohne sich in einem widerstehenden Mittel zu befinden, lediglich den elastischen Kräften überlassen wird. Nennen wir diese Schwingungszahl n', so besteht ja bekanntlich die Beziehung $a = 2\pi n'$.

Dieses Mitschwingen tritt am stärksten auf, wenn der Eigenton und die einwirkende Kraft dieselbe Periode haben, in unserem Falle wird demnach sowohl für den Ton von der Schwingungszahl n_1 als auch für jenen n_2 im Gehörsorgan ein Mitschwingen jener Teile stattfinden, welche diesen Eigenton besitzen; aber es wird dieses Mitschwingen doch nicht in der Weise vor sich gehen, als wenn nur ein Ton vorhanden wäre, da auch der zweite Ton, nur mit geringerer Amplitude, jene Teilchen ins Mitschwingen bringt, deren Eigenton die Periode des ersten Tones besitzen. Dies bewirkt eine Störung der reinen Tonwahrnehmung, was sich, solange die Töne n_1 und n_2 noch nahe aneinander liegen, durch Schwebungen kundgibt.

Der Fall, den wir hier diskutiert haben, entspricht der Gehörswahrnehmung, die der Ton einer rotierenden Stimmgabel hervorbringt, obwohl auch hier noch andere Störungen eintreten, indem in der Umgebung der Gabel die Luft in eine rotierende Bewegung versetzt wird, so daß sich die Tonwellen sicherlich nicht in der Art entwickeln können, wie es dem von uns betrachteten Fall entsprechen würde. Habe ich doch in der Abhandlung: »Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft«[1] gezeigt, daß selbst bei sehr geringem Geschwindigkeitsgefälle der Luft schon beträchtliche Schallablenkungen auftreten können.

Reiner dürfte der gerechnete Fall realisiert sein in dem Experimente von Radau und Stefan, welches darin besteht, daß eine tönende Scheibe in ihrer eigenen Ebene rotiert,

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, p. 1040 ff. 1896.

während man mit einem Gehörschlauch den Ton abhört, welchen die schwingenden Sektoren der Scheibe geben. Wie schon früher bemerkt, wurde in diesem Fall auch das wahrgenommen, was wir aus unserer Diskussion gefolgert haben.

Wollen wir jedoch die Exner-Pollak'schen Versuche erläutern, so müssen wir den Einfluß sämtlicher Glieder unserer unendlichen Reihe in Betracht ziehen. Das, was also unser Ohr hört, sind unendlich viele Töne, die sich natürlich wieder gegenseitig in der mannigfaltigsten Art stören werden. Die Beobachtung belehrt uns auch, daß wir nicht eine Trennung des Tones n in einen höheren und einen tieferen wahrnehmen, sondern daß der ursprüngliche Ton, ohne seine Höhe zu ändern, sich mit wachsender Periodenzahl der Amplitude immer mehr abschwächt und schließlich in ein bloßes Geräusch übergeht. Dabei tritt diese Erscheinung schon bei einer sehr kleinen Zahl der Amplitudenwechsel ein, so daß eine starke Veränderung in der Tonhöhe gar nicht entstehen könnte. So beträgt z. B. die Zahl der ganzen Perioden für einen Ton von 240 Schwingungen durchschnittlich 10·37, bei welchen der Ton nicht mehr wahrgenommen wurde, also hätten wir es mit zwei Tönen zu tun, deren Schwingungszahlen sich nur um 20 unterscheiden. In unserem Falle muß der Grundton unserer unendlichen Reihe durch die höheren Glieder sehr gestört werden, weil mit wachsendem m die Töne, welche von den einzelnen Gliedern hervorgebracht werden, zu einander immer unharmonischer werden; verfolgen wir nämlich durch die Reihe jene Töne, welche die einzelnen Glieder erzeugen, so würde das erste Glied zwei Töne von den Schwingungszahlen $n+m$ und $n-m$ hervorbringen, das zweite von den Schwingungszahlen $n+3m$ und $n-3m$, das dritte $n+5m$ und $n-5m$ u. s. w. Derartig nicht harmonische Töne können aber in ihrer unendlich großen Anzahl nicht eine Verstärkung des ersten Tones hervorbringen, sondern nur bewirken, daß der Gesamteindruck mit wachsendem n sich dem eines Geräusches immer mehr nähert. Wir können also auch nicht erwarten, daß gerade jene Teile des Gehörorganes, welche Eigenschwingungen besitzen, die den beiden

Tönen des ersten Gliedes unserer unendlichen Reihe entsprechen, in besonderes Mitschwingen geraten.

Wie schon erwähnt, machen auch jene Körper, deren Eigenschwingungen der Schwingungszahl des einwirkenden Tones nicht entsprechen, dennoch die Tonschwingungen mit, nur mit geringerer Amplitude. Nach Gleichung 3) und 4) hängt die Amplitude des mitschwingenden Körpers hauptsächlich von der Phase ε_1 ab. Bleibt diese demnach klein, so können wir den Sinus mit der Tangente vertauschen, also:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{4\pi n_1 b}{4\pi^2 n_1^2 - a^2}$$

setzen. Dies in Gleichung 4) substituiert, ergibt dann:

$$B_1 = -\frac{B}{2}\frac{1}{4\pi^2 n_1^2 - a^2}.$$

Wie früher erwähnt, ist $a = 2\pi n'$, wenn n' die Schwingungszahl des Eigentones des mitschwingenden Körpers ist. Bedenken wir nun, daß der Ton, von welchem die auf den mitschwingenden Körper einwirkende Kraft ausgeht, wie ursprünglich angenommen, die Schwingungszahl n besitzt und daß bei den Exner-Pollak'schen Versuchen diesem Ton ein immer rascher werdender Amplitudenwechsel erteilt wird, so wird bei sehr geringer Wechselzahl in unserem Gehörorgan am stärksten jene Partie mitschwingen, deren Eigenton die Schwingungszahl n besitzt. Wird aber der Amplitudenwechsel beschleunigt, so daß jenes Glied der unendlichen Reihe, welches uns den Amplitudenwechsel darstellt, in Gemeinschaft mit der Schwingungszahl des einwirkenden Tones selbst zwei neue Töne ergibt, deren Schwingungszahlen symmetrisch zum einwirkenden Tone liegen, so werden jene Partien des Gehörorganes, deren Eigenschwingungszahl n ist, mit umso geringerer Amplitude mitschwingen können, je weiter sich die beiden symmetrisch gelegenen Töne von ihrer ursprünglichen Schwingungszahl entfernen. Haben sich diese beiden Töne nun so weit entfernt, daß wir für die Amplitude des

ersten die zuletzt entwickelte Formel anwenden können, so folgt in gleicher Weise für den zweiten Partialton:

$$B_2 = \frac{B}{2} \frac{1}{4\pi^2 n_2^2 - a^2}.$$

Beachten wir, daß bei nicht zu großen Unterschieden von n_1 und n_2 nicht beide Töne gleichzeitig wahrgenommen werden, sondern ein Ton von mittlerer Schwingungszahl, welcher Schwebungen macht, so werden wir auch in unserem Falle weder n_1 noch n_2 hören, sondern den Ton n, welcher in der Sekunde $2m$ Schwebungen macht und dessen Amplitude sich zusammensetzt aus den Amplituden B_1 und B_2. Führen wir jetzt wieder $n_1 = n+m$, $n_2 = n-m$ und $a = 2\pi n$ ein, so erhalten wir:

$$B_1 = -\frac{B}{2} \frac{1}{4\pi^2 m(2n+m)},$$

$$B_2 = -\frac{B}{2} \frac{1}{4\pi^2 m(2n-m)}.$$

Solange m gegen n klein ist — tatsächlich kommt praktisch nur dieser Fall in Betracht — können wir es gegen $2n$ vernachlässigen und man sieht ohneweiters, daß die Amplitude des mitschwingenden Körpers verkehrt proportional dem Amplitudenwechsel des einwirkenden Tones ist. Es muß somit die Stärke dieses Tones mit wachsender Amplitude sehr rasch abnehmen, was ja auch tatsächlich beobachtet worden ist, indem bei Tönen von mehreren hundert Schwingungen in der Regel die Tonempfindung schon verschwindet, wenn die Zahl der Amplitudenwechsel zehn überschritten hat.

Wir konnten uns hier auf die Diskussion des ersten Gliedes unserer unendlichen Reihe beschränken, weil sich für jedes weitere Glied dieselbe Erscheinung wiederholt, ja wir sehen vielmehr, daß der Einfluß der höheren Glieder auf die Tonempfindung viel rascher verschwinden muß als jener des ersten Gliedes, da die Zahlen der Amplitudenwechsel für diese

Einzeltöne sich verhalten wie die ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

Wir waren also in der Lage, die Erscheinungen, welche bei den Exner-Pollak'schen Versuchen auftreten, nicht nur qualitativ genügend theoretisch zu begründen, sondern auch quantitativ die Gesetzmäßigkeiten festzulegen, nach welchen die genannten Erscheinungen vor sich gehen.

Die Herren S. Exner und J. Pollak machten auch Versuche mit einer rotierenden Stimmgabel und konnten dabei deutlich eine Erhöhung des Tones mit wachsender Tourenzahl wahrnehmen. Nach Schätzung ihres musikalischen Beraters dürfte diese Steigerung höchstens eine kleine Terz betragen. Es wird dazu bemerkt: »Wenn diese Beobachtung nicht auf das Stefan'sche Phänomen allein zurückzuführen ist, so rührt es im anderen Fall offenbar von der Zentrifugalkraft her, welche die Zinken auseinandertreibt, so daß sie während der Rotation um eine andere Gleichgewichtslage schwingen als in der Ruhe und in dieser neuen Gleichgewichtslage eine innere Spannung besitzen, vergleichbar einer Saite, deren Spannung gesteigert ist.«

Ich möchte darauf hinweisen, daß infolge der Zentrifugalkraft der Stimmgabelzinken nicht eine Erhöhung, sondern eine Vertiefung des Tones eintreten muß, doch ist gewöhnlich diese Vertiefung so gering, daß sie auch für das geübteste Ohr nicht wahrnehmbar ist. Fassen wir das Schwingen der beiden Stimmgabelzinken der Einfachheit halber als ein geradliniges Hin- und Hergehen auf; geben wir einer Stimmgabelzinke die Masse m und sei der entsprechende mittlere Weg der einzelnen Punkte der Zinke s und wirkt als Kraft nur die Elastizität und Zentrifugalkraft, so können wir die Gleichung ansetzen:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\alpha s + (r_0 + s) m \gamma^2. \qquad \ldots 5)$$

Dazu ist noch zu bemerken, daß r_0 der mittlere Abstand der Punkte der Stimmgabelzinken von der gemeinschaftlichen

Symmetrieebene ist, während γ die Winkelgeschwindigkeit der Stimmgabel bedeutet. Die Fliehkraft einer Zinke ist:

$$F = \frac{m v_2}{r} = m r \gamma^2,$$

da die Geschwindigkeit $v = r\gamma$; r bedeutet dabei den Krümmungsradius der Bahn. Dieser ist in unserem Fall aber immer gleich dem mittleren Abstande der Zinken von ihrer Symmetrieebene in der Ruhelage, vermehrt um den jeweiligen Weg s, welchen die Zinken von ihrer Ruhelage aus beim Schwingen zurücklegen. Gleichung 5) können wir noch umformen in:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -(a^2 - \gamma^2)s + r_0 \gamma^2,$$

wenn wir $\frac{\alpha}{m} = a^2$ setzen. Führen wir nun

$$s = c + \sigma$$

ein, so ergibt sich:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -(a^2 - \gamma^2)c + r_0 \gamma^2 - (a^2 - \gamma^2)\sigma.$$

Wählen wir nun c so, daß

$$c = \frac{r_0 \gamma^2}{a^2 - \gamma^2}$$

wird, so erhalten wir schließlich:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -(a^2 - \gamma^2)\sigma.$$

Das ist aber die Gleichung einer schwingenden Bewegung von der Schwingungszahl n', wenn wir

$$2\pi n' = \sqrt{a^2 - \gamma^2} = 2\pi n \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 n^2}} = 2\pi n \left(1 - \frac{\gamma^2}{8\pi^2 n^2}\right)$$

setzen, wobei das letzte Glied der Gleichung nur dann erlaubt ist, wenn $\frac{\gamma^2}{4\pi^2 n^2}$ gegen 1 eine kleine Größe bedeutet. Es ist

also die Schwingungszahl $n' = n\left(1 - \frac{\gamma^2}{8\pi^2 n^2}\right)$, was einer Vertiefung des Tones n mit wachsender Winkelgeschwindigkeit γ entspricht.

Um uns eine Vorstellung vom Einflusse der Rotation auf die Erniedrigung der Schwingungszahl zu machen, wollen wir annehmen, wir hätten eine Stimmgabel, die in der Sekunde 100 Schwingungen und 10 Umdrehungen macht; dann ist $\gamma = 20\pi$, also $\gamma^2 = 400\pi^2$; $n^2 = 10000$; folglich:

$$\frac{\gamma^2}{8\pi^2 n^2} = \frac{1}{200},$$

d. h. die Vertiefung des Tones würde in diesem Fall eine halbe Schwingung betragen, was in Übereinstimmung mit der von uns oben gemachten Aussage auch ein geübtes musikalisches Ohr noch nicht wahrnehmen kann.

Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie

(zweite Mitteilung)

von

Dr. **R. Daublebsky v. Sterneck,**

a. o. Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1904.)

In einer im CXI. Bande dieser Sitzungsberichte veröffentlichten Arbeit habe ich für die speziellen Fälle, in denen der zu Grunde gelegte Modul M eine Primzahl, eine Primzahlpotenz oder das Produkt zweier verschiedener Primzahlen ist, die beiden folgenden Probleme behandelt:

1. Es ist die Anzahl der aus i beliebigen, mod. M inkongruenten Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu bestimmen, welche der Zahl n (mod. M) kongruent sind.

2. Es ist die Anzahl der der Zahl n (mod. M) kongruenten, aus i inkongruenten, aber überdies durch den Modul M unteilbaren Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu finden.

In den folgenden Zeilen sollen nun die analogen Untersuchungen für einen beliebig zusammengesetzten Modul durchgeführt werden.

Der in der ersten Mitteilung zur Lösung der beiden Aufgaben eingeschlagene Weg gestaltete sich schon in den dort behandelten Spezialfällen so kompliziert, daß es ziemlich aussichtslos schien, nach derselben Methode zu der gesuchten Verallgemeinerung der Resultate zu gelangen; ich schlug daher einen anderen Weg ein, indem ich mich bemühte, zunächst die in den einzelnen speziellen Fällen erhaltenen Resultate durch

eine einzige Formel darzustellen und dann zu untersuchen, ob diese Formel für jeden beliebigen Modul gültig bleibt, d. h. ob sie den betreffenden allgemeinen Rekursionsformeln genügt. Diesem Vorgange entsprechend sollen zunächst die erhaltenen Resultate mitgeteilt und diese dann sukzessive mit Hilfe der in der ersten Mitteilung abgeleiteten Rekursionsformeln verifiziert werden.

I. Die Resultate.

Es bezeichne wieder $(n)_i$, beziehungsweise $(n)_i^{(0)}$ die Lösungen unserer beiden Probleme, d. h. die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$n \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_i \pmod{M}$$

unter den Voraussetzungen

$$0 \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_i < M,$$

beziehungsweise

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < M;$$

es bezeichnet also wieder $(n)_i$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch i inkongruente Elemente (mod. M), unter denen sich auch die Null vorfinden darf, und $(n)_i^{(0)}$ die analoge Anzahl bei Ausschluß des Elementes Null. Unsere Aufgabe besteht in der Aufstellung allgemeiner Formeln für $(n)_i$ und $(n)_i^{(0)}$.

Es werde unter $f(n, d)$ eine zahlentheoretische Funktion verstanden, die folgendermaßen definiert ist:

$$f(n, d) = 0,$$

wenn irgend eine Primzahl in d in einer um mindestens zwei Einheiten höheren Potenz aufgeht als in n;

$$f(n, d) = (-1)^j \frac{\varphi(d)}{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_j-1)},$$

(wo $\varphi(d)$ die Euler'sche Funktion ist), wenn die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_j$ in d in einer um eine Einheit höheren Potenz

aufgehen als in n, die übrigen in d aufgehenden Primzahlen aber in n mindestens in derselben Potenz wie in d;

$$f(n, d) = \varphi(d),$$

wenn keine Primzahl in d in einer höheren Potenz aufgeht als in n, somit n durch d teilbar ist.

Mit Hilfe dieser Funktion $f(n, d)$ kann man nun folgende, für jeden beliebigen Modul M gültige Formel für $(n)_i$ aufstellen:

$$(n)_i = \frac{(-1)^i}{M} \sum_d f(n, d)(-1)^{\frac{i}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}}. \qquad (A)$$

In dieser Summe hat d alle Teiler des Moduls M zu durchlaufen; ferner muß festgesetzt werden, daß ein Binomialkoeffizient, wenn die untere in ihm stehende Zahl nicht ganz ist, stets den Wert Null habe.

Auch für die Anzahl $(n)_i^{(0)}$ erhält man eine allgemein gültige Formel, die folgendermaßen lautet:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{M} \sum_d f(n, d)(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \binom{\frac{M}{d} - 1}{\left[\frac{i}{d}\right]}, \qquad (B)$$

wo wieder die Summe über alle Teiler von M zu erstrecken ist und unter $\left[\frac{i}{d}\right]$ in üblicher Weise die größte im Quotienten $\frac{i}{d}$ enthaltene ganze Zahl zu verstehen ist.

Die letztere Formel führt nach einer entsprechenden Summierung zum Analogon des Euler-Legendre'schen Satzes der gewöhnlichen additiven Zahlentheorie für das Gebiet der Kongruenzen. Bezeichnet man nämlich mit $\Delta(n)$ die Differenz der Darstellungsanzahlen der Zahl n durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl durch den Modul unteilbarer Summanden, so ergibt sich:

$$\Delta(n) = f(n, M). \qquad (C)$$

Die drei Formeln *(A)*, *(B)*, *(C)* enthalten, wie man sich leicht überzeugen kann, sämtliche in der ersten Mitteilung abgeleiteten Formeln als spezielle Fälle in sich.

II. Die Beweisführung.

Zum Beweise dieser Formeln verwenden wir die beiden Rekursionsformeln, denen, wie in der ersten Mitteilung gezeigt wurde, die Anzahlen $(n)_i$ und $(n)_i^{(0)}$ genügen müssen, nämlich:

$$i(n)_i = \sum_e (n-e)_{i-1} - \sum_e (n-2e)_{i-2} + \\ + \sum_e (n-3e)_{i-3} - \ldots + (-1)^{i-1} \sum_e (n-ie)_0, \quad (1)$$

wo in den Summen rechter Hand das e jedesmal ein vollständiges Restsystem (mod. M) zu durchlaufen hat; und

$$(n)_i^{(0)} = (n)_i - (n)_{i-1} + (n)_{i-2} - \ldots + (-1)^i (n)_0, \quad (2)$$

schließlich auch noch die für Binomialkoeffizienten gültige Formel:

$$\binom{k}{\lambda} - \binom{k}{\lambda-1} + \binom{k}{\lambda-2} - \ldots + (-1)^{\lambda-1}\binom{k}{1} + \\ + (-1)^{\lambda}\binom{k}{0} = \binom{k-1}{\lambda}. \quad (3)$$

1. Die Formel (1) gestattet, wenn die Werte $(n)_0$ für alle n bekannt sind, der Reihe nach die Werte $(n)_1, (n)_2, \ldots$ zu berechnen. Wenn also unsere Formel *(A)* einerseits die richtigen Werte für $(n)_0$ liefert und andrerseits dieser Rekursionsformel (1) genügt, so ist sie zweifellos richtig.

Wir wollen daher zunächst untersuchen, ob die Formel *(A)* für $i = 0$ die richtigen Werte liefert. Da nur die Zahl 0 (d. h. jede durch den Modul M teilbare Zahl) sich durch 0 Summanden additiv erzeugen läßt, so ist offenbar $(n)_0 = 1$, wenn $n \equiv 0$ (mod. M), in allen übrigen Fällen aber $(n)_0 = 0$.

Die Formel *(A)* liefert für $(n)_0$:

$$(n)_0 = \frac{1}{M} \sum_d f(n, d).$$

Ist n durch M, also auch durch jeden Teiler d von M teilbar, so ist $f(n, d) = \varphi(d)$, daher liefert unsere Formel für $(0)_0$ den Wert:

$$(0)_0 = \frac{1}{M} \sum_d \varphi(d) = 1.$$

Um einzusehen, daß die Formel für jeden anderen Wert von n das Resultat 0 liefert, beachten wir, daß für irgendwelche paarweise teilerfremde Zahlen $d', d'', d''', \ldots$, wie aus der Definition der Funktion $f(n, d)$ sofort einleuchtet, die Beziehung besteht:

$$f(n, d'd''d''' \ldots) = f(n, d') f(n, d'') f(n, d''') \ldots$$

Daraus folgt weiter, daß wenn wir M in der Form annehmen:

$$M = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

sich die fragliche $\sum_d f(n, d)$ in folgender Art schreiben läßt:

$$\sum_d f(n, d) = \sum_{\varkappa_1 = 0}^{\alpha_1} f(n, p_1^{\varkappa_1}) \cdot \sum_{\varkappa_2 = 0}^{\alpha_2} f(n, p_2^{\varkappa_2}) \ldots \sum_{\varkappa_r = 0}^{\alpha_r} f(n, p_r^{\varkappa_r}).$$

Wenn nun n nicht durch M teilbar ist, so muß mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_r$, etwa p_1, in n in einer niedrigeren Potenz aufgehen als in M; es sei dementsprechend n bloß durch $p_1^{\beta_1}$ teilbar, wo $\beta_1 < \alpha_1$ ist. Dann wird der erste der rechts stehenden Faktoren gleich Null; denn nach der Definition der Funktion f erhalten wir:

$$\sum_{\varkappa_1 = 1}^{\alpha_1} f(n, p_1^{\varkappa_1}) =$$

$$= f(n, 1) + f(n, p_1) + f(n, p_1^2) + \ldots + f(n, p_1^{\beta_1}) + f(n, p^{\beta_1+1}) + \ldots$$

$$= \varphi(1) + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \ldots + \varphi(p_1^{\beta_1}) - \frac{\varphi(p_1^{\beta_1+1})}{p_1 - 1} =$$

$$= p_1^{\beta_1} - \frac{p_1^{\beta_1}(p_1 - 1)}{p_1 - 1} = 0.$$

Es ist also dann $\sum_d f(n, d) = 0$, d. h. unsere Formel *(A)* liefert für $(n)_0$ auch in dem Falle, wo n nicht durch den Modul teilbar ist, den richtigen Wert.

2. Etwas komplizierter gestaltet sich der Nachweis, daß die Formel *(A)* auch der Rekursionsformel (1) genügt.

Wir denken uns die Formel (1) zunächst dadurch transformiert, daß wir sie von der Identität

$$M.(n)_i = \sum_e (n-0.e)_i$$

subtrahieren und dann auf der linken Seite statt $(n)_i$ den identischen Wert $\frac{1}{M}\sum_e (n-0.e)_i$ einführen, wodurch die Formel (1) folgende Form annimmt:

$$\frac{M-i}{M}\sum_e (n-0.e)_i = \sum_e (n-0.e)_i - \sum_e (n-1.e)_{i-1} + \\ + \sum_e (n-2.e)_{i-2} - \ldots + (-1)^i \sum_e (n-ie)_0. \quad (1')$$

Die aus *(A)* sich ergebenden Werte denken wir uns nun in irgend ein Glied der Rekursionsformel (1′) etwa in das Glied

$$(-1)^\lambda \sum_e (n-\lambda e)_{i-\lambda}$$

eingesetzt. Bedeutet nun d irgend einen Teiler von M, so wird in den betreffenden Binomialkoeffizienten $\frac{i-\lambda}{d}$ als untere Zahl zu stehen kommen. Es wird also nur dann ein von Null verschiedener Beitrag geliefert werden können, wenn $i-\lambda$ durch d teilbar, also

$$\lambda \equiv i \pmod{d}$$

ist; da ferner auf Grund der Definition der Funktion f immer

$$f(n, d) = f(n', d)$$

ist, sobald $n \equiv n'$ (mod. d) ist, so besteht unter der Annahme $\lambda \equiv i$ (mod. d) auch die Beziehung

$$f(n-\lambda e, d) = f(n-ie, d).$$

Wir erhalten also genau dasselbe Resultat, wenn wir die aus *(A)* sich ergebenden Werte statt in die einzelnen Glieder der Summe

$$(-1)^{\lambda} \sum_{e} (n-\lambda e)_{i-\lambda}$$

in diejenigen der Summe

$$(-1)^{\lambda} \sum_{e} (n-ie)_{i-\lambda}$$

einsetzen. Dies gilt für jeden einzelnen Wert des λ, auch für $\lambda = 0$.

Wir können daher die Prüfung der Formel *(A)* an folgender einfacheren Rekursionsformel vornehmen:

$$\frac{M-i}{M} \sum_{e} (n-ie)_i = \sum_{e} (n-ie)_i - \sum_{e} (n-ie)_{i-1} + \\ + \sum_{e} (n-ie)_{i-2} - \ldots + (-1)^i \sum_{e} (n-ie)_0; \quad (1'')$$

denn genügt *(A)* der Rekursionsformel (1''), so genügt sie auch der Rekursionsformel (1).

3. Es soll jetzt bewiesen werden, daß für jeden einzelnen Teiler d des Moduls M die Beziehung erfüllt ist:

$$\frac{M-i}{M}\left[\sum_{e} f(n-ie,d)\right](-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} = \left[\sum_{e} f(n-ie,d)\right](-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} + \\ + \left[\sum_{e} f(n-ie,d)\right](-1)^{\frac{i-1}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-1}{d}} + \left[\sum_{e} f(n-ie,d)\right](-1)^{\frac{i-2}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-2}{d}} + \ldots \\ + \left[\sum_{e} f(n-ie,d)\right](-1)^{\frac{i-i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{0}, \quad (1''')$$

woraus sich dann durch Multiplikation mit $\frac{(-1)^i}{M}$ und Summierung nach d sogleich ergibt, daß (A) der Rekursionsformel $(1'')$ genügt.

Um $(1''')$ zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle; erstens den Fall, daß d nicht in i aufgeht, zweitens den Fall, wo d in i aufgeht.

Erstens. Geht d nicht in i auf, so wollen wir beweisen, daß

$$\sum_e f(n-ie, d) = 0$$

ist, wodurch dann jedes Glied der Formel $(1''')$ für sich verschwindet. Zunächst sieht man ein, daß, wenn τ den größten gemeinsamen Teiler von i und d bezeichnet,

$$\sum_e f(n-ie, d) = \sum_e f(n-\tau e, d)$$

ist; denn ie und τe, also auch $n-ie$ und $n-\tau e$ durchlaufen dann mod. d dieselben Werte (wenn auch in anderer Reihenfolge), wenn e ein volles Restsystem mod. d oder auch mod. M durchläuft, was auf Grund einer früheren Bemerkung die Gleichheit der beiden Summen nach sich zieht.

τ ist ein Teiler von d, der kleiner als d ist (weil d nicht in i aufgeht). Es muß also eine oder mehrere Primzahlen geben, die in τ in niedrigerer Potenz aufgehen als in d.

a) Geht nun eine dieser letzteren Primzahlen in n in einer noch niedrigeren Potenz auf als in τ, so muß die betreffende Primzahl in $n-\tau e$ in einer um mindestens zwei Einheiten geringeren Potenz aufgehen als in d; es ist also dann die Funktion f unter allen Umständen gleich Null, somit die ganze fragliche Summe ebenfalls gleich Null.

b) Nehmen wir nunmehr an, daß alle Primzahlen, die in τ in geringerer Potenz aufgehen als in d, in n mindestens in derselben Potenz aufgehen wie in τ. Die Zahl d zerlegen wir dann in zwei Faktoren

$$d = d_1 d_2.$$

d_1 soll das Produkt aller jener Primzahlpotenzen bezeichnen, die auch in τ aufgehen; d_2 hingegen das Produkt der Potenzen jener Primzahlen, die in d öfter aufgehen als in τ. Da diese beiden Faktoren d_1 und d_2 zueinander teilerfremd sind, so ist jedenfalls

$$f(n-\tau e, d) = f(n-\tau e, d_1) \,.\, f(n-\tau e, d_2),$$

und da τ, also auch τe, durch d_1 teilbar ist, also

$$n-\tau e \equiv n \pmod{d_1}$$

ist, so ergibt sich weiter

$$f(n-\tau e, d) = f(n, d_1) \,.\, f(n-\tau e, d_2).$$

Summieren wir diese Formel nach e über ein volles Restsystem mod. M, so erhalten wir

$$\sum_e f(n-\tau e, d) = f(n, d_1) \,.\, \sum_e f(n-\tau e, d_2).$$

τ ist durch d_1 teilbar; es sei

$$\tau = d_1 \tau'.$$

$\tau e = d_1 \tau' e$ durchläuft dann mod. d_2 dieselben Werte wie $\tau' e$, wenn e ein vollständiges Restsystem mod. M (beziehungsweise $\frac{M}{d_2}$ vollständige Restsysteme mod. d_2) durchläuft, weil d_1 zu d_2 teilerfremd ist. Wir können daher auch schreiben:

$$\sum_e f(n-\tau e, d) = f(n, d_1) \sum_e f(n-\tau' e, d_2).$$

Die jetzt auf der rechten Seite stehende Summe ist jedenfalls gleich Null, wenn n nicht durch τ' teilbar ist; denn da τ' jeden Primfaktor des d_2 in einer mindestens um eine Einheit geringeren Potenz enthält, so würde, falls n irgend einen Primfaktor des τ' in einer noch geringeren Potenz enthielte als τ' selbst, die Zahl $n-\tau' e$ den betreffenden Primfaktor in

einer um mindestens zwei Einheiten geringeren Potenz enthalten als d_2, somit die Funktion $f(n-\tau' e, d_2)$ ihrer Definition nach verschwinden.

Es bleibt also nur mehr der Fall zu besprechen, wo n durch τ' teilbar ist; setzen wir

$$n = \tau'\nu,$$

so wird

$$n-\tau' e = \tau'(\nu-e).$$

$\nu-e$ durchläuft aber, wenn e ein volles Restsystem mod. M durchläuft, ebenfalls ein volles Restsystem und ist daher wieder durch e ersetzbar, so daß wir in diesem Falle schreiben können:

$$\sum_e f(n-\tau e, d) = f(n, d_1) \cdot \sum_e f(\tau' e, d_2).$$

τ' ist dabei ein Teiler von d_2, der alle Primzahlen in niedrigeren Potenzen enthält als d_2.

Da es nach der Definition der Funktion f nur auf den Unterschied der Exponenten ankommt, in denen die einzelnen Primzahlen in $\tau' e$ und in d_2 aufgehen, und dieser Unterschied sich nicht ändert, wenn wir beide Zahlen durch τ' dividieren, so erhalten wir für die rechts stehende Summe auf Grund der Definition von f:

$$\sum_e f(\tau' e, d_2) = \frac{\varphi(d_2)}{\varphi\left(\frac{d_2}{\tau'}\right)} \cdot \sum_e f\left(e, \frac{d_2}{\tau'}\right).$$

Setzen wir $\frac{d_2}{\tau'} = \Delta$, so ist Δ irgend ein Teiler von M und die ganze Frage reduziert sich darauf, nachzuweisen, daß

$$\sum_e f(e, \Delta) = 0$$

ist, wenn e ein vollständiges Restsystem (mod. M) durchläuft; e durchläuft dann offenbar $\frac{M}{\Delta}$ vollständige Restsysteme (mod. Δ) und wir werden uns sogleich überzeugen, daß für

jedes einzelne dieser Restsysteme die betreffende Teilsumme verschwindet.

Nehmen wir nämlich an, es gehen in Δ die m verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_m$ auf, so wollen wir die Funktion f zunächst über alle jene Elemente des vollständigen Restsystems (mod. Δ) summieren, die mit Δ den größten gemeinsamen Teiler

$$\frac{\Delta}{p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\rho}}$$

haben, wo $p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \ldots p_{\lambda_\rho}$ irgendwelche ρ der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_m$ sind. Für jedes dieser Elemente e ist

$$f(e, \Delta) = \frac{(-1)^\rho \varphi(\Delta)}{(p_{\lambda_1}-1)(p_{\lambda_2}-1)\ldots(p_{\lambda_\rho}-1)}$$

und da es bekanntlich $\varphi(p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\rho})$ solcher Elemente im vollständigen Restsystem (mod. Δ) gibt, so hat unsere Teilsumme den Wert:

$$(-1)^\rho \varphi(\Delta).$$

Indem wir beachten, daß man die Primzahlen $p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \ldots p_{\lambda_\rho}$ auf $\binom{m}{\rho}$ Arten aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_m$ auswählen kann und sukzessive $\rho = 0, 1, 2, \ldots m$ * setzen, erhalten wir als Gesamtresultat:

$$\varphi(\Delta)\left[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}\right] = 0,$$

womit gezeigt ist, daß die fragliche Summe tatsächlich verschwindet.

Hiemit ist gezeigt, daß unter der Voraussetzung, daß d ein nicht in i aufgehender Teiler von M sei,

$$\sum_e f(n - ie, d) = 0$$

ist und daher die Formel (1''') für diesen Teiler d befriedigt ist, da jedes ihrer Glieder gleich Null ist.

* m kann nicht gleich Null sein; sonst wäre $\Delta = 1$, $\tau' = d_2$, $\tau = d_1 \tau' = d_1 d_2 = d$, während ja doch $\tau < d$ sein muß.

Zweitens. d sei ein Teiler von M, der auch in i aufgeht. Es soll gezeigt werden, daß auch für einen solchen Teiler die Formel $(1''')$ befriedigt wird.

Jeder derartige Teiler d befriedigt nämlich, wie wir zeigen wollen, die folgende Formel:

$$\frac{M-i}{M}(-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} = (-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-1}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-1}{d}} +$$

$$+ (-1)^{\frac{i-2}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-2}{d}} + \ldots + (-1)^{\frac{i-i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{0}, \qquad (1'''')$$

von welcher wir durch Multiplikation mit $\sum_e f(n-ie, d)$ unmittelbar auf $(1''')$ zurückschließen können.

In der Formel $(1'''')$ können nur diejenigen Glieder einen von Null verschiedenen Wert haben, in denen die untere im Binomialkoeffizienten stehende Zahl ganzzahlig ist; also auf der rechten Seite das 1te, $d+1$te, $2d+1$te ... Glied. Die rechte Seite hat also den Wert

$$(-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-d}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-d}{d}} +$$

$$+ (-1)^{\frac{i-2d}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-2d}{d}} + \ldots + (-1)^{0}\binom{\frac{M}{d}}{0} =$$

$$= (-1)^{\frac{i}{d}}\left[\binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} - \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}-1} + \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}-2} - \ldots + (-1)^{\frac{i}{d}}\binom{\frac{M}{d}}{0}\right],$$

welcher Ausdruck durch Verwendung der Formel (3) die Form annimmt:

$$= (-1)^{\frac{i}{d}} \binom{\frac{M}{d}-1}{\frac{i}{d}}.$$

Dies ist aber tatsächlich auch der Wert der linken Seite der Gleichung ($1''''$), denn es ist identisch

$$(-1)^{\frac{i}{d}} \binom{\frac{M}{d}-1}{\frac{i}{d}} = (-1)^{\frac{i}{d}} \frac{\frac{M}{d}-\frac{i}{d}}{\frac{M}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} = (-1)^{\frac{i}{d}} \frac{M-i}{M} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}}.$$

Es ist somit die Richtigkeit der Formel ($1''''$) und somit auch diejenige von ($1'''$) für jeden Teiler von i dargetan. Und hiemit ist der Beweis erbracht, daß die aus *(A)* sich ergebenden Werte für $(n)_i$ der Rekursionsformel (1) genügen, somit die Richtigkeit der Formel *(A)* bewiesen.

4. Viel einfacher ist es nun, mit Hilfe der als richtig erkannten Formel *(A)* die Formel *(B)* für die Werte $(n)_i^{(0)}$ herzuleiten. Wir setzen in die rechte Seite von (2) die Werte $(n)_i$ ein und erhalten:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{M} \sum_d f(n, d) \left[(-1)^{\frac{i}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-1}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-1}{d}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\frac{i-2}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-2}{d}} + \ldots + (-1)^{\frac{i-i}{d}} \binom{\frac{M}{d}}{\frac{i-i}{d}} \right]$$

und indem wir rechts wieder nur die Glieder anschreiben, wo die untere in den Binomialkoeffizienten stehende Zahl einen

ganzzahligen Wert hat, erhalten wir weiter, wenn wir unter $\left[\frac{i}{d}\right]$ die größte in $\frac{i}{d}$ enthaltene ganze Zahl verstehen:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{M}\sum_d f(n,d)\left[(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]}\binom{\frac{M}{d}}{\left[\frac{i}{d}\right]} + (-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]-1}\binom{\frac{M}{d}}{\left[\frac{i}{d}\right]-1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]-2}\binom{\frac{M}{d}}{\left[\frac{i}{d}\right]-2} + \ldots + (-1)^0\binom{\frac{M}{d}}{0}\right],$$

wofür wir wieder unter Verwendung von (3) den Ausdruck finden:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{M}\sum_d f(n,d)(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]}\binom{\frac{M}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]},$$

der mit der Formel *(B)* übereinstimmt.

5. Um nun schließlich die dem Euler-Legendre'schen Satze der gewöhnlichen additiven Zahlentheorie entsprechende Formel *(C)* zu beweisen, bilden wir mit Hilfe von *(B)* den Ausdruck:

$$\Delta(n) = \sum_{i=0}^{M-1}(-1)^i (n)_i^{(0)} = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_d f(n,d)(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]}\binom{\frac{M}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]}.$$

Wir halten nun einen bestimmten Teiler d fest und summieren zunächst nach i; die Werte i teilen wir in die folgenden Inbegriffe:

$$i = 0,\ d,\qquad 2d,\qquad \dots \left(\frac{M}{d}-1\right)d$$

$$i = 1,\ d+1, 2d+1, \dots \left(\frac{M}{d}-1\right)d+1$$

$$i = 2,\ d+2, 2d+2, \dots \left(\frac{M}{d}-1\right)d+2$$

$$\dots$$

$$i = d-1, 2d-1, 3d-1, \dots \frac{M}{d}d-1$$

Den Werten eines jeden dieser d Inbegriffe entsprechen die Werte:

$$\left[\frac{i}{d}\right] = 0, 1, 2, \dots \frac{M}{d}-1,$$

so daß für jeden dieser Inbegriffe, sobald $\frac{M}{d}-1>0$ ist, die betreffende Teilsumme

$$\frac{1}{M}f(n,d)\sum_{\left[\frac{i}{d}\right]=0}^{\frac{M}{d}-1}(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]}\binom{\frac{M}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]} = 0$$

ist, also die ganze dem betreffenden Teiler entsprechende Teilsumme verschwindet.

Nur der Teiler $d = M$ macht eine Ausnahme, indem er eventuell ein von Null verschiedenes Resultat liefert; wir erhalten somit:

$$\Delta(n) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} f(n,M)(-1)^{\left[\frac{i}{M}\right]}\binom{\frac{M}{M}-1}{\left[\frac{i}{M}\right]} = f(n,M).$$

Über die Explosionsgeschwindigkeit in homogenen Knallgasen

von

Dr. **Heinrich Mache.**

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1904.)

Wir denken uns, daß in einem großen, mit homogenem Knallgase gefülltem Raume die Entzündung plötzlich auf einer irgendwie umgrenzten Ebene f erfolgt.

Die so eingeleitete Explosion schreitet dann von dort aus nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Normal zu f, wo beim Fortschreiten der Explosion



Fig. 1.

der Gaskonsum ein großer ist und wo gemäß der bereits früher ausführlich dargelegten Anschauung[1] durch den der Explosion vorangehenden Wärmeleitungsprozeß große Mengen des Gasgemisches von der Anfangstemperatur t auf die Entzündungstemperatur τ gebracht werden müssen, ist die Geschwindigkeit relativ klein. Wir bezeichnen sie mit c und wollen sie die

[1] Diese Sitzungsber., 108, p. 1152 (1899) und 111, p. 1223 (1902).

normale Explosionsgeschwindigkeit nennen. In der Richtung der Ebene hingegen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion sehr groß und nur dadurch beschränkt, daß es einer gewissen Zeit bedarf, ehe die eingeleitete Verbindung sich vollzogen hat. Die Heftigkeit und Schnelligkeit, mit der bekanntlich Gasexplosionen in größeren Räumen verlaufen, haben ihren Grund in dem hohen Werte dieser Größe.

Setzen wir den Fall, daß die letztere »tangentiale« Explosionsgeschwindigkeit, welche wir mit C bezeichnen wollen, groß genug ist, um ihr gegenüber c als klein betrachten zu dürfen, so sind wir auch im stande, die Geschwindigkeit anzugeben, mit welcher die Explosion in irgend einer anderen Richtung fortschreitet; denn es ist ja dann nach der Zeiteinheit die Explosion auf der Ebene AB angekommen und hat somit in der Richtung MN den Weg $\frac{c}{\sin\alpha}$ zurückgelegt, wenn wir mit α den Winkel bezeichnen, welchen MN mit f einschließt. Natürlich kann diese Beziehung nicht mehr gelten, wenn α sehr klein ist, und sie wird um so früher versagen, je weniger die gemachte Voraussetzung erfüllt ist.

Wir wollen nun zunächst auf eine unmittelbare Konsequenz unserer Betrachtung hinweisen, welche sich durchaus mit der Erfahrung im Einklange findet. Es sei in einer Röhre ein homogenes Knallgas enthalten und die Explosion schreite das einemal auf einer zur Röhrenachse senkrechten Ebene AB, das anderemal auf einer gegen die Achse unter dem Winkel α geneigten Ebene $A'B'$ fort.

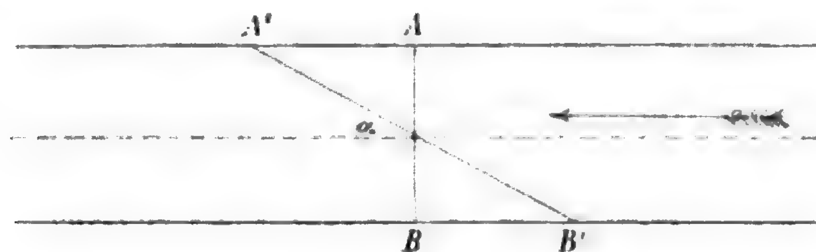


Fig. 2.

Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Röhre ist dann im ersten Falle gleich c, im zweiten gleich $\frac{c}{\sin\alpha}$. Soll also

umgekehrt die Brennebene für den ruhenden Beobachter stationär erhalten bleiben, so muß das explodierende Gas der Explosion entgegenbewegt werden, und zwar mit der Geschwindigkeit c, wenn die Brennfläche auf der Strömungsrichtung normal steht, und mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sin\alpha}$, wenn sie mit der Strömungsrichtung den Winkel α einschließt. Es gilt aber auch $A'B' = \frac{AB}{\sin\alpha}$ oder $AB : A'B' = c : \frac{c}{\sin\alpha}$, d. h. die beiden Geschwindigkeiten, also auch die zur Verbrennung gelangenden Gasmengen verhalten sich wie die Flächeninhalte der beiden Brennflächen und wir kommen somit auf Grund unserer Betrachtung zu dem für ebene Brennflächen trivialen Satze, daß der Gaskonsum der Flamme eines homogenen Knallgases ihrer Oberfläche direkt proportional ist.

Gouy hat als Erster diesen Satz ausgesprochen,[1] er hat aber zugleich experimentell nachgewiesen, daß er auch noch dann gilt, wenn die Brennfläche keine Ebene ist, sondern eine beliebig gekrümmte Fläche, in welche das Gasgemisch mit verschiedener Geschwindigkeit und in verschiedener Richtung einströmt. Er entzündete zu diesem Zwecke ein Leuchtgas-Luft-Gemisch über verschieden geformten Brennern und überzeugte sich, daß, woferne man nur die gleiche Menge des Gasgemisches zuführte, die Brennfläche stets den gleichen Flächeninhalt aufwies. Es ist aber nach dem Obigen auch einleuchtend, daß dieser Gouy'sche Satz nur innerhalb gewisser Grenzen standhält und sowohl für ebene wie für gekrümmte Brennflächen seine Gültigkeit verliert, wenn die Strömungsgeschwindigkeit so groß ist, daß der Neigungswinkel der Brennfläche gegen die Strömungsrichtung sehr klein wird; denn dann ist ja die Explosionsgeschwindigkeit nicht mehr durch den Ausdruck $\frac{c}{\sin\alpha}$ bestimmt.

Der Gouy'sche Satz wird dadurch wertvoll, daß er uns eine leicht durchführbare Methode zur Bestimmung der

---

[1] Recherches photométriques sur les flammes colorées. Ann. chim. phys. (5), 18, p. 27 (1879).

normalen Explosionsgeschwindigkeit c liefert. Ist nämlich der Gaskonsum einer beliebig gestalteten Knallgasflamme gleich dem einer ebenen Flamme von gleicher Größe, so ist ja offenbar der Quotient aus Gaskonsum und Brennfläche gleich c. Es hat W. Michelson[1] die praktische Anwendbarkeit dieser Methode an einer Reihe von Knallgasen in überzeugender Weise nachgewiesen und zugleich die Überlegenheit dargetan, welche sie gegenüber allen anderen besitzt.

Das Überraschende des Gouy'schen Satzes besteht darin, daß er auch noch für gekrümmte Flächen gilt und daß der Gaskonsum und somit auch die mittlere normale Explosionsgeschwindigkeit von der Konfiguration der Verbrennungsfläche nicht abhängt. Wir wollen fragen, welche Annahme wir machen müssen, um diese Unabhängigkeit des Gaskonsums von der Form der Brennfläche erklären zu können. Wenden wir uns zu diesem Zwecke zur Betrachtung des Vorganges in der Brennfläche. Wir haben hierüber bereits früher bemerkt,[2] daß in ihr zwei Gasmassen aneinanderstoßen, von denen die eine die Entzündungstemperatur τ, die zweite die Verbrennungstemperatur T hat und haben es wahrscheinlich gemacht, daß der Übergang von der einen Temperatur zur anderen sich in der Gasmasse mit einer so großen Geschwindigkeit und auf einer so kleinen Wegstrecke vollzieht, daß die Intensität des die Brennfläche in der Richtung von T gegen τ passierenden Wärmestromes als konstant aufgefaßt werden darf und bei ein und demselben Gasgemisch weder von der Strömungsgeschwindigkeit noch auch von der Krümmung der Brennfläche abhängt. Auch Mallard und Le Chatelier, die einzigen, welche meines Wissens die Verbrennungserscheinungen theoretisch zu behandeln versuchten, stellen eine Formel auf,[3] aus welcher man den gleichen Schluß ziehen kann. Die Gleichung, zu welcher sie gelangen, lautet:

$$c = \frac{k(T-\tau)}{\gamma(\tau-t)} f(T, \tau).$$

[1] Wied. Ann., 37, p. 1 (1889).

[2] L. c.

[3] Ann. des Mines, (8), 4, p. 343 u. f. (1883).

Es bedeutet hierin k die Wärmeleitungskonstante des noch nicht entzündeten Knallgases und γ dessen spezifische Wärme bei konstantem Drucke. Setzt man $f(T, \tau)$ gleich einer Konstanten A, was Mallard und Le Chatelier selbst für möglich halten, so wird auch $c\gamma(\tau-t) = Ak(T-\tau)$. Multipliziert man schließlich diese Gleichung auf beiden Seiten mit der Dichte ρ des Knallgases, wobei sich ρ auf dieselbe Temperatur beziehen muß, auf welche man c bezogen hat, so steht auf der linken Seite der Gleichung das Produkt $c\rho\gamma(\tau-t)$, ein Ausdruck, der nichts anderes bedeutet als die Wärmemenge, welche der Flächeneinheit der Brennfläche in der Zeiteinheit durch das erhitzte, unverbrannte Gas zugetragen wird und die im stationären Zustande gleich der Wärmemenge sein muß, welche die Brennfläche in entgegengesetzter Richtung, d. h. in der Richtung von T gegen τ passiert. Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Produkt $A\rho k(T-\tau)$, also ein von c und t unabhängiger Ausdruck, der für ein bestimmtes Knallgas einen ganz bestimmten konstanten Wert annimmt. Wir kommen also auch hier zu dem Schlusse, daß die Einheit der Brennfläche eine ganz bestimmte, von der Vorwärmung des Gases und der Konfiguration der Flamme unabhängige Wärmemenge passiert, die, wenn nicht anderweitiger Wärmeverlust eintritt, ausschließlich zur Erhitzung des Knallgases von der Anfangstemperatur zur Entzündungstemperatur verbraucht wird. Bezeichnen wir diese Wärmemenge mit W, so ist $W = c\rho\gamma(\tau-t)$ und es gibt uns die Formel $c = \frac{W}{\rho\gamma(\tau-t)}$ die Abhängigkeit der Explosionsgeschwindigkeit von der Anfangstemperatur des zur Verbrennung gelangenden Gases.[1]

Es leuchtet jetzt ohneweiters ein, daß der Gouy'sche Satz auch für Brennflächen beliebiger Konfiguration gilt. Da nämlich nach dem Gesagten die Wärmemenge, welche von der Brenn-

---

[1] Man kann diese Gleichung zur indirekten Bestimmung der Entzündungstemperatur benützen. Beobachtet man nämlich nach dem Gouy-Michelson'schen Verfahren für zwei verschiedene Anfangstemperaturen t_1 und t_2 beziehungsweise die Explosionsgeschwindigkeiten c_1 und c_2, so ist $\tau = \frac{c_2 t_2 - c_1 t_1}{c_2 - c_1}$.

fläche aus in das Innere der Flamme gelangt, dem Flächeninhalte der Brennfläche proportional ist, hingegen von ihrer Form nicht abhängt und da ferner der Gaskonsum einer Flamme durch diejenige Quantität des Knallgases definiert ist, welche diese Wärmemenge von der Anfangstemperatur auf die Entzündungstemperatur zu erhitzen vermag, so ist der Quotient aus Gaskonsum und Brennfläche für eine jede Flamme eine nur von der Zusammensetzung des Knallgases, aber nicht von der Form der Flamme abhängige Größe. Da für die ebene Brennfläche dieser Quotient gleich c ist, so hat er auch für jede andere Brennfläche diesen Wert.

Natürlich ist es deswegen noch keineswegs ausgeschlossen, daß c in den verschiedenen Teilen der Flamme verschiedene von der Konfiguration abhängige Werte annimmt; denn es bleibt ja nur der Mittelwert konstant. Damit hängt eine Beobachtung zusammen, die man an der kegelförmigen Brennfläche eines Bunsen'schen Brenners machen kann. Es zeigt sich nämlich dort, daß die Spitze des Kegels stets abgerundet ist, und zwar um so mehr, je weniger explosiv das verbrennende Gasgemisch ist. Die Neigung der verschiedenen Elemente der Brennfläche gegen die überall parallel und mit gleicher Geschwindigkeit vor sich gehende Strömung ist also verschieden groß und es hat somit auch die normale Explosionsgeschwindigkeit in den verschiedenen Punkten der Brennfläche einen verschiedenen Wert. In der Tat steht ja das am obersten Punkte des Kegels befindliche Flächenelement df auf der Strömungsrichtung sogar senkrecht und es ist daher dort die normale Explosionsgeschwindigkeit bis zur Geschwindigkeit der Strömung erhöht. Betrachten wir die in der Achse gelegene Strömungsröhre mn, welche in df einmündet, wo das in ihr enthaltene Gas zur Verbrennung gelangt. Diesem Gase wird hiebei aber nicht nur von df aus, sondern auch von den anliegenden Flächenelementen Wärme zugeführt, was dieselbe Wirkung hat, als ob das Gas vorgewärmt würde, d. h. mit einer höheren als der Anfangstemperatur gegen df strömte. Das erhöht dann die Explosionsgeschwindigkeit



Fig. 3.

gemäß der obigen Formel. Es ist aber klar, daß dieses Plus an Wärme den peripher gelegenen Strömungsröhren entzogen wird, welch letztere dann infolge des Wärmeverlustes eine entsprechend erniedrigte Explosionsgeschwindigkeit aufweisen werden, so daß dann auch hier der Gouy'sche Satz gilt. Während also der über die ganze Fläche gebildete Mittelwert der Explosionsgeschwindigkeit von der Konfiguration der Brennfläche unabhängig erscheint, ist ihr Wert dennoch von Punkt zu Punkt verschieden. Keinesfalls geht es aber an, diese unleugbare Abhängigkeit der Einzelwerte von der Konfiguration für einen gegebenen Punkt als Funktion der Krümmung der Brennfläche an der betreffenden Stelle auszudrücken. Dies wird klar, wenn man bedenkt, daß gemäß der bisherigen Auseinandersetzungen bei einer Strömung, die überall normal zur Fläche erfolgt, die Explosionsgeschwindigkeit, auch wenn die Fläche gekrümmt ist, doch für jeden Punkt der Fläche den gleichen Wert aufweisen muß.[1] Betrachten wir z. B. eine kugelförmige Brennfläche, in welche das Gas radial einströmt. Der Wärmestrom, welcher das zuströmende Gas bis zur Entzündungstemperatur erhitzt, erfolgt gleichfalls radial und jedes Gasteilchen gelangt in demjenigen Flächenelement zur Verbrennung, von dem aus es erwärmt wurde. Dann ist aber nach dem oben Gesagten die Explosionsgeschwindigkeit für jeden Punkt der Kugel gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit und somit unabhängig vom Radius. Dabei ist natürlich die Temperaturverteilung vor der Brennfläche bei kugelförmiger Flamme eine andere als bei ebener, was sich auch leicht berechnen läßt.

Die allgemeine Gleichung der Wärmeleitung $\frac{d\vartheta}{dt} = a^2\Delta\vartheta$ nimmt für einen mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w bewegten Körper die Form an:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = a^2\Delta\vartheta.$$

Hieraus erhält man für den stationären Zustand die Gleichung

[1] Natürlich wird diese Behauptung in den extremsten Fällen nicht mehr gelten.

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=a^2\Delta\vartheta.$$

Ist nun die Brennfläche eine Ebene, d. h. die Wärmeströmung linear, so ist der Temperaturabfall durch $c\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=$ $=a^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}$ gegeben, ist sie hingegen kugelförmig, so gilt die Gleichung $c\frac{\partial\Theta}{\partial r}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial^2(r\Theta)}{\partial r^2}$. Da c in beiden Gleichungen denselben Wert hat, so besteht somit auch zwischen den beiden Temperaturverteilungen die Beziehung:

$$a^2\frac{\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}}{\frac{\partial\vartheta}{\partial x}}=a^2\frac{\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}}{\frac{\partial\Theta}{\partial r}}+\frac{2a^2}{r}.$$

Wir glauben nun die Bedeutung des Gouy'schen Satzes für das Verständnis der Verbrennungserscheinungen in Gasgemischen klargelegt zu haben und es muß um so mehr befremden, daß Mallard und Le Chatelier trotz ihrer ausgedehnten und sorgfältigen Experimente diese Bedeutung nicht erkannt haben. So ziehen sie zur Bestimmung der Explosionsgeschwindigkeit eine Methode vor, welche, wie auch Michelson[1] auseinandersetzt, nur unsichere und vor allem schlecht definierte Resultate gibt. Sie füllen nämlich das explosive Gasgemisch in eine Röhre, entzünden es an dem einen Ende und beobachten nun mittels geeigneter Registriervorrichtungen die Geschwindigkeit, mit welcher die Flamme fortschreitet. Der größte und unvermeidliche Übelstand der Methode besteht darin, daß hier die Brennfläche beim Fortschreiten durch das Gemisch nicht nur ihren Ort, sondern auch ihre Größe ändert und daß, da der Gaskonsum einer Flamme ihrer Oberfläche innerhalb weiter Grenzen proportional ist, die beobachtete Geschwindigkeit ihres Fortschreitens je nach ihrer jeweiligen Größe verschieden erscheint.

Wir können dieses Verhalten auch noch genauer verfolgen.

[1] L. c.

In der einseitig geschlossenen Röhre AB vom Radius r und der Länge l sei ein Knallgas enthalten und die Entzündung bei A in der Ebene MN eingeleitet. Bliebe nun die Brennfläche eine Ebene, so würde sie mit der normalen Explosionsgeschwindigkeit c durch die Röhre fortschreiten. Tatsächlich ist dies aber nicht der Fall. Vielmehr wird die der Röhrenwandung benachbarte Partie der Ebene MN infolge der kühlenden Wirkung der Wandung eine gegenüber den mittleren Partien sehr stark verminderte Explosionsgeschwindigkeit aufweisen[1] und die Brennfläche infolgedessen weit eher die Form eines an der Röhrenmündung aufsitzenden Kegels annehmen, welcher mit variabler, der jeweiligen Neigung der Brennfläche gegen die Fortpflanzungsrichtung entsprechender

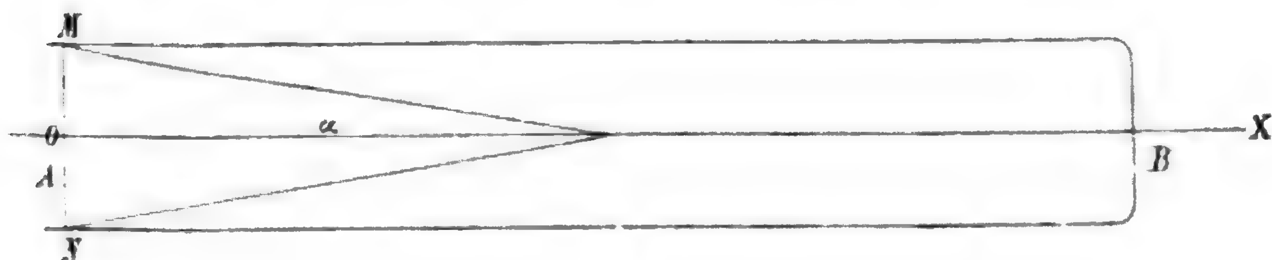


Fig. 4.

Geschwindigkeit fortschreitet. Betrachten wir den Moment, wo die Spitze des Kegels bei der Abszisse x angekommen ist, so findet man die dort vorhandene Explosionsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sin\alpha} = \frac{c\sqrt{r^2+x^2}}{r}$. Die Zeit, welche verfließt, bis die Explosion am Ende der Röhre angekommen ist, berechnet man hieraus durch Integration als $t = \frac{r}{c}\log\frac{l+\sqrt{l^2+r^2}}{r}$ und die mittlere, gewöhnlich zur Beobachtung gelangende Explosionsgeschwindigkeit

$$\frac{l}{t} = \frac{lc}{r\log\frac{l+\sqrt{l^2+r^2}}{r}}.$$

---

[1] Vergl.: »Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen.« Diese Sitzungsber., 111, p. 1223 (1902).

Mallard teilt mit,[1] daß ein Gemisch von Wasserstoff und Sauerstoff in einer 1·35 *m* langen Röhre eine mittlere Explosionsgeschwindigkeit von 570 *m*/sec zeigte, während dasselbe Gemisch in einer gleichweiten Röhre von 0·347 *m* Länge nur eine Geschwindigkeit von 70—100 *m*/sec aufwies. Nehmen wir an, daß der Radius der Röhre im Vergleiche zu ihrer Länge klein war, was wohl bei der sonstigen Gefährlichkeit des Experimentes zutreffen dürfte, so berechnen wir aus der obigen Formel für das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten in beiden Röhren 4 : 1, während die Beobachtung 5·7 : 1 bis 8·1 : 1 ergibt. Daß die beobachteten Werte noch stärker differieren, als es aus unserer Berechnung folgt, wird dadurch verursacht, daß die der Explosion vorangehende nahezu adiabatische Kompression eine Vorwärmung des Gasgemisches hervorruft, welche wieder eine Erhöhung der Explosionsgeschwindigkeit zufolge hat, die um so größer wird, je länger man die Röhre wählt. Jedenfalls aber wird auf diese Weise weder die normale noch die tangentiale Explosionsgeschwindigkeit gemessen, sondern ein zwischen beiden liegender, wegen vieler anderer störender Umstände recht unsicherer Mittelwert.

Der von Gouy aufgestellte Satz nimmt, wie wir gesehen haben, in der Physik der Verbrennungserscheinungen eine sehr wichtige Stelle ein. Gouy selbst hat ihn, wie schon oben erwähnt wurde, experimentell bestätigt; doch sind diese Angaben nur nebenbei in einer Abhandlung enthalten, welche sich mit ganz anderen Aufgaben beschäftigt, beziehen sich nur auf Knallgas, das entweder in äquivalentem Verhältnisse hergestellt war oder einen Überschuß an brennbarem Gase aufwies und sind vor allem nicht auf photographischem Wege erhalten, der allein eine größere Genauigkeit ermöglicht. Nun hat freilich Michelson in seiner Arbeit den Satz indirekt dadurch bestätigt, daß er bei den von ihm untersuchten Gasgemischen den Durchmesser der Brennerröhren zwischen 3·93 und 10·86 *mm* variierte und fand, daß sich die mit verschiedenen Brennern gemachten Beobachtungen gut aneinander

[1] C. R., 93, p. 147 (1881).

reihen lassen. Leider fehlt aber dort die Angabe der Strömungsgeschwindigkeiten. Ich glaube daher einige von mir zur Prüfung des Gouy'schen Satzes ausgeführte Messungen mitteilen zu sollen.

Das geübte Verfahren deckt sich mit dem von Michelson verwendeten. Der einzige erwähnenswerte Unterschied besteht darin, daß hier die Gase (Leuchtgas—Luft) nicht aus Gasometern, sondern das Leuchtgas direkt aus der Leitung, die Luft aus einem Orgeltische entnommen wurden. Das Messen der Gasströme geschah mittels einer sorgfältig kubizierten Gasuhr. Die angefertigten Photographien wurden vergrößert und aus diesen Vergrößerungen mittels eines einfachen Näherungsverfahrens die Brennfläche als Rotationsfläche bestimmt. Für eine Brennerröhre von 1·5 *m* Länge und 9·37 *mm* Durchmesser wurde so die folgende Tabelle erhalten:

n u %	*u cm*/sec	*F cm*²	*c cm*/sec
26·13	254·5	13·36	13·14
26·44	157·4	9·30	11·67
24·59	249·3	7·66	22·45
23·83	152·0	4·83	21·71
23·05	244·3	5·59	30·13
22·59	149·6	3·56	28·97
20·64	236·9	4·43	36·89
20·62	145·9	2·75	36·53
15·16	221·6	5·90	25·89
15·05	136·2	3·61	26·00
12·25	208·3	6·98	20·57
11·67	131·1	5·22	17·30

Die erste Spalte gibt den Prozentgehalt an Leuchtgas im Volumen des Gemenges, die zweite die Geschwindigkeit, mit

welcher das Gemenge strömte, die dritte den Flächeninhalt der Brennfläche und die vierte die als Quotient aus Konsum und Brennfläche berechnete normale Explosionsgeschwindigkeit. Wie man sieht, ist die letztere nur vom Mischungsverhältnisse

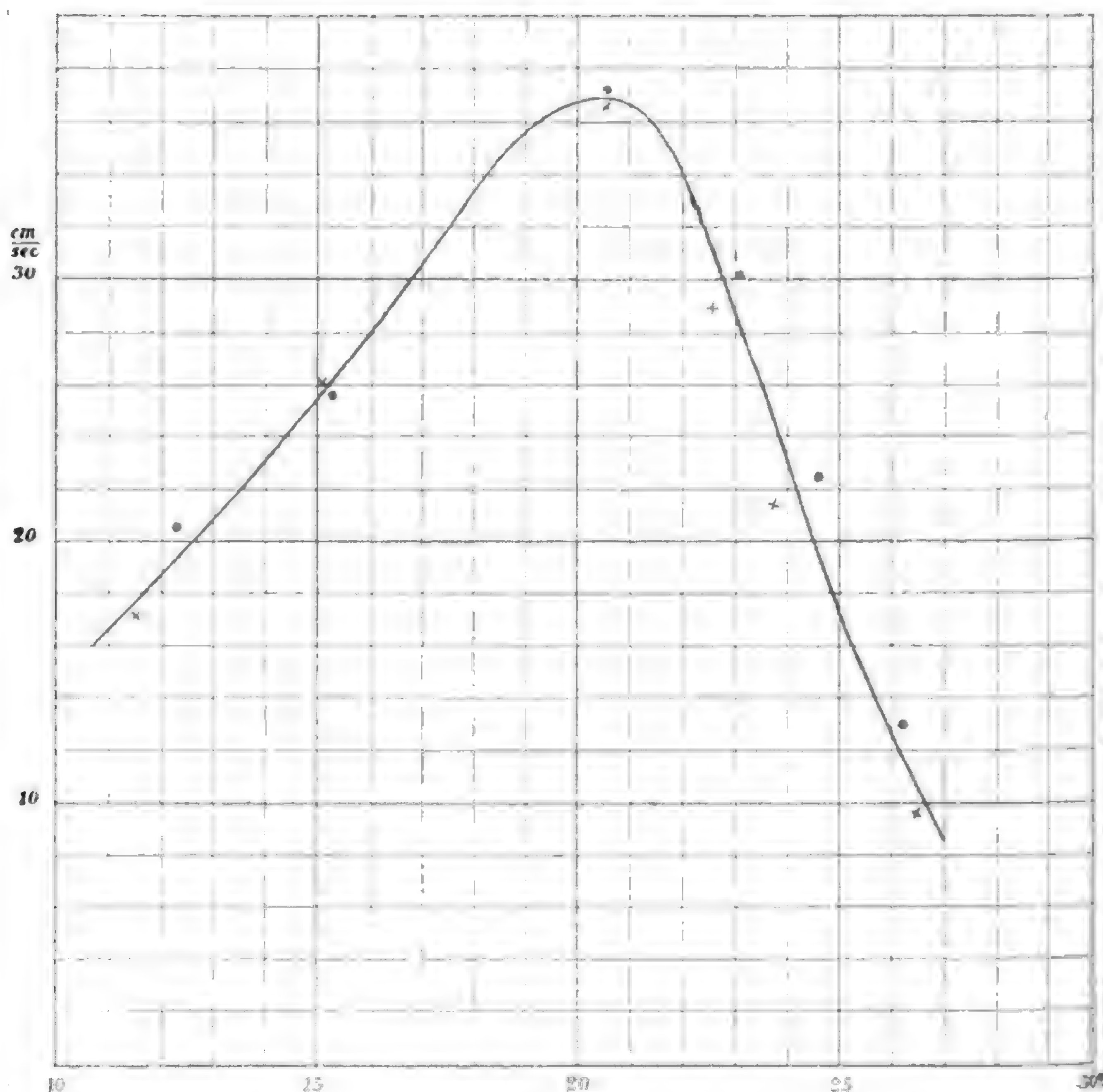


Fig. 5.

abhängig, hingegen, wie das der Gouy'sche Satz verlangt, unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Zeichnet man die zusammengehörigen Werte von n u und c in ein Diagramm, dann bemerkt man allerdings, daß die bei geringerer Strömungsgeschwindigkeit für c erhaltenen Werte etwas niedriger liegen.

Die mit × bezeichneten Punkte, welche diesen Werten entsprechen, liegen alle, bis auf einen, ersichtlich tiefer. Doch erklärt sich diese Differenz leicht als eine Folge der Wärmeabgabe an das Rohr, auf welchem der Flammenkegel ruht. Bezeichnen wir nämlich denjenigen Bruchteil der Wärme, welcher in der Zeiteinheit an das Rohr abgegeben wird und von dort in die Umgebung verloren geht, mit W', so wird nicht mehr der Betrag FW, sondern nur mehr $FW-W'$ dazu verwendet, um das zuströmende Gas von der Anfangstemperatur auf die Entzündungstemperatur zu bringen. Dementsprechend ist auch die Explosionsgeschwindigkeit kleiner und wird jetzt durch die Gleichung $c = \frac{FW-W'}{\rho\gamma(\tau-t)}$ bestimmt. Da W' von der Größe der Flamme nahezu unabhängig sein muß, wird dieser von der kühlenden Wirkung des Brennerrohres herrührende störende Einfluß um so größer sein, je kleiner F ist. Am stärksten wird er sich demnach geltend machen, wenn die Flamme das Minimum an Flächeninhalt besitzt, wie das dann erreicht ist, wenn sie als vollkommene Ebene in das Rohr des Brenners zurückschlägt. Verwendet man als solches eine Glasröhre, so kann man diesen Vorgang beobachten und die Strömungsgeschwindigkeit so regulieren, daß das Zurückschlagen der Flamme mit möglichst geringer Geschwindigkeit — einigen wenigen Zentimetern in der Sekunde — stattfindet.[1] Die Strömungsgeschwindigkeit, um die Wanderungsgeschwindigkeit korrigiert, gibt für diesen Fall direkt die Größe c. Hier sind aber infolge des großen Wärmeverlustes die Werte stets um vieles kleiner als diejenigen, welche man an frei über der Brenneröffnung stehenden Flammen beobachtet. So wurde für ein 20% Gemisch in einer Glasröhre von 7 *mm* Durchmesser der Wert 16 *cm*/sec erhalten, während an der frei brennenden Flamme 37·4 *cm*/sec beobachtet worden waren.

---

[1] Zum Gelingen des Versuches ist es nötig, durch ein entsprechend langes Röhrensystem für gute Mischung und homogene Strömung zu sorgen. Auch darf das Brennerrohr nicht etwa infolge eines vorausgegangenen Versuches noch erhitzt sein.

Es wäre auch von Interesse, Messungen der normalen Explosionsgeschwindigkeit bei möglichst großer Strömungsintensität auszuführen. Es wird dann der Neigungswinkel des Kegelmantels gegen die Strömungsrichtung sehr klein und man kann hoffen, aus den zu erwartenden Abweichungen vom Gouy'schen Satze Aufschlüsse über die Existenz und Beobachtbarkeit der von uns als tangentiale Explosionsgeschwindigkeit bezeichneten Größe zu erhalten.

Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens: Problem der acht Punkte

von

Dr. **Norbert Herz.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Februar 1904.)

Das Problem des Rückwärtseinschneidens,[1] welches in der Geodäsie eine so wichtige Rolle spielt, besteht darin, zu drei gegebenen Punkten A, B, C die Lage eines vierten durch Messung der Winkel ADB, BDC zu bestimmen. Dasselbe ist nur ein spezieller Fall einer Gruppe von Problemen, deren Zusammenhang im folgenden auseinandergesetzt werden soll und von welchem ich ein Spezielles etwas ausführlicher behandeln möchte.

Mögen unter einer größeren Zahl von Objekten, s derselben als Standpunkte für ein Winkelmeßinstrument gewählt und von diesen aus die Winkel gegen einzelne oder alle der übrigen Objekte, deren Zahl o sein möge, gemessen sein. Dabei können auch einige oder alle Standpunkte anvisiert werden. Zur gegenseitigen Festlegung aller Objekte wird nun eine gewisse Anzahl von Messungen erforderlich; bleibt die Zahl

---

[1] Bekannter unter einem anderen Namen, der aber besser vermieden wird. Es könnte das Problem des Ptolemäus genannt werden, da es schon von diesem zur Lösung von astronomischen Aufgaben verwendet wurde, oder aber das Problem des Snellius, da dieser dasselbe zum erstenmale (1617) in der Geodäsie verwendete.

der gemessenen Winkel unter dieser Anzahl, so wird die Aufgabe nicht bestimmt, sind mehr Messungen vorhanden, so wird die Aufgabe überbestimmt und ist nach der Methode der kleinsten Quadrate die gegenseitige Lage so zu bestimmen, daß alle Messungsresultate möglichst dargestellt werden.

Bezieht man sämtliche Punkte auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, so wird die Zahl der Koordinaten $2(o+s-2)$ sein, da zwei Punkte als Grundpunkte willkürlich gewählt werden können. Der Maßstab bleibt dabei unbestimmt, wird aber schließlich durch Messung irgendeiner Strecke erhalten. Diese Längenmessung ist aber nicht zu jenen $2(o+s-2)$ Messungen hinzuzuzählen, da sie nur den Maßstab, nicht aber die gegenseitige Lage der Punkte bestimmt. Hingegen wird jede weitere Längenmessung eine Winkelmessung ersetzen können.

Es folgt daher, daß zur gegenseitigen Festlegung der Punkte

$$N = 2(o+s-2)$$

Messungen notwendig und hinreichend sind. Als solche sollen bloß Winkelmessungen angenommen werden, da sie gegenüber Längenmessungen den Vorzug größerer Einfachheit und Bequemlichkeit haben.

Es müssen nun die folgenden Fälle unterschieden werden:

A. Es werden von jedem Standpunkt aus alle Objekte und alle übrigen Standpunkte gesehen und eingeschnitten; die Zahl der wirklich gemessenen Winkel beträgt daher

$$Z = s(o+s-2)$$

und es sind folglich:

$$A = Z - N = (s-2)(o+s-2)$$

Winkel überschüssig gemessen. Die Aufgabe ist daher für $s > 2$ immer überbestimmt, hingegen für $s = 2$ immer vollkommen bestimmt; o bleibt dabei beliebig; die geringste Zahl der Objekte ist $o = 2$, denn für $o = 1$ ist der Fall wohl auch

lösbar, gibt aber keine Orientierung, während für $o = 2$ gleichzeitig die ganze Aufnahme gegen die beiden Objekte orientiert erscheint. Diese Aufgabe ist bekannt unter dem Namen des Hansen'schen Problems der vier Punkte: die Lage zweier Punkte, aus denen Aufnahmen gemacht wurden, gegenüber zwei Fixpunkten des aufgenommenen Bereiches aus den an diesen Standpunkten gemessenen Winkeln zwischen den beiden Fixpunkten und dem anderen Standpunkte zu ermitteln.

B. Es werden von jedem Standpunkt aus alle Objekte, nicht aber die Standpunkte selbst anvisiert, was z. B. der Fall ist, wenn die Standpunkte ganz beliebig angenommen werden, wie dies bei photographischen Aufnahmen der Fall sein kann; der Ort der Standpunkte soll sich dabei aus den Aufnahmen selbst ergeben. Hiebei sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

a) In s' Standpunkten wird die Aufnahme mittels der Bussole orientiert (diese Orientierung entfällt im Falle *A*, weil dadurch die Aufgabe stets überbestimmt würde). Ist $s' = 1$, so wird dadurch aber keine Bedingung eingeführt, da dadurch nur eine Orientierung der Aufnahme gegen die Weltgegenden auftritt; Bedingungen werden erst eingeführt, wenn $s' \gtreqless 2$ ist. In diesem Fall ist die Anzahl der gemessenen Winkel

$$Z = s(o-1)+s'-1,$$

daher

$$A = s(o-1)+(s'-1)-2(o+s-2).$$

Ist nun

α. $s' = s$, d. h. wurde in allen Punkten orientiert, so wird

$$A = so-2o-2s+3 = (s-2)(o-2)-1.$$

Die Aufgabe ist daher

für $o = 2$ unbestimmt, was immer s sei,
für $s = 2$ unbestimmt, was immer o sei;
$o > 3$, $s = 3$ stets überbestimmt,
für $s > 3$, $o = 3$ » »
$s > 3$, $o > 3$ » »

daher eindeutig bestimmt nur für $o=3$, $s=3$. Diese Aufgabe ist ebenfalls schon in verschiedener Weise gelöst worden; es ist die unter dem Namen »Relèvement sous vapeur«, »flying survey« bekannte Aufgabe: Aus drei Schiffspunkten durch Peilungen gegen drei Küstenpunkte die gegenseitige Lage der sechs Punkte zu erhalten (vergl. hierzu z. B. G. D. E. Weyer: »Konstruktion zu einer Küstenaufnahme im Vorbeifahren, unabhängig von der Strömung und Fahrtmessung«).[1]

β. Sei s' von s verschieden; man kann dann schreiben:

$$A=(s-2)(o-2)-(s-s'+1).$$

Da immer $s > s'$ ist, so wird A nur positiv, wenn $s > 2$, $o > 2$ ist. Für $A=0$ muß nun

$$o=2+\frac{s-s'+1}{s-2}$$

sein und dieser Ausdruck hat nur eine Bedeutung, wenn das Zusatzglied eine positiv ganze Zahl ist; sei

$$\frac{s-s'+1}{s-2}=\varkappa,$$

so wird

$$o=2+\varkappa.$$

Nun muß nach früherem jedenfalls auch $s \gtreqless 2$ und ebenfalls $s' \gtreqless 2$ sein.

Setzt man daher

$$o=2+\varkappa$$
$$s=2+\mu$$
$$s'=2+\nu,$$

so folgt

$$\varkappa=\frac{\mu-\nu+1}{\mu},$$

demnach

$$\nu=\mu-\mu\varkappa+1,$$

[1] Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Sept. 1882, p. 534.

wobei aber, da $s \gtreqless s'$ sein muß, auch wieder $\mu \gtreqless \nu$ sein muß. Die Aufgabe wird daher bestimmt für

1. $\varkappa = 1$, μ beliebig, $\nu = 1$, damit wird $o = 3$, s beliebig, $s' = 3$, entsprechend dem Falle α.

2. $\varkappa = 2$, $\nu = 1 - \mu$; da nun $\mu > \nu$ sein muß, so ist hier nur der Fall möglich: $\mu = 1$, $\nu = 0$, daher $o = 4$, $s = 3$, $s' = 2$.

Dieser Fall gibt eine eindeutig bestimmte Lösung. Da hierbei vier Objekte aus drei Standpunkten anvisiert wurden, so könnte er das Problem der sieben Punkte genannt werden. Er hat jedoch keine praktische Bedeutung für die Geodäsie, da er voraussetzt, daß Winkelmessungen und Orientierungen von gleicher Genauigkeit sind. Dieses ist aber nur dann der Fall, wenn beide durch Peilungen erhalten wurden (wie beim Flying survey) oder aber, wenn beide durch genaue Messungen erhalten wurden, also die Orientierung durch genaue Azimutbestimmungen. In letzterem Falle wird man sich aber nie mit einer eindeutigen Bestimmung begnügen, sondern stets überzählige Beobachtungen anstellen, die dann — es ist dies eine in der höheren Geodäsie beständig wiederkehrende Aufgabe — nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden.

3. Wenn $\varkappa = 2 + \lambda$ wäre, so würde $\nu = 1 - (\lambda + 1)\mu$ eine Bedingung, die für kein positives λ und μ erfüllbar ist.

b) Es wird in keinem Punkt orientiert. Dann ist

$$Z = s(o-1),$$

demnach

$$A = s(o-1) - 2(o+s-2) = (o-3)(s-2) - 2.$$

Die Kombinationen

$$s = 1, \quad o = 1, 2, 3$$

und

$$s = 2, \quad o = 1, 2, 3$$

sind, wie man leicht sieht, auszuschließen; es muß daher $o > 3$, $s > 2$ sein.

Der Fall $o = 4$, $s = 3$ ist unbestimmt. Bestimmt wird die gegenseitige Lage ($A = 0$), wenn

α. Entweder für $o \geqq 4$:

$$s = 2 + \frac{2}{o-3}.$$

Dieses gibt die Kombinationen

1. $o = 4$, $s = 4$

und

2. $o = 5$, $s = 3$.

β. Oder für $s \geqq 3$:

$$o = 3 + \frac{2}{s-2},$$

woraus die Kombinationen

1. $s = 3$, $o = 5$

und

2. $s = 4$, $o = 4$,

daher dieselben beiden Fälle wie in α), während in allen anderen Fällen die Aufgabe überbestimmt ist. Hieraus folgt:

Die gegenseitige Lage von acht Punkten ist bestimmt, wenn man von drei Punkten derselben als Standpunkten die Winkel zwischen den fünf übrigen Objekten mißt oder von vier Standpunkten die Winkel zwischen den vier anderen Objekten.

Diese Aufgabe kann man daher als Problem der acht Punkte bezeichnen.

An diese Fälle schließt sich noch der Fall:

C. Daß a Punkte ihrer gegenseitigen Lage nach bekannt sind; o weitere Objekte und die s Standpunkte sind gegen die bekannten Punkte festzulegen. Natürlich muß $a \geqq 3$ sein, denn wenn $a = 2$ wäre, so gäbe dieses nach dem früheren nur den Maßstab, da, von diesem abgesehen, auch von o ganz unbekannten Punkten zwei ihrer gegenseitigen Lage nach willkürlich anzunehmen sind. Ist nun $a \geqq 3$, so wird

$$N = 2(o+s)$$

die Zahl der Unbekannten und

$$Z = s(a+o-1)$$

die Zahl der gemessenen Winkel, daher

$$A = Z-N = sa+so-3s-2o.$$

Hieraus folgt für $A = 0$:

$$o = \frac{s(a-3)}{2-s} = \frac{s(3-a)}{s-2}.$$

Es muß demnach, da $a < 3$ unzulässig ist, $a > 3$, $s < 2$ sein und da der Fall $s = 2$ auszuschließen ist (wegen des daraus folgenden $o = \infty$), so bleibt nur

a) $s = 1$, $o = a-3$. Der einfachste Fall $a = 3$, $o = 0$ gibt das Problem des Rückwärtseinschneidens nach Ptolemäus.

Die Gleichung $A = 0$ wird übrigens auch bestimmt durch:

b) $s = 2$, $a = 3$, wobei o in der Form $\frac{0}{0}$ auftritt und in der Tat ganz beliebig ist. In der Lösung trennt sich diese Aufgabe aber in zwei Teile, indem jeder der beiden einzelnen Standpunkte bestimmt wird [nach Fall *C, a)*] und dann aus den beiden gefundenen Standpunkten beliebig viele Objekte o (durch Seitwärtseinschneiden) bestimmt werden können.

Hingegen ist der Fall $a > 3$, $s = 1$ nur scheinbar bestimmt. Tatsächlich ist der Standpunkt überbestimmt, während die o anderen Objekte unbestimmt bleiben. Für $a = 3+\lambda$, würde $o = \lambda$; es wird aber dabei der Standpunkt durch λ Gleichungen überbestimmt, welche dann bei der Bestimmung der $o = \lambda$ anderen Objekte natürlich fehlen.

Aus diesen Abzählungen folgen daher die einfachsten Kombinationen:

1. Das Problem des Rückwärtseinschneidens nach Ptolemäus [Fall *C, a)*].
2. Das Hansen'sche Problem der vier Punkte [Fall *A*].
3. Relèvement sous vapeur, Flying survey, Problem der sechs Punkte [Fall *B, a)*, α].

4. Das Problem der sieben Punkte [Fall *B*, *a)*, β].

5. Das Problem der acht Punkte [Fall *B*, *b)*].

Eine größere Anzahl von weiteren Kombinationen würde sich ergeben, wenn die Aufgabe noch allgemeiner gestellt würde: Von s Standpunkten aus werden s' Standpunkte und o' von o zu bestimmenden Objekten anvisiert; dabei wird in s'' Standpunkten mit der Bussole orientiert. Die Lösung dieser Aufgabe hat aber aus dem Grunde kein wesentliches Interesse, da in diesem Falle ja nicht immer dieselben Standpunkte und nicht immer dieselben Objekte sichtbar sein werden.

Das Problem der acht Punkte zerfällt in zwei Teile:

I. In vier Punkten werden die $4 \times 3 = 12$ Winkel zwischen vier Objekten gemessen;

II. In drei Punkten werden die $3 \times 4 = 12$ Winkel zwischen fünf Objekten gemessen;

es ist die gegenseitige Lage der acht Punkte zu bestimmen. Dies ist z. B. der Fall bei photogrammetrischen Aufnahmen aus drei, beziehungsweise vier Punkten. Da man hierbei meist in der Lage sein wird, in drei an verschiedenen Punkten gemachten Aufnahmen fünf identische Punkte zu finden, so wird der vierte Stand unnötig. Man ist daher im stande, aus drei photogrammetrischen Aufnahmen einer Gegend durch Identifizierung von fünf Punkten der Aufnahmen einen Plan der Gegend zu zeichnen, für welchen nur der Maßstab und die Orientierung fehlen. Der erstere wird bekannt, wenn man irgendeine Länge in dem aufgenommenen Gebiete mißt; die Orientierung wird durch eine einzige Peilung oder Azimutbestimmung erhalten; beide gleichzeitig, wenn zwei der fünf verwendeten Punkte dem Triangulierungsnetze angehören.[1]

Diese Aufgabe ist von eminenter Wichtigkeit für den Forschungsreisenden, der ohne große Mühe auf diese Art durch drei photographische Aufnahmen wesentlich genauere Pläne erhalten kann als es bei der größten Sorgfalt durch die

[1] Die Bussolenorientierung nach Art des Vorganges beim Relèvement sous voiles zur Winkelbestimmung fällt dabei als zu ungenau weg. Während man durch die Bussole Winkel auf etwa $1/2°$ genau erhält, gibt die photogrammetrische Aufnahme die Winkel auf Bogenminuten sicher

genauesten Schätzungen zu erhalten möglich ist. Deshalb ist auch die Lösung aus drei Ständen derjenigen aus vier Ständen vorzuziehen; doch soll das Prinzip der letzteren ebenfalls kurz erwähnt werden.

Seien *A, B, C, D* (Fig. 1) die ihrer gegenseitigen Lage nach unbekannten Orte, *E, F, G, H* die vier Aufstellungspunkte. Die zwölf Winkel β_i, γ_i, δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ seien ge-

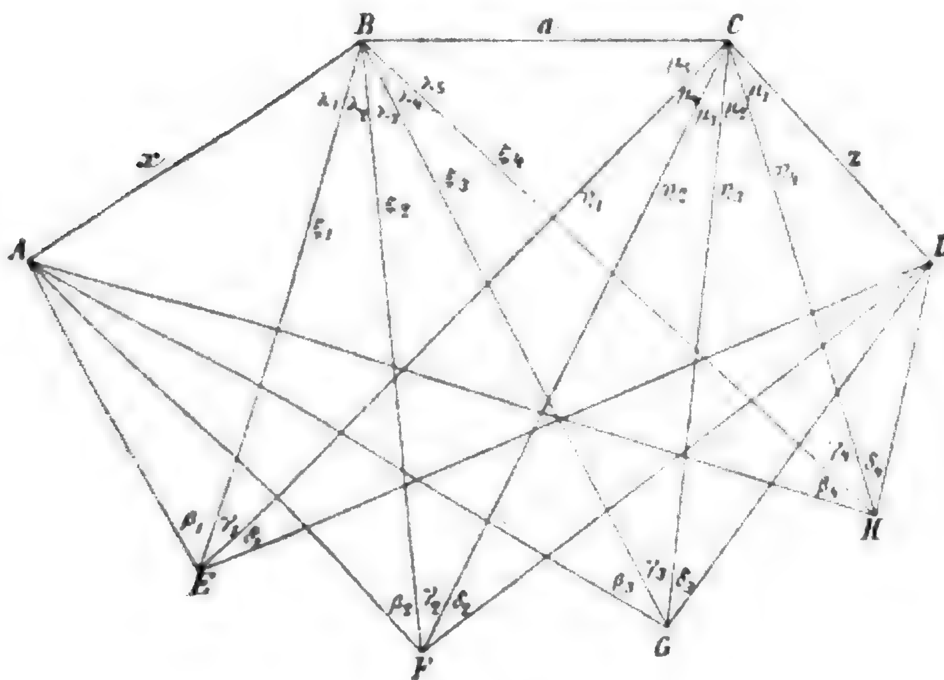


Fig. 1.

messen. Bezeichnet man die willkürliche Länge *BC* mit a, so erhält man für die Unbekannten x, z, ξ_i, η_i, λ_i, μ_i (die Bezeichnungen nach der Figur) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{a \sin \mu_5}{\sin \gamma_1} \\
\xi_2 &= \frac{a \sin (\mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_2} \\
\xi_3 &= \frac{a \sin (\mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_3} \\
\xi_4 &= \frac{a \sin (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_4}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{a \sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)}{\sin\gamma_1} \\
\eta_2 &= \frac{a \sin(\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)}{\sin\gamma_2} \\
\eta_3 &= \frac{a \sin(\lambda_4+\lambda_5)}{\sin\gamma_3} \\
\eta_4 &= \frac{a \sin\lambda_5}{\sin\gamma_4}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{\xi_1 \sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\lambda_1)} \\
&= \frac{\xi_2 \sin\beta_2}{\sin(\beta_2+\lambda_1+\lambda_2)} \\
&= \frac{\xi_3 \sin\beta_3}{\sin(\beta_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \\
&= \frac{\xi_4 \sin\beta_4}{\sin(\beta_4+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
z &= \frac{\eta_1 \sin\delta_1}{\sin(\delta_1+\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)} \\
&= \frac{\eta_2 \sin\delta_2}{\sin(\delta_2+\mu_1+\mu_2+\mu_3)} \\
&= \frac{\eta_3 \sin\delta_3}{\sin(\delta_3+\mu_1+\mu_2)} \\
&= \frac{\eta_4 \sin\delta_4}{\sin(\delta_4+\mu_1)}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\mu_5+\gamma_1 &= 180^\circ \\
\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\mu_4+\mu_5+\gamma_2 &= 180^\circ \\
\lambda_4+\lambda_5+\mu_3+\mu_4+\mu_5+\gamma_3 &= 180^\circ \\
\lambda_5+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5+\gamma_4 &= 180^\circ
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Als Unbekannte sind hier nicht die 12 Koordinaten der sechs Punkte *A*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, sondern nach Substitution der

Werte für $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ die 12 Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, x, z$ eingeführt. Die Gleichungen werden:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{a \sin \mu_5}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \lambda_1)} \\
&= \frac{a \sin(\mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2)} \\
&= \frac{a \sin(\mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \\
&= \frac{a \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_4} \cdot \frac{\sin \beta_4}{\sin(\beta_4 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
z &= \frac{a \sin \lambda_5}{\sin \gamma_4} \cdot \frac{\sin \delta_4}{\sin(\delta_4 + \mu_1)} \\
&= \frac{a \sin(\lambda_4 + \lambda_5)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \delta_3}{\sin(\delta_3 + \mu_1 + \mu_2)} \\
&= \frac{a \sin(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} \\
&= \frac{a \sin(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{\sin \delta_1}{\sin(\delta_1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

zu denen noch die Gleichungen (5) hinzutreten. Behält man von diesen die Unbekannten $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \mu_1, \mu_4, \mu_5$ bei, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2 &= \mu_4 + \gamma_2 - \gamma_1 & \lambda_3 &= 180° - (\lambda_4 + \lambda_5 + \mu_4 + \mu_5 + \gamma_2) \\
\mu_2 &= \lambda_4 + \gamma_3 - \gamma_4 & \mu_3 &= 180° - (\lambda_4 + \lambda_5 + \mu_4 + \mu_5 + \gamma_3)
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und durch Substitution

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a \sin \mu_5}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \lambda_1)} \\
&= \frac{a \sin(\mu_4 + \mu_5)}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_2 + \lambda_1 + \mu_4 + \gamma_2 - \gamma_1)}
\end{aligned} \quad (9)$$

$$x = \frac{a \sin(\lambda_4+\lambda_5+\gamma_3)}{\sin\gamma_3} \cdot \frac{\sin\beta_3}{\sin(\lambda_4+\lambda_5+\mu_5-\lambda_1-\beta_3+\gamma_1)}$$
$$= \frac{a \sin(\lambda_5+\gamma_4)}{\sin\gamma_4} \cdot \frac{\sin\beta_4}{\sin(\lambda_5+\mu_5-\lambda_1+\gamma_1-\beta_1)} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{a \sin\lambda_5}{\sin\gamma_4} \cdot \frac{\sin\delta_4}{\sin(\delta_4+\mu_1)} \\ &= \frac{a \sin(\lambda_4+\lambda_5)}{\sin\gamma_3} \cdot \frac{\sin\delta_3}{\sin(\delta_3+\mu_1+\lambda_4+\gamma_3-\gamma_4)} \\ &= \frac{a \sin(\mu_4+\mu_5+\gamma_2)}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\delta_2}{\sin(\mu_4+\mu_5+\lambda_5-\mu_1-\delta_2+\gamma_4)} \\ &= \frac{a \sin(\mu_5+\gamma_1)}{\sin\gamma_1} \cdot \frac{\sin\delta_1}{\sin(\mu_5+\lambda_5-\mu_1+\gamma_4-\delta_1)}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

aus denen durch Gleichsetzen der rechten Seiten sechs Gleichungen ohne x und z folgen.

Aus zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{\sin(x+A)}{\sin(x+B)} = \frac{M}{N}; \qquad \frac{\sin(x+C)}{\sin(x+D)} = \frac{P}{Q} \qquad (\alpha)$$

läßt sich x stets eliminieren. Es folgt:

$$\cot x = \frac{N\cos A - M\cos B}{-N\sin A + M\sin B} = \frac{Q\cos C - P\cos D}{-Q\sin C + P\sin D}$$

und daraus

$$\frac{P}{Q} = \frac{N\sin(A-C) - M\sin(B-C)}{N\sin(A-D) - M\sin(B-D)}$$

als Eliminationsgleichung.[1]

Aus den sechs Gleichungen, die aus (9) und (10) folgen, läßt sich daher λ_1 und μ_1 eliminieren und man erhält vier

[1] Ein Ausnahmefall tritt auf für $A = B$, $C = D$, welcher Fall die Beziehungen

$$M = N, \qquad P = Q$$

erfordert.

Gleichungen mit den vier Unbekannten $\lambda_4, \lambda_5, \mu_4, \mu_5$, welche durch Näherungsverfahren zu lösen sind. Die Art dieser Elimination soll an dem folgenden wichtigeren Falle gezeigt werden, bei dem sich übrigens die Lösung noch etwas einfacher gestaltet.

Seien A, B, C, D, E (Fig. 2) die fünf anvisierten, ihrer Lage nach gegeneinander unbekannten Punkte und F, G, H die

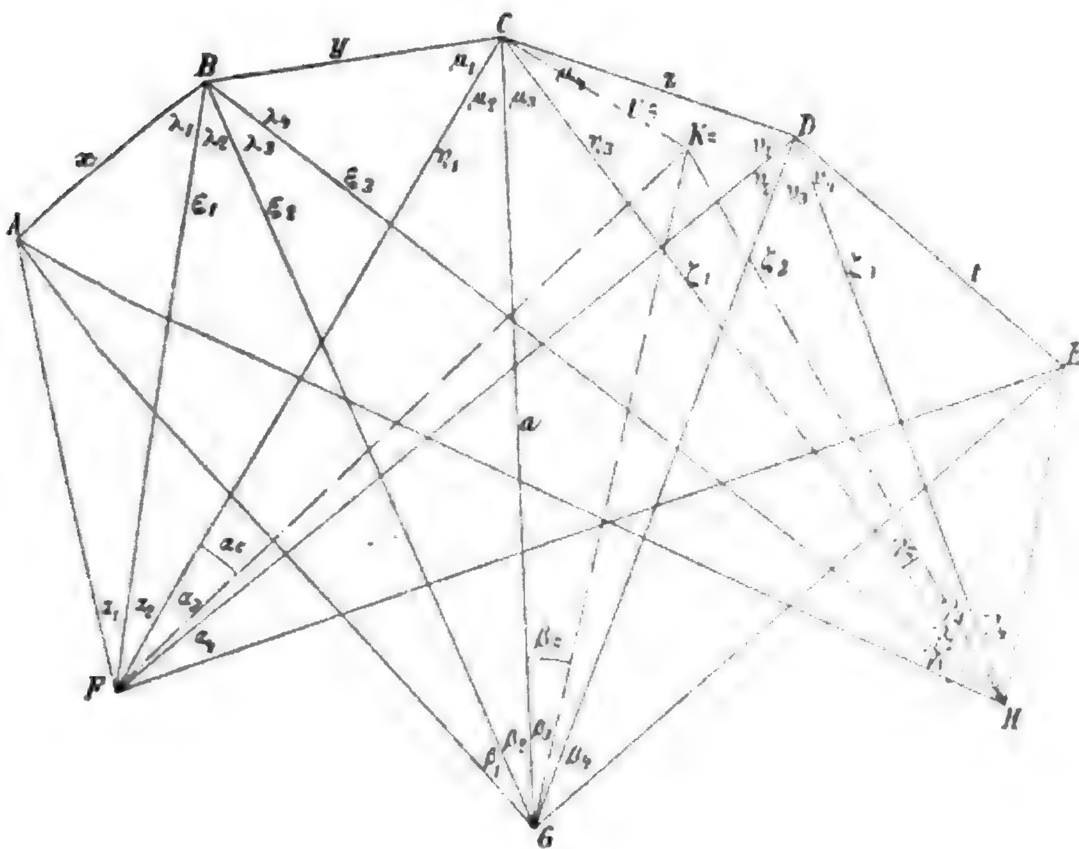


Fig. 2.

Standpunkte, in denen die 12 Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gemessen wurden. Bezeichnet man hier die Strecke CG mit a, so erhält man mit den aus der Figur folgenden Bezeichnungen die Gleichungen

$$
y = \frac{a \sin \beta_2}{\sin(\lambda_3 + \lambda_4)} \qquad \xi_2 = \frac{a \sin(\mu_1 + \mu_2)}{\sin(\lambda_3 + \lambda_4)}
$$

$$
z = \frac{a \sin \beta_3}{\sin(\nu_1 + \nu_2)} \qquad \zeta_2 = \frac{a \sin(\mu_3 + \mu_4)}{\sin(\nu_1 + \nu_2)} \tag{1}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{\xi_2 \sin\beta_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\beta_1)}\\
t &= \frac{\zeta_2 \sin\beta_4}{\sin(\nu_3+\nu_4+\beta_4)}
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{y \sin\mu_1}{\sin\alpha_2} & \eta_3 &= \frac{z\sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin\gamma_3}\\
\eta_1 &= \frac{y\sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin\alpha_2} & \zeta_3 &= \frac{z\sin\mu_4}{\sin\gamma_3}\\
x &= \frac{\xi_1\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\lambda_1)} & t &= \frac{\zeta_3\sin\gamma_4}{\sin(\nu_4+\gamma_4)}
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
z &= \frac{\eta_1\sin\alpha_3}{\sin\nu_1} & y &= \frac{\eta_3\sin\gamma_2}{\sin\lambda_4}\\
\zeta_1 &= \frac{\eta_1\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)}{\sin\nu_1} & \xi_3 &= \frac{\eta_3\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{\sin\lambda_4}\\
t &= \frac{\zeta_1\sin\alpha_4}{\sin(\nu_2+\nu_3+\nu_4+\alpha_4)} & x &= \frac{\xi_3\sin\gamma_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\gamma_1)}
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

wobei zwischen den Winkeln die Beziehungen bestehen:

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\mu_1+\alpha_2 &= 180^\circ\\
\lambda_1+\lambda_4+\mu_1+\mu_2+\beta_2 &= 180^\circ\\
\lambda_4+\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2 &= 180^\circ\\
\mu_2+\mu_3+\mu_4+\nu_1+\alpha_3 &= 180^\circ\\
\mu_3+\mu_4+\nu_1+\nu_2+\beta_3 &= 180^\circ\\
\mu_4+\nu_1+\nu_2+\nu_3+\gamma_3 &= 180^\circ
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

Durch Elimination der ξ, η, ζ erhält man zunächst

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{a\sin(\mu_1+\mu_2)}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\beta_1)}\\
y &= \frac{a\sin\beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)}\\
z &= \frac{a\sin\beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)}\\
t &= \frac{a\sin(\mu_3+\mu_4)}{\sin(\nu_1+\nu_2)}\cdot\frac{\sin\beta_4}{\sin(\nu_3+\nu_4+\beta_4)}
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{y \sin \mu_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1+\lambda_1)} \\
y &= \frac{z \sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \lambda_4} \\
z &= \frac{y \sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin \nu_1} \\
t &= \frac{z \sin \mu_4}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \gamma_4}{\sin(\nu_4+\gamma_4)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{z \sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{\sin \lambda_4} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\gamma_1)} \\
t &= \frac{y \sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)}{\sin \nu_1} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\sin \alpha_4}{\sin(\nu_2+\nu_3+\nu_4+\alpha_4)}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

und hieraus durch Elimination der y und z:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{a \sin(\mu_1+\mu_2) \sin \beta_1}{\sin(\lambda_3+\lambda_4) \sin(\lambda_1+\lambda_2+\beta_1)} \\
t &= \frac{a \sin(\mu_3+\mu_4) \sin \beta_4}{\sin(\nu_1+\nu_2) \sin(\nu_3+\nu_4+\beta_4)} \\
x &= \frac{a \sin \beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)} \cdot \frac{\sin \mu_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1+\lambda_1)} \\
t &= \frac{a \sin \beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)} \cdot \frac{\sin \mu_4}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \gamma_4}{\sin(\nu_4+\gamma_4)}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a \sin \beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)} &= \frac{a \sin \beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)} \cdot \frac{\sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \lambda_4} \\
\frac{a \sin \beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)} &= \frac{a \sin \beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)} \cdot \frac{\sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin \nu_1}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$x = \frac{a \sin \beta_3}{\sin(\nu_1+\nu_2)} \cdot \frac{\sin(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{\sin \gamma_3} \cdot \frac{\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{\sin \lambda_4} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\gamma_1)}$$

$$t = \frac{a \sin \beta_2}{\sin(\lambda_3+\lambda_4)} \cdot \frac{\sin(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)}{\sin \nu_1} \cdot \frac{\sin \alpha_4}{\sin(\nu_2+\nu_3+\nu_4+\alpha_4)} \qquad (10)$$

Eliminiert man nun mit Hilfe der aus (4) folgenden Beziehungen

$$\lambda_4 = 180° - (\mu_1+\mu_2+\mu_3) - \gamma_2 \qquad \nu_1 = 180° - (\mu_2+\mu_3+\mu_4) - \alpha_3$$

$$\lambda_3 = \mu_3+\gamma_2-\beta_2 \qquad \nu_2 = \mu_2+\alpha_3-\beta_3$$

$$\lambda_3 = \mu_2+\beta_2-\alpha_2 \qquad \nu_3 = \mu_3+\beta_3-\gamma_3$$

die Winkel $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, so erhält man

$$\frac{a \sin(\mu_1+\mu_2) \sin \beta_1}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2) \sin(\lambda_1+\mu_2+\beta_2-\alpha_2+\beta_1)} =$$

$$= \frac{a \sin \beta_2 \sin \mu_1 \sin \alpha_1}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2) \sin \alpha_2 \sin(\lambda_1+\alpha_1)} =$$

$$= \frac{a \sin \beta_3 \sin(\mu_4+\gamma_3) \sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3) \sin \gamma_1}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3) \sin \gamma_3 \sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2) \sin(\lambda_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2-\alpha_2+\gamma_1)} \qquad (11)$$

$$\frac{a \sin(\mu_3+\mu_4)\sin\beta_4}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin(\nu_4+\mu_3+\beta_3-\gamma_3+\beta_4)} =$$

$$= \frac{a \sin\beta_3 \sin\mu_4 \sin\gamma_4}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin\gamma_3\sin(\nu_4+\gamma_4)} =$$

$$= \frac{a \sin\beta_2 \sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)\sin\alpha_4}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin\alpha_2\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)\sin(\nu_4+\mu_2+\mu_3+\alpha_3-\gamma_3+\alpha_4)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a\sin\beta_2}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)} &= \frac{a\sin\beta_3}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)}\cdot\frac{\sin(\mu_4+\gamma_3)}{\sin\gamma_3}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)}\\
\frac{a\sin\beta_3}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)} &= \frac{a\sin\beta_2}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)}\cdot\frac{\sin(\mu_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

daher sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten $\lambda_1, \nu_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Die beiden ersten Gleichungsgruppen haben wieder die Form der Gleichungen (α), p. 12, und es lassen sich daher mit Hilfe der dort abgeleiteten Beziehungen die Größe λ_1 aus den ersten beiden und ν_4 aus den letzten beiden (11) eliminieren und man erhält vier Eliminationsgleichungen, die in der Form geschrieben werden sollen:

$$\left.\begin{aligned}
A &= A' - A''\\
B &= B' - B''\\
C &= C'\\
D &= D',
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\sin\beta_3 \sin(\mu_4+\gamma_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\sin\gamma_1\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin\alpha_2}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin\gamma_3\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)}\\
A' &= \frac{\sin(\mu_1+\mu_2)\sin\beta_1\sin\alpha_2\sin(\mu_2+\mu_3+\gamma_2+\gamma_1-\alpha_2-\alpha_1)}{\sin(\mu_2+\beta_2+\beta_1-\alpha_2-\alpha_1)}\\
A'' &= \frac{\sin\beta_2\sin\mu_1\sin\alpha_1\sin(\mu_3+\gamma_2+\gamma_1-\beta_2-\beta_1)}{\sin(\mu_2+\beta_2+\beta_1-\alpha_2-\alpha_1)}\\
B &= \frac{\sin\beta_2\sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)\sin\alpha_4\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin\gamma_3}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin\alpha_2\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)}\\
B' &= \frac{\sin(\mu_3+\mu_4)\sin\beta_4\sin\gamma_3\sin(\mu_2+\mu_3+\alpha_3+\alpha_4-\gamma_3-\gamma_4)}{\sin(\mu_3+\beta_3+\beta_4-\gamma_3-\gamma_4)}\\
B'' &= \frac{\sin\beta_3\sin\mu_4\sin\gamma_4\sin(\mu_2+\alpha_3+\alpha_4-\beta_3-\beta_4)}{\sin(\mu_3+\beta_3+\beta_4-\gamma_3-\gamma_4)}\\
C &= \frac{\sin\beta_2}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)}\\
C' &= \frac{\sin\beta_3\sin(\mu_4+\gamma_3)\sin\gamma_2}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin\gamma_3\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)}\\
D &= \frac{\sin\beta_3}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)}\\
D' &= \frac{\sin\beta_2\sin(\mu_1+\alpha_2)\sin\alpha_3}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin\alpha_2\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Mit Hilfe der letzten beiden Gleichungen (13) lassen sich die ersten beiden noch vereinfachen; es wird nämlich

$$\frac{\sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)} = \frac{\sin\beta_3\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3\sin\beta_2}$$

$$\frac{\sin(\mu_4+\gamma_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)} = \frac{\sin\beta_2\sin\gamma_3}{\sin\beta_3\sin\gamma_2},$$

demnach

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\sin\gamma_1\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{\sin\gamma_2}\\
B &= \frac{\sin\alpha_4\sin\gamma_3\sin\beta_3\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)}{\sin\alpha_3}
\end{aligned}\right\}\quad(14a)$$

Führt man diese Werte ein, befreit von Nennern, und setzt für die bekannten, nur von den gemessenen Winkeln abhängigen Größen:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \beta_2+\beta_1-\alpha_2-\alpha_1 & \vartheta_1 &= \beta_3+\beta_4-\gamma_3-\gamma_4 \\ \varkappa_2 &= \gamma_2+\gamma_1-\alpha_2-\alpha_1 & \vartheta_2 &= \alpha_3+\alpha_4-\gamma_3-\gamma_4 \\ \varkappa_3 &= \gamma_2+\gamma_1-\beta_2-\beta_1 & \vartheta_3 &= \alpha_3+\alpha_4-\beta_3-\beta_4 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= +\sin\gamma_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_2 & n_1 &= +\sin\alpha_4 \sin\gamma_3 \sin\beta_3 \\ m_2 &= -\sin\gamma_2 \sin\alpha_2 \sin\beta_1 & n_2 &= -\sin\alpha_3 \sin\gamma_3 \sin\beta_4 \\ m_3 &= +\sin\gamma_2 \sin\alpha_1 \sin\beta_2 & n_3 &= +\sin\alpha_3 \sin\gamma_4 \sin\beta_3 \\ & & p_1 &= +\sin\alpha_3 \sin\beta_2 \\ & & p_2 &= -\sin\beta_3 \sin\alpha_2 \\ & & q_1 &= +\sin\beta_3 \sin\gamma_2 \\ & & q_2 &= -\sin\beta_2 \sin\gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

so werden die vier Gleichungen[1]

$$\left.\begin{aligned} E = {} & m_1 \sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\sin(\mu_2+\varkappa_1)+ \\ & +m_2 \sin(\mu_1+\mu_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\varkappa_2)+ \\ & +m_3 \sin\mu_1 \sin(\mu_3+\varkappa_3)=0 \\ F = {} & n_1 \sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4)\sin(\mu_3+\vartheta_1)+ \\ & +n_2 \sin(\mu_3+\mu_4)\sin(\mu_2+\mu_3+\vartheta_2)+ \\ & +n_3 \sin\mu_4 \sin(\mu_2+\vartheta_3)=0 \\ G = {} & p_1 \sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)+ \\ & +p_2 \sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3)=0 \\ H = {} & q_1 \sin(\mu_4+\gamma_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)+ \\ & +q_2 \sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2)=0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Diese vier Gleichungen mit den vier Unbekannten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 müssen nach Berechnung der Konstanten mittels (15), (16) durch Näherungen gelöst werden. Dabei können die

[1] Dabei ist

$$\varkappa_1+\varkappa_3=\varkappa_2$$
$$\vartheta_1+\vartheta_3=\vartheta_2.$$

Differentialquotienten empirisch oder durch analytische Formeln ermittelt werden. Für den letzteren Fall hat man, wenn A_0, A'_0, A''_0, B_0, B'_0, B''_0, C_0, C'_0, D_0, D'_0 die numerischen Werte der beiden Seiten der vier Gleichungen (13) für gewisse Näherungswerte der Unbekannten sind, die Beziehungen

$$A_0+dA = A'_0+dA'_0-A''_0-dA''_0$$

und ebenso für die drei anderen, so daß man

$$\begin{aligned} dA'-dA''-dA &= A_0-(A'_0-A''_0) \\ dB'-dB''-dB &= B_0-(B'_0-B''_0) \\ dC'-dC &= C_0-C'_0 \\ dD'-dD &= D_0-D'_0 \end{aligned}$$

erhält. Es findet sich aber sofort:

$$\begin{aligned} dA &= a_1 d\mu_1+a_2 d\mu_2+a_3 d\mu_3+a_4 d\mu_4 \\ dA'-dA'' &= (a'_1-a''_1)d\mu_1+(a'_2-a''_2)d\mu_2+(a'_3-a''_3)d\mu_3 \\ dB &= b_1 d\mu_1+b_2 d\mu_2+b_3 d\mu_3+b_4 d\mu_4 \\ dB'-dB'' &= (b'_2-b''_2)d\mu_2+(b'_3-b''_3)d\mu_3+(b'_4-b''_4)d\mu_4 \\ dC &= c_1 d\mu_1+c_2 d\mu_2 \\ dC' &= c'_1 d\mu_1+c'_2 d\mu_2+c'_3 d\mu_3+c'_4 d\mu_4 \\ dD &= d_3 d\mu_3+d_4 d\mu_4 \\ dD' &= d'_1 d\mu_1+d'_2 d\mu_2+d'_3 d\mu_3+d'_4 d\mu_4, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $a_1 \ldots d'_4$ nach einigen einfachen Zusammenfassungen in die folgende Form gebracht werden können, nach welcher ihre Berechnung sich äußerst einfach gestaltet.

Setzt man:[1]

$$\left.\begin{aligned} \cot\mu_1 &= m_1 & \cot(\mu_1+\alpha_2) &= n_1 \\ \cot(\mu_1+\mu_2) &= m_2 & \cot(\mu_4+\gamma_3) &= n_4 \\ \cot(\mu_3+\mu_4) &= m_3 & \cot(\mu_1+\mu_2+\beta_2) &= p_1 \\ \cot\mu_4 &= m_4 & \cot(\mu_3+\mu_4+\beta_3) &= p_4 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

[1] Die in den Formeln (18) auftretenden m, n, p, q sind mit den in (15), (16), (17) auftretenden nicht zu verwechseln; die in (18) vorkommenden stehen nur in Beziehung zu den Formeln (13), (14).

$$\left.\begin{aligned}
\cot(\mu_2+\alpha_3+\alpha_4-\beta_3-\beta_4) &= n_2 \\
\cot(\mu_2+\beta_2+\beta_1-\alpha_2-\alpha_1) &= p_2 \\
\cot(\mu_3+\gamma_2+\gamma_1-\beta_2-\beta_1) &= n_3 \\
\cot(\mu_3+\beta_3+\beta_4-\gamma_3-\gamma_4) &= p_3 \\
\cot(\mu_1+\mu_2+\mu_3) &= q_1 \\
\cot(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\gamma_2) &= r_1 \\
\cot(\mu_2+\mu_3+\mu_4) &= q_4 \\
\cot(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\alpha_3) &= r_4 \\
\cot(\mu_2+\mu_3+\gamma_2+\gamma_1-\alpha_2-\alpha_1) &= s \\
\cot(\mu_2+\mu_3+\alpha_3+\alpha_4-\gamma_3-\gamma_4) &= t,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

so wird

$$\begin{aligned}
a_1 = a_2 &= A_0(p_1+q_1-r_1) & a_1' &= A_0' m_2 & a_1'' &= A_0'' m_1 \\
a_3 &= A_0(q_1-p_4-r_1) & a_2' &= A_0'(m_2+s-p_2) & a_2'' &= -A_0'' p_2 \\
a_4 &= A_0(n_4-p_4) & a_3' &= A_0' s & a_3'' &= A_0'' n_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= B_0(n_1-p_1) & b_2' &= B_0' t & b_2'' &= B_0'' n_2 \\
b_2 &= B_0(q_4-p_1-r_4) & b_3' &= B_0'(m_3+t-p_3) & b_3'' &= -B_0'' p_3 \\
b_3 = b_4 &= B_0(q_4+p_4-r_4) & b_4' &= B_0' m_3 & b_4'' &= B_0'' m_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 = c_2 &= -C_0 p_1 & d_3 = d_4 &= -D_0 p_4 \\
c_1' = c_2' &= -C_0' r_1 & d_1' &= +D_0'(n_1-p_1) \\
c_3' &= -C_0'(p_4+r_1) & d_2' &= -D_0'(p_1+r_4) \\
c_4' &= +C_0'(n_4-p_4) & d_3' = d_4' &= -D_0' r_4 .
\end{aligned}$$

Im Sommer 1903 hatte ich in Laufen bei Ischl von drei Standpunkten: B (Bahnhof), L_o (erhöhter Standpunkt am Abhange der Laufener Höhen), L_u (Solenweg längs der Laufener Höhen) drei photographische Aufnahmen gemacht, auf denen als besonders charakteristische Punkte die Kirchturmspitze K, die Turmspitze der Kapelle des Rekonvaleszentenheims K' und die Dachgiebel a, b, c von drei Häusern zu identifizieren waren. Ich hatte wohl mittels einer Bussole gepeilt, um nach der Methode des »Flying survey« mittels dreier anvisierter Objekte den Plan zu zeichnen, allein die Peilungen waren eben

noch auf Grade zu erhalten, während sich aus den Photogrammen die folgenden Winkel ergaben (Messungen an den Negativen):

$$\alpha_1 = -\ 7°\ 44'7 \qquad \beta_1 = +12°\ 43'9 \qquad \gamma_1 = +11°\ 47'5$$
$$\alpha_2 = +\ 2\ \ 41\cdot 7 \qquad \beta_2 = +\ 8\ \ 50\cdot 7 \qquad \gamma_2 = +\ 5\ \ 25\cdot 6$$
$$\alpha_3 = +15\ \ 23\cdot 7 \qquad \beta_3 = +17\ \ \ 9\cdot 1 \qquad \gamma_3 = -\ 4\ \ 19\cdot 0$$
$$\alpha_4 = +\ 7\ \ \ 8\cdot 9 \qquad \beta_4 = +12\ \ 39\cdot 5 \qquad \gamma_4 = -\ 2\ \ 59\cdot 4.$$

Hiermit folgt:

$$\varkappa_1 = +26°\ 37'6 \qquad \vartheta_1 = +37°\ \ 7'0$$
$$\varkappa_2 = +22\ \ 16\cdot 1 \qquad \vartheta_2 = +29\ \ 51\cdot 0$$
$$\varkappa_3 = -\ 4\ \ 21\cdot 5 \qquad \vartheta_3 = -\ 7\ \ 16\cdot 0$$

$$\log m_1 = 7\cdot 169507 \qquad \log n_1 = 7\cdot 441248_n$$
$$\log m_2 = 6\cdot 991220_n \qquad \log n_2 = 7\cdot 641348$$
$$\log m_3 = 7\cdot 292185_n \qquad \log n_3 = 7\cdot 611047_n$$

$$\log p_1 = 8\cdot 610867$$
$$\log p_2 = 8\cdot 141954_n$$
$$\log q_1 = 8\cdot 445439$$
$$\log q_2 = 8\cdot 063464.$$

Die Differentialquotienten habe ich empirisch bestimmt, indem ich erst mit den Näherungswerten

$$\mu_1 = +18°\ 0', \qquad \mu_2 = +50°\ 30',$$
$$\mu_3 = +50°\ 0', \qquad \mu_4 = -12°\ 30'$$

und dann mit diesen aus den um 2° geänderten Werten eines der μ die Werte E, F, G, H rechnete. Diese Rechnung zeigte, daß die Annahmen für die μ ziemlich fehlerhaft waren und mußte die Rechnung einschließlich der Berechnung der Differentialquotienten ein zweitesmal gemacht werden, wobei die fünf Hypothesen zu grunde gelegt wurden:

μ_1 . . .	16° 30′	17° 30′	16° 30′	16° 30′	16° 30′
μ_2 . . .	49 40	49 40	50 40	49 40	49 40
μ_3 . . .	60 40	60 40	60 40	61 40	60 40
μ_4 . . .	−12 30	−12 30	−12 30	−12 30	−11 30

Hiefür ergaben sich die Werte:

E	+0·002591	−0·002149	+0·002115	+0·001608 +0·001608
F	−0·002606	−0·002606	−0·005189	−0·002470 −0·003384
G . . .	−0·011389	+0·043992	−0·007502	+0·007615 +0·007615
H . . .	−0·001115	−0·017102	−0·017102	−0·007551 +0·050136,

demnach die Differentialquotienten:

$dE:d\mu_i$ . . .	−0·00474	−0·00048	−0·00098	—
$dF:d\mu_i$ . . .	—	−0·00258	+0·00014	−0·00078
$dG:d\mu_i$ . . .	+0·05538	+0·00389	+0·01900	+0·01900
$dH:d\mu_i$ . . .	−0·01598	−0·01599	−0·00644	+0·05125

Damit erhält man die Gleichungen:

$$-474\,d\mu_1 - 48\,d\mu_2 - 98\,d\mu_3 \quad * \quad = -259$$
$$* \quad -258\,d\mu_2 + 14\,d\mu_3 - 78\,d\mu_4 = +261$$
$$+5538\,d\mu_1 + 389\,d\mu_2 + 1900\,d\mu_3 + 1900\,d\mu_4 = +1139$$
$$-1599\,d\mu_1 - 1599\,d\mu_2 - 644\,d\mu_3 + 5125\,d\mu_4 = +111,$$

aus denen sich

$$d\mu_1 = +1^\circ 10, \qquad d\mu_2 = -1^\circ 05,$$
$$d\mu_3 = -2^\circ 16, \qquad d\mu_4 = -0^\circ 23$$

ergab; die korrigierten Werte der μ ließen noch in *E*, *F*, *G*, *H* die Fehler

−54, +68, +410, −185

und eine zweite Auflösung (mit Neurechnung der Differentialquotienten) gab noch die weiteren Korrektionen:

$$d\mu_1' = +0^\circ 17, \qquad d\mu_2' = -0^\circ 25,$$
$$d\mu_3' = -0^\circ 15, \qquad d\mu_4' = -0^\circ 08.$$

Die noch übrigbleibenden Fehler wurden zu einer dritten (allerdings überflüssigen) Verbesserung verwendet, welche noch die Korrektionen

$$+0'6, \quad -1'8, \quad - \quad -1'0$$

ergab, so daß die definitiven Werte für die Winkel resultierten:

$\mu_1 = \quad 17^\circ\ 40'6$	....	$\nu_1 = 70^\circ\ 38'1$
$\mu_2 = \quad 48\ \ 23\cdot2$	$\lambda_2 = 54^\circ\ 32'2$	$\nu_2 = 46\ \ 37\cdot8$
$\mu_3 = \quad 58\ \ 20\cdot0$	$\lambda_3 = 54\ \ 54\cdot9$	$\nu_3 = 79\ \ 48\cdot1$
$\mu_4 = -12\ \ 45\cdot0$	$\lambda_4 = 50\ \ 10\cdot6$	....

Mit diesen Werten und unter Zugrundelegung des Wertes $a = 1\cdot0000$ lieferte dann die Rechnung für die Distanzen:

$y = 0\cdot1593$	$\xi_1 = 1\cdot0284$	$\xi_2 = 0\cdot9466$	$\xi_3 = 1\cdot3898$
$a = 1\cdot0000$	$\eta_1 = 1\cdot1790$	$\eta_2 = a$	$\eta_3 = 1\cdot2936$
$z = 0\cdot3318$	$\zeta_1 = 1\cdot2467$	$\zeta_2 = 0\ 8035$	$\zeta_3 = 0\cdot9728,$

welche Werte der Zeichnung zugrunde gelegt werden. Die acht Punkte $B, L_o, L_u, K, K', a, b, c$ bildeten hiernach das Gerippe, aus welchem durch die Aufnahmen von B, L_o, L_u (und zwei weiteren gegenüberliegenden Punkten) der Plan des Häuserkomplexes zusammengestellt werden konnte.

Die Methode bietet übrigens noch einen weiteren Vorteil, indem jeder folgende dreifach beobachtete Punkt K_ρ eine einfache Gleichung ebenfalls in denselben vier Unbekannten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ gibt. Man hat nämlich für einen solchen Punkt mit den aus der Figur folgenden Bezeichnungen:

$$u_\rho = \eta_1 \frac{\sin \alpha_\rho}{\sin(\alpha_\rho + \mu_\rho + \mu_2)} = a \frac{\sin \beta_\rho}{\sin(\beta_\rho + \mu_\rho)} =$$
$$= \eta_3 \frac{\sin \gamma_\rho}{\sin(\gamma_\rho + \mu_\rho - \mu_3)},$$

demnach durch Elimination von η_{11} und η_{13}, sodann der λ und ν mittels der Gleichungen (4), p. 14:

$$\frac{a \sin\beta_2 \sin(\mu_1+\alpha_2)\sin\alpha_p}{\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin\alpha_2\sin(\alpha_p+\mu_p+\mu_2)} = \frac{a\sin\beta_p}{\sin(\beta_p+\mu_p)} =$$

$$= \frac{a\sin\beta_3\sin(\mu_4+\gamma_3)\sin\gamma_p}{\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin\gamma_3\sin(\gamma_p+\mu_p-\mu_3)}.$$

Aus diesen erhält man wieder zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin(\mu_p+\mu_2+\alpha_p)}{\sin(\mu_p+\beta_p)} = \frac{\sin\alpha_p\sin\beta_2\sin(\mu_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2\sin\beta_p\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)}$$

$$\frac{\sin(\mu_p-\mu_3+\gamma_p)}{\sin(\mu_p+\beta_p)} = \frac{\sin\gamma_p\sin\beta_3\sin(\mu_4+\gamma_3)}{\sin\gamma_3\sin\beta_p\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)},$$

aus denen sich μ_p nach der p. 12 erwähnten Methode eliminieren läßt. Es folgt:

$$\sin\gamma_p\sin\beta_3\sin\alpha_2\,.\sin(\mu_4+\gamma_3)\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin(\mu_2+\alpha_p-\beta_p)+$$
$$+\sin\alpha_p\sin\beta_2\sin\gamma_3\,.\sin(\mu_1+\alpha_2)\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\,.$$
$$.\sin(\mu_3+\beta_p-\gamma_p)-\sin\beta_p\sin\alpha_2\sin\gamma_3\,.$$
$$.\sin(\mu_1+\mu_2+\beta_2)\sin(\mu_3+\mu_4+\beta_3)\sin(\mu_2+\mu_3+\alpha_p-\gamma_p)=0$$

und diese Gleichung kann in derselben Weise wie die Gleichungen (13) oder (17) durch Einführung von Näherungswerten für μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 in eine lineare Gleichung zwischen den Korrektionen $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$, $d\mu_4$ verwandelt wurden. Hat man eine Reihe von überzähligen Punkten K, so wird die Bestimmung dieser vier Unbekannten $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$, $d\mu_4$ nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen können, wodurch die gegenseitige Lage der acht Fixpunkte umso sicherer bestimmt wird.

Die innere Arbeit bei der isothermen Ausdehnung des trocken gesättigten Wasserdampfes

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

In der Abhandlung »Die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei konstantem Drucke«[1] habe ich gefunden, daß die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei konstantem Drucke von der Kondensationsgrenze bis zu jener Adiabate, welche die Kondensationsgrenze im Punkte $t = 100°$ C., $p = 1$ Atm. trifft, für jeden Druck denselben mittleren Wert hat und zwar den Wert 0·5256. Später bin ich in der Abhandlung »Die beiden spezifischen Wärmen des Wasserdampfes«[2] zu dem Ergebnisse gelangt, daß für den überhitzten Wasserdampf in dem Intervall, in welchem die von mir aus den Versuchen des Herrn Battelli abgeleitete Zustandsgleichung des Wasserdampfes gilt, sowohl die spezifische Wärme bei konstantem Druck als auch die spezifische Wärme bei konstantem Volumen Konstante sind und die Werte haben:

$$c_p = 0 \cdot 4741, \quad c_v = 0 \cdot 3639, \quad \frac{c_p}{c_v} = 1 \cdot 3026. \qquad 1)$$

Diese Werte gelten nur für das Gebiet des überhitzten Wasserdampfes, aber nicht mehr für die Kondensationsgrenze.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVI, Abt. IIa., p. 654 (1897).
[2] Diese Sitzungsber., Bd. CVIII, Abt. IIa., p. 395 (1899).

Aus der Gegenüberstellung der beiden Resultate habe ich schon damals geschlossen, daß, wenn trocken gesättigter Wasserdampf überhitzt wird, in der Nähe der Kondensationsgrenze eine innere Arbeit zu leisten ist. Ich will nun im folgenden diese innere Arbeit näher bestimmen.

Ist die einzige Kraft, welche auf einen Körper wirkt, ein auf dessen Oberfläche wirkender Druck p, welcher in allen Punkten der Oberfläche gleich stark und überall senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist, so hat das Prinzip der Energie den Ausdruck

$$dQ = dU + pdv, \tag{2}$$

wo U die Energie der Masseneinheit des Körpers, v das spezifische Volumen und dQ die der Masseneinheit von außen zugeführte Wärme, gemessen nach mechanischem Maße, darstellen. Ist die Zustandsänderung umkehrbar, so erhalten wir für dU den Ausdruck:

$$dU = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + C_p dT, \tag{3}$$

worin T die absolute Temperatur und C_p die spezifische Wärme des Körpers bei konstantem Drucke, gemessen nach mechanischem Maße, bedeuten. Und erfolgt in letzterem Falle die Zustandsänderung bei konstanter Temperatur, so haben wir $T =$ const. und $dT = 0$ zu setzen und erhalten:

$$dU = -\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right] dp. \tag{4}$$

Ich habe aus den Versuchen des Herrn Battelli[1] für den Wasserdampf zwischen der Isotherme von $-6\cdot16°$ C. und der Isotherme von $+231\cdot41°$ C. die Zustandsgleichung:[2]

$$p(v + 0\cdot008402) = 46\cdot698\, T \tag{5}$$

---

[1] A. Battelli, Mem. della r. acad. di Torino. Ser. II, t. XLIII, 1893, p. 63 bis 98.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 108, Abt. IIa., 1899, p. 1058.

abgeleitet, worin v das Volumen von 1 *kg* Wasserdampf, in Kubikmeter gemessen, und p den Druck, in Kilogramm pro Quadratmeter gemessen, bedeuten. Diese Gleichung gilt bis in die Nähe der Kondensationsgrenze, dagegen nicht mehr für den Zustand der Sättigung, wie ich a. a. O. p. 1064 und 1065 gezeigt habe. Eine Ausnahme besteht nur bei der Temperatur 49·46°; bei dieser Temperatur wird die obige Zustandsgleichung auch von dem gesättigten Wasserdampf erfüllt. Das Volumen des gesättigten Wasserdampfes ist bei allen Temperaturen oberhalb 49·46° kleiner als dasjenige Volumen, welches unsere Zustandsgleichung bei demselben Druck und bei derselben Temperatur ergibt, hingegen bei allen Temperaturen unterhalb 49·46° größer. Daß der Wasserdampf auch für diejenigen Isothermen, welche tiefer als —6·16° liegen, unsere Zustandsgleichung erfüllt, unterliegt wohl keinem Zweifel.

Aus der Zustandsgleichung 5) folgt:

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{46\cdot 698\,T}{p}, \qquad p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -(v+0\cdot 008402);$$

daher gibt die Gleichung 4):

$$dU = -\frac{46\cdot 698\,T - p(v+0\cdot 008402)}{p}\,dp. \qquad 6)$$

Betrachten wir nun die Zustandsänderung des Wasserdampfes längs einer Isotherme, so sehen wir, daß bis in die Nähe der Kondensationsgrenze $dU = 0$ ist. Dies bedeutet, daß $dQ = pdv$ ist oder daß bei einer umkehrbaren isothermen Ausdehnung die von außen zugeführte Wärme ebenso groß ist als die nach außen abgegebene Arbeit und umgekehrt, daß die bei einer umkehrbaren isothermen Zusammendrückung nach außen abgegebene Wärme ebenso groß ist als die von außen zugeführte Arbeit. Ist dies der Fall, dann gibt es keine innere Arbeit, also auch keine inneren Kräfte. Für die Isotherme $t = 49\cdot 46°$ gilt dies bis zur Kondensationsgrenze, daher ist für diese Isotherme ausnahmslos $dU = 0$ oder $U = \text{const.}$ Bei den andern Isothermen hört aber in der Nähe der Kondensationsgrenze die Gleichung $dU = 0$ zu gelten auf, weil dort der

Ausdruck $46 \cdot 698\, T - p(v + 0 \cdot 008402)$ aufhört, gleich Null zu sein. Gehen wir also auf diesen Isothermen zur Kondensationsgrenze über oder gehen wir umgekehrt auf den Isothermen von der Kondensationsgrenze zu den überhitzten Zuständen über, so wird immer eine innere Arbeit (positiv oder negativ) geleistet.

Die Größe dieser Arbeit ergibt sich folgendermaßen: Hat auf der Isotherme $t =$ const. die Energie der Masseneinheit des Wasserdampfes einerseits in der Kondensationsgrenze den Wert U'_t und andrerseits in dem Gebiete des überhitzten Dampfes, wo die Zustandsgleichung gilt, den Wert U_t, so ist $U_t - U'_t$ gleich der ganzen innern Arbeit, welche bei der isothermen Ausdehnung des trocken gesättigten Wasserdampfes zu leisten ist. Für die Temperatur $49 \cdot 46°$ besteht, wie gesagt, eine Ausnahme, für diese Temperatur ist nämlich:

$$U_{49 \cdot 46} - U'_{49 \cdot 46} = 0. \qquad 7)$$

Für alle andern Temperaturen ist $U_t - U'_t$ von Null verschieden. Wir haben nun U'_t zu berechnen.

Wir betrachten zu dem Ende die Energie von 1 *kg* Wasser bei der Temperatur 0° und bei dem Drucke $p = 4 \cdot 6$ *mm* Quecksilber (Druck des gesättigten Wasserdampfes bei 0°) und bezeichnen diese Energie mit $\mathfrak{U}_0$. Nun erteilen wir diesem Wasser nacheinander zwei Zustandsänderungen. Die erste bestehe darin, daß wir bei der konstanten Temperatur 0° den Druck von $p = 4 \cdot 6$ *mm* auf denjenigen Wert P erhöhen, welcher gleich der Spannung des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur t ist. Wegen der ungemein kleinen Zusammendrückbarkeit des Wassers ist hier die Änderung der Energie so klein, daß wir davon ganz absehen können; die Energie wird also auch nachher gleich $\mathfrak{U}_0$ zu setzen sein. Hierauf erteilen wir dem Wasser die zweite Zustandsänderung. Sie bestehe darin, daß wir dem Wasser bei dem konstanten Drucke P so lange Wärme zuführen, bis alles in gesättigten Dampf von der Temperatur $t°$ verwandelt ist. Die zugeführte Wärme ist gleich der Regnault'schen Gesamtwärme, nämlich $606 \cdot 50 + 0 \cdot 305\, t$ cal. Nach außen wird die Arbeit $P(s - \sigma)$ geleistet, wo s das Volumen des Dampfes und σ das Volumen

der Flüssigkeit bedeuten. Daher ist die Änderung der Energie gleich

$$U'_t - \mathfrak{U}_0 = J(606 \cdot 50 + 0 \cdot 305\,t) - P(s - \sigma),$$

wo J das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Setzen wir $J = \frac{1}{A}$ und $s - \sigma = u$, so wird:

$$A(U'_t - \mathfrak{U}_0) = 606 \cdot 50 + 0 \cdot 305\,t - APu. \qquad 8)$$

Man bezeichnet nach H. Zeuner Apu als die »äußere latente Wärme« und den Ausdruck $606 \cdot 50 + 0 \cdot 305\,t - APu$ als die »Dampfwärme«. Es ist also $A(U'_t - \mathfrak{U}_0)$ gleich der Dampfwärme.

Bezeichnen wir die Dampfwärme bei $t°$ kurz mit D_t, so ist:

$$A(U'_t - \mathfrak{U}_0) = D_t. \qquad 8a)$$

H. Zeuner hat in seinem Werke »Technische Thermodynamik«, II., Anhang, Tab. 1 *b*, für den Wasserdampf die Werte der Dampfwärme von $-20°$ bis $+200°$ zusammengestellt und ich habe diese Werte in der folgenden Tabelle in die zweite Spalte gebracht. Wir erhalten daraus zunächst für $t = 49 \cdot 46°$:

$$A(U'_{49 \cdot 46} - \mathfrak{U}_0) = 586 \cdot 10 \text{ cal.} \qquad 9)$$

Was nun die Energie U_t des überhitzten Wasserdampfes anbelangt, so bleibt sie auf jeder Isotherme konstant und ist daher nur eine Funktion der Temperatur allein. Ferner ist:

$$AdU_t = c_v dt = 0 \cdot 3639\,dt,$$

daher

$$A(U_t - U_{49 \cdot 46}) = 0 \cdot 3639\,(t - 49 \cdot 46). \qquad 10)$$

Subtrahieren wir die Gleichung 9) von der Gleichung 8*a*), so wird:

$$A(U'_t - U'_{49 \cdot 46}) = D_t - 586 \cdot 10 \qquad 11)$$

und ziehen wir diese Gleichung von der Gleichung 10) ab, so wird:

$$A(U_t - U_{49 \cdot 46}) - A(U'_t - U'_{49 \cdot 46}) =$$
$$= 0 \cdot 3639(t - 49 \cdot 46) - D_t + 586 \cdot 10$$

oder wegen der Gleichung 7),

$$A(U_t - U'_t) = 568\cdot10 - D_t + 0\cdot3639\,t \text{ cal.} \qquad 11)$$

Dies ist die Wärme, welche der innern Arbeit äquivalent ist, die bei der isothermen Ausdehnung des trocken gesättigten Wasserdampfes geleistet wird. Die Werte hiefür stehen in der folgenden Tabelle in der dritten Spalte.

t°	D_t Kalorien	$A(U_t - U'_t)$ Kalorien	t°	D_t Kalorien	$A(U_t - U'_t)$ Kalorien
−20	570·83	−10·01	95	595·71	+ 6·96
−15	572·00	− 9·36	100	596·79	+ 7·70
−10	573·15	− 8·69	105	597·89	+ 8·42
− 5	574·30	− 8·02	110	599·00	+ 9·13
0	575·43	− 7·33	115	600·12	+ 9·83
5	576·55	− 6·63	120	601·24	+10·53
10	577·66	− 5·92	125	602·37	+11·22
15	578·76	− 5·20	130	603·52	+11·89
20	579·84	− 4·46	135	604·66	+12·57
25	580·92	− 3·72	140	605·82	+13·23
30	581·99	− 2·97	145	606·99	+13·88
35	583·06	− 2·22	150	608·16	+14·53
40	584·11	− 1·45	155	609·35	+15·15
45	585·16	− 0·68	160	610·54	+15·78
50	586·21	+ 0·09	165	611·74	+16·40
55	587·25	+ 0·86	170	612·95	+17·01
60	588·29	+ 1·64	175	614·16	+17·62
65	589·33	+ 2·42	180	615·39	+18·21
70	590·37	+ 3·20	185	616·62	+18·80
75	591·42	+ 3·97	190	617·86	+19·38
80	592·47	+ 4·74	195	619·11	+19·95
85	593·54	+ 5·49	200	620·37	+20·51
90	594·62	+ 6·23			

Um die Bedeutung dieser Zahlen besser erkennen zu können, sei folgendes erwähnt. Erfährt der trocken gesättigte Wasserdampf eine isotherme Ausdehnung und wenden wir darauf die Gleichung 2) an, so ist pdv immer positiv und dQ ist auch positiv. Ist $t > 49 \cdot 46°$, so ist dU bei der Kondensationsgrenze positiv, in größerer Entfernung aber gleich Null. Daraus folgt, daß die von außen zugeführte Wärme größer ist als diejenige Wärme, welche der geleisteten äußern Arbeit äquivalent ist, was wieder zu dem Schlusse führt, daß der übrige Teil der zugeführten Wärme zur Leistung von innerer Arbeit, also zur Überwindung innerer Kräfte verbraucht wird. Die Werte für $A(U_t - U'_t)$ geben die Wärmemengen an, welche der ganzen innern Arbeit äquivalent sind.

Ist hingegen $t < 49 \cdot 46°$, so ist dU bei der Kondensationsgrenze negativ, in größerer Entfernung aber wieder gleich Null. Daraus folgt, daß die jetzt von außen zugeführte Wärme kleiner ist als diejenige Wärme, welche der geleisteten äußern Arbeit äquivalent ist, was zu dem Schlusse führt, daß hier innere Kräfte eine innere Arbeit verrichten, welche sich in äußere Arbeit verwandelt. Bei $t = 0°$ ist z. B. die ganze innere Arbeit einer Wärmemenge von $7 \cdot 33$ Kalorien äquivalent.

Dieses Resultat ist höchst merkwürdig. Man könnte es sich dadurch erklären, daß man bei Temperaturen über 49·46° annimmt, es seien in dem entwickelten Dampfe zum Teile komplexe Moleküle vorhanden, welche bei der isothermen Ausdehnung in einfache Moleküle aufgelöst werden, und sich andrerseits bei den Temperaturen unter 49·46° vorstellt, daß die Wasserdämpfe, wenn sie sich aus dem siedenden Wasser entwickeln, in statu nascendi zum Teile dissoziiert sind.

Auf diesen merkwürdigen Umstand habe ich schon in der Abhandlung: »Die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze«[1] hingewiesen. Da nach einer wohlbegründeten Theorie zwei Volumina Wasserdampf aus zwei Volumina Wasserstoff und einem Volumen Sauerstoff, genommen bei derselben Temperatur und demselben Drucke, bestehen, so ist darnach die Dichte des stark über-

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CV, Abt. IIa., 1896, p. 1059.

hitzten Wasserdampfes, bezogen auf Luft von gleicher Temperatur und gleichem Drucke, gleich 0·6220. Ich habe damals gezeigt, daß für Temperaturen über 31·85° die Dichte des gesättigten Wasserdampfes, bezogen auf Luft von gleicher Temperatur und gleichem Drucke, stets größer als 0·6220, hingegen für Temperaturen unter 31·85° stets kleiner als 0·6220 ist. Dieses Sinken der berechneten Dichte unter den theoretischen Wert bei den niedrigeren Temperaturen ist eine Erscheinung, welche nicht nur beim Wasserdampfe vorkommt, sondern auch bei den Dämpfen von Alkohol, Äther, Aceton, Chloroform und Schwefelkohlenstoff. Ja, es bleibt beim Alkoholdampfe die berechnete Dichte bis 80° C. unter dem theoretischen Werte.

Über die dunklen Streifen, welche sich auf den nach Lippmann's Verfahren hergestellten Photographien sich überdeckenden Spektren zeigen (Zenker'sche Streifen)

von

L. Pfaundler,

w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1904.)

Herr Dr. R. Neuhauss hatte die Güte, mir eine Anzahl seiner prächtig gelungenen Photographien nach Lippmann's Verfahren zur Ansicht zu senden. Auf einer dieser Platten befinden sich zwei Aufnahmen sich überdeckender Spektren. Die eine Aufnahme zeigt zwei verkehrt angeordnete, parallel verlaufende, gleich lange Spektren, die sich mit der Hälfte ihrer Flächen überdecken, die andere Aufnahme gibt zwei sich rechtwinklig überkreuzende Spektren. Beide Photographien zeigen in den überdeckten Teilen ein System dunkler, paralleler Streifen, welche nach schriftlicher Mitteilung des Herrn Dr. Neuhauss von Prof. Zenker als »Talbot'sche Streifen«, von Prof. Dr. O. Wiener als »Schwebungen« erklärt, aber bisher noch nicht näher untersucht worden sind. Da auch mir diese Erscheinung als eine für die Theorie und die Zukunft des Lippmann'schen Verfahrens höchst wichtige und lehrreiche erscheint, so versuche ich, im nachfolgenden eine theoretische Erklärung derselben zu geben, die mir bis jetzt mit den Beobachtungen im Einklange oder doch nicht im Widerspruche zu stehen scheint. Es wird sich dabei herausstellen, daß die Erscheinung mit Talbot'schen Streifen nichts zu tun hat. Über

Vorschlag von Dr. Neuhauss gebrauche ich dafür die Bezeichnung »Zenker'sche Streifen«, denn Zenker hat dieselben vorausgesagt und über deren Abstände die richtige Vermutung ausgesprochen, daß sie von der Dicke der Schichte abhängen. Dr. Neuhauss gebührt das Verdienst, die Streifen zuerst hergestellt zu haben.

I. Das System der stehenden Lichtwellen unter den verkehrt, parallel sich überdeckenden Spektren.

Es stelle die Gerade SS' (Fig. 1) die Ebene des Spiegels und die angrenzende Papierfläche einen senkrecht zum Spiegel und parallel zu den Spektren gerichteten Querschnitt durch die empfindliche Schichte dar, die wir uns in ihrer Dicke viele tausendemal vergrößert denken müssen. Die beiden Spektren liegen parallel SS', das eine mit dem roten Ende bei S, mit dem violetten Ende bei S', das andere umgekehrt. Die Wellenlängen der äußersten Lichtsorten seien in Luft λ und λ'. Sind ν und ν' die Brechungsindizes dieser Strahlen in der Schichte, so sind $\frac{\lambda}{\nu}$ und $\frac{\lambda'}{\nu'}$ die Wellenlängen derselben innerhalb der Schichte. Die Hälften dieser Wellenlängen wollen wir abkürzungshalber mit l und l' bezeichnen. l ist also die Länge einer halben Welle des violetten Lichtes innerhalb der Schichte, l' dasselbe für das rote Licht.

In der Mitte bei O begegnen sich die Spektra mit einer für beide gleichen Farbe. Die Wellenlänge derselben hängt von dem Dispersionsgesetz ab. Bei den prismatischen Spektren der Dr. Neuhauss'schen Photographien ist diese Farbe ein Indigoblau etwa von der Wellenlänge λ in Luft $= 440 \mu\mu$. Da aber diese Farbe mit der Dispersion von einer Prismensorte zur anderen wechselt, so wollen wir, um eine allgemein giltige Ableitung zu erhalten, annehmen, daß wir mit Gitterspektren zu tun haben, bei welchen, wie bekannt, die Wellenlängen proportional den Abständen im Spektrum fortschreiten. Die Rechnung wird dadurch sehr vereinfacht und es bietet keine Schwierigkeit, nachher die Resultate derselben auf das prismatische Spektrum zu übertragen. Die Wellenlängen im Violett und Rot verhalten sich ungefähr wie $5:8$; wir wählen, um diesem Verhältnisse

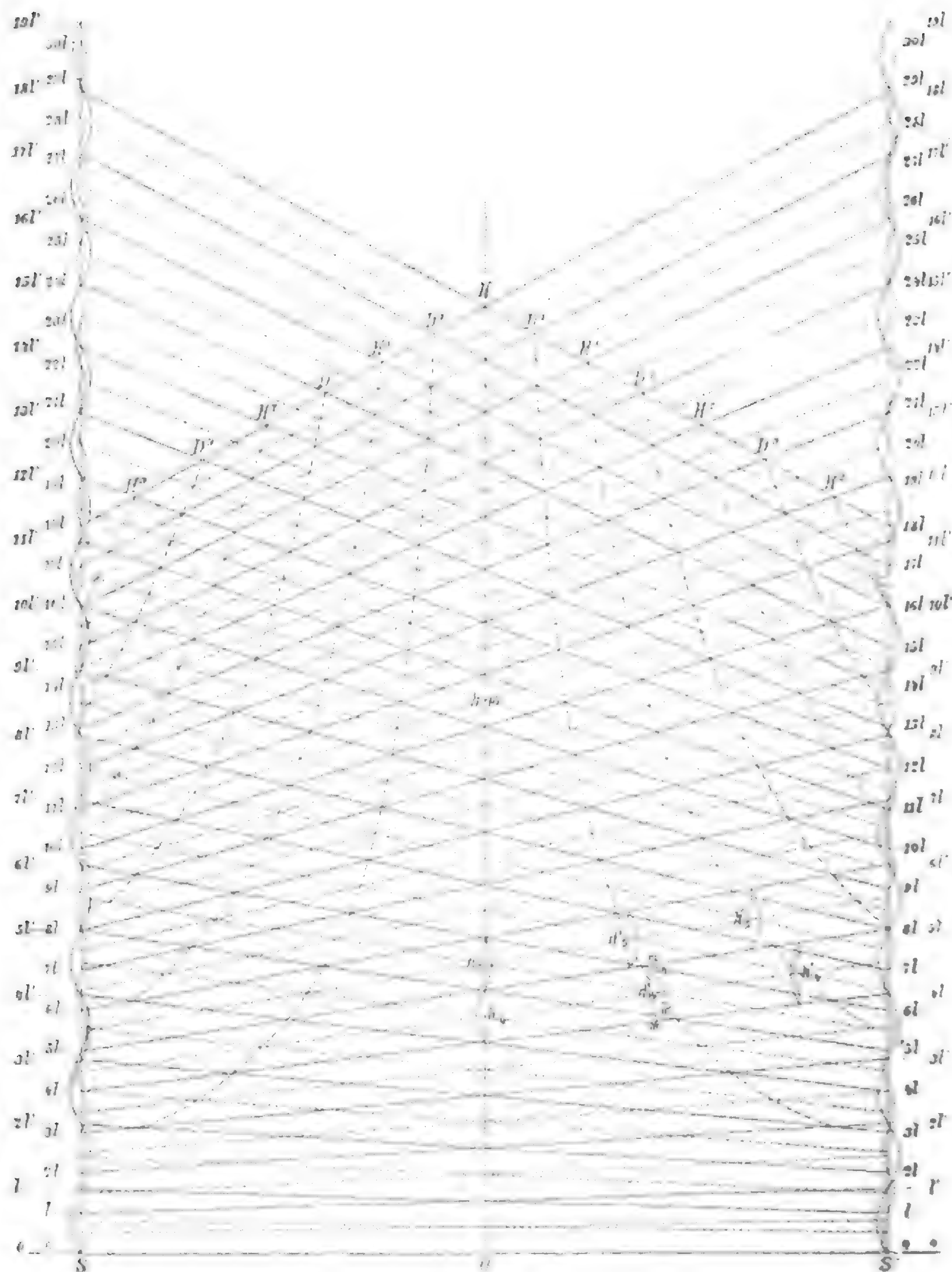


Fig. 1.

nachzukommen, in der graphischen Darstellung für die halben Wellenlängen dieser Farben innerhalb der Schichte die Längen

$l = 5$, $l' = 8$ *mm*. Die Länge der Spektren, also den Abstand SS' bezeichnen wir mit $2a$, so daß also $a = OS = OS'$ ist. Wir tragen nun auf beiden in S und S' errichteten Senkrechten die Strecken $l = 5$ und $l' = 8$ *mm* wiederholt auf und bezeichnen die erhaltenen Teilpunkte mit $l, 2l, 3l \ldots l', 2l', 3l' \ldots$ Die Mittelpunkte dieser Strecken, welche den Abständen $\frac{l}{2}, \frac{3l}{2} \ldots \frac{l'}{2}, \frac{3l'}{2} \ldots$ entsprechen, sind ebenfalls eingetragen, die Bezeichnung aber, um Überfüllung zu vermeiden, fortgelassen.

Hierauf verbinden wir alle Teilpunkte $\frac{l}{2}, l, \frac{3l}{2} \ldots$ links mit den entsprechenden Teilpunkten $\frac{l'}{2}, l', \frac{3l'}{2} \ldots$ rechts und ebenso umgekehrt die ersten Teilpunkte rechts mit den entsprechenden Teilpunkten links durch Gerade, wobei die Teilpunkte der Halbwellen mit ganz ausgezogenen Linien, die dazwischenliegenden der Viertelwellen mit punktierten Linien verbunden sind.

Nach O. Wiener's neueren Untersuchungen [1] liegen die Knotenpunkte der stehenden Wellen, welche durch Interferenz des einfallenden Lichtes mit dem vom Quecksilberspiegel zurückgeworfenen Lichte entstehen, zwar nicht an den Punkten, welche um ein ganzes Vielfaches der halben Wellenlänge von der Spiegelebene abstehen. Da dieser Umstand aber auf die Erklärung der Zenker'schen Streifen, so weit ich übersehe, keinen Einfluß hat, so wurde in der Zeichnung der Einfachheit wegen angenommen, daß die Spiegelebene, wie bei Glasspiegel, die ersten Knoten enthalte.

Die in die Figur eingezeichneten Wellenkurven geben demnach die momentane Lage der Ätherteilchen in den stehenden Wellen an, wobei vorausgesetzt ist, daß alle Wellen kohärent seien und mit gleicher Phase vom Spiegel reflektiert werden. Auf Grund dieses Schemas ist es nun leicht, sich über die

---

[1] Ursache und Beseitigung eines Fehlers bei der Lippmann'schen Farbenphotographie; zugleich ein Beitrag zu ihrer Theorie. Wiedem. Annal., Bd. 69, 1899, p. 488.

Lage der Lichtwellen an irgend einer Stelle des Raumes innerhalb der Schichte zu orientieren. Man braucht nur festzuhalten, daß die von links nach rechts aufsteigenden, ganz ausgezogenen Geraden die Knoten aller Wellen verbinden, welche durch das Spektrum entstehen, dessen violettes Ende links liegt, während die von rechts nach links aufsteigenden, ganz ausgezogenen Geraden die Knotenpunkte der Wellen des umgekehrt gelegenen Spektrums durchsetzen. Ebenso entsprechen die von links nach rechts ansteigenden punktierten Geraden den Bäuchen, die dem ersten Spektrum angehören, die von rechts nach links ansteigenden ebenso den Bäuchen des verkehrten Spektrums, dessen violettes Ende rechts liegt.

Längs der von O ausgehenden Mittellinie OH fallen von beiden Spektren Wellen gleicher Länge zusammen, welche das arithmetische Mittel der Wellenlängen an den Enden des Spektrums sind (immer vorausgesetzt, daß wir mit Beugungsspektren zu tun haben). Die Figur deutet die sich deckenden Wellen für die Bauchpunkte h_4 und h_5 an. Um die Lage der zusammentreffenden Wellen für irgend einen anderen Bauchpunkt, z. B. d_4', zu finden, gehen wir so vor. Wir ziehen durch diesen Punkt eine auf SS' Senkrechte von solcher Länge, daß sie die benachbarten ganz ausgezogenen Geraden durchschneidet. Die Durchschnittspunkte m, m' sind die Knotenpunkte, welche dem ersten Spektrum zugehören, n und n' die Knotenpunkte für die Welle des zweiten Spektrums.

Verfolgen wir die durch m, m' gehenden Geraden nach rechts oder links bis zum Rande, so ersehen wir sofort, ob die zugehörige Halbwelle ihren Bauch nach links oder rechts gerichtet hat. Er ist diesmal nach links gerichtet, dagegen finden wir den zwischen n und n' liegenden Bauch nach rechts gerichtet. Für den Punkt h_4^1 finden wir auf diese Weise, daß beide Bäuche nach links gerichtet sind; für den Punkt d_5^1 finden wir wieder entgegengesetzte Lage beider Bäuche; für den Punkt h_5^1 gleiche Lage, aber nach rechts, im Gegensatze zu Punkt h_4^1.

Es ist klar, daß in den Punkten d_4^1 und d_5^1 das Licht fast ganz aufgehoben wird, daß es in den Punkten der Mittellinie

h_4 und h_5 zur doppelten Amplitude verstärkt wird, daß es ebenfalls in den Punkten h_4' und h_5' verstärkt wird. Untersucht man so alle Bauchpunkte, so kommt man sofort zur Einsicht, daß die in H, H^1, H^2, H^3 endigenden Kurven alle Punkte enthalten, wo sich die Lichter beider Spektren unterstützen, dagegen die in D^1, D^2, D^3 endigenden Kurven alle die Punkte enthalten, wo sich diese Lichter gegenseitig ganz oder teilweise vernichten. Besteht demnach die chemische Aktion des Lichtes darin, daß sie in Verbindung mit der darauffolgenden Entwicklung und Fixierung der Platte zu Ausscheidungen von Silberkörnern an den Bauchpunkten führt, so müssen diese Silbermassen längs der H-Kurven periodisch verteilt sein, während die D-Kurven frei von Ausscheidungen bleiben. Diese Kurven sind, wie aus dem Späteren hervorgeht, Hyperbeläste, die sich der Mittellinie OH asymptotisch nähern. Ihre Durchschnittspunkte mit einer senkrecht auf OH gezogenen Grenzlinie haben, wie auch die Figur ersehen läßt, sehr nahe gleiche Abstände untereinander.

II. Das Verhalten der fertigen Platte gegen weißes, senkrecht auffallendes Licht.

Denken wir uns jetzt den Spiegel von der Schichte abgenommen und weißes Licht senkrecht auf die Platte auffallen, so haben wir zu unterscheiden, ob dies von der Schichtseite her (in unserer Figur von unten nach oben) oder von der Glasseite her (von oben nach unten) stattfindet. Nach schriftlicher Mitteilung von Dr. Neuhauss zeigen sich die Zenker-schen Streifen ausnahmslos nur im letzteren Falle, also nur von der Glasseite. Die Aufnahme der überdeckten Spektren, welche dieser Untersuchung zugrunde liegt, ist deshalb auch nicht mit der Schichtseite, sondern mit der Glasseite an das deckende Glasprisma angekittet, welches zur Beseitigung des störenden Reflexlichtes aufgesetzt ist. Auch bei einem von Dr. Neuhauss zum Geschenke erhaltenen, ungedeckten Doppelspektrum zeigen sich auf der Schichtseite keine Zenker'schen Streifen.

Beachten wir also zunächst das von der Glasseite (in der Figur von oben) einfallende Licht, so trifft dasselbe in der

Mitte bei H auf eine Reihe strenge hintereinander liegender Silberschichten (Wiener's Elementarspiegel) und findet dort die Bedingungen zur Entstehung heller Farbe. Daneben liegen links und rechts die Stellen D', wo längs der dort ausmündenden Kurven keine Silberausscheidungen liegen. Das dort eindringende Licht wird daher keine Farben zeigen, vielmehr durch Absorption in der Tiefe und an der geschwärzten Rückwand verschwinden; diese Stellen müssen daher dunkel erscheinen; es sind die ersten dunklen Streifen. Darauf folgen dann helle Stellen bei H', dann wieder dunkle bei D^2 u. s. f. Es verhält sich also hier umgekehrt wie bei einem gewöhnlichen Negativ, das an den Stellen der Silberausscheidungen dunkel, an den von Silber freien dagegen hell erscheint.

Gegen die Enden der Spektren hin werden die Projektionen der D-Kurven auf die Glasfläche, also auch die dunkeln Stellen wegen der stärkeren Krümmung der Kurven verbreitert und übereinandergreifend erscheinen, wodurch die Maxima der Dunkelheit verwischt werden und die Platte an den Enden der Spektren in gedämpfter Färbung, ohne deutliche dunkle Streifen erscheinen muß. Die Theorie verlangt daher lebhafte Färbung in der Mitte der Spektren, durchbrochen von relativ scharf begrenzten dunkeln Streifen, welche die Spektren senkrecht auf deren Längsrichtung in nahezu gleichen Abständen durchziehen, Abnahme der Schärfe dieser Streifen gegen die Enden der Spektren bis zum völligen Verschwinden, nebst Abnahme der Lebhaftigkeit der Färbung an diesen Stellen. Daß die Streifen von der Schichtseite aus nicht gesehen werden, ist vielleicht durch die scheinbar unregelmäßige Anlage der Bauchpunkte, welche dort nicht in Reihen hintereinander liegen, zu erklären.



Fig. 2.

Die Abbildung Fig. 2 zeigt, daß diese Folgerungen aus der Theorie in der Tat zutreffen. Das gemeinschaftliche Feld beider Spektren zeigt in der Mitte ein brillantes Indigoblau, durchsetzt von äquidistanten

dunkeln Streifen, deren etwa 12 im ganzen sichtbar sind. Sie nehmen rasch an Schärfe ab und sind in den äußeren Dritteln des Feldes nicht mehr sichtbar. An den Enden der Spektren treten nur die Frauenhofer'schen *H*-Linien deutlich auf (die übrigen Frauenhofer'schen Linien sind nicht sichtbar). Hätten wir mit Beugungsspektren zu tun, so würden dieselben in der Mitte statt mit Indigoblau mit Gelbgrün zusammentreffen. Wollten wir unsere Konstruktion in Fig. 1 für das prismatische Spektrum durchführen, so müßten an Stelle der geraden Linien $l'l$ und ll' u. s. w. Kurven gezeichnet werden, deren Ordinaten den halben Wellenlängen gleich wären, welche den betreffenden Stellen der Spektren entsprechen. Eine wesentliche Änderung der Gesamterscheinung könnte dadurch nicht herbeigeführt werden. Eine Prüfung dieser Behauptung durch eine in getreuen Verhältnissen ausgeführte Konstruktion scheitert an den großen Dimensionen, welche dieselbe annehmen müßte.

Wollten wir dieselbe für das 50 *mm* lange Bild von Dr. Neuhauss durchführen und dabei der mittleren Wellenlänge innerhalb der Schichte auch nur die Länge von 2 *mm* geben, so müßten wir den Spektren die Länge von 280 *m* geben. Wir wollen nun auf dem Wege der Rechnung versuchen, die gegebene Erklärung auch in quantitativer Richtung durchzuführen.

III. Berechnung der Lage der dunkeln Streifen.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß wir mit Beugungsspektren von der Länge $2a$ zu tun haben, und berechnen die Lage aller Bauchpunkte, an denen keine Silberausscheidung erfolgt, also die Lage der Punkte auf den mit $D^1, D^2 \ldots$ bezeichneten Kurven.

Zu diesem Zwecke denken wir uns SS' als Abszissenachse, OH als Ordinatenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und fassen einen der gesuchten Punkte, z. B. d_4' ins Auge. Derselbe entsteht durch die Durchschneidung der von dem Punkte $x = -a$, $y = {}^9/_2\, l$ nach dem Punkte $x = +a$, $y = {}^9/_2\, l'$ gezogenen Geraden mit der von dem Punkte $x = +a$, $y = {}^{11}/_2\, l$ nach dem Punkte $x = -a$, $y = {}^{11}/_2\, l'$ gezogenen Geraden.

Ebenso entsteht der nächste Punkt d'_5 derselben Kurve D^1 durch den Durchschnitt zweier Geraden, von denen die eine vom Punkte $x = -a$, $y = {}^{11}/_2\, l$ nach dem Punkte $x = +a$, $y = {}^{11}/_2\, l'$ gezogen ist, mit der vom Punkte $x = +a$, $y = {}^{13}/_2\, l$ nach dem Punkte $x = -a$, $y = {}^{13}/_2\, l'$ gezogenen Geraden.

Allgemein entsteht also der Punkt h'_n durch Kreuzung einer Geraden, die vom Punkte $x = -a, y = \frac{2n+1}{2} l$ nach dem Punkte $x = +a, y = \frac{2n+1}{2} l'$ geht, mit einer Geraden, die vom Punkte $x = +a$, $y = \frac{2n+3}{2} l$ nach dem Punkte $x = -a$, $y = \frac{2n+3}{2} l'$ geht.

Die Gleichungen dieser beiden Geraden sind:

$$y = \frac{2n+1}{4a}(l'-l)x + \frac{2n+1}{4}(l'+l)$$

und

$$y = -\frac{2n+3}{4a}(l'-l)x + \frac{2n+3}{4}(l'+l), \qquad \ldots 1)$$

woraus sich die Koordinaten ihres Durchschneidungspunktes h'_n, die wir mit ξ_1, η_1 bezeichnen wollen, wie folgt ergeben:

$$\xi_1 = \frac{\frac{2n+3}{4}(l'+l) - \frac{2n+1}{4}(l'+l)}{\frac{2n+1}{4a}(l'-l) + \frac{2n+3}{4a}(l'-l)} = \frac{a\,.(l'+l)}{2(n+1)(l'-l)}\,. \qquad \ldots 2)$$

$$\eta_1 = \frac{\frac{2n+1}{4a}(l'-l)\cdot\frac{2n+3}{4}(l'+l) + \frac{2n+3}{4a}(l'-l)\cdot\frac{2n+1}{4}(l'+l)}{\frac{2n+1}{4a}(l'-l) + \frac{2n+3}{4a}(l'-l)} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+3)(l'+l)}{8(n+1)}\,. \qquad \ldots 3)$$

Wir wiederholen, daß hier bedeuten:

n eine ganze Zahl, welche mit dem Index des gesuchten Punktes d'_n übereinstimmt, a die halbe Länge der Spektren,

l und l' die halben Längen der Lichtwellen an den Enden des Spektrums innerhalb der Schichte.

Die Werte der Koordinaten ξ_2, η_2 für die Punkte der Kurve D^2 würden wir in derselben Weise erhalten, wenn wir in 1) statt $n+3$ $n+5$ einsetzten.

Wären uns nun die Dicke δ der Schichte und ihr mittlerer Brechungsindex ν bekannt, so könnten wir mittels der Formel 3) für η, welches mit δ nahezu identisch ist, den Wert von n, d. i. die Anzahl der in der Schichte enthaltenen halben Wellen und aus dieser Zahl mittels der Formel 2) den Wert ξ, d. i. den halben Abstand der mittleren beiden dunkeln Streifen berechnen und diesen mit dem beobachteten Werte vergleichen, um so unsere Theorie auch in quantitativer Beziehung zu bestätigen.

Leider sind die genauen Werte von δ und ν nicht bekannt. Wir können daher diese Größen nur schätzungsweise ermitteln und sehen, ob die daraus berechneten Streifenabstände wenigstens der Größenordnung nach mit der Beobachtung übereinstimmen. Wir erhalten dadurch, wenn auch keine vollständige Bestätigung der Theorie, so doch einen Nachweis ihrer Möglichkeit.

Nach schriftlicher Mitteilung des Dr. Neuhauss bewegen sich die Dicken des Eiweißhäutchens seiner Farbenphotographien zwischen den Grenzen 0·005 und 0·015 *mm*. An den verkitteten Aufnahmen ist eine Messung eo ipso ausgeschlossen, aber auch an der unverkitteten Platte ist es mir bisher nicht gelungen, eine genauere Messung auszuführen. Den Brechungsindex des (mit Erythrosin, Glycinrot und Cyanin versetzten) Eiweißes kann man mit einer für den vorliegenden Zweck genügenden Genauigkeit $= \nu = 1·5$ setzen.

Nehmen wir also einmal für die Dicke δ der Schichte einen mittleren Wert von 0·01 *mm* an.

Bevor wir die Rechnung durchführen, wollen wir aber noch auf den Umstand Rücksicht nehmen, daß wir nicht mit Beugungsspektren, sondern mit prismatischen Spektren zu tun haben, bei denen bekanntlich der brechbarere Teil mehr in die Länge gezogen erscheint. Ist bei diesen demnach die Wellenlänge nicht eine lineare Funktion der Abmessungen im Spektrum, so darf man doch mit genügender Annäherung

annehmen, daß innerhalb einer begrenzten Strecke die Differenz der Wellenlängen proportional den Abständen im Spektrum sei.

Nun liegen an der Neuhauss'schen Aufnahme die Zenker-schen Streifen, den beobachteten Farben nach zu schließen, in dem Gebiete zwischen den Frauenhofer'schen Linien F und G. Dieses Gebiet hat eine Ausdehnung von 17 *mm*, so daß also für das so beschnittene Spektrum die Größe $a = 8\cdot5$ *mm* ist.

Aus den Wellenlängen in Luft für $F = 486\ \mu\mu$ und $O = 431\ \mu\mu$ ergeben sich die Wellenlängen innerhalb der Schichte für $F = \frac{486}{1\cdot5} = 324\ \mu\mu$, für $O = \frac{431}{1\cdot5} = 287\ \mu\mu$, somit die halben Wellenlängen an den Enden $l' = 162$ *mm*, $l = 144$ *mm*.

Wir erhalten demnach:

$$l'+l = 0\cdot000306,\ l'-l = 0\cdot000018\ mm.$$

Durch Einsetzen von $\delta = 0\cdot01$ für η_1 und $0\cdot000306$ für $l'+l$ in Formel 3) erhält man für n die Zahl 66.

Einen genäherten Wert erhielten wir noch einfacher durch Division der Schichtendicke 0·01 durch die mittlere halbe Wellenlänge $\frac{l'+l}{2}$, was $n = 65\cdot3$ ergeben würde.

Demnach enthielte die Schichte 33 ganze Wellen. Setzen wir endlich diesen Wert $n = 66$ in die Formel 2), so kommt:

$$\xi_1 = \frac{a(l'+l)}{2(n+2)(l'-l)} = \frac{8\cdot5.0\cdot000306}{2.67.0\cdot000018} = 1\cdot08\ mm,$$

folglich ist der Streifenabstand $= 2\xi_1 = 2\cdot16$ *mm*.

Die direkte Ausmessung hatte ergeben 2·0 *mm*.

Diese nahe Übereinstimmung ist natürlich nur ein Zufall, denn die Annahme, daß die Schichtendicke = 0·01 *mm* sei, ist ja nur eine schätzungsweise. Wir ziehen aus dieser Übereinstimmung auch nur den Schluß, daß unsere Erklärung mit der Beobachtung nicht in Widerspruch stehe.

Bei der von Dr. Neuhauss zum Geschenke erhaltenen Platte, bei welcher nur zwei etwa doppelt so breite Streifen im

Abstand von 4 *mm* sichtbar sind, müßte also die Schichtendicke 0·005 *mm* betragen, was der unteren Grenze entspricht.

IV. Die dunkeln Streifen der überkreuzten Spektra.

An der Hand der bisherigen Ergebnisse ist es nicht schwierig, auch die Erscheinungen an den überkreuzten Spektren zu erklären.

Wir wollen zu diesem Zwecke synthetisch vorgehen und das Bild derselben aus dem der parallelen Spektra ableiten. Das Quadrat $VRSV'$, Fig. 3, zeigt zunächst die Gesamtanordnung, wobei angenommen ist, daß die Spektren ebenso lang als breit seien, so daß sie sich vollständig bedecken. Die Farbengrenzen sind aus Fig. 2 übernommen.

Der Mittelpunkt O des Quadrates entspricht der Stelle, wo die mittleren Strahlen beider Spektren zusammentreffen; dort muß also ein lebhaftes Indigoblau auftreten. Ziehen wir durch O die mit den Quadratseiten Parallelen und tragen auf ihnen von O aus dieselben Abstände auf, welche die dunkeln Streifen auf den parallelen Spektren von der Mitte aus haben, ziehen von dort Senkrechte auf die Diagonale VV', so kommen wir auf solche Punkte, wo genau dieselben Farbenmischungen auftreten, wie auf den parallelen Spektren an der Stelle der dunkeln Streifen auftreten würden. Durch diese Stellen müssen auch die dunkeln Streifen im gekreuzten Bilde hindurchgehen. Ihr Abstand muß im Verhältnis $1:\sqrt{2}$ größer sein als im Bilde, Fig. 2, also 2·818 betragen.[1] Die Streifen müssen ferner senkrecht stehen auf derjenigen Richtung, wo das Gefälle der Wellenlängen das größte ist, das ist für die Richtung VV', somit müssen die Streifen mit der Diagonale RS parallel laufen. Dies ist allerdings nur im Beugungsspektrum strenge richtig. Im prismatischen Spektrum müßten die Streifen nach innen ein wenig konvex gekrümmt sein, was auch in der Tat zu bemerken ist.

[1] Die Aufnahme der gekreuzten Spektren befindet sich auf derselben Platte, wie die der parallelen, daher die Schichtendicke als nahe gleich angenommen werden darf.

Was die Farben angeht, so müssen beim Übergange von R bis S längs der Diagonale lauter reine Spektralfarben auftreten; gegen die Farben V und V' müssen sie verändert und gedämpft erscheinen.

Das wirkliche Bild zeigt diese Beschaffenheit im wesentlichen, die Streifen haben die gezeichnete Lage, nur daß sie, wie erwähnt, ein wenig gegen die Diagonale RV konvex gebogen

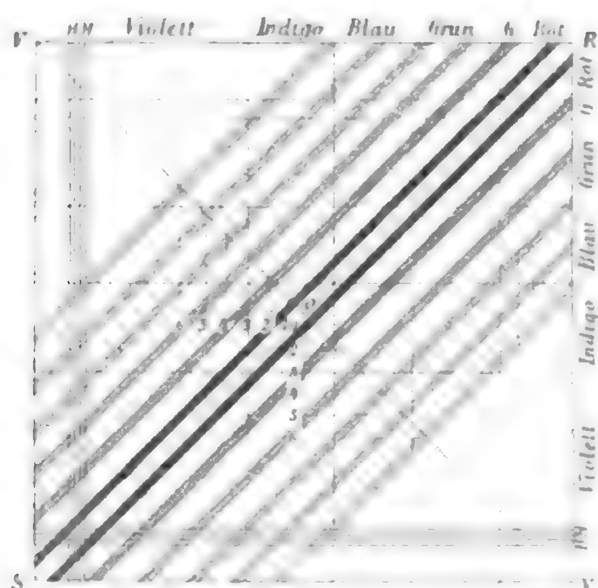


Fig. 3.

sind, wie ja vorausbestimmt werden kann. Ihr Abstand wurde zwischen 2·5 und 2·9 gemessen, was mit dem berechneten 2·818 übereinstimmt. Im übrigen weicht das wirkliche Bild von dem konstruierten deshalb ab, weil die Spektren schmäler als lang sind; auch ist es etwas unsymmetrisch. Auf der rechtsseitigen Bildhälfte sind die Streifen aus unbekanntem Grunde ausgeblieben. Auf der linken Seite sind sie in dem violetten, blauen und grünen Teile sehr gut ausgeprägt, dagegen nur sehr schwach sichtbar in dem Gelb und Rot.

Im Natriumlichte erscheinen beide Spektrumbilder überall dunkel mit Ausnahme der gelben Stellen; Streifen sind, wie zu erwarten, nicht zu sehen.

V. Folgungen für das Problem der Photographie in natürlichen Farben.

Aus dem Bisherigen geht hervor, daß es zwar theoretisch möglich ist — und die Erfolge haben es bestätigt —, reine spektrale Farben unter den schon von Dr. O. Wiener angegebenen Vorsichtsmaßregeln und Einschränkungen getreu wiederzugeben. Anders geht es mit den Mischfarben, falls dieselben nicht etwa nur subjektiv dadurch zu stande kommen, daß objektiv ein feines Mosaik homogener Farben vorhanden ist, welches im Auge als Mischfarbe wahrgenommen wird.

Wenn zwei Lichtwellen verschiedener Wellenlänge in die Schichte eindringen, so bietet es mit Rücksicht auf das Prinzip der Koëxistenz der kleinen Bewegungen wohl zunächst keine Schwierigkeit, anzunehmen, daß die Schichte an den Bauchpunkten beider Wellensysteme ohne gegenseitige Störung derselben jene latente Einwirkung erfahre, welche bei der nachträglichen Entwicklung zur Ausscheidung von Silber führt. Sind diese Silbermassen aber einmal ausgeschieden, so ist schwer anzunehmen, daß sich die beiden Systeme von periodischen Abständen dieser Ausscheidungen nicht gegenseitig stören; denn es kommen ja durch die Zwischenschaltung der Ausscheidungen des zweiten Systems zwischen die des ersten ganz neue Intervalle zu stande, welche die Resonanz der Lichtwellen zum Teile stören oder ganz vernichten, während aus dem einfallenden weißen Lichte andere Lichtwellen durch die Resonanz in diesen neuen Intervallen Verstärkung finden. Wenn auch die Mehrzahl dieser Lichter, weil außerhalb der sichtbaren Skala fallend, das sichtbare Farbengemisch nicht störend beeinflußt, so bleiben doch sicherlich noch genug sichtbare, daher störende übrig.

Sehen wir aber von den theoretischen Einwänden ganz ab; das Auftreten der Zenker'schen Streifen liefert den schlagenden Beweis, daß es eine ganze Reihe von Farbenpaaren gibt, welche sich beim Lippmannschen Verfahren nicht zu einer korrekten Farbenmischung vereinigen, sondern sich gegenseitig zu Schwarz neutralisieren.

Das Lippmann'sche Verfahren ist demnach nicht allein wegen seiner unsicheren und schwierigen Handhabung, sondern vor allem wegen des Versagens seiner theoretischen Grundlage nicht als eine vollkommene Lösung des Problems der Farbenphotographie anzuerkennen. Wenn trotzdem in den Händen geschickter Experimentatoren einzelne gelungene Bilder zu stande kommen, so erklärt sich das wohl dadurch, daß entweder annähernd homogene Farben zur Wirkung gelangen, wie bei lebhaft gefärbten Vögeln, bunt bemalten Vasen etc., oder daß die Mischfarben in solcher Mannigfaltigkeit und Abwechslung am Objekte vorkommen, daß die Auslöschungen der Farben nirgends kompakt auftreten, sondern sich wie ein Schleier auf das ganze Bild verteilen. Dies dürfte bei den Landschaftsaufnahmen zutreffen, welche im allgemeinen matt gefärbt erscheinen.

Das Lippmann'sche Verfahren wird deshalb wohl immer bleiben, was es bisher war: ein überaus reizendes und höchst interessantes physikalisches Experiment.

Einiges über den elektrodenlosen Ringstrom

von

Augustin Steiner.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

Es machte vor kurzem Lecher darauf aufmerksam[1], daß bei dieser zuerst von J. J. Thomson[2] beschriebenen Erscheinung bisher ein wichtiger Punkt noch nicht gehörig betont wurde. Wenn eine von einer kräftigen Schwingung durchflossene Spule eine ausgepumpte Glasröhre umschließt, ergibt die Potentialdifferenz, welche infolge der Impedanz zwischen der ersten und letzten Drahtwindung entsteht, schon für sich allein Anlaß zu einer Lichterscheinung in der Röhre. Die Frage, ob sich dazu noch eventuelle Induktionswirkungen addieren, ließ Lecher offen.

Ich habe daher die folgenden Untersuchungen über Anregung und unter Leitung von Professor Lecher in dessen Laboratorium ausgeführt.

Zwei gleiche Gasröhren I und II, Fig. 1, mit 6 *cm* Durchmesser und 23 *cm* Höhe wurden gleichzeitig ausgepumpt. Die elektrische Schwingung[3] geht von *a* zu einem in sich geschlossenen Ring *c*, von hier durch die Spule *s*, welche aus

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXII., II. a, p. 1000. Physik. Zeitschrift, 4, p. 32 (1902).

[2] Phil. mag. (5) 32, p. 321 und 445 (1891).

[3] Dieselbe wurde entweder genau in der von Lecher angegebenen Weise erzeugt (Diese Sitzungsberichte CXII. Bd., II., a, p. 995) oder auch nach Thomsons Vorgang mit Hilfe einer Influenzmaschine.

4 Windungen besteht, dann über den in sich geschlossenen Ring *d* nach *b* zurück. In I wirkt so zwischen *c* und *d* nur die durch Impedanz hervorgerufene Potentialdifferenz; diese wirkt auch in II, doch kommt hier auch die eventuelle Induktion oder die Einwirkung des magnetischen Feldes der Schwingung hinzu. Bei entsprechenden Drucken tritt nun sowohl in I als auch in II ein Leuchten auf, doch ist die letztere Lichterscheinung viel stärker. Es scheint somit die von J. J. Thomson behauptete Induktion wirklich vorhanden zu sein.

Nun hat aber Lecher gezeigt, daß ein Abschirmen der Spule *s* mit einem entsprechend geschlitzten Stanniolschirme jede Lichtwirkung aufhebt. Dieser Stanniolschirm ist so konstruiert, daß er Induktionswirkungen nicht hindert, wohl aber jede Möglichkeit einer statischen Influenz ausschließt. Die Lichterscheinung bleibt hier aus, weil die Ionisierung weggefallen ist. Mit entsprechender Ionisierung tritt aber die Lichtscheinung auf.

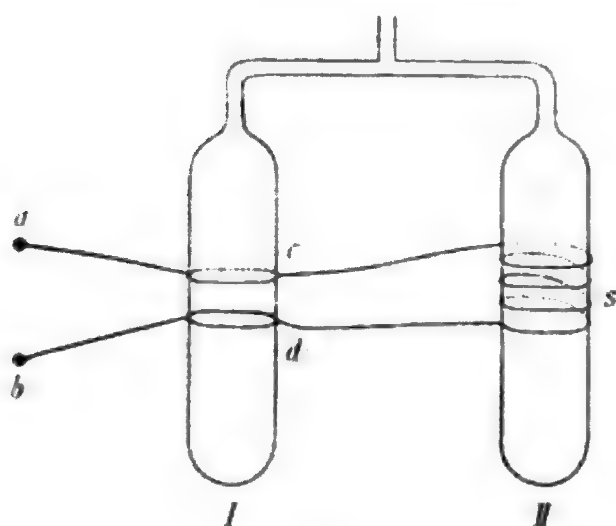


Fig. 1.

Folgender Versuch soll zeigen, von welch wichtigem Einflusse die Ionisierung ist.

In Fig. 2 sind knapp um die Röhre zwei Ringe *c* und *d* gelegt, welche mit Anfang und Ende der Spule verbunden sind. *r* bedeutet den geschlitzten Staniolschirm und *s* die aus 4 Windungen bestehende Spule. Hier findet die Ionisierung durch *c* und *d* in einem gewissen rhythmischen Tempo statt, welches gegen die Phase der Schwingung eine ganz bestimmte Differenz zeigt. Die Ringe *c* und *d* allein ohne Spule erzeugen ein schwaches Leuchten, die Spule *s* allein ohne Ionisierung (d. h. ohne *c* und *d*) wirkt durch den Stanniolschirm gar nicht,

indes die ganze in Fig. 2 geschilderte Anordnung einen schönen Thomson'schen Ring gibt.

Läßt man (Fig. 2) die Ringe *c* und *d* weg und versucht durch einen eingeschmolzenen Platindraht *e* das Gas mittels einer kräftigen Influenzmaschine zu ionisieren, so tritt keine Lichterscheinung auf. Es ist die kräftige und im richtigen Momente einsetzende Ionisierung durch rasche Impedanzentladung notwendig.

Darum versagt das Ganze auch, wenn man ohne Stanniolschirm den Durchmesser *s* der Spule bedeutend größer wählt, als den Durchmesser des Vakuumgefäßes.[1]

Kompliziert wird aber die Erscheinung noch durch einen anderen Umstand, auf den ich hier hinweisen möchte, nämlich durch die direkte magnetische Wirkung der Spule, die jedenfalls auch einen wichtigen Anteil an der Art der Lichterscheinung hat.

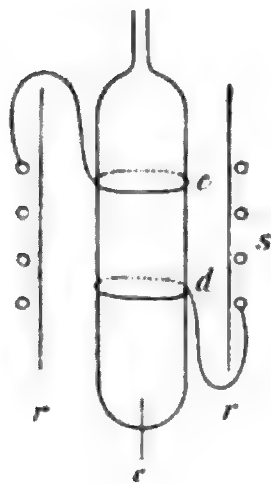


Fig. 2.

Man bringe eine 8 *cm* lange und 6 *cm* weite Röhre in das homogene Feld eines starken Elektromagneten; die Kraftlinien verlaufen parallel der Röhrenachse. Außen umschließen die Glasröhre zwei Kupferringe in 2 *cm* Entfernung von einander; auf diese wird durch Leitungsdrähte das Potential vom Anfange und Ende des Schwingungskreises übertragen. Auf diese Weise ist dasselbe variable elektrische Feld in der Röhre vorhanden, welches sonst im Vereine mit der Schwingung den Ring hervorbrachte. Springen im Primärkreise die Funken über, so werden die Berührungsstellen des Glases mit den Kupferringen abwechselnd positiv und negativ geladen, und die elektrostatischen Entladungen gehen zum Teile auch in das Innere der Röhre hinein und ionisieren die Luft. Dadurch wird die Röhre rötlich leuchtend, wovon man sich auch überzeugen kann, wenn man durch eine Öffnung des Polschuhes längs der

[1] Siehe Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXII, II a, p. 997.

Röhrenachse hindurchschaut. Tritt nun der Elektromagnet in Tätigkeit, so werden die elektrischen Ströme, die gegen die Mitte hinliefen, von den konstanten magnetischen Kräften gegen den Rand des Gefäßes gedrängt, der axiale Teil der Luft wird ganz dunkel, und längs des Glases scheint eine intensivere Entladung stattzufinden, welche der Form eines Ringes sehr nahe kommt. Die Erscheinung ist sehr auffallend: ohne Magneten ein bläulichroter Schein, der die ganze Röhre erfüllt, mit dem Magneten ein intensiveres zusammengedrängtes Licht von einem Ringe zum anderen, und besonders kräftig an den Berührungsstellen. Bedenkt man, daß für den Ringstrom in seiner eigentlichen Gestalt das magnetische Feld ein bedeutend stärkeres und variables ist, und daß die magnetische Wirkung auf die elektrische in regelmäßigen Intervallen folgt, so kann ein wohlabgegrenzter Ring in dieser Weise auch ohne Induktionswirkung nur durch magnetisch abgelenkte Entladungen allein zum Vorscheine kommen.

Der elektrodenlose Ringstrom J. J. Thomsons kommt also in folgender Weise zustande:

1. Durch Impendanz entsteht am Anfange und Ende der Spule eine große hin- und herschwankende Potentialdifferenz; schon dadurch entsteht neben der starken Ionisierung des Gases ein Hin- und Herströmen der Elektrizität im Vakuum.

2. Diese Lichterscheinung wird durch die magnetischen Kräfte der Spule gegen den Rand hingedrängt.

3. Wahrscheinlich findet nun auch noch eine weitere Steigerung des Lichtphänomens durch die eigentlichen Induktionsströme statt, welche aber nur in besonders stark ionisierten Gasen auftreten können. Daß letzteres eine absolut notwendige Vorbedingung ist, zeigt auch die jüngst erschienene Arbeit von Härdén.[1]

[1] Physik. Zeitschr., 5, p. 75, 1904.

Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren

von

Dr. **Fr. Hočevar** in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1904.)

Die vorliegende Arbeit hat die folgenden zwei Probleme zum Gegenstande:

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Zerfallen einer Form m^{ten} Grades und von n Variablen ($n > 2$) in lineare Faktoren abzuleiten und

2. die linearen Faktoren zu bestimmen, wenn jene Bedingungen erfüllt sind.

Die hier mitgeteilte Lösung dieser Aufgaben läßt sich in folgender Weise kurz beschreiben:

Eine Form f zerfällt nur dann in lineare Faktoren, wenn die aus der Gleichung $f = 0$ für eine der Variablen sich ergebenden Potenzreihen mit den Gliedern erster Ordnung abbrechen. Hiezu ist nun, wie ich nachweise, notwendig und hinreichend, daß alle Minoren dritten Grades der Hesseschen Determinante der Form f durch f teilbar sind. Die auf die Glieder erster Ordnung reduzierten Potenzreihen liefern dann unmittelbar die gesuchten linearen Faktoren.

Dabei beziehen sich die Begriffe: Teilbarkeit, Zerlegbarkeit u. s. f. auf das Gebiet der komplexen Zahlen. Auch wird vorausgesetzt, daß die gegebene Form keine vielfachen Faktoren enthält oder, wenn dies der Fall ist, daß dieselben zuvor mittels des sogenannten Euklid'schen Algorithmus, d. i. des bekannten, zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers dienenden Verfahrens, beseitigt werden.

Diese auf funktionentheoretischer Grundlage fußende Behandlung der oben erwähnten zwei Aufgaben ist meines Wissens neu, denn alle mir bekannten Arbeiten über diesen Gegenstand bedienen sich invariantentheoretischer Methoden oder der Eigenschaften symmetrischer Funktionen mehrerer Variablenreihen.[1] Die hier gewonnenen Resultate sind von der größtmöglichen Allgemeinheit und dennoch sehr einfach und auf spezielle Fälle leicht anwendbar, daher darf behauptet werden, daß der in der vorliegenden Arbeit eingeschlagene Weg zur Lösung der eingangs erwähnten zwei Probleme besser geeignet ist als die bisher benützten.

I. Trennung der vielfachen Faktoren.

§ 1. Vor allem will ich einige Sätze über die irreduktiblen Faktoren einer ganzen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ableiten und dabei von dem bekannten Satze ausgehen, daß die Zerlegung einer ganzen Funktion in irreduktible Faktoren nur auf eine Art möglich ist.

Es seien $u, v, w, \ldots$ die von einer bestimmten Variablen x_i abhängigen, $U, V, \ldots$ die von x_i unabhängigen irreduktiblen Faktoren von F, und zwar sei

$$F = u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots U^\lambda V^\mu \ldots \tag{1}$$

Bezeichnet man die nach x_i genommene Ableitung einer Funktion zur Abkürzung durch Anhängen des Zeigers i an das Funktionszeichen, so ist

$$F_i = u^{\alpha-1} v^{\beta-1} w^{\gamma-1} \ldots U^\lambda V^\mu \ldots [\alpha u_i v w \ldots + \beta u v_i w + \ldots]. \tag{2}$$

Somit haben F und F_i den größten gemeinsamen Teiler

$$T = u^{\alpha-1} v^{\beta-1} w^{\gamma-1} \ldots U^\lambda V^\mu \ldots \tag{3}$$

Denn F ist durch keinen von $u, v, w, \ldots U, V, \ldots$ verschiedenen irreduktiblen Faktor teilbar und durch keine höheren Potenzen von $U, V, \ldots$ als die in (3) angegebenen. Ferner ist F_i

[1] Vgl. Enzyklopädie der math. Wiss., I B 1 b, p. 258; I B 2, p. 397 und I B 3 b, p. 476.

durch keine höheren Potenzen von $u, v, w, \ldots$ als die in (3) angegebenen teilbar, da der Klammerausdruck in der Gleichung (2) zu jedem der Faktoren $u, v, w, \ldots$ teilerfremd ist. So z. B. ist das erste Glied des Klammerausdruckes zu u teilerfremd, da u_i durch u nicht teilbar sein kann, jedes andere Glied ist durch u teilbar u. s. f.

Soll F zu F_i teilerfremd sein, so muß sich T auf eine Konstante reduzieren, es muß also

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1; \quad \lambda = \mu = \ldots = 0$$

sein. Somit besteht der Satz:

Eine ganze Funktion F ist zu ihrer Ableitung F_i dann und nur dann teilerfremd, wenn jeder ihrer irreduktiblen Faktoren von x_i abhängt und in F nur in der ersten Potenz vorkommt.

§ 2. Bezeichnet man den Quotienten $F:T$ mit f, so ist

$$f = uvw\ldots$$

Man erhält somit das Produkt der ersten Potenzen aller von x_i abhängigen irreduktiblen Faktoren von F, wenn man F durch den größten gemeinsamen Teiler von F und F_i dividiert.

Dieser Satz ist selbstverständlich auch dann richtig, wenn der größte gemeinsame Teiler mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus bestimmt wird. Also ist es möglich, aus der Funktion F, ohne ihre irreduktiblen Faktoren zu kennen, eine Funktion f abzuleiten, welche alle von x_i abhängigen irreduktiblen Faktoren von F, und zwar jeden nur in der ersten Potenz enthält. Wenn F vom p^{ten} Grade ist und das Glied mit x_i^p enthält, so hat es offenbar lauter von x_i abhängige Faktoren. In diesem Falle ist f das Produkt der ersten Potenzen sämtlicher irreduktibler Faktoren von F.

Wenn von x_i unabhängige Faktoren vorhanden sind, so kann man dieselben in analoger Weise behandeln. Man setzt, nachdem $u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$ bestimmt worden ist,

$$F : u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots = U^\lambda V^\mu \ldots = \Phi,$$

sucht den größten gemeinsamen Teiler von Φ und Φ_k u. s. f.

§ 3. Die Trennung der Faktoren läßt sich mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus noch weiter fortsetzen, wobei gleichzeitig die Multiplizität der Faktoren in F direkt bestimmt wird.[1]

Zu diesem Zwecke denken wir uns in F alle irreduktiblen, von x_i abhängigen Faktoren von gleicher Multiplizität zu Produkten $\Pi u, \Pi v, \ldots$ vereinigt, schreiben also, indem wir das Produkt der von x_i unabhängigen Faktoren mit Q bezeichnen,

$$F = Q . \Pi u . (\Pi v)^2 . (\Pi w)^3 \ldots$$

Daraus folgt entsprechend der Gleichung (3)

$$T = Q . \Pi v . (\Pi w)^2 \ldots,$$

ferner, wenn t den größten gemeinsamen Teiler von T und T_i, τ den größten gemeinsamen Teiler von t und t_i u. s. f. bedeutet,

$$t = Q \Pi w \ldots$$

u. s. w. Somit ist

$$\Pi u \Pi v \Pi w \ldots = \frac{F}{T}, \quad \Pi v \Pi w \ldots = \frac{T}{t}, \quad \Pi w \ldots = \frac{t}{\tau},$$

daher

$$\Pi u = \frac{Ft}{T^2}, \quad \Pi v = \frac{T\tau}{t^2}, \ldots$$

Da sich nun $T, t, \tau, \ldots$ mittels des Euklid'schen Algorithmus bestimmen lassen, so können auf diesem Wege nur jene irreduktiblen Faktoren einer ganzen Funktion nicht getrennt werden, welche von denselben Variablen abhängen und in der Funktion die gleiche Multiplizität haben.

§ 4. Nun sei eine Form $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vom p^{ten} Grade in Bezug auf ihre Zerlegbarkeit in lineare Faktoren zu untersuchen. Wenn die Form keine Variable in der p^{ten} Potenz enthält, so kann man sie durch eine umkehrbare lineare Substitution in eine Form verwandeln, in welcher einzelne oder sogar alle Variablen in der p^{ten} Potenz vorkommen.[2] Der Einfachheit

[1] Vgl. das analoge Verfahren bei ganzen Funktionen einer Variablen in Serret-Wertheim, Algebra, 2. Aufl., I, p. 42 oder Enzyklopädie der math. Wiss., I B 1 a, p. 243.

[2] Vgl. z. B. Netto, Algebra, II, p. 12.

wegen nehmen wir an, daß eine solche Umformung, falls sie notwendig war, schon vorausgegangen ist und, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, daß $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ das Glied mit x_1^p enthält.

Hierauf dividieren wir F durch den größten gemeinsamen Teiler von F und F_1 (d. i. der Ableitung von F nach x_1) und bezeichnen den Quotienten mit f.

Die so erhaltene Form f hat folgende Eigenschaften:

a) Sie enthält, wenn sie vom m^{ten} Grade ist, das Glied mit x_1^m;

b) sie ist das Produkt der ersten Potenzen aller irreduktiblen Faktoren von F;

c) sie ist teilerfremd zur Ableitung f_1. (Diese Eigenschaft ist nach § 1 eine Folge der beiden anderen.)

Je nachdem f in lineare Faktoren zerlegbar ist oder nicht, ist es auch F. Die Faktoren von f sind zugleich die Faktoren von F, nur im allgemeinen in einer anderen Potenz.

Somit ist die Untersuchung der gegebenen Form F auf jene einer einfacheren Form f zurückgeführt. Letztere sowie auch jede andere Form mit den Eigenschaften *a)*, *b)* und *c)* soll im folgenden der Kürze halber eine »zubereitete Form« heißen.

II. Eine notwendige Bedingung für das Zerfallen einer Form in lineare Faktoren.

§ 5. Es sei eine Form f durch den linearen Faktor

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

teilbar, somit

$$f = uv,$$

wo auch v eine Form bedeutet. Bezeichnet man die Ableitungen zweiter Ordnung nach x_i und x_k durch Anhängen der Zeiger i und k an das Funktionszeichen, so erhält man

$$f_{ik} = a_i v_k + v_i a_k + u v_{ik}.$$

Somit ist

$$\begin{vmatrix} f_{\alpha\lambda} & f_{\alpha\mu} & f_{\alpha\nu} \\ f_{\beta\lambda} & f_{\beta\mu} & f_{\beta\nu} \\ f_{\gamma\lambda} & f_{\gamma\mu} & f_{\gamma\nu} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_\alpha v_\lambda + v_\alpha a_\lambda + u v_{\alpha\lambda}, & a_\alpha v_\mu + v_\alpha a_\mu + u v_{\alpha\mu}, & a_\alpha v_\nu + v_\alpha a_\nu + u v_{\alpha\nu} \\ a_\beta v_\lambda + v_\beta a_\lambda + u v_{\beta\lambda}, & a_\beta v_\mu + v_\beta a_\mu + u v_{\beta\mu}, & a_\beta v_\nu + v_\beta a_\nu + u v_{\beta\nu} \\ a_\gamma v_\lambda + v_\gamma a_\lambda + u v_{\gamma\lambda}, & a_\gamma v_\mu + v_\gamma a_\mu + u v_{\gamma\mu}, & a_\gamma v_\nu + v_\gamma a_\nu + u v_{\gamma\nu} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_\alpha & v_\alpha & v_{\alpha\lambda} & v_{\alpha\mu} & v_{\alpha\nu} \\ a_\beta & v_\beta & v_{\beta\lambda} & v_{\beta\mu} & v_{\beta\nu} \\ a_\gamma & v_\gamma & v_{\gamma\lambda} & v_{\gamma\mu} & v_{\gamma\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_\lambda & a_\lambda & u & 0 & 0 \\ v_\mu & a_\mu & 0 & u & 0 \\ v_\nu & a_\nu & 0 & 0 & u \end{vmatrix} =$$

$$Hu + Ku^2 + Lu^3.$$

Darin bedeuten H, K, L gewisse Formen, welche sich nach einem bekannten Determinantensatze[1] leicht bestimmen lassen. Hieraus folgt:

Wenn die Form f durch einen linearen Faktor u teilbar ist, so ist jeder Minor dritten Grades von $H(f)$, d. i. der Hesse'schen Determinante der Form, durch u teilbar.

Ist nun

$$f = uvw\ldots,$$

wo $u, v, w, \ldots$ voneinander verschiedene lineare Faktoren bedeuten, so ist jeder Minor dritten Grades von $H(f)$ durch $u, v, w, \ldots$, somit auch durch $uvw\ldots = f$ teilbar.

Zerfällt also eine Form f in lauter verschiedene lineare Faktoren, so ist jeder Minor dritten Grades von $H(f)$ durch f teilbar.

§ 6. Mit Benützung der Bezeichnungen des § 5 findet man

$$\begin{vmatrix} f_{\alpha\alpha} & f_{\alpha\beta} \\ f_{\beta\alpha} & f_{\beta\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & v_\alpha & v_{\alpha\alpha} & v_{\alpha\beta} \\ a_\beta & v_\beta & v_{\beta\alpha} & v_{\beta\beta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_\alpha & a_\alpha & u & 0 \\ v_\beta & a_\beta & 0 & u \end{vmatrix}$$

$$= M + Nu + Pu^2.$$

[1] S. z. B. Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., p. 46.

Hierin ist

$$M = -\begin{vmatrix} a_\alpha & v_\alpha \\ a_\beta & v_\beta \end{vmatrix}^2,$$

welcher Ausdruck für beliebige, der Reihe $1, 2, \ldots n$ entnommene Werte von α und β nur verschwindet, wenn

$$\frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2} = \ldots = \frac{v_n}{a_n}$$

ist. Diese Bedingungen lassen sich nur dadurch erfüllen, daß man $v = \varphi(u)$, also $f = u\varphi(u)$ setzt. Dieses Resultat ist mit der Annahme, daß f eine Form m^{ten} Grades ist, nur vereinbar, wenn $f = cu^m$, somit keine zubereitete Form ist.

Wenn also die zubereitete Form f durch einen linearen Faktor u teilbar ist, so sind nicht alle Minoren zweiten Grades von $H(f)$ durch u teilbar.

Hieraus ergibt sich der Folgesatz:

Zerfällt die zubereitete Form f in lauter lineare Faktoren, so können nicht alle Minoren zweiten Grades von $H(f)$ durch f teilbar sein.

Wir bemerken nebenbei, daß die Resultate der §§ 5 und 6 eine Beziehung zur Theorie der Elementarteiler herstellen; denn nach dem Vorausgehenden besteht der Satz:

Jeder lineare Teiler einer Form ist zugleich ein linearer Elementarteiler der Hesse'schen Determinante der Form.

§ 7. Nun betrachten wir eine Form F mit vielfachen Faktoren, und zwar sei F durch u^r teilbar. Aus

$$F = u^r v$$

folgt

$$F_{ik} = u^{r-2}\,[r\,(r-1)a_i a_k v + r\,u(a_i v_k + a_k v_i) + u^2 v_{ik}]$$
$$= u^{r-2}\,[s_{ik} + u\,t_{ik} + u^2 v_{ik}],$$

wenn zur Abkürzung

$$r\,(r-1)a_i a_k\,v = s_{ik},$$
$$r\,(a_i v_k + a_k v_i) = t_{ik}$$

gesetzt wird. Es ist dann

$$\begin{vmatrix} F_{\alpha\lambda} & F_{\alpha\mu} \\ F_{\beta\lambda} & F_{\beta\mu} \end{vmatrix} = u^{2r-4}\cdot\begin{vmatrix} s_{\alpha\lambda}+u\,t_{\alpha\lambda}+u^2 v_{\alpha\lambda}, & s_{\alpha\mu}+u\,t_{\alpha\mu}+u^2 v_{\alpha\mu} \\ s_{\beta\lambda}+u\,t_{\beta\lambda}+u^2 v_{\beta\lambda}, & s_{\beta\mu}+u\,t_{\beta\mu}+u^2 v_{\beta\mu} \end{vmatrix}$$
$$= u^{2r-4}\,(P+Qu+Ru^2+Su^3+Tu^4).$$

Hierin ist, wie man leicht nachweist,

$$P = \begin{vmatrix} s_{\alpha\lambda} & s_{\alpha\mu} \\ s_{\beta\lambda} & s_{\beta\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

$$Q = \begin{vmatrix} s_{\alpha\lambda} & t_{\alpha\mu} \\ s_{\beta\lambda} & t_{\beta\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{\alpha\lambda} & s_{\alpha\mu} \\ t_{\beta\lambda} & s_{\beta\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun für $r=2$ auch $2r-2=2=r$ und für $r>2$ $2r-2>r$ ist, so ergibt sich der Satz:

Ist eine Form F durch die r^{te} Potenz eines linearen Faktors u teilbar, so ist jeder Minor zweiten Grades von $H(F)$ durch die gleiche oder eine höhere Potenz von u teilbar.

Daraus folgt weiter:

Enthält eine Form lauter lineare Faktoren, und zwar jeden mindestens in der zweiten Potenz, so ist jeder Minor zweiten Grades von $H(F)$ durch F teilbar.

III. Zerlegung der zubereiteten Form, wenn die notwendige Bedingung erfüllt ist.

§ 8. Während die im vorausgehenden Abschnitte bewiesenen Sätze im allgemeinen für beliebige Formen gelten, müssen wir uns im nachfolgenden auf zubereitete Formen (§ 4) beschränken. Durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \tag{4}$$

in welcher f die unter *a), b), c)* im § 4 angeführten Eigenschaften hat, ist x_1 als m-deutige algebraische Funktion der Variablen $x_2, x_3, \ldots x_n$ bestimmt und man kann die m Zweige dieser Funktion durch ebensoviele in gewissen Bereichen konvergente Potenzreihen von $x_2, x_3, \ldots x_n$ mit positiven ganzen Exponenten darstellen. Dabei ist es für die Gültigkeit der folgenden Entwicklungen nicht notwendig, über die Reduktibilität der Form f irgend eine einschränkende Voraussetzung

zu machen, wenn nur, was hier der Fall ist, die vielfachen Faktoren ausgeschlossen sind.

Um x_1 durch Potenzreihen darzustellen, haben wir vor allem m reguläre Stellen des algebraischen Gebildes (4) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$x_2 = a_2,\ x_3 = a_3, \dots x_n = a_n$$

und wählen die sonst willkürlichen Größen a so, daß die Gleichung

$$f(x_1, a_2, a_3, \dots a_n) = 0 \tag{5}$$

lauter verschiedene Wurzeln

$$x_1 = a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots a_1^{(m)} \tag{6}$$

hat. Dies ist stets möglich, denn einerseits kann die Diskriminante der Gleichung (5) oder, was dasselbe ist, die Resultante der Gleichungen

$$f(x_1, a_2, a_3, \dots a_n) = 0, \qquad f_1(x_1, a_2, a_3, \dots a_n) = 0$$

nicht identisch (d. h. für alle Werte von $a_2, a_3, \dots a_n$) verschwinden, weil f zu f_1 teilerfremd ist, anderseits bilden die Werte der Größen $a_2, a_3, \dots a_n$, für welche die Diskriminante verschwindet, nur eine M_{n-2} (Mannigfaltigkeit $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung), während alle Werte derselben Größen eine M^{n-1} bilden. Es genügt daher im allgemeinen, für $n-2$ der Größen $a_2, a_3, \dots a_n$ die Null und für die übrigbleibende irgend eine von der Null verschiedene Zahl zu setzen, wenn man erreichen will, daß die Wurzeln (6) voneinander verschieden sind und daher die Ableitung $f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ an den erhaltenen m Stellen

$$x_1 = a_1^{(\lambda)},\ x_2 = a_2, \dots x_n = a_n \tag{7}$$
$$(\lambda = 1, 2, \dots m)$$

nicht verschwindet.

Diesen Stellen entsprechen die in deren Umgebungen konvergenten Reihen

$$x_1 = a_1^{(\lambda)} + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_\lambda + \dots + (x_n - a_n)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)_\lambda$$
$$+ \frac{1}{2}(x_2 - a_2)^2 . \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2}\right)_\lambda + \dots \tag{8}$$
$$(\lambda = 1, 2, \dots m).$$

Hierin soll der an den Differentialquotienten von x_1 angebrachte Zeiger λ anzeigen, daß in denselben die Variablen x durch die speziellen Werte (7) zu ersetzen sind.

§ 9. Die Differentialquotienten zweiter Ordnung von x_1 berechnet man aus den Gleichungen

$$f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + f_i = 0,$$

$$f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + f_k = 0,$$

$$f_1 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} + f_{11} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + f_{1k} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + f_{1i} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + f_{ik} = 0$$

durch Elimination von $\frac{\partial x_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_k}$ und erhält, wenn $f_1 \neq 0$ ist,

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{f_1^3} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1k} & f_1 \\ f_{i1} & f_{ik} & f_i \\ f_1 & f_k & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man in dieser Determinante die Elemente der dritten Spalte mit $m-1$, ersetzt das Element 0 durch mf und benützt die Euler'schen Relationen

$$mf = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n,$$
$$(m-1) f_1 = x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + \ldots + x_n f_{1n},$$
$$(m-1) f_i = x_1 f_{i1} + x_2 f_{i2} + \ldots + x_n f_{in},$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{(m-1) f_1^3} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1k} & x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + \ldots + x_n f_{1n} \\ f_{i1} & f_{ik} & x_1 f_{i1} + x_2 f_{i2} + \ldots + x_n f_{in} \\ f_1 & f_k & x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(m-1) f_1^3} \cdot \sum_\beta x_\beta \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1k} & f_{1\beta} \\ f_{i1} & f_{ik} & f_{i\beta} \\ f_1 & f_k & f_\beta \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in der letzten Determinante die Elemente der dritten Zeile durch die aus den Euler'schen Relationen sich ergebenden Aggregate, so erhält man schließlich

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{(m-1)^2 f_1^3} \cdot \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1k} & f_{1\beta} \\ f_{i1} & f_{ik} & f_{i\beta} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha k} & f_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$(\alpha, \beta = 2, 3, \ldots n),$$

wobei selbstverständlich die Werte $\alpha = i$, $\beta = k$ keinen Beitrag zur Summe liefern.

§ 10. Die Gleichung (9) läßt erkennen, daß jeder Differentialquotient zweiter Ordnung von x_1 eine lineare homogene Funktion der Minoren dritten Grades von $H(f)$ ist. Indem wir also die Bedingung, die wir im § 5 für das Zerfallen einer Form in lineare Faktoren als notwendig erkannten, von der zubereiteten Form f als erfüllt annehmen, nämlich, daß alle Minoren dritten Grades von $H(f)$ durch f teilbar sind, schließen wir aus der Gleichung (9), daß sich in diesem Falle jeder Differentialquotient zweiter Ordnung von x_1 durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = U \cdot f \tag{10}$$

darstellen läßt, wo U eine gebrochene Funktion mit dem Nenner f_1^3 bedeutet.

Zufolge der Gleichung (10) verschwinden alle Differentialquotienten zweiter Ordnung von x_1 für jedes die Gleichung $f = 0$ befriedigende Wertsystem, welches der Gleichung $f_1 = 0$ nicht entspricht. Daß diese Eigenschaft auch allen Differentialquotienten derselben Variablen von höherer als der zweiten Ordnung zukommt, erkennt man auf folgendem Wege:

Aus der Gleichung (10) folgt zunächst durch Differentiation nach x_l

$$\frac{\partial^3 x_1}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = \left(U_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_l} + U_l\right) \cdot f + U\left(f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_l} + f_l\right).$$

Da nun aus der Gleichung $f = 0$ die folgende

$$f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_l} + f_l = 0$$

hervorgeht, so ist

$$\frac{\partial^3 x_1}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} = V.f,$$

wo V eine gebrochene Funktion bedeutet, deren Nenner eine Potenz von f_1 ist.

Ebenso erhält man aus der letzten Gleichung

$$\frac{\partial^4 x_1}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_m} = W.f,$$

wo auch W eine gebrochene Funktion bedeutet, deren Nenner eine Potenz von f_1 ist u. s. f. Daher verschwinden alle diese Differentialquotienten von x_1 für solche Werte der x, welche den Bedingungen $f = 0$, $f_1 \neq 0$ entsprechen. Diesen Bedingungen genügen nun die Werte (7) und daher enthalten die Reihen (8) keine Glieder von höherer als der ersten Ordnung. Man hat also unter den gemachten Voraussetzungen bezüglich der Form f

$$x_1 = a_1^{(\lambda)} + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_\lambda + \ldots + (x_n - a_n)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)_\lambda \quad (11)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots m).$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_i}\right)_\lambda = -\frac{(f_i)_\lambda}{(f_1)_\lambda} \qquad (i = 2, 3, \ldots n), \qquad (12)$$

wo $(f_k)_\lambda$ den Wert der Ableitung f_k für die Werte (7) bedeutet und $(f_1)_\lambda \neq 0$ ist. Mit Hilfe der Gleichungen (12) und der folgenden

$$a_1^{(\lambda)}(f_1)_\lambda + a_2(f_2)_\lambda + \ldots + a_n(f_n)_\lambda = 0,$$

welche aus der Euler'schen Relation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n = mf$$

durch die Substitution der Werte (7) entsteht, können die Gleichungen (11) auf die Form

$$x_1(f_1)_\lambda + x_2(f_2)_\lambda + \ldots + x_n(f_n)_\lambda = 0 \qquad (13)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

gebracht werden.

§ 11. Da die für x_1 erhaltenen Reihen nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten, so fällt die Einschränkung der Variablen auf gewisse Konvergenzbereiche weg. Aber auch von der Bedingung, daß die Variablen die Gleichung (4) befriedigen müssen, können wir uns befreien, indem wir zu dem eigentlichen Thema dieser Arbeit, d. i. der Zerlegung der Form f in lineare Faktoren, übergehen. Dazu gelangen wir durch folgende Überlegung:

Erteilt man den Variablen $x_2, x_3, \ldots x_n$ beliebige Werte, so ist (4) eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades mit der Unbekannten x_1. Die Wurzeln dieser Gleichung erhält man aus (11) oder (13). Nach dem bekannten Satze über die Zusammensetzung des Gleichungspolynoms aus den Wurzelfaktoren ergibt sich also die Identität

$$f \equiv k \, . \prod_{\lambda=1}^{\lambda=m} [x_1(f_1)_\lambda + x_2(f_2)_\lambda + \ldots + x_n(f_n)_\lambda]. \qquad (14)$$

Da hierin auch x_1 beliebige Werte annehmen kann, so sind alle Variablen in dieser Identität unbeschränkt und wir haben somit die gegebene Form f in lineare Faktoren zerlegt. k bedeutet offenbar jene Konstante, welche bewirkt, daß die Koeffizienten von x_1^m zu beiden Seiten des Identitätszeichens einander gleich werden.

Es besteht somit der Satz:

Für das Zerfallen der zubereiteten Form f in lineare Faktoren ist notwendig und hinreichend, daß alle Minoren dritten Grades der Hesse'schen Determinante von f durch f teilbar sind.

Dieser Satz und die Identität (14) enthalten die allgemeine Auflösung der eingangs erwähnten zwei Probleme.

IV. Zusätze.

§ 12. Aus den §§ 8 und 11 geht hervor, daß man die Koeffizienten $(f_i)_\lambda$ der linearen Faktoren auch berechnen kann,

indem man in die Ableitungen f_i für die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige konstante Werte

$$a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

einsetzt, welche den Bedingungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad f_1 \neq 0$$

genügen, vorausgesetzt, daß die entsprechenden linearen Faktoren voneinander verschieden sind.

Man überzeugt sich leicht, daß die Identität (14) lauter verschiedene Faktoren enthält. Denn hätten die den Werten $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ entsprechenden Faktoren proportionale Koeffizienten, d. h. wäre

$$(f_i)_\alpha = c(f_i)_\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so könnten die aus der Euler'schen Relation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n = mf$$

folgenden Gleichungen

$$a_1^{(\alpha)}(f_1)_\alpha + a_2(f_2)_\alpha + \ldots + a_n(f_n)_\alpha = 0$$
$$a_1^{(\beta)}(f_1)_\beta + a_2(f_2)_\beta + \ldots + a_n(f_n)_\beta = 0$$

nur für

$$a_1^{(\alpha)} = a_1^{(\beta)}$$

miteinander bestehen. Dies ist jedoch nach § 8 ausgeschlossen.

§ 13. Die Bedingung für die Zerlegbarkeit einer Form (siehe § 11) läßt sich auch in anderer Weise ausdrücken, wenn man den Begriff: »Rang einer Determinante mit variablen Elementen« passend erweitert. Anstatt nämlich, wie es sonst geschieht, den Rang einer solchen Determinante nach dem identischen Verschwinden der Minoren zu beurteilen, wollen wir von der folgenden Definition ausgehen:

Eine Determinante mit variablen Elementen hat für ein irgendwie bestimmtes Gebiet der Variablen den Rang r, wenn ihr Rang für jedes diesem Gebiete angehörende Wertsystem der Variablen $\leqq r$ ist, wo das Gleichheitszeichen mindestens einem Wertsystem entsprechen muß.

Nach dieser Festsetzung kann man sagen:

Für das Zerfallen der zubereiteten Form f in lineare Faktoren ist notwendig und hinreichend, daß $H(f)$ für das durch $f = 0$ bestimmte Gebiet der Variablen den Rang 2 hat.

Sind nämlich alle Minoren dritten Grades von $H(f)$ durch f teilbar, so verschwinden sie für sämtliche der Gleichung $f = 0$ genügenden Wertsysteme, während dies nach § 6 bei den Minoren zweiten Grades nicht der Fall ist.

Umgekehrt: Aus dem Verschwinden der Minoren dritten Grades von $H(f)$ für sämtliche der Gleichung $f = 0$ genügenden Wertsysteme folgt ihre Teilbarkeit durch f,[1] somit auch die Zerlegbarkeit von f in lineare Faktoren.

Aus dem § 7 geht ferner hervor:

Enthält eine (nicht zubereitete) Form F lauter lineare Faktoren, und zwar jeden mindestens in der zweiten Potenz, so hat $H(F)$ für das durch $F = 0$ bestimmte Gebiet der Variablen den Rang 1.

Ob auch die Umkehrung richtig ist, soll hier unentschieden bleiben.

§ 14. Wir wenden uns nun zur Beantwortung der Frage nach der Mindestzahl der Minoren dritten Grades von $H(f)$, deren Teilbarkeit durch f jene aller übrigen Minoren desselben Grades zur Folge hat.

Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Satz voraus:

Ist f eine zubereitete Form, so sind nicht alle Diagonalminoren zweiten Grades von $H(f)$ identisch gleich Null.

Beweis. Aus den Identitäten

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1\alpha} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots n)$$

würde folgen, daß in f die Variable x_1 mit jeder der Variablen $x_2, x_3, \ldots x_n$ linear verbunden ist. Dann wäre f nur von einer linearen Form u abhängig, somit $\equiv c u^m$. Dies widerspricht

[1] Vgl. z. B. Netto, Algebra, II, p. 24, Satz X.

der Annahme, daß f (als zubereitete Form) lauter einfache Faktoren enthält.

Nun nehmen wir an, daß unter den Diagonalminoren zweiten Grades von $H(f)$, welche nicht identisch verschwinden, ein zu f teilerfremder vorkommt. Das Vorhandensein solcher Minoren ist nach den Ergebnissen des § 6 für zubereitete Formen zu erwarten, dürfte jedoch nicht leicht allgemein nachgewiesen werden.

Es läßt sich dann folgender Satz beweisen:

Ist etwa

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = d \tag{15}$$

zu f teilerfremd und jeder der $\binom{n-1}{2}$ Minoren dritten Grades

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1\beta} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2\beta} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha 2} & f_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 3, 4, \ldots n) \tag{16}$$

durch f teilbar, so ist auch jeder der übrigen Minoren dritten Grades von $H(f)$ durch f teilbar.

Beweis. Es sei

$$x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \ldots x_n = c_n \tag{17}$$

ein beliebiges Wertsystem, welches den Gleichungen

$$f = 0, \; d = 0 \tag{18}$$

genügt, D sei ein beliebiger, von den in (16) angeführten verschiedener Minor dritten Grades von $H(f)$ und D_0 sein Wert für die Stelle (17). Da D als ganze Funktion überall stetig ist, so läßt sich um die Stelle (17) eine Umgebung abgrenzen, so daß für alle derselben angehörenden x und für beliebige positive Werte von ε

$$|D - D_0| < \varepsilon \tag{19}$$

ist. Jene Umgebung enthält eine M_{n-1} (Mannigfaltigkeit $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung) solcher Stellen x, welche der Bedingung $f = 0$

genügen und, weil f zu d teilerfremd ist, eine M_{n-2} von Stellen, welche den Gleichungen (18) genügen. Es bleibt somit in derselben Umgebung eine M_{n-1} von Stellen übrig, welche den Bedingungen

$$f = 0, \quad d \neq 0 \qquad (20)$$

entsprechen. Für die zuletzt erwähnten Stellen ist nach einem bekannten Kronecker'schen Satze,[1] welchem der eben zu beweisende nachgebildet ist, $D = 0$. Daher kann die Ungleichung (19) für beliebige ε nur bestehen, wenn auch $D_0 = 0$ ist. Da somit D für alle jene Stellen der Umgebung verschwindet, für welche auch f verschwindet, so ist D durch f teilbar.[2] W. z. b. w.

V. Spezielle Fälle.

§ 15. Quadratische Formen. Es sei

$$f \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n). \qquad (21)$$

a) Da $H(f)$ sich von der Determinante der Form nur dadurch unterscheidet, daß jedes Element der ersteren das Doppelte des entsprechenden Elementes der letzteren ist, so erhält man durch Spezialisierung des Resultates im § 11 den Satz:

Eine quadratische Form zerfällt dann und nur dann in zwei verschiedene lineare Faktoren, wenn ihre Determinante den Rang 2 hat.

Dieses Resultat geht auch aus dem bekannten Satze hervor, daß eine quadratische Form vom Range r sich als ein Aggregat von r Quadraten voneinander unabhängiger linearer Formen darstellen läßt, wenn man $r = 2$ setzt und die Identitäten

$$u^2 - v^2 \equiv (u+v)(u-v), \quad u^2 + v^2 \equiv (u+vi)(u-vi)$$

benützt.

Um an der Determinante der quadratischen Form den Rang 2 auf kürzestem Wege nachzuweisen, sucht man zunächst

---

[1] Kronecker, Journ. f. Math., 72; Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., p. 53.

[2] Vgl. Enzyklopädie der math. Wiss., II B 1, p. 106.

einen von der Null verschiedenen Diagonalminor zweiten Grades auf. Ein solcher muß in einer symmetrischen Determinante vom Range 2 stets vorhanden sein, was aus bekannten, von Frobenius[1] bewiesenen Sätzen hervorgeht. Ist etwa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so genügt es nach dem oben benützten Kronecker'schen Satze,[2] das Bestehen der folgenden $\binom{n-1}{2}$ Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1\beta} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2\beta} \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 3, 4, \ldots n)$$

nachzuweisen. Dann hat $H(f)$ den Rang 2 und f ist in zwei verschiedene Faktoren zerlegbar.

Um die Zerlegung durchzuführen, setze man, wenn

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, in der Gleichung $f = 0$

$$x_2 = a_{11}, \; x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Sie geht über in

$$x_1^2 + 2a_{12}x_1 + a_{11}a_{22} = 0$$

und hat die Wurzeln

$$a_1^{(1)} = -a_{12} + \sqrt{-d_2}, \quad a_1^{(2)} = -a_{12} - \sqrt{-d_2},$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} = d_i$$

[1] Frobenius, Journ. f. Math., 82, p. 239.

[2] Kronecker, Journ. f. Math., 72; Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., p. 53.

gesetzt wird. Es ist ferner

$$f_i = 2(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n),$$

$$(f_i)_1 = 2\left(d_i + a_{i1}\sqrt{-d_2}\right), \quad (f_i)_2 = 2\left(d_i - a_{i1}\sqrt{-d_2}\right),$$

also schließlich

$$f = \frac{1}{a_{11}d_2} \cdot (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n),$$

wo

$$\alpha_i = d_i + a_{i1}\sqrt{-d_2}, \quad \beta_i = d_i - a_{i1}\sqrt{-d_2}.$$

Ist $a_{11} = 0$, so erhält man ein Kriterium der Zerlegbarkeit sowie auch die Zerlegung selbst direkt auf folgendem höchst einfachen Wege: Die Gleichung

$$f = uv$$

kann für $a_{11} = 0$ nur bestehen, wenn der eine Faktor, etwa u, von x_1 unabhängig ist. Daraus folgt

$$f_1 = uv_1.$$

Da v_1 konstant ist, so ist f_1 selbst der eine Faktor.

Wenn also in einer quadratischen Form $a_{11} = 0$ ist, so läßt sie sich in lineare Faktoren nur in dem Falle zerlegen, wenn sie durch ihre Ableitung nach x_1 teilbar ist.

b) Aus dem letzten Satze in § 7 oder aus dem oben zitierten Satze über quadratische Formen folgt:

Eine quadratische Form zerfällt dann und nur dann in zwei gleiche Faktoren, wenn ihre Determinante den Rang 1 hat.

Noch leichter erkennt man das Vorhandensein gleicher Faktoren, wenn man entsprechend dem Satze in § 1 untersucht, ob f gleiche Faktoren enthält. Dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn a_{11} von der Null verschieden und f durch f_1 teilbar ist. In diesem Falle ist

$$f = \frac{1}{4a_{11}} \cdot f_1^2.$$

§ 16. Ternäre Formen. Aus § 11 ergibt sich durch Spezialisierung:

Für das Zerfallen einer ternären Form in lineare Faktoren ist notwendig und hinreichend, daß ihre Hesse'sche Determinante durch sie teilbar ist.

Ein spezieller Fall dieses Satzes, und zwar für kubische ternäre Formen, war schon Clebsch[1] bekannt, ist jedoch in neueren Arbeiten über diesen Gegenstand häufig unbeachtet geblieben.[2]

Man kann obigen Satz auch durch folgende Überlegung ableiten:

Die Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ hat alle ihre Wendepunkte (im weiteren Sinne, d. h. Punkte mit der Krümmung Null) mit der Hesse'schen Kurve $H(f) = 0$ gemeinsam. Zerfällt sie also in Gerade, so gehören alle ihre Punkte der Hesse'schen Kurve an, daher muß jedes Wertsystem der x, welches die Gleichung $f = 0$ befriedigt, auch der Gleichung $H(f) = 0$ genügen, es muß also, wenn jede Gerade nur einfach zu zählen ist, $H(f)$ durch f teilbar sein.

Umgekehrt: Aus der Teilbarkeit von $H(f)$ durch f folgt, daß alle Punkte der Kurve $f = 0$ Wendepunkte sind, da sie auch der Hesse'schen Kurve angehören, daß also die Kurve $f = 0$ aus lauter Geraden besteht.

Wenn die Zerlegbarkeit der Form f in lineare Faktoren nachgewiesen ist, so erhält man letztere, wie schon Clebsch a. a. O. bemerkt, auch durch die Überlegung, daß jede Tangente der Kurve $f = 0$ mit einer der Geraden identisch ist, aus denen die Kurve besteht. Man hat somit nur die erforderliche Anzahl von Berührungspunkten der Tangenten zu bestimmen (was am besten auf dem im § 8 angegebenen Wege geschieht) und die Tangentengleichungen durch Multiplikation zu verbinden.

Beispiel:

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3.$$

---

[1] Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, I, p. 597.

[2] Vgl. Junker, Math. Ann., 45, p. 40; Brill, Math. Ann., 50, p. 180.

(Der Verlauf der folgenden Rechnung zeigt, daß man es bereits mit einer zubereiteten Form zu tun hat.) Man findet

$$H(f) = -54f,$$

woraus hervorgeht, daß f in lineare Faktoren zerlegbar ist. Setzt man in der Gleichung $f = 0$

$$x_2 = 0, \quad x_3 = -1, \tag{22}$$

so geht sie über in

$$x_1^3 - 1 = 0$$

und hat die Wurzeln

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_1^{(2)} = \varepsilon, \quad a_1^{(3)} = \varepsilon^2,$$

wo ε die dritte Einheitswurzel bedeutet. Setzt man diese Werte und die Werte (22) in die Ableitungen f_1, f_2, f_3, so erhält man schließlich

$$f \equiv (x_1 + x_2 + x_3)(\varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2 + x_3)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3).$$

§ 17. Quaternäre Formen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen der Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in lineare Faktoren läßt sich nach § 14 so aussprechen, daß die den Elementen f_{33}, f_{34}, f_{44} adjungierten Minoren von $H(f)$ durch f teilbar sein müssen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Minor $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ nicht identisch verschwindet und zu f teilerfremd ist.

Diese Bedingung läßt sich durch geometrische Schlüsse, welche den im § 16 angewandten analog sind, nur zum Teile verifizieren.

Da nämlich die Fläche $f = 0$ alle Punkte, in denen die Krümmung gleich Null ist, mit der Hesse'schen Fläche $H(f) = 0$ gemeinsam hat, so folgt aus dem Zerfallen der Fläche $f = 0$ in lauter einfach zu zählende Ebenen, daß $H(f)$ durch f teilbar ist. Hingegen folgt aus der Teilbarkeit von $H(f)$ durch f nur, daß die Fläche $f = 0$ in allen ihren Punkten die Krümmung Null hat und somit in die Ebene abwickelbar ist.

Man überzeugt sich leicht durch Schlüsse, welche in der Theorie der Elementarteiler zur Anwendung gelangen,[1] daß in dem Falle, wenn die quaternäre Form f in lineare Faktoren zerfällt, $H(f)$ durch f^2 teilbar ist. Hingegen kann aus der Teilbarkeit von $H(f)$ durch f^2 nicht auf das Zerfallen von f in lineare Faktoren geschlossen werden.

Wenn man weiß, daß sich die quaternäre Form f in lineare Faktoren zerlegen läßt, so lassen sich letztere auch durch die Überlegung bestimmen, daß jede Tangentialebene der Fläche $f = 0$ mit einer der Ebenen identisch ist, aus denen die Fläche besteht.

[1] Vgl. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, p. 2.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. III. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Zur Theorie des Plücker'schen Konoids

von

August Adler,

k. k. Realschulprofessor, Privatdozent an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Februar 1904.)

Man konstruiert gewöhnlich den Schlagschatten eines unbegrenzten Plücker'schen Konoides auf eine Ebene E als Einhüllende der Schatten seiner Erzeugenden.

Führt man diese Konstruktion für den Fall aus, daß E normal zur Doppellinie d des Konoides steht und der leuchtende Punkt unendlich fern liegt, so zeigt der entstehende Schatten eine große Ähnlichkeit mit einer Steiner'schen Hypozykloide, was gewiß schon oft auffiel.

Im folgenden wird nun zunächst nachgewiesen, daß der Schatten des Plücker'schen Konoides auf eine Normalebene zur Doppellinie eine Steiner'sche Hypozykloide ist, Parallelbeleuchtung vorausgesetzt.

Aus diesem Satze wird weiter eine Konstruktion des Schattens abgeleitet, welche einfacher und genauer zu sein scheint als die bisher zu demselben Zwecke verwendete (siehe Rohn-Papperitz, Darstellende Geometrie, Bd. II, p. 274).

1. Wir müssen zunächst einiges über die Steiner'sche Hypozykloide ins Gedächnis zurückrufen:

Rollt auf der Innenseite des festen Kreises K ein Kreis k, dessen Radius den dritten Teil desjenigen von K beträgt, so beschreibt bekanntlich jeder Punkt der bewegten Kreislinie

eine dreispitzige Hypozykloide. Diese Kurve wurde sehr oft untersucht, besonders eingehend von J. Steiner, dessen Namen sie auch trägt.

Sie ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse mit drei Spitzen I, II, III, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Tangenten t_1, t_2, t_3 in diesen Spitzen schneiden einander im Mittelpunkte M des Kreises K unter Winkeln von je 60°. (Siehe Figur; k wurde nicht eingetragen.)

Die Steiner'sche Kurve wird von der unendlich fernen Geraden der Ebene doppelt berührt, und zwar in den imaginären Kreispunkten.

Schneiden sich umgekehrt bei einer Kurve vierter Ordnung dritter Klasse die drei Spitzentangenten unter 60° und stellt die unendlich ferne Gerade der Ebene die Doppeltangente dieser Kurve dar, so ist diese Kurve eine Steiner'sche Hypozykloide.

Von den vielen, sonst bekannten Eigenschaften der Steiner'schen Hypozykloide müssen wir noch eine anführen, da sie für uns später von Bedeutung wird:

»Der Ort der Schnittpunkte normaler Tangenten der Steiner'schen Kurve ist ein Kreis K, welcher mit der Kurve konzentrisch ist, sie in drei Punkten berührt, und dessen Radius demnach ein Drittel des Radius von K ausmacht« (Fig.).

2. Das Plücker'sche Konoid ist nun eine Regelfläche dritten Grades, dessen Doppellinie d normal zur unendlich fernen einfachen Leitlinie l steht.

Jede Ebene durch l enthält zwei (auch imaginäre) Erzeugende der Fläche und berührt die Fläche in zwei unendlich fernen Punkten. Die unendlich ferne Ebene enthält also auch zwei Erzeugende der Fläche, und zwar sind dieselben Tangenten des imaginären Kugelkreises in den Schnittpunkten mit l.

3. Der Schatten unseres Konoides auf irgend eine Ebene E ist demnach eine Kurve dritter Klasse, vierter Ordnung; dieselbe besitzt, wie jede solche Kurve, drei Spitzen und eine Doppeltangente; letztere stellt den Schatten von l auf diese Ebene dar.

Wird Parallelbeleuchtung angenommen und steht E normal zur Doppellinie l, so fällt der Schatten von l in die unendlich ferne Gerade von E. Die Doppeltangente des Schattens ist also die unendlich ferne Gerade von E; sie berührt den Schatten (Artikel 2) in den imaginären Kreispunkten. Es läßt sich auch leicht zeigen (Rohn-Papperitz, a. a. O.), daß die Tangenten in den Spitzen sich dann gegenseitig unter 60° schneiden. Daraus ergibt sich (Artikel 1) sofort, daß dieser Schatten eine Steiner'sche Hypozykloide ist.

Damit ist der erste Teil unserer Aufgabe erledigt.

4. Bevor wir die konstruktive Verwendung dieses Ergebnisses darlegen, müssen wir die beigegebene Figur erläutern.

Die beiden normalen Geraden a' und b' derselben stellen die Orthogonalprojektion der Torsallinien a und b des Plücker'schen Konoides auf die Zeichenfläche dar. Wir nehmen an, daß a in der Zeichenebene und b im Abstande $2u$ von derselben liege. Es wird sich übrigens zeigen, daß die ganze Figur von $2u$ unabhängig ist.

Die Endpunkte der Strecke $2u$ sind bekanntlich die Kuspidalpunkte der Fläche.

Es wird Parallelbeleuchtung vorausgesetzt; l' sei die Tafelprojektion eines Lichtstrahles; b_1 sei der Schlagschatten von b auf die Zeichenfläche. Punkt G ist dann der Schatten des Kuspidalpunktes auf b.

Die Figur enthält auch einen Kreis e', welcher b' und b_1 berührt. Er ist bekanntlich die Tafelprojektion jener Ellipse e, welche die Ebene $(b\, b_1)$ mit der Regelfläche noch außer b gemein hat. Der Schatten von e auf die Zeichenfläche ist eine Strecke, welche in b_1 fällt.

5. Es sei nun f eine beliebige Erzeugende des Konoides (Figur) und F ihr Schnittpunkt mit e. Der Schatten F_1 von F kommt auf b_1 zu liegen (Artikel 4); zieht man die Gerade f_1 durch F_1 und parallel zu f', so ist schon f_1 der Schatten von f auf die Zeichenfläche.

Aus dieser Schattenkonstruktion für die einzelnen Erzeugenden folgen neue Beweise für unseren Satz (Artikel 3).

Durch diese Konstruktion ist nämlich eine 1,2-deutige Verwandtschaft zwischen der Punktreihe auf b_1 und jener auf der unendlich fernen Geraden hergestellt und man kann unschwer nachweisen, daß das Erzeugnis dieser Verwandtschaft eine Steiner'sche Hypozykloide sein muß.

Durch die Konstruktion ist aber auch eine 2,2-deutige Verwandtschaft zwischen den Punktreihen auf b_1 und l' hergestellt, welche dieselbe Kurve erzeugt.

6. Jetzt sind wir in der Lage, die konstruktive Verwendung obiger Resultate rasch darzulegen:

Wir konstruieren zunächst jenen Kreis k, welcher der Ort der Schnittpunkte normaler Tangenten des Schattens ist Wir brauchen zu dem Zwecke nur normale Erzeugende der Fläche anzunehmen und ihre Schatten zu verzeichnen.

Die Geraden x' und l' sind z. B. die Projektionen von zwei normalen Erzeugenden. Der Schatten der zweiten dieser Erzeugenden fällt offenbar mit l' zusammen, der Schatten x_1 von x geht durch A und ist normal zu l'. Der Schnittpunkt B von l' und x_1 ist also schon ein Punkt von k.

Die Torsallinien a, b sind auch normale Erzeugende der Fläche; daher geht k durch A (Figur).

Zieht man endlich durch den Mittelpunkt C von e' eine Parallele 2 zu l', so schneidet dieselbe die Strecke AG (Figur) im Halbierungspunkte D und e' in 2 Punkten, aus welchen wieder zwei (in der Figur nicht eingezeichnete) normale Erzeugende des Konoids folgen. Die Schatten dieser beiden Erzeugenden schneiden einander in D; D ist also auch ein Punkt von k, welcher übrigens auch durch C gehen muß.

7. Es empfiehlt sich nun, bei der tatsächlichen Durchführung der Schattenkonstruktion folgendermaßen vorzugehen:

Gegeben sind a', b', l' und damit O, A, G. Man halbiere $\overline{AG}$ in D, ziehe durch D die Gerade 2 parallel zu l', wodurch man C und M erhält, M als Halbierungspunkt der Strecke $\overline{DC}$.

Nun zeichne man k und konzentrisch damit K mit dem dreifachen Radius von k.

M ist schon der Schnittpunkt der Spitzentangenten t_1, t_2, t_3. Dieselben schließen (siehe Rohn-Papperitz, a. a. O.) mit a'

Winkel ein, welche nur ein Drittel der Winkel sind, die l' mit a' bildet.

Zieht man also durch M die Gerade 1 parallel zu a' und zerlegt den Winkel 1 M 2 in drei gleiche Teile, so ist damit schon eine Tangente t_1 gefunden (Figur). Die beiden anderen findet man jetzt aus ihrer Eigenschaft, mit t_1 Winkel von 60° einzuschließen.

Aus den sechs Schnittpunkten dieser Tangenten mit K folgen die Spitzen I, II, III. Man kann dabei nicht in Zweifel kommen, welche dieser Schnittpunkte man als Spitzen zu nehmen hat: Unser Schatten muß ja b_1 in G, a' in O[1] und endlich l' in H berühren. Bemerkt sei, daß

$$\overline{OH} = \overline{BG}$$

ist, wie man aus der Betrachtung der in der Ebene $(l'd)$ liegenden Konstruktionslinien sofort ersieht.

Die Schattenkurve berührt auch den Kreis k in drei seiner Schnittpunkte mit t_1 respektive t_2 und t_3.

Von jedem Bogen derselben kennt man also jetzt vier Punkte samt ihren Tangenten, genügend Elemente, um dieselbe rasch und genau zu verzeichnen.

8. Vergleicht man das eben erörterte Verfahren mit dem bisher gebräuchlichen (siehe Rohn-Papperitz, a. a. O.), so muß man wohl zugestehen, daß ersteres nicht nur einfacher, sondern auch genauer das gewünschte Resultat gibt. Nach der bisher üblichen Methode konnte die Spitze I, welche immer in die Nähe von O fällt (falls nicht Ausnahmsstellungen von l angenommen werden), überhaupt nicht sorgfältig genug bestimmt werden (siehe Rohn - Papperitz, a. a. O.).

9. Im Interesse des darstellend geometrischen Unterrichtes ist es gelegen, einen möglichst elementaren Beweis des Satzes zu haben, daß der Schatten des Plücker'schen Konoids auf unsere Zeichenfläche eine Steiner'sche Hypozykloide ist. Wir wollen hier einen derartigen geben:

---

[1] Die Eigenschattengrenze einer Regelfläche geht bekanntlich immer durch die Kuspidalpunkte und berührt in diesen die Torsallinien.

α. Wir gehen zu diesem Zwecke von einer sehr bekannten Erzeugungsweise dieser Kurve aus:

»Ist dem Kreise δ^2 ein beliebiges Dreieck eingeschrieben, so umhüllen die Fußpunktgeraden der Punkte P von δ^2 bezüglich dieses Dreieckes eine Steiner'sche Hypozykloide. Die Fußpunktgerade des Punktes P von δ^2 wird dabei erhalten, wenn man von P auf irgend zwei Seiten des Dreieckes Normale fällt und deren Fußpunkte miteinander verbindet. Von dem Dreiecke können auch zwei Punkte zusammenfallen.«

Wir wollen nun zeigen, daß unsere Schattenkurve auf diese Art erzeugt werden kann.

β. Es sei δ^2 der dem Dreiecke OAG umgeschriebene Kreis, f' die Tafelprojektion einer beliebigen Erzeugenden f, F' und N seien die Schnittpunkte von f' mit e' respektive δ^2, endlich werde NF_1 senkrecht zu AS gezogen.

Auf den beiden durch S gehenden Geraden f' und b_1 liegen je drei Punkte O, F', N respektive A, G, F_1.

Da nun NF_1 parallel zu OA und GN parallel zu AF' ist (weil letztere normal zu f'), so müssen, wie aus der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke (oder aus dem Pascal'schen Satze) folgt, auch $F'F_1$ parallel zu OG sein. F_1 ist demnach identisch mit jenem Punkte, den wir Artikel 5 zur Konstruktion des Schattens f_1 benützten; es ist also $F_1R \| f'$ schon der Schatten f_1 von f.

γ. Nun ist weiter $\overline{NF_1} = \overline{OR} = \overline{QP}$. Der Schatten f_1 der beliebigen Erzeugenden f kann daher auch auf folgendem Wege gefunden werden:

Man nehme auf δ^2 einen beliebigen Punkt P an und fälle von diesem aus auf die Seiten b_1 und a' des Dreieckes OAG die Normalen; die Verbindungslinie der Fußpunkte R und F_1 dieser Normalen ist schon der Schatten f_1 von f; f_1 ist aber die Fußpunktgerade von P bezüglich OAG.

Damit ist aber bewiesen, daß die Schatten f_1 eine Steiner-sche Hypozykloide einhüllen.

Fällt l' mit a' zusammen, so vereinfacht sich der Beweis bedeutend; δ^2 fällt dann mit k zusammen.

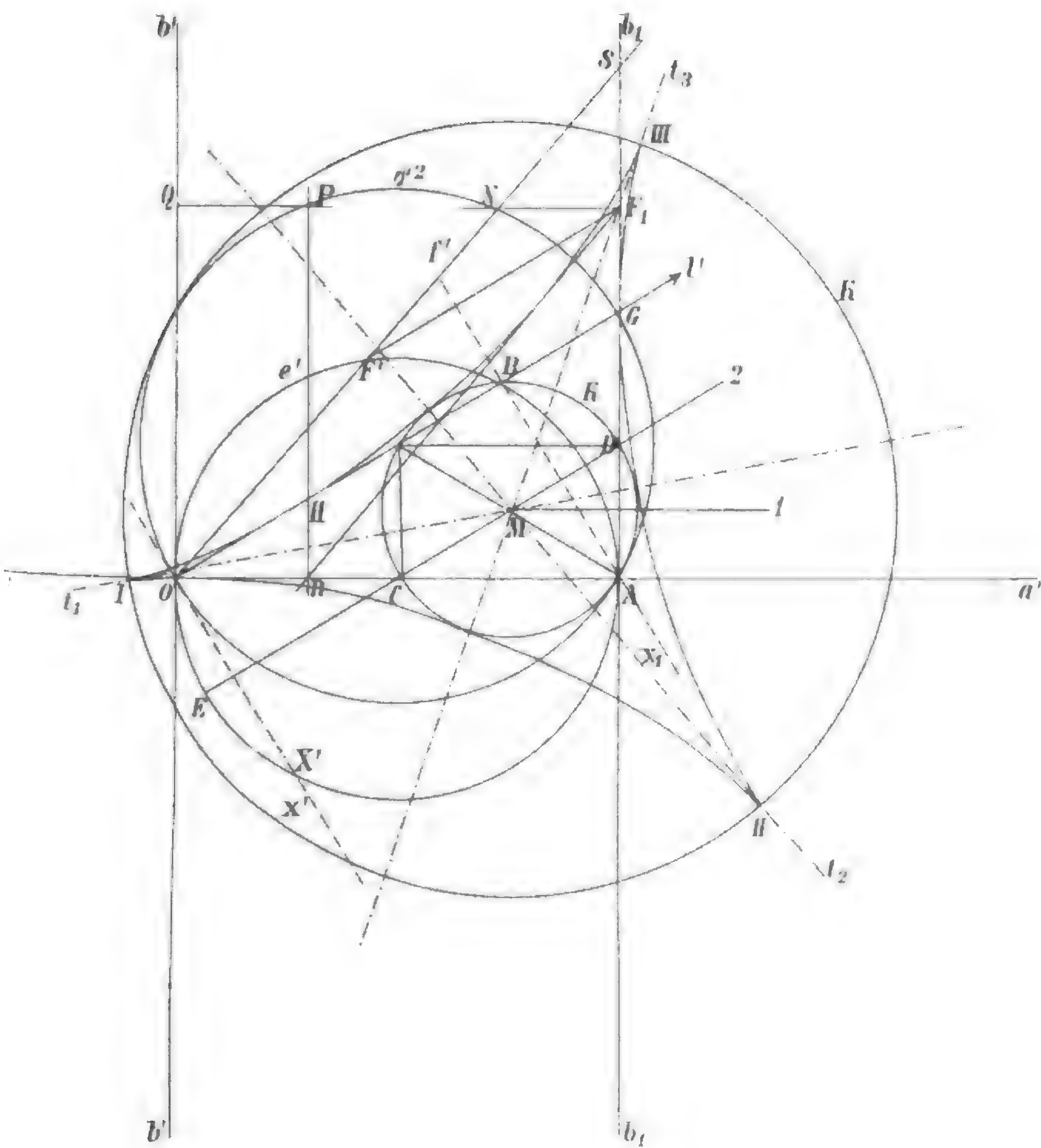
10. Wir wollen zum Schlusse noch einige Bemerkungen hinzufügen:

α. Fällt l' in die Richtung von a', so wird M (Artikel 8) Mittelpunkt von $\overline{AC}$, t_1 fällt mit a' zusammen, I mit O und t_2, t_3 schließen mit a' Winkel von 60° ein.

β. Was die Eigenschattengrenze u der Fläche anbelangt, so findet man leicht, daß ihre erste Projektion u' eine Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte in O ist; a', b' und l' sind die Tangenten von u' in O.

Fällt l' mit a' zusammen, so liegt u' symmetrisch zu a', berührt b' in O und hat außerdem in O eine Spitze mit a' als Tangente. Die Kurve u' berührt in diesem Falle auch die durch C zu b' gezogene Parallele, und zwar in deren Schnittpunkten mit e', außerdem die durch II und III gezogenen Parallelen zu a' und zwar in Punkten, welche von b' den dritten Teil des Abstandes der beiden Geraden b' und b_1 besitzen. Fällt l' auf a', so ist weiter die zweite Projektion von u eine Parabel, falls die zweite Projektionsebene normal zu b steht.

γ. Die Konstruktion des Schattens auf die Zeichenebene, der ersten Projektion der Eigenschattengrenze und die des Schlagschattens der Fläche auf sich selbst ist unabhängig von dem Abstande der Kuspidalpunkte der Fläche.



Lith. Anst. v. Th. Bannwarth Wien.

Über das Leuchten verdünnter Gase im Teslafeld

von

Dr. **Karl Przibram.**

(Aus dem Institut für theoretische Physik.)

(Mit 15 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

In einem verdünnten Gase, das in ein elektrodenloses Glasgefäß eingeschlossen ist, ist in einem konstanten elektrischen Felde keine dauernde Entladung möglich. Durch Scheidung der Elektrizitäten (der Ionen nach der Ionentheorie) wird nämlich gleich bei Beginn der Entladung das elektrische Feld im Gase neutralisiert und die Entladung hört auf, während die in der Feldrichtung einander gegenüber liegenden Innenflächen des Gefäßes entgegengesetzt geladen bleiben. Anders verhält es sich, wenn das Feld zeitlich nicht konstant ist. Sinkt z. B. im oben angenommenen Fall plötzlich die Spannung, so werden sich die Ladungen der Glaswand wieder durch das Gas ausgleichen, die Röhre ist entladen und bei nochmaligem Ansteigen der Spannung kann abermals eine Entladung erfolgen. Verbindet man einen Konduktor, etwa eine kreisförmige Metallscheibe, mit einem Teslapol oder einem anderen Erreger rasch wechselnder oder intermittierender Spannungen und bringt in das Feld, etwa in die Achse der Scheibe, eine evakuierte Röhre, so leuchtet das verdünnte Gas (scheinbar) kontinuierlich. Da die Feldstärke von der Platte weg abnimmt, gelangt man durch allmähliches Entfernen der Röhre zu einem Punkt, an dem das Leuchten verlischt. Hier genügt die herrschende Feldintensität oder die auf das Rohr entfallende Potentialdifferenz nicht mehr, um die Entladung zu unterhalten. Man hat so ein

bequemes Mittel, um relative Bestimmungen des Entladungspotentials in verdünnten Gasen auszuführen. Zu solchen messenden Versuchen wurde die elektrodenlose Entladung zuerst wohl von O. Lehmann[1] im Jahre 1883 angewendet. Er stellte in einiger Entfernung von einem kugelförmigen Konduktor eine auf einem isolierenden Stativ befestigte, evakuierte Glaskugel auf und steigerte die Spannung auf dem Konduktor so lange, bis in der Vakuumkugel eine Entladung eintrat. In neuester Zeit hat Bouty[2] sehr eingehende Messungen nach einer ähnlichen Methode ausgeführt. Das verdünnte Gas befindet sich in einem passenden Glasgefäß zwischen den Platten eines Luftkondensators. An diese kann die Spannung einer Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie angelegt werden. Die Elementenzahl der Batterie wird nun so lange gesteigert, bis beim Laden und Entladen des Kondensators eine Entladung durch das verdünnte Gas geht, die sich außer durch das Leuchten auch durch eine Änderung der Kapazität zu erkennen gibt. Dieses Verfahren gestattet sehr genaue Messungen. So große Genauigkeit kann die hier angewandte Methode nicht beanspruchen; dagegen läßt sie sich sehr bequem handhaben und gestattet ohne Mühe, rasch hintereinander eine große Zahl verschiedener Entladungsgefäße und Gase zu prüfen. Bei der geringen Genauigkeit ist eine gute Übereinstimmung der Zahlen mit den Bouty'schen nicht zu erwarten, doch werden sich an einer Stelle Abweichungen ergeben, die sich kaum aus der Ungenauigkeit der hier geschilderten Methode erklären lassen.

Im folgenden gebe ich zuerst die Resultate der Vergleichung der Entladungsspannung bei verschiedenen Drucken und Dicken der Gasschicht in Luft, CO_2 und H_2. Dann folgen einige Beobachtungen speziellerer Natur an den Lichterscheinungen verdünnter Gase im Teslafeld.

Die benützte Anordnung ist folgende: Das Teslainstrumentarium ist ein von Keiser & Schmidt in Berlin geliefertes

[1] Elektrische Lichterscheinungen, Halle 1898, p. 39; eine ausführliche Literaturübersicht über die elektrodenlose Entladung siehe dasselbe Werk, p. 20, ferner J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, p. 149.

[2] C. R., 129 (1899), p. 152, 204; 131, p. 443, 469, 503; 133, p. 213; 136, p. 40, 669.

(Katalognummer 1045), bestehend aus zwei Leydenerflaschen (*L* der Fig. 1) von 40 *cm* Beleghöhe, 16 *cm* Durchmesser und 4 *mm* Wandstärke, einem Öltransformator *(T)* und einer Funkenstrecke mit Zinkkugeln *(F)*. Zur Ladung der Leydenerflaschen dient ein mit Gleichstrom betriebener Funkeninduktor *(I)* von zirka 8 *cm* Funkenlänge mit Hammer- oder Turbinenunterbrecher. Der eine Pol des Transformators war mittels einer dünnen Drahtspirale mit der Zinkplatte *P* (20 *cm* Durchmesser)

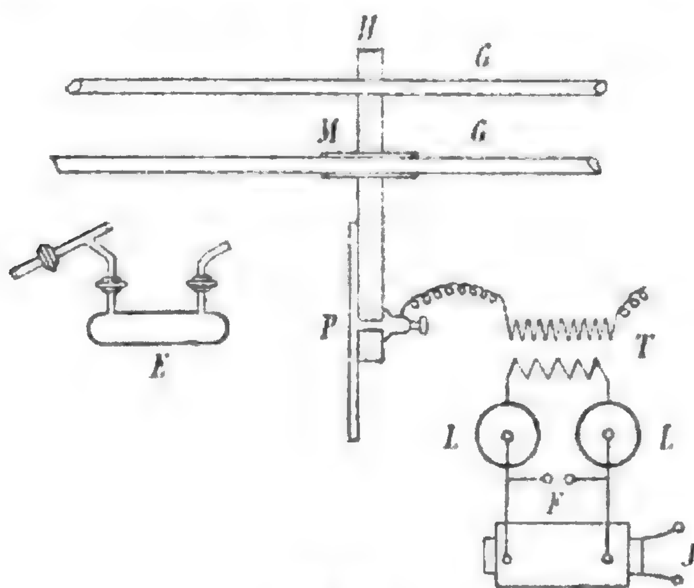


Fig. 1.

verbunden, in deren Feld das Leuchten beobachtet wird. Da das Entladungsgefäß mit Pumpe, Gaszuleitung etc. verbunden sein muß, ist es zweckmäßig, es feststehen zu lassen und die Platte zu verschieben. Zu diesem Zweck ist sie mit einem Hartgummigriff *H* versehen. Durch zwei Löcher, von denen eines ein kurzes Stück Messingrohr trägt, zur Vermeidung von Schwankungen, gehen zwei lange Glasröhren *G*, die mittels passender Stative an den Enden horizontal über der Tischplatte gehalten werden. Sie dienen als Führung für die Platte, die leicht verschiebbar an ihnen hängt. Die Führung trägt auch einen Maßstab, der die Stellung der Platte abzulesen gestattet. Der zweite Pol kann zur Erde geleitet werden oder er ist, wie es meist geschah, mit einer ganz gleichen Platte verbunden, die der ersten gegenüber, aber in solcher Entfernung aufgestellt wird, daß eine Änderung ihrer Lage um ein paar Dezimeter

keinen merklichen Einfluß mehr auf das Feld der ersten Platte hat.

Als Entladungsgefäße *E* wurden Glaskugeln von 2 bis 10 *cm* Durchmesser, verschieden lange Rohre von 2·5 bis 5 *cm* Durchmesser und ein flacher Ballon von 8 *cm* Durchmesser und 2·5 *cm* Dicke verwendet. Evakuiert wurde bisher nur mit einer Wasserstrahlpumpe, so daß die Beobachtungen vorläufig nur bis zu etwa 9 *mm* Hg herab reichen, also in einem Druckbereich liegen, in dem das Entladungspotential mit abnehmendem Druck fällt und der vom kritischen Druck, bei dem das Entladungspotential wieder zunimmt, noch ziemlich weit entfernt ist. Die Gase wurden über $CaCl_2$ und durch Watte gesaugt; CO_2 und H_2 in der gewöhnlichen Weise im Kipp'schen Apparat aus Marmor und Salzsäure respektive Zink und Salzsäure dargestellt.

Die Beobachtungen wurden im verfinsterten Zimmer folgendermaßen ausgeführt: Das Gefäß, das sich in der Achse der Platte befindet, wird evakuiert und von der Pumpe abgesperrt, der Druck an einem Manometer abgelesen. Die Platte wird genähert, bis Leuchten eintritt und hierauf ganz langsam entfernt, bis das Leuchten wieder verlischt. Dies wird mehrmals wiederholt. Die einzelnen Ablesungen gehen selten um mehr als 3 *mm* auseinander. Die Entfernung der Platte vom nächsten Punkte des Gefäßes gilt als Maß für das Spannungsgefälle, welches zur Erhaltung der Entladung erforderlich ist. Zur Einleitung der Entladung ist ein höheres Spannungsgefälle notwendig, wie ja bei allen Entladungsarten der Fall ist. Ist das Leuchten verloschen, so muß man die Platte um ein ganz Beträchtliches näher schieben, ehe es wieder eintritt. (Vergl. die Beobachtungen Tesla's[1] über das schwere »Ansprechen« elektrodenloser Röhren.) Die Erscheinung ist sehr unregelmäßig und ihre Abhängigkeit von Verunreinigungen etc. wäre noch zu untersuchen. Bei der hier verwendeten Kohlensäure war der Entladungsverzug entschieden kleiner als in Luft. So war, um ein beliebiges Beispiel herauszugreifen, für ein 7 *cm* langes,

[1] Untersuchungen, zusammengestellt von Th. C. Martin, deutsch von H. Maser, Halle 1895, p. 292.

2 *cm* weites Rohr und 30 *mm* Druck die Entfernung, bei der das Leuchten verlosch, für Luft 49, 50, 50, 49 *mm*, für CO_2 55, 55, 55 *mm*, die Entfernung, bei der das Leuchten wieder auftritt, für Luft 46, 42, 44, 42 *mm*, für CO_2 53, 53 *mm*, die Differenz im ersten Fall also durchschnittlich 6 *mm*, im zweiten 2 *mm*.

Versuche bei verschiedenen Drucken und in Gefäßen von verschiedenem Durchmesser ergaben folgendes:

1. Mit abnehmendem Druck nimmt, wie zu erwarten war und wie auch die Versuche Bouty's lehren, das erforderliche Spannungsgefälle ab (innerhalb des hier in Betracht kommenden Druckbereiches).

2. Bei Anwendung kugelförmiger Glasgefäße von wachsendem Durchmesser nimmt das erforderliche Spannungsgefälle ebenfalls ab, bis zu einem Durchmesser von zirka 5 *cm*; von da ab ist es vom Durchmesser nahezu unabhängig.

3. In Wasserstoff ist das Spannungsgefälle stets beträchtlich kleiner als in Luft von gleichem Druck. In CO_2 ist es für Kugeln bis zu 3 *cm* Durchmesser größer, für größere Durchmesser kleiner als in Luft.

1. entspricht ganz dem sonstigen Verhalten verdünnter Gase.

2. erklärt sich folgendermaßen: Für nicht zu niedrige Drucke ist das Entladungspotential gegeben durch einen Ausdruck $V = ax + b$,[1] wo x die Dicke der Gasschicht ist und a und b von dieser unabhängig sind. Die evakuierte Kugel befinde sich nun an dem Punkte des Feldes, wo sie gerade noch leuchtet; dann ist die Potentialdifferenz, die auf ihre einander in der Feldrichtung gegenüber liegende Punkte entfällt, V' gerade gleich dem obigen $V = ax + b$. Bringt man nun an ihre Stelle eine Kugel von halb so großem Durchmesser, so wird V' angenähert halb so groß sein; $V' = \frac{ax}{2} + \frac{b}{2}$; V dagegen wird jetzt $\frac{ax}{2} + b$, da ja das zweite Glied eben von x unabhängig ist. Die auf die Kugel entfallende Potentialdifferenz genügt

[1] Vergl. z. B. J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases. Cambridge 1903, p. 371.

daher nicht mehr, die Entladung zu erhalten; die kleinere Kugel wird an der Stelle, wo die große noch leuchtet, schon verlöschen. Bouty[1] vergleicht die Resultate, die er mit einem flachen Ballon von 2·4 *cm* Dicke für verschiedene Drucke erhielt, mit denen von Wolf für die Funkenentladung bei 1 *mm* Schlagweite. Er gibt für die erforderliche Feldstärke einen Ausdruck $F = a + bp$ (p = Druck) und findet, daß, während b gut mit den Wolf'schen Werten stimmt, a von anderer Größenordnung ist. Er schreibt diese Abweichung der Anwesenheit respektive dem Fehlen von Metallelektroden zu. Dagegen weist J. J. Thomson[2] darauf hin, daß, wenn man für das Entladungspotential einen Ausdruck $V = A + Blp$ annimmt (l Dicke der Gasschicht, p Druck, A, B Konstante), die Feldstärke $F = \frac{A}{l} + Bp$, also das von p freie Glied, dem l umgekehrt proportional ist. Daraus läßt sich die Abweichung der Bouty'schen und Wolf'schen Zahlen erklären, da im einen Fall $l = 24$ *mm*, im anderen $l = 1$ *mm* ist. Meine Versuche bestätigen diese Ansicht. Bouty,[3] der auch mit verschieden dicken Gefäßen Versuche angestellt hat, sagt, daß für hohe Drucke die kritische Feldstärke von der Dicke der Gasschicht unabhängig ist und führt auch Zahlen an, welche zeigen, daß der Koeffizient von p im Ausdruck für die Feldstärke von l unabhängig ist. Doch gibt er in der zitierten Arbeit keine Werte für das von p unabhängige Glied, das allein nach obiger Auffassung sich mit l ändern sollte. Übrigens würde für sehr große Drucke im Ausdruck $F = \frac{A}{l} + Bp$ eine Änderung von l in der That nicht viel ausmachen. Daß bei meinen Versuchen die Abhängigkeit der Feldstärke vom Durchmesser nur bis zu etwa 5 *cm* gilt, erklärt sich daraus, daß bei größeren Kugeln das Leuchten beim Entfernen der Platte sich gegen diese hin zusammenzieht und im Moment des Verlöschens nicht mehr die ganze Länge des Gefäßes erfüllt, wie dies bei kleineren

---

[1] C. R., 131, p. 469, 1900.
[2] L. c. p. 372.
[3] C. R., 136, p. 40 und 41.

Kugeln der Fall ist. Bei kleineren Kugeln verlischt nämlich das Leuchten, das gerade noch die ganze Kugel ausgefüllt hat, plötzlich bei einer kleinen Verschiebung der Platte. Ich glaube, daß dies so zu erklären ist:

Fig. 2 stelle die Platte *P*, das Vakuumgefäß ***E*** und den Spannungsabfall im Feld *S* dar. Zwischen den Querschnitten 1 und 2 genüge die Potentialdifferenz, um die Entladung zu erhalten, dann wird durch die zwischen 1 und 2 frei werdenden und in Bewegung gesetzten Ionen auch noch im Stücke 2, 3 Ionisierung stattfinden können, wenn auch hier das Feld zu schwach ist, um selbst die Entladung einzuleiten. Entfernt man nun *P* um ein Stück 1, 2, so verlischt die Entladung ganz; es bleibt nicht etwa noch ein Stück, entsprechend dem Spannungsabfall 2, 3, leuchtend. Das Leuchten zieht sich weit rascher zusammen, als sich die Platte entfernt und wird das Feld so schwach, daß in keinem Querschnitt des Rohres mehr Ionisierung stattfinden kann, so verschwindet plötzlich ein noch endliches Stück des Leuchtens. Die Länge dieses Stückes wird abhängen vom Feld und vom Gasdruck. Bei den vorliegenden Versuchen ist sie eben beiläufig 5 *cm*.

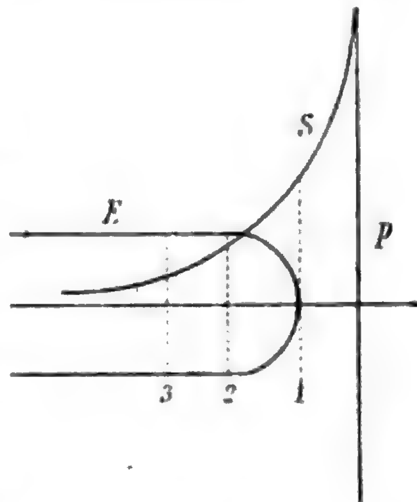


Fig. 2.

Die Kurven Fig. 3 geben den Zusammenhang von Durchmesser und der Entfernung, bei der das Leuchten verlischt. Sie zeigen deutlich das Kreuzen der Kurven für Luft und CO_2, welches oben unter 3. erwähnt wurde. Es ist bekannt, daß CO_2 gegen die Funkenentladung für kleine Schlagweiten elektrisch fester, für große Schlagweiten schwächer ist als Luft.[1] Zu den Versuchen in CO_2 ist noch zu bemerken, daß das Leuchten hier weit schwächer ist als in Luft. Ich habe auch Messungen an Gemischen von CO_2 und Luft gemacht,

[1] J. J. Thomson, Recent Researches in El. and Magn., § 69, p. 9! (1893).

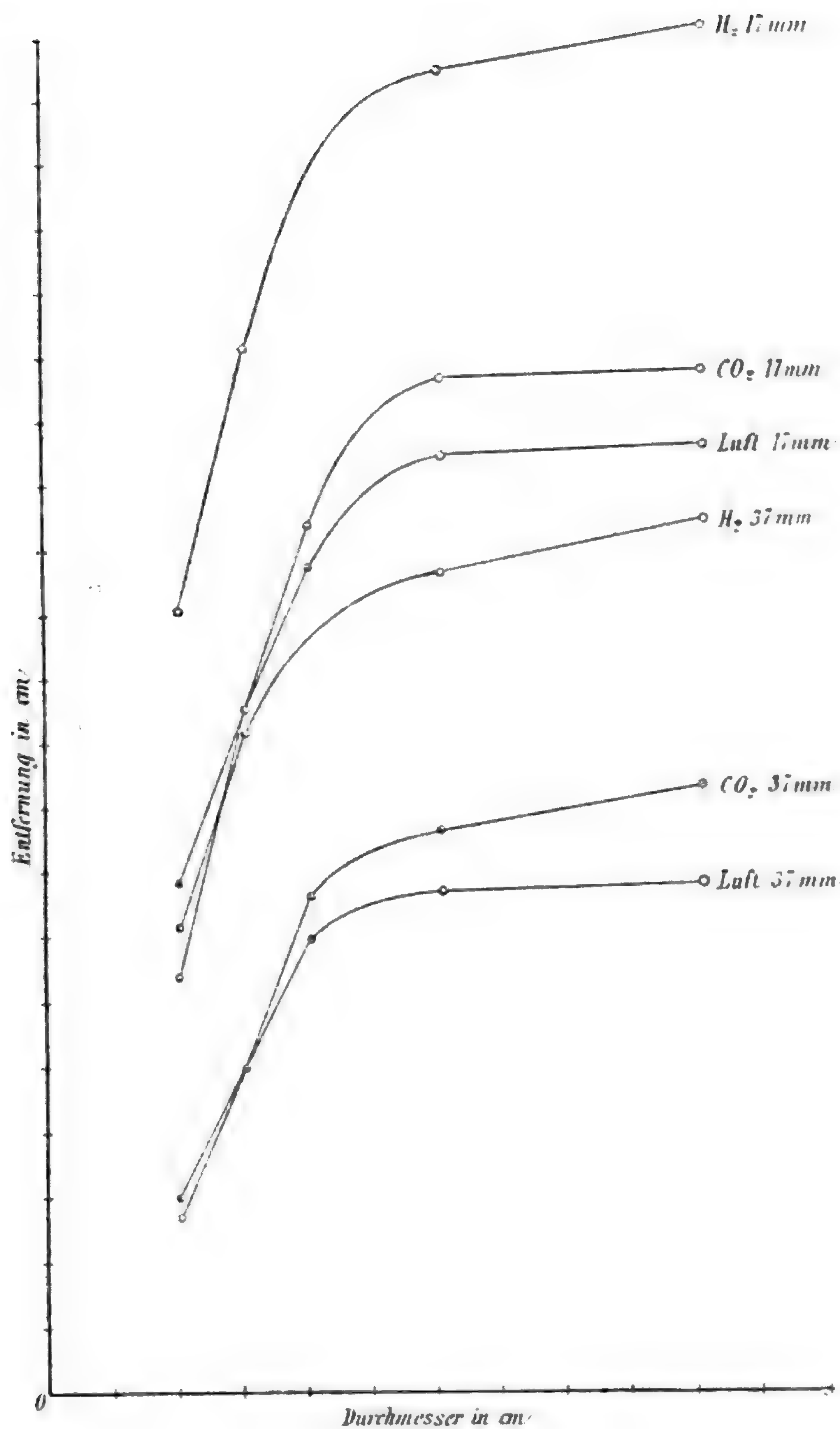

H_2 17 mm
CO_2 17 mm
Luft 17 mm
H_2 37 mm
CO_2 37 mm
Luft 37 mm
Entfernung in cm
0
Durchmesser in cm

Fig. 3.

mit besonderer Berücksichtigung kleiner Beimischungen, um zu sehen, ob nicht auch hier wie bei der positiven Spitzenentladung[1] das Entladungspotential im Gemische kleiner sein kann als in beiden Komponenten, fand jedoch in Übereinstimmung mit Bouty's[2] Messungen an Gemischen, daß der Wert für die Mischung stets zwischen denen der Komponenten liegt.

Ich habe versucht, die Beziehung zwischen Entfernung (respektive Feldintensität), Druck und Gefäßdurchmesser durch eine Formel auszudrücken und finde eine ziemlich gute Übereinstimmung der Versuchsresultate mit der einfachen Formel:

$$\frac{1}{E+c} = \frac{A}{l} + Bp;$$

es bedeutet:

E die Entfernung der Platte vom Gefäß in Zentimeter;
l den Durchmesser des Gefäßes in Zentimeter;
p den Druck in Millimeter Hg;
c, A, B Konstante.

$\frac{1}{E+c}$ kann in erster Annäherung der Feldstärke an der Stelle des Gefäßes proportional gesetzt werden. Daß dies zulässig ist, zeigt folgender Versuch: An Stelle des Vakuumgefäßes wird eine kleine Metallscheibe gebracht, die mit einem Pol eines Funkenmikrometers verbunden ist, dessen anderer Pol isoliert und dessen Achse in der Feldrichtung gelegen ist. Die Platte wird wie gewöhnlich verschoben und bei jeder Entfernung die maximale Funkenlänge am Mikrometer abgelesen. Es gab eine

Entfernung von	Länge der Funken	Produkt ($E+4$) (Funkenlänge)
4 *cm*	0·2 *mm*	1·6
5	0·16	1·44
6	0·16	1·6
7	0·14	1·54
8	0·13	1·56
9	0·12	1·56

[1] K. Przibram, Phil. Mag., Juli 1903; Phys. Zeit., 4. p. 842 (1903).
[2] C. R 136, p. 669 (1903).

Da die Funkenlänge angenähert der Spannungsdifferenz proportional ist, so kann also in der Tat innerhalb der engen Grenzen dieser Versuche die Feldstärke in der Achse der Platte der um eine Konstante vermehrten Entfernung proportional gesetzt werden. Obige Formel wird dann $F \text{ prop } \frac{A}{l} + Bp$, wie für die Funkenentladung bei höheren Drucken gilt. In der folgenden Tabelle gibt die erste Kolonne den Durchmesser des Gefäßes in Zentimeter, die zweite den Druck in Millimeter Hg, die dritte die gemessene Entfernung in Zentimeter, die vierte diese Entfernung vermehrt um eine Konstante, die fünfte endlich das nach obiger Formel berechnete $E+c$. Die Konstanten ergeben sich für die drei Gase:

Luft........ $A = 0\cdot09$, $B = 0\cdot002$
CO_2........ $A = 0\cdot13$, $B = 0\cdot0014$
H_2......... $A = 0\cdot088$, $B = 0\cdot00108$.

Die Größe c ist von der Spannung an der Platte selbst abhängig und ist hier zu 4·8 angenommen.

l		p	E	$E+c$ gemessen	$E+c$ berechnet
Luft	2	40	3·0	7·8	8·0
		26	5·8	10·6	10·3
		14	9·3	14·1	13·7
		10	11·4	16·2	15·4
	3	37	5·0	9·8	9·6
		20·5	8·7	13·5	14·0
		17	10·5	15·3	15·6
		9	15·5	20·3	20·5
	4	37	7·0	11·8	10·4
		25	10·0	14·8	13·9
		17	12·8	17·6	17·5
		9	17·6	22·4	25·0

	l	p	E	$E+c$ gemessen	$E+c$ berechnet
CO_2	2	40	2·8	7·6	8·0
		26	4·3	9·1	9·9
		14	7·9	12·7	11·7
		10	9·7	14·5	12·6
	3	37	4·9	9·7	10·5
		20·5	9·0	13·8	13·9
		17	10·5	15·3	14·9
		9	15·0	19·8	17·8
	4	37	7·7	12·5	11·9
		25	10·5	15·3	14·9
		17	13·5	18·3	17·8
		9	18·0	22·8	22·2

Zum Vergleich mit den so gefundenen Konstanten kommen hier in Betracht die Versuche von Baille, Wolf und Bouty.[1]

Baille findet für die Funkenentladung bei Atmosphärendruck in Luft $V = al + b$, wo l die Schlagweite ist und $a = 99 \cdot 6$, $b = 5$, wenn V in elektrostatischen Einheiten, l in Zentimeter gemessen wird. Wolf findet V für 1 *mm* lange Funken

in Wasserstoff ..... $V = 6 \cdot 509\, p + 6 \cdot 2$
in Luft .... $V = 10 \cdot 7\, p + 3 \cdot 9$
in CO_2............ $V = 10 \cdot 22\, p + 7 \cdot 2$,

wo p der Druck in Atmosphären ist. Und Bouty schließlich gibt für die mittlere Feldstärke

in H_2.......... $F = 1 \cdot 4 + 63 \cdot 33\, p$
in Luft......... $F = 1 \cdot 593 + 119 \cdot 09\, p$
in CO_2......... $F = 1 \cdot 703 + 144 \cdot 4\, p$;

die Dicke der Gasschicht ist $2 \cdot 4\, cm$, also $V = 2 \cdot 4 . F$.

[1] Vergl. J. J. Thomson, l. c. p. 371 und 372.

Wird alles auf 1 *cm* lange Funken und Atmosphärendruck bezogen, unter Annahme der Formel $V = A+B/p$, so erhält man:

$$V = B+A,$$

nach Baille für Luft ...... 99·6+5
» Wolf für H_2 .... 65·09+6·2
» » » Luft........107·0+3·9
» » » CO_2........102·2+7·2
» Bouty für H_2........ 63·33+3·36
» » » Luft ......119·09+3·82
» » » CO_2 ......144·4+4·09

und aus meinen Versuchen:

für H_2 .... V prop 0·821+0·088
für Luft .... V prop 1·52+0·09
für CO_2 .... V prop 1·064+0·13.

Zur absoluten Bestimmung von V nach der letzten Methode wäre noch der absolute Wert der Feldintensität zu bestimmen. Doch kann man wenigstens das Verhältnis der beiden Konstanten untereinander vergleichen. Es ist nach

	Baille	Wolf	Bouty	Przibram
$\frac{B}{A}$ für H_2	—	10·5	18·8	9·3
$\frac{B}{A}$ für Luft	19·9	27·4	31·4	16·9
$\frac{B}{A}$ für CO_2	—	14·2	35·3	8·2

Es besteht also noch recht wenig Übereinstimmung.

Man ersieht jedoch, daß meine Versuche besser mit den Wolf'schen übereinstimmen als mit den Bouty'schen, namentlich was die relative Stellung von Luft und CO_2 anbelangt. Nach Bouty wäre CO_2 immer elektrisch fester als Luft, da sowohl A als auch B im ersteren Gase größer sind. Dagegen finde ich in Übereinstimmung mit Wolf, daß in CO_2 das A größer, das B kleiner ist als in Luft, daher der Schnitt der Kurven in Fig. 3. Jedenfalls scheint Anwesenheit oder Fehlen

von Metallelektroden keinen sehr großen Einfluß auf das Entladungspotential zu haben.

Bis jetzt beschäftigten sich die Versuche mit kleinen Vakuumgefäßen, die das Leuchten im Momente des Verlöschens noch der ganzen Länge nach erfüllt. In größeren Gefäßen zieht sich, wie schon oben erwähnt, das Leuchten bei Entfernung der Platte zusammen, um bei einer gewissen Länge plötzlich zu verlöschen. Die Verwendung größerer Gefäße, zunächst langer Röhren, gibt Anlaß zur Beobachtung einer eigentümlichen Schichtung der Entladung, die im folgenden näher beschrieben werden soll. Die erste und einzige Beobachtung über diese Erscheinung, die ich in der einschlägigen Literatur finden konnte, rührt von H. Ebert und E. Wiedemann[1] her. Sie sagen: »Die vom primären Kondensator« — eines Lecher'schen Systems — »abliegenden Teile der einmal überbrückten Zuleitungsdrähte wurden divergierend weitergeführt. Sie endeten in zwei großen kreisförmigen Blechscheiben, die etwa in $3^1/_2$ bis 4 *m* Entfernung einander parallel gegenüber standen. Zwischen dieselben wurde ein evakuiertes 3 *m* langes, 3·2 *cm* weites Rohr mit ebenen, durch Glasplatten verschlossenen Endflächen gebracht; diese Endflächen standen parallel zu den Ebenen der Blechscheiben, aber so, daß sie dieselben nirgends berührten. Sowohl wenn keine Brücke übergelegt wurde, als auch mit einer Brücke leuchtete bei lebhaftem Gang der Maschine und hinlänglich großer primärer Funkenstrecke das Rohr sehr hell. Verkleinerte man die primäre Funkenstrecke, so zog sich das Licht nach den Enden der Röhre, d. h. nach den Kondensatorplatten hin zurück und der mittlere Teil wurde dunkel. In einzelnen Fällen schienen bei diesen Versuchen etwa 10 *cm* breite, aber sehr unstete Schichten aufzutreten, eine Erscheinung, die noch weiter zu untersuchen ist.«

Wird ein langes Rohr in das oben benützte Teslafeld in die Achse der Platte gebracht, so treten bei den hier untersuchten Drucken stets diese langen Schichten auf und bleiben oft ganz stabil. Ein Rohr war z. B. 1 *m* lang und 2·5 *cm* weit. 5 *cm* von jedem Ende waren kleine Röhren mit Hähnen

[1] Wied. Annalen., 50, p. 14, 1893.

angeblasen, die zum Verbinden mit der Wasserstrahlpumpe und zum Einleiten verschiedener Gase dienten. Fig. 4 gibt beiläufig das Aussehen der Lichterscheinung in diesem Rohr bei zirka 10 *mm* Luftdruck. Die leuchtenden Partien sind dunkel gezeichnet.



Fig. 4.

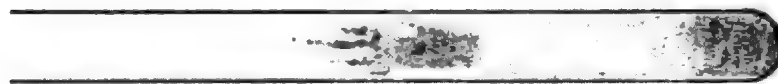


Fig. 5.

Änderung der Schichtung mit dem Drucke: Abstand der Platte vom Rohrende 3 *cm*.

Bei einem Druck von	Abstand der Platte (in Zentimeter) vom		
	Ende der ersten Lichtsäule	Ende des Dunkelraumes	Ende der zweiten Schicht
33 *mm*	20 (hier schnürt sich die Lichtsäule ein und sendet mehrere Äste aus, Fig. 5)	—	—
30	12	19	33
27	18	28	38
19	18	37	47
15	27	40	49
10	39	43	60

Der Zerfall in zwei Schichten beginnt hier also bei zirka 33 *mm* Druck und mit abnehmendem Druck dehnt sich das ganze Lichtgebilde immer mehr aus. Änderung mit der Entfernung der Platte. Druck 14 *mm*, Angaben wie oben:

Abstand der Platte vom Rohrende in Zentimeter	Abstand der Platte (in Zentimeter) vom		
	Ende der ersten Lichtsäule	Ende des Dunkelraumes	Ende der zweiten Schicht
1·5	49	62	70
3	41	55	63
6	30	45	55
8	20	40	51
10	14	32	49
13	Erste Schicht ganz kurz.	30	32 Es tritt eine dritte, verschwommene Schichte auf.
15	Drei Schichten von zirka 5 *cm* Länge und 1 *cm* Abstand zu erkennen, das Leuchten reicht bis zirka 17 *cm*.	—	—
17	Das Leuchten verlischt.	—	—

Beim Entfernen der Platte zieht sich also die Lichterscheinung zunächst als Ganzes gegen das Rohrende, wo die erste Schicht allmählich verschwindet; wenn sie dem vollständigen Verschwinden nahe ist, scheint sich am entfernteren Ende aus der zweiten Schicht eine dritte zu bilden. Die Verschiebung der Lichterscheinung geht schneller vor sich als die der Platte; eine große Zahl von Beobachtungen gab als Mittel 4 bis 5 *cm* für 1 *cm* Plattenverschiebung. Die Erklärung dafür dürfte wohl die auf p. 445 gegebene sein.

Bei diesen Versuchen standen die zwei zum Teslainstrumentarium gehörigen großen Leydenerflaschen in Verwendung. Um die Abhängigkeit der Schichtung von der Kapazität und somit von der Schwingungszahl des Systems untersuchen zu können, wurde ein großer Plattenkondensator angefertigt, bestehend aus zehn 3 bis 4 *mm* starken Glasplatten mit 34×50 *cm* Stanniolbelägen, die nach Belieben zu allen möglichen Kombinationen hinter- und nebeneinander geschaltet

werden können. Eine Änderung der Kapazität bewirkt aber nicht nur eine Änderung der Schwingungszahl, sondern auch der Spannung, und zwar ist diese für eine bestimmte Kapazität ein Maximum. Um nun immer gleiche Versuchsbedingungen zu haben, wurde die primäre Funkenstrecke stets so reguliert, daß die von der Feldplatte auf einen abgeleiteten Konduktor überspringenden Funken stets dieselbe Schlagweite hatten. So wurde eine annähernde Konstanz der Spannung erzielt. Die

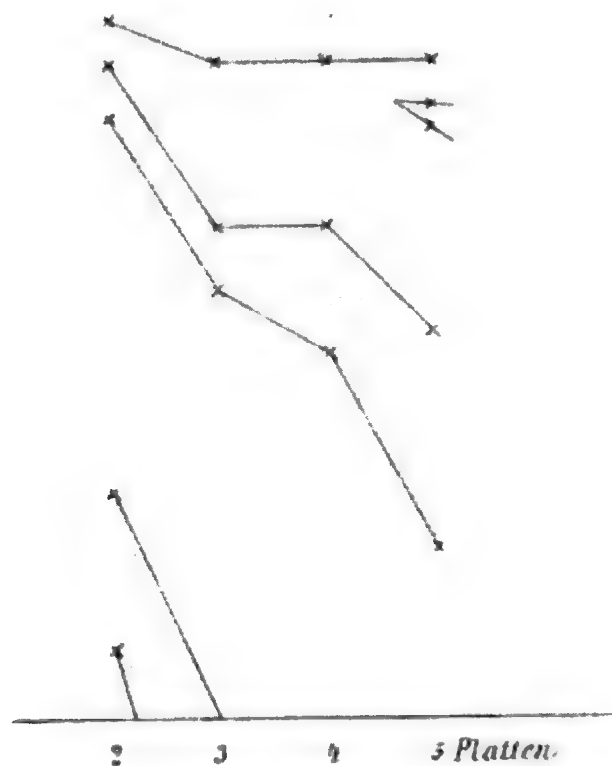


Fig. 6.

Versuche, deren Resultat in Fig. 6 graphisch dargestellt ist, zeigen, daß keine deutliche Abhängigkeit der Schichtlänge von der Schwingungszahl, etwa umgekehrte Proportionalität, also Proportionalität mit der Quadratwurzel aus der Kapazität besteht. In der Figur sind die Abszissen, die fallenden Kapazitäten (Zahl der hintereinander geschalteten Kondensatorplatten), die Ordinaten, die Länge der Lichtsäule; die dunklen Teile sind schraffiert. Was die Verminderung der Kapazität bewirkt, ist eine Verschiebung der ganzen Erscheinung gegen den Röhrenanfang, bei gleichzeitigem Auftreten neuer Schichten am entfernteren Ende der Lichtsäule. Wenn demnach die Art der

Anregung nicht ohne Einfluß ist, so scheint die Schichtung doch mehr durch die Beschaffenheit des Gases bestimmt zu sein. So war bei 11 *mm* Druck und 3 *cm* Abstand des Rohrendes von der Platte:

	Abstand in Zentimetern des Endes		
	der ersten Schicht	des Dunkelraumes	der zweiten Schicht
In Luft	44	54	63
In Wasserstoff	50	62	76
In Kohlensäure	11	20	35 und schwaches Leuchten bei 50 und 66 *cm*.

Ob hier derselbe Vorgang stattfindet wie bei der geschichteten Entladung in Geißlerröhren läßt sich noch nicht entscheiden. Unwahrscheinlich ist es jedoch wegen der großen Länge der Schichten bei dem hohen Druck. Bekanntlich ist der günstigste Druck für das Auftreten von Schichten in Geißler'schen Röhren zirka 1 *mm* und messen die Schichten in diesem Fall nach Millimetern und nehmen mit wachsendem Druck an Länge noch ab. Eher scheint mir die Schichtung im vorliegenden Falle durch die verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit der beiden Elektrizitäten (Ionenarten, wie bei den Himstedt'schen Versuchen mit der alternierenden Spitzenentladung) bedingt zu sein. Wenn die eine Elektrizität (bei den niedrigen Drucken vermutlich die negative) weiter in das Rohr hineingetrieben wird als bei dem folgenden Wechsel der Feldrichtung die andere (positive), so wird eine Anhäufung von Elektrizität stattfinden, die bei nochmaligem Wechsel jetzt selber der Ausgangspunkt einer Entladung (der zweiten Schicht) werden könnte. Es ist mir allerdings bis jetzt nicht gelungen, diese Ladungen nachzuweisen. Jedenfalls findet hier wie in der geschichteten positiven Lichtsäule ein Abwechseln leuchtender und dunkler Partien statt und es ist interessant, zu untersuchen, ob damit auch hier eine periodische Änderung des Spannungsgefälles Hand in

Hand geht. Diese Untersuchung wird durch die Länge der Schichten und die Größe des Spannungsgefälles wesentlich erleichtert. Man braucht nur zwei Sonden in geeignetem Abstand voneinander in das Rohr einzuführen und durch ein Funkenmikrometer miteinander zu verbinden. Das Mikrometer kann dann so eingestellt werden, daß die Entladung nur im Funken übergeht und das Gas zwischen den Sonden dunkel bleibt. Diese Schlagweite des Mikrometers gibt ein Maß für die Spannungsdifferenz der beiden Sonden.

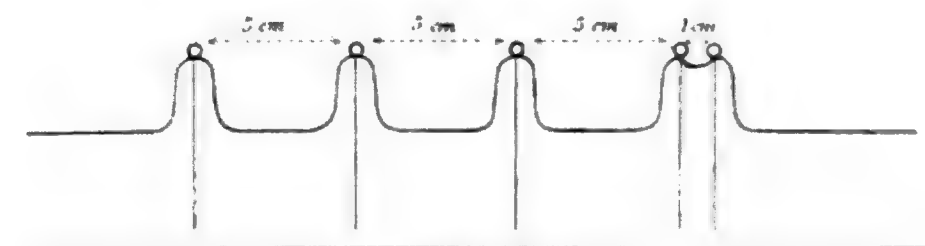


Fig. 7.

Es wurde zunächst eine Röhre (Fig. 7) verwendet von 80 *cm* Länge und 3 *cm* Weite mit fünf Sonden; die erste Sonde 20 *cm* vom Rohrende, die zweite 1 *cm* von der ersten und die drei weiteren in je 5 *cm* Abstand voneinander. Diese Anordnung wurde getroffen, um zunächst die passende Entfernung


Fig. 8.

für die Sonden zu ermitteln. Die 1 *cm* voneinander entfernten erwiesen sich als zu nah; die entsprechende Funkenlänge war zu klein. Im folgenden wurden immer zwei Sonden im Abstand von 5 *cm* voneinander benützt. Das Funkenmikrometer muß für diese Versuche eine möglichst kleine Kapazität haben, da sonst der Gang der Entladung zu sehr gestört wird. Es wurde darum ein gewöhnliches Funkenmikrometer (auf 0·01 *mm* abzulesen) in folgender Weise abgeändert (Fig. 8): An Stelle der Kugeln, zwischen denen sonst der Funken überspringt, sind zylindrische Ebonitklötze aufgeschraubt. Diese Klötze sind in

ihrer Achse bis etwa zur Mitte angebohrt, in die Bohrung ist je ein Platindraht von 0·42 *mm* Durchmesser eingezogen, so daß nur ein paar Millimeter hervorragen; zwischen diesen Enden springt der Funke über. Das andere Ende jedes Drahtes ist durch eine zur ersten senkrechte Bohrung wieder aus dem Ebonit herausgeführt und steht mittels eines sehr dünnen Drahtes mit der betreffenden Sonde in Verbindung.

Bei Änderung der Funkenlänge legt sich der dünne Verbindungsdraht um den Ebonitklotz herum, was bei den kleinen Drehungen, die selten eine ganze Umdrehung ausmachen, nicht weiter stört. Die Funkenstrecke wurde annähernd geeicht durch langsames Aufladen mittels einer Influenzmaschine unter gleichzeitiger Ablesung eines Braun'schen Elektroskops. Es entspricht 0·01 *mm* beiläufig 26 Volt.

Eine große Bequemlichkeit der Teslaanordnung besteht darin, daß es nicht nötig ist, die Sonden im Inneren des Rohres zu verschieben, um das Spannungsgefälle in verschiedenen Teilen der Entladung zu bestimmen. Man braucht nur die Feldplatte zu verschieben, um beliebige Teile der Lichtsäule zwischen die Sonden zu bekommen.

Orientierende Versuche ergaben folgendes: Wurde das Mikrometer, wenn die Sonden in die zweite leuchtende Schicht tauchten, so eingestellt, daß gerade noch Funken überspringen, so hörten die Funken auf, wenn beide Sonden durch Nähern der Feldplatte in den Dunkelraum gebracht wurden, um dann wieder aufzutreten, wenn die Sonden in die erste leuchtende Schicht eintraten. Das mittlere Spannungsgefälle ist also im dunklen Raum kleiner als in den leuchtenden Partien. Die genaueren Versuche wurden so angestellt, daß die Feldplatte immer um 1 *cm* weiter entfernt und jedesmal die Funkenlänge am Mikrometer bestimmt wurde, bei welcher ein regelmäßiger Funkenstrom überging und die Gasschicht zwischen den Sonden dunkel wurde. Die Kurven Fig. 9 geben einige Resultate für Luft bei verschiedenen Drucken, Fig. 10 für CO_2. Die Kurven zeigen deutlich, wie der periodischen Änderung der Lichtintensität auch eine solche des Spannungsgefälles entspricht, und zwar liegen die Maxima des Spannungsgefälles im Anfang der leuchtenden Schicht, wo diese auch am

leuchtendsten ist. Dieses Verhalten verträgt sich gut mit dem oben gegebenen Erklärungsversuch, daß eine Anhäufung von Elektrizität den Ausgangspunkt der Schicht bildet. Auch

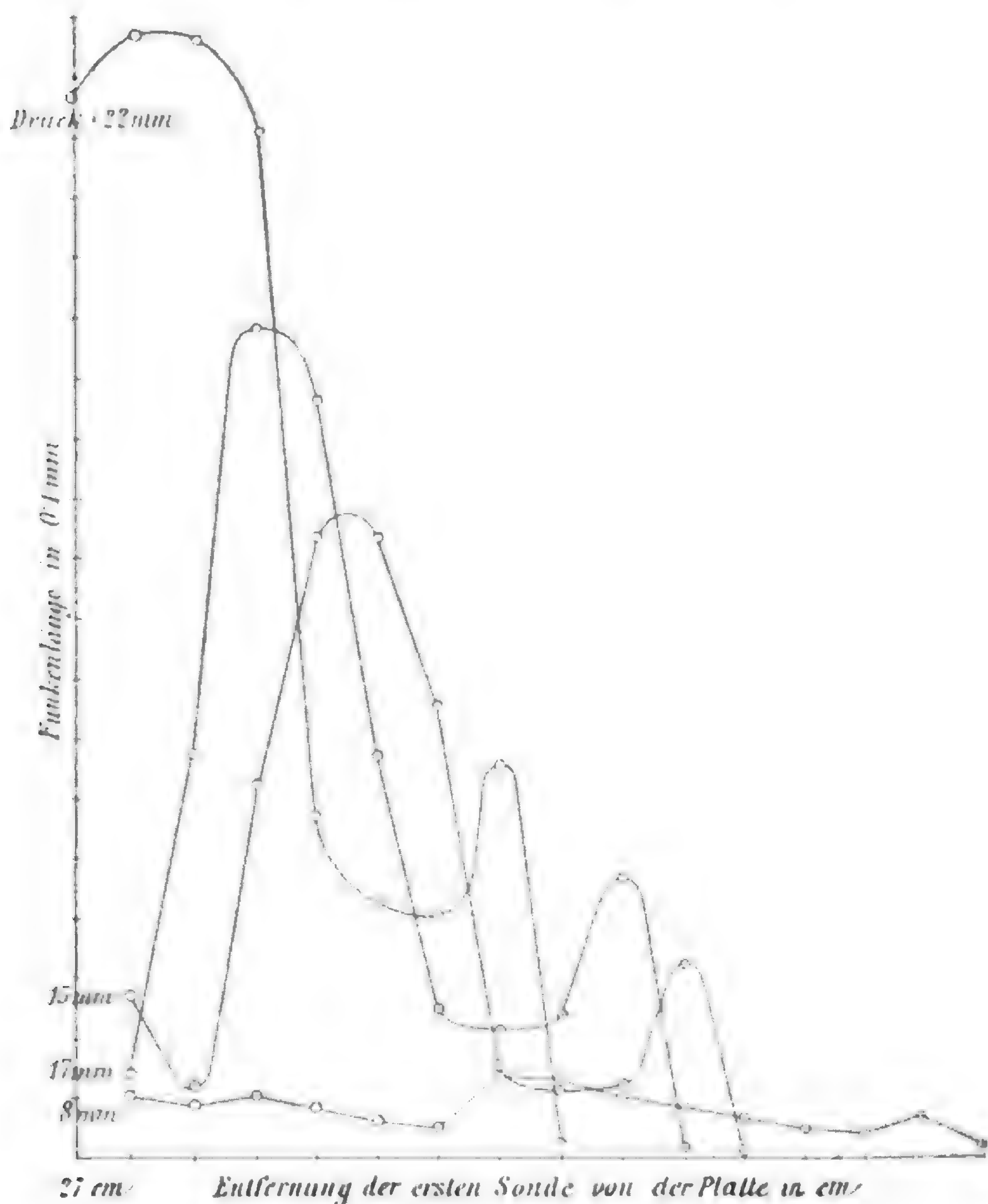


Fig. 9.

in der geschichteten positiven Lichtsäule fallen die Maxima des Spannungsgefälles in die leuchtenden Schichten, wie H. A. Wilson[1] gezeigt hat.

[1] Phil. Mag. (5), 49, p. 505 (1900).

Da man bezweifeln könnte, ob eine Verschiebung der Feldplatte wirklich einer Verschiebung der Sonden in der Röhre gleichwertig ist, habe ich noch eine andere Röhre verwendet. Sie ist 80 *cm* lang, 3 *cm* weit und enthält 11 Sonden in je 5 *cm* Abstand voneinander. Die ersten 15 *cm* an beiden Enden der Röhre enthalten keine Sonden. Die Feldplatte blieb unverrückt und das Mikrometer wurde der Reihe nach an alle Sondenpaare angelegt und so das Spannungsgefälle bei unverändertem Felde bestimmt. Die so erhaltenen Kurven stimmen ganz mit den früheren überein, wenn man berücksichtigt, daß,

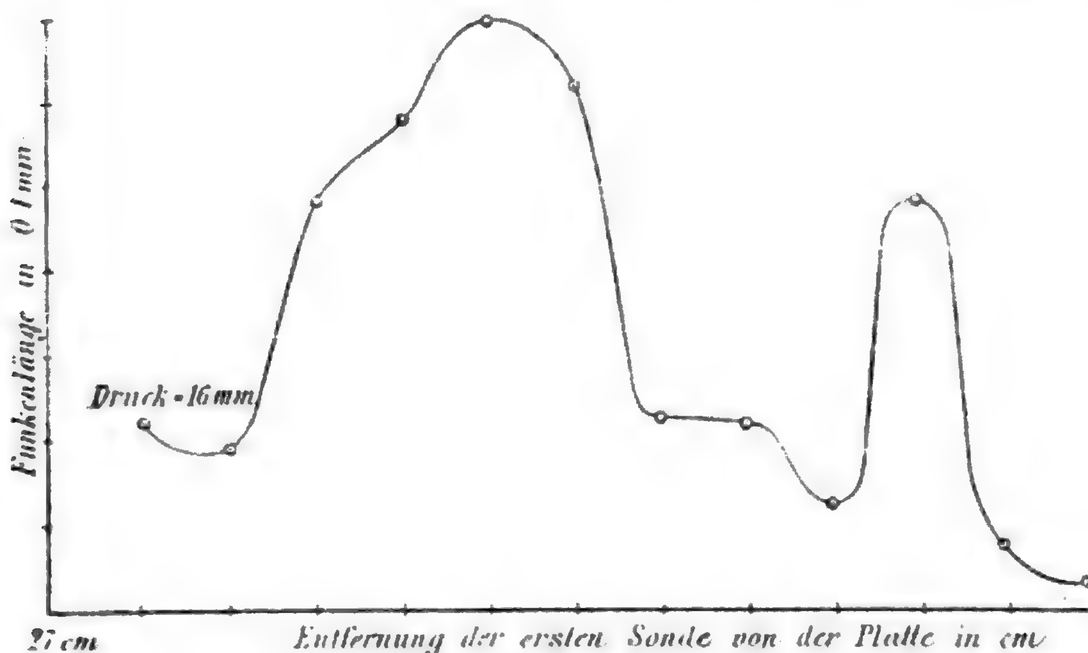


Fig. 10.

wie schon früher bemerkt, einer Verschiebung der Feldplatte um 1 *cm* eine größere Verschiebung der Lichterscheinung, etwa um 5 *cm*, entspricht.

Die hier beschriebene Schichtung der Entladung tritt in ganz gleicher Weise auch ein, wenn die Röhre mit einer Elektrode versehen ist, die mit dem Teslapol in Verbindung steht. In diesem Fall kann man das Entstehen der Schichten schon bei viel höheren Drucken beobachten, bei denen die Entladung noch ausgesprochenen Büschelcharakter hat. Die Büschel winden sich von der Elektrode aus schraubenförmig an der Innenwand der Röhre entlang, indem sie allmählich schütterer, dann an einer entfernten Stelle wieder dichter

werden. Aus dieser Verdichtung der Büschel entwickelt sich bei weiterem Evakuieren die zweite leuchtende Schicht. Es hat hier den Anschein, als sei die Schichtung durch einen Vorgang an der Glaswand bedingt; daß aber die Ursache der Schichtung, nach der hier vorgebrachten Ansicht weiteres Vordringen einer Ionenart und daraus folgende Anhäufung freier Elektrizität, auch im Inneren des Gases wirksam ist, zeigt das Auftreten von Schichten in sehr großen Rezipienten. Die in solchen großen Rezipienten zu beobachtenden Lichterscheinungen sind so schön und lehrreich, daß ich sie im folgenden ausführlicher beschreiben will.

Es ist bekannt, daß an allen Spitzen und Drähten, die an einen Teslapol angeschlossen sind, positive Büschel auftreten, die man schon an ihrem charakteristischen Aussehen als solche erkennt. Als Lichtenberg'sche Figur geben sie einen großen Kranz positiver Strahlen um einen verschwommenen negativen Kern. Dementsprechend läßt sich auch ein Überwiegen positiver Ausstrahlung nachweisen, wie Himstedt,[1] v. Wesendonck[2] und andere gezeigt haben. Andrerseits gibt bei sehr niederen Drucken die Teslaentladung stets das negative Glimmlicht an beiden Polen.[3] Auch fand ich,[4] daß bei abnehmendem Druck die negative Spitzenausstrahlung gegenüber der positiven begünstigt wird, und ich habe darauf hingewiesen, daß dies v. Wesendonck's[5] Ansicht zu bestätigen scheint, wonach die Überlegenheit der positiven Entladung nur da vorhanden ist, wo die disruptiven, eigentlichen Büschelentladungen in den Vordergrund treten. Das Verdrängen der Büschel- durch die Glimmentladung und einige Bedingungen für das Entstehen der Büschel lassen sich nun sehr hübsch im großen Rezipienten im Teslafeld zeigen.

Als Rezipient dient eine Glaskugel von 30 *cm* Durchmesser, wie sie zur Luftwägung verwendet wird. Die Pole des

[1] Wied. Ann., 52, p. 473 (1894).

[2] Phys. Zeit., 4, p. 465 (1903).

[3] Vergl. H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann., 50, p. 1, 221 (1893).

[4] Phys. Zeit., 4, p. 581 (1903).

[5] L. c.

Teslatransformators sind wieder mit zwei Platten verbunden; eine wird dicht an die Kugel gebracht, die andere in größerer Entfernung ihr gegenüber aufgestellt. Die Kugel wird mit einer Wasserstrahlpumpe langsam evakuiert. Bei zirka 150 *cm* Druck erscheinen die ersten Anzeichen einer Entladung im Inneren der Kugel, nämlich einzelne zuckende Büschel, die von dem der Platte zunächst gelegenen Teil der Kugelwand ausgehen. Beim Weiterevakuieren dehnen sich diese Büschel, die zum größeren Teil, aber nicht ausschließlich, längs der Glaswand verlaufen, immer mehr aus, bis sie einen großen Teil der Gefäßwand mit einem dichten Netz überziehen. Betrachtet man die Kugel jetzt in der Richtung senkrecht zur Platte, so sieht man deutlich, daß die Büschel zum Teil auch in das Innere des Gases gehen, also auf den Beschauer zu schießen. Mit sinkendem Druck nimmt die Breite der Büscheläste zu, ihre Zahl ab; die längs der Wand verlaufenden nehmen die bekannte Hirschgeweihform[1] des positiven Büschels in verdünnter Luft an; die ins Innere gehenden sind weniger verzweigt.

Bei zirka 50 *mm* Druck bemerkt man an der der Platte zunächst liegenden Stelle der Kugel einen Lichtnebel von geringer Ausdehnung, der mit abnehmendem Druck wächst. Der Unterschied zwischen den zuckenden Büscheln und dem ruhig glimmenden Nebel ist sehr auffallend. Sind Büschel und Lichtnebel gut ausgebildet, etwa bei 30 *mm* Druck, und entfernt man langsam die Platte, so ziehen sich die Büschel zusammen, die Zweige längs der Wand verschwinden ganz; es bleibt nur der Lichtnebel, aus dem nur ab und zu einzelne lange, schwach gekrümmte, selten verzweigte, breite Strahlen hervorschießen (Fig. 11). Bei noch weiterem Entfernen hören auch diese Strahlen auf und es bleibt nur mehr das nebelige Glimmen. Das Büschel, denn die Strahlen sind, wie der kontinuierliche Übergang lehrt, nichts anderes als die Reste des Büschels, erfordert also ein stärkeres Spannungsgefälle als der Lichtnebel (das Glimmlicht). Außer durch Nähern der Platte kann man das Spannungsgefälle auch dadurch vergrößern, daß man

[1] Vergl. z. B. meine Aufnahmen, diese Sitzungsberichte, 108 (II a), p. 1161 (1899), Fig. 4 und 5, die oberen Partien.

die Hand oder einen anderen abgeleiteten Leiter der Kugel nähert. Es gelingt dann in der That, ohne Nähern der Platte wieder Büschel zu erhalten.

Berührt man die Kugel mit dem Finger an einer der Platte zugewendeten Stelle, so gehen von diesem Punkte sehr schöne Büschel aus. Sind die Büschel durch Entfernen der Platte zum Verschwinden gebracht worden, so treten sie wieder auf, wenn man das noch übriggebliebene Glimmlicht durch Nähern der Hand etwas ablenkt. Das Glimmlicht wird nämlich von der Hand angezogen, verschiebt sich etwas und an den der Hand entfernteren Stellen schießen Büschel hervor (Fig. 12). Dies dürfte so zu erklären sein: Der Lichtnebel stellt das bei niedrigen Drucken allein vorhandene negative Glimmlicht dar. Wenn die Platte gerade negativ geladen ist, werden also positive Ionen in dem ihr nächstgelegenen Teil der Kugel im Überschuß sein. Wird jetzt die Platte beim Polwechsel positiv, so kommt infolge Anwesenheit der positiven Ionen kein so starkes Spannungsgefälle zu stande, als zur Erzeugung des Büschels erforderlich ist. Wird dagegen das Glimmlicht und mit ihm auch die überschüssigen positiven Ionen etwas abgelenkt, so kann das Spannungsgefälle an den von ihnen entblößten Stellen den zur Büschelbildung nötigen Wert erreichen.

Es ist hier vielleicht am Platze, einige allgemeine Bemerkungen über die Büschelentladung anzuschließen.

Schon der bloße Anblick weckt die Vorstellung, daß im Büschel gegenüber der Spitzen- und Glimmentladung ein mehr explosionsartiger Vorgang stattfindet. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß an positiven Konduktoren sehr leicht Büschel auftreten, während man in den seltensten Fällen von eigentlichen negativen Büscheln reden kann. Das sehr reichhaltige Beobachtungsmaterial lehrt nun, daß für den Austritt positiver Elektrizität aus einer Elektrode in ein Gas ein größeres Spannungsgefälle erforderlich ist als für negative, so bei der eigentlichen Spitzenentladung, bei der die Lichterscheinung auf die unmittelbare Nähe der Spitze beschränkt ist. Eben wegen des höheren Entladungspotentials der positiven Spitzenentladung scheint aber das Gas in der Nähe der Spitze in einem labilen Zustand zu sein, so daß die Entladung leicht in

ein langes Büschel übergeht. Dazu genügen z. B., wie ich gezeigt habe,[1] schon kleine Beimengungen verschiedener Gase. Das Büschel würde so eine bei stärkerem Spannungsgefälle sich explosionsartig in das Gas ausbreitende Entladung darstellen, eine Auffassung, welche auch alle die merkwürdigen polaren Unterschiede der elektrischen Figuren zu erklären vermag.[2]

Es sei mir noch gestattet, eine Ansicht über den Mechanismus der Büschelentladung auszusprechen, von der ich nicht weiß, inwieweit sie von anderen Physikern geteilt wird. Herr Stark behandelt diesen Punkt in seinem Buche (p. 151) nur kurz und ohne auf das verschiedene Verhalten der positiven und negativen Entladung einzugehen.

Stellen wir eine Spitze einer Platte gegenüber, so wird, wenn eine, für negatives Potential der Spitze kleinere, für positives größere, Potentialdifferenz erreicht ist, die sogenannte Spitzenentladung mit auf die Spitze beschränktem Leuchten stattfinden (zweifache Grenzionisierung nach Stark). Im Gasraum zwischen Spitze und Platte geschieht die Elektrizitätsleitung durch Wanderung der in der leuchtenden Schichte gebildeten Ionen, negativer im ersten, positiver im zweiten Falle. Das größere, positive Entladungspotential erklärt sich aus der geringeren Beweglichkeit der positiven Ionen. Steigert man die Elektrizitätszufuhr, so werden im ersten Falle die negativen Ionen das Gas in einem größeren Gebiet vor der Spitze ionisieren und infolge des raschen Fortwanderns der neugebildeten negativen Ionen wird das Spitzenpotential im allgemeinen nicht sehr stark ansteigen. Anders im zweiten Falle. Hier wird die positive Elektrizität nicht so rasch fortgeführt; das Spitzenpotential kann, namentlich bei rascher Elektrizitätszufuhr, stark ansteigen. Es kann so der Fall eintreten, daß die positiven Ionen an einer Stelle das Gas ein Stück weit zu ionisieren vermögen (nicht nur in der an der Spitze gelegenen Schicht, wie im Spitzenstrom). Daß positive

[1] Phil. Mag., Juli 1903; Phys. Zeit., 4, p. 842 (1903).

[2] K. Przibram, diese Sitzungsberichte, 108 (II a), p. 1161 (1899); 109, p. 902 (1900); 110, p. 960 (1901).

Ionen wirklich ein Gas auch in seinem Inneren zu ionisieren vermögen, hat erst vor kurzem Townsend[1] nachgewiesen. Es entsteht so eine gut leitende Verlängerung der Spitze, in die ihre Ladung abfließt, so daß vom Ende dieser Verlängerung die Entladung jetzt wieder weiter in das Gas eindringen kann, bis die Verteilung und dementsprechende Abnahme der Dichte eine weitere Ausbreitung verhindert; von da ab findet wieder Leitung durch Ionenwanderung statt.

Daß Büschel dann auftreten, wenn die gleichnamigen Ionen nicht genügend rasch weggeführt werden, scheint auch daraus hervorzugehen, daß man durch Blasen ein Büschel in Glimmen überführen kann.[2]

Den Zusammenhang von Büschelbildung und Ionenbeweglichkeit zeigt ferner deutlich eine Zusammenstellung meiner Messungen an den elektrischen Figuren[3] mit dem Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten in verschiedenen Gasen nach Zeleny.[4]

	Verhältnis des Durchmessers der positiven elektrischen Figuren zu dem der negativen	Verhältnis der negativen zur positiven Ionenbeweglichkeit	
		im trockenen Gas	im feuchten Gas
In Luft.......	4·5	1·375	1·10
In O_2........	4·1	1·32	1·18
In H_2........	3·5	1·19	1·05
In CO_2.......	2·6	1·07	0·915

Je größer also die Beweglichkeit der negativen Ionen gegen die der positiven ist, um so mehr übertrifft das positive Büschel das negative an Ausdehnung. Besonders interessant ist der

[1] Electrician, 50, p. 971 (1903).

[2] v. Wesendonck, Wied. Annalen, 40, p. 484 (1890); vergl. auch O. Lehmann, Elektrische Lichterscheinungen, Halle 1898, p. 395, der stets den Einfluß der Anhäufung elektrisierter Luft auf die Entladungsform betonte.

[3] Diese Sitzungsberichte, 108 (IIa), p. 1161 (1899).

[4] Phil. Trans. A., 195, p. 193 (1900).

oben angegebene Wert des Beweglichkeitsquotienten für feuchtes CO_2. Es ist der einzige bekannte Fall, in dem die Beweglichkeit der positiven Ionen größer gefunden wurde, als die der negativen. In der Tat erhielt ich bei einer Aufnahme in verdünntem CO_2 eine Figur,[1] bei der das negative Büschel das positive überwog. Meine in der zitierten Arbeit gegebene Erklärung der polaren Unterschiede der elektrischen Figuren und ihres Zusamenhanges mit dem Himstedteffekt, die sich in den Satz zusammenfassen läßt: »Die Entladung beginnt am positiven Pol später (d. h. bei höherer Spannung) als am negativen, breitet sich aber eben deswegen schneller aus,« kann also mit der Ionentheorie in gute Übereinstimmung gebracht werden. Eine Berichtigung bedarf nur der weitere

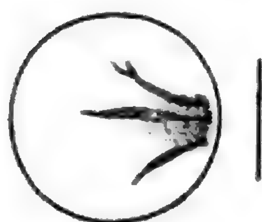


Fig. 11.

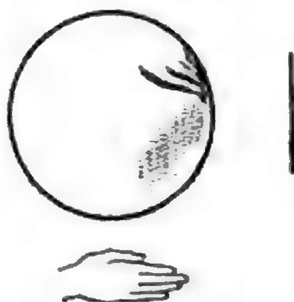


Fig. 12.

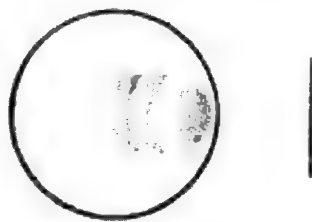


Fig. 13.

Satz, daß in obiger Tabelle die positive Figur gegen die negative abnimmt, wenn man in der Reihe der Gase nach unten geht, weil die negative Entladung dann leichter erfolgt. Sie erfolgt vielmehr schwerer (im Vergleich zur positiven) und eben deshalb nähert sie sich mehr dem positiven Büschel an Größe und Aussehen. Daß auch das Aussehen der Figuren sich aus dieser Auffassung des Büschels erklären läßt, habe ich in einem späteren Aufsatz[2] zu zeigen versucht.

Nach dieser Auseinandersetzung kehre ich zur Besprechung meiner Versuche zurück. Bei weiterer Verdünnung der Luft in großen Rezipienten auf zirka 10 *mm* nimmt das Glimmen immer mehr überhand und füllt bei genügender Annäherung

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 108 (II a), p. 1161 (1899), Fig. 8.

[2] Diese Sitzungsberichte, 110 (II a), p. 960 (1901).



Fig. 14.

der Platte das Innere der Kugel ganz aus, die Büschel sind nur mehr als hellere Streifen längs der Meridiane kenntlich und verschwinden schon bei geringer Entfernung der Platte ganz. Im Lichtnebel kann man bei diesem Druck ganz deutlich die oben besprochene Schichtung beobachten, namentlich sieht



Fig. 15.

man sie beim Bewegen der Platte wie Schatten über das Glimmen gehen. Die Schichten sind hier viel weniger breit, etwa 2 bis 3 *cm* und bilden gegen die Platte zu konkave Kugelschalen (Fig. 13). Diese Beobachtung zeigt, daß die Schichtung nicht durch die Glaswand bedingt ist, denn diese braucht im

vorliegenden Fall vom Leuchten gar nicht berührt zu werden, aber daß die Schichtlänge doch von der Weite des Gefäßes abhängt, wie dies auch von der Schichtung der positiven Lichtsäule in Geißlerröhren bekannt ist.

Ich habe hier einige der Lichterscheinungen beschrieben, welche bei mäßiger Verdünnung im Teslafeld auftreten; was sich jedoch nicht schildern läßt, ist der überaus prächtige Anblick der von stets wechselnden Büscheln und Lichtnebeln durchfluteten Glaskugel. Ich habe versucht, einige dieser Erscheinungen photographisch festzuhalten. Zu diesem Zwecke verwendete ich zwei aufeinander geschliffene Luftpumpenrezipienten, von denen einer angebohrt und durch eine eingekittete Glasröhre mit der Wasserstrahlpumpe verbunden ist. In den so gebildeten großen Rezipienten wurde eine photographische Platte gebracht, die je nach ihrer Stellung, dem Drucke und der Entfernung der Feldplatte verschiedene Eindrücke empfing. Bei der einen hier wiedergegebenen Aufnahme (Fig. 14) war der Druck 81 *mm*, die Platte unter einem kleinen Winkel gegen die Entladungsrichtung geneigt. Die Figur zeigt die geweihförmigen (positiven) Büschel, wie sie bei diesen Versuchen die Innenwand des Rezipienten bedecken. Bei der zweiten Aufnahme (Fig. 15) war der Druck 14 *mm* und die Platte stärker gegen die Entladungsrichtung geneigt. Man erkennt hier oben den Schnitt des Lichtnebels mit der schiefen Platte, am Rande einige spitze zum Büschel gehörige Strahlen. Das merkwürdige Lichtgebilde in der unteren Partie ist die Stelle, wo ein starker Strahl des Büschels auf die Platte schief auftrifft und sich teilt, gleichsam verspritzt, wie man dies namentlich bei etwas höherem Druck gut beobachten kann.

Über die Veränderung der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

Das negative Resultat des bekannten Versuches von Michelson und Morley scheint von vornherein mit der Annahme eines absolut[1] ruhenden Äthers in Widerspruch zu stehen. Man weiß, daß es zur Lösung desselben einer neuen Hypothese bedurfte, die von Lorentz und Fitzgerald aufgestellt wurde, daß nämlich die Dimensionen der ponderablen Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther verändert werden. Und zwar kann diese Annahme am einfachsten folgendermaßen formuliert werden: Die Dimensionen der Materie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung sind von der Bewegung unabhängig, während die in die Bewegungsrichtung fallende Dimension mit dem Faktor

$$1-\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{1}$$

zu multiplizieren ist, worin σ der Quotient aus der Geschwindigkeit der Materie durch die des Lichtes, also für den Fall der Erdbewegung nahe 10^{-4} ist.

Im folgenden habe ich nun versucht, dieser Annahme von Lorentz und Fitzgerald vom Standpunkte der Thermodynamik näher zu treten. Es läßt sich nämlich ein Kreisprozeß

[1] Unter »absolut« soll natürlich nur »in Bezug auf die Fixsterne« gemeint sein.

mit bewegter Materie angeben, dessen Resultat nicht ohne weiteres mit dem zweiten Hauptsatze in Übereinstimmung gebracht werden kann; zu dessen Erklärung also eine neue Hypothese nötig ist. Eine solche Hypothese, welche auch den Widerspruch vollkommen löst, ist die eben erwähnte Annahme von Lorentz und Fitzgerald. Es ist natürlich unmöglich, zu beweisen, daß diese Annahme die einzige ist, welche die Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze wiederherzustellen im stande ist; da sie aber auch das Resultat des Versuches von Michelson und Morley vollständig zu erklären vermag, verdient sie wohl vor allen anderen etwa möglichen beachtet zu werden.

Wir stellen uns also im folgenden auf den Standpunkt der Hypothese eines absolut ruhenden Äthers. Da wir nur mit Reflexion an einem bewegten Spiegel (nicht etwa auch mit Brechungen) zu tun haben werden, brauchen wir keine weitere Annahme zu machen. Die Gesetze der Reflektion lassen sich ja in diesem Falle rein geometrisch ableiten. Wir unterscheiden nach dem Vorgange von Lorentz[1] zwischen absoluter und relativer Strahlenrichtung oder zwischen absoluten und relativen Strahlen schlechtweg und verstehen unter letzteren die Strömungsrichtung der Energie, wie sie ein Beobachter wahrnimmt, der mit der Materie fortschreitet. Es ist nun von verschiedenen Autoren[2] gezeigt worden, daß die Relativstrahlen dem gewöhnlichen Reflexionsgesetze gehorchen, wenn man die Genauigkeit auf die erste Potenz der Größe σ beschränkt. Es läßt sich jedoch leicht beweisen, daß in den Fällen, die im folgenden vorkommen, dieses Reflexionsgesetz der Relativstrahlen vollkommen streng richtig ist. Und zwar sind dies die Fälle, daß sich der Spiegel entweder senkrecht zu seiner Ebene oder in seiner Ebene bewegt. Um den Gang der vorliegenden Abhandlung nicht aufzuhalten, werde ich den Beweis dieses Satzes erst in einem Anhange führen.

[1] H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux. Arch. Néerl., T. XXI, p. 106 (1886) (siehe etwa auch Drude, Lehrbuch der Optik, p. 433).

[2] Siehe etwa H. A. Lorentz, l. c., p. 109.

1.

Wir betrachten einen zylindrischen, durch nach innen vollkommen spiegelnde Flächen abgeschlossenen Raum. Die eine Basisfläche desselben sei von einem gleichfalls zylindrischen, vollkommen schwarzen Körper K besetzt. Der übrigbleibende Teil R des erwähnten Raumes habe die Höhe D und sei ganz frei von ponderabler Materie. Wir nehmen vorerst an, daß sich das ganze System in absoluter Ruhe befinde und fragen uns nach der Dichte der strahlenden Energie im leeren Raume R.[1]

Das Element df der Oberfläche von K strahlt in einer Richtung, die mit der Normalen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ einschließt, in der Zeiteinheit die Energiemenge

$$dE = df . i \cos\varphi . 2\pi \sin\varphi d\varphi$$

aus. Hierin ist i eine Konstante, die mit dem Emissionsvermögen e des schwarzen Körpers in dem Zusammenhange

$$e = 2\pi i \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \pi i$$

steht. Die Energiemenge dE muß nun den Weg $2D/\cos\varphi$ zurücklegen, ehe sie wieder von K absorbiert wird. Während der Zeit

$$\tau = \frac{1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{2D}{\cos\varphi}$$

befindet sie sich also in R. Der gesamte Energieinhalt von R ist also

$$\int df \int dE . \tau = \int df \int_0^{\pi/2} 2\pi i \sin\varphi \cos\varphi \, \tau \, d\varphi$$
$$= \frac{4\pi i D}{\mathfrak{B}} \cdot \int df.$$

---

[1] Siehe **Boltzmann**, Wied. Ann., 22, p. 31; **W. Wien**, Wied. Ann., 52, p. 140.

Die Energiedichte in R erhalten wir, wenn wir diese Größe durch das Volumen von R, also durch $D\int df$ dividieren; sie ist also gleich:[1]

$$\varepsilon = \frac{4\pi i}{\mathfrak{V}} = \frac{4e}{\mathfrak{V}}.$$

(Der Weg der Strahlen, welche erst nach mehrmaliger Reflexion wieder an die Oberfläche von K gelangen, hängt in gleicher Weise vom Winkel φ ab; diese Strahlen ändern also nichts am Resultate.)

Wir nehmen nun an, daß sich das betrachtete materielle System mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ in der Richtung der Zylinderachse bewege und wollen nun für diesen Fall die Dichte der Energie in R berechnen. Würde der in R enthaltene Äther die Bewegung mitmachen, so würde sich nichts ändern. Da derselbe jedoch, wie wir annehmen, in absoluter Ruhe ist, nimmt die oben mit τ bezeichnete Zeit einen anderen Wert an.

Es ist jetzt zweckmäßig, unseren Betrachtungen die relativen Strahlen zu Grunde zu legen. Die absolute Geschwindigkeit der Strahlen ist nach allen Richtungen gleich $\mathfrak{V}$. Die relative Geschwindigkeit, bezogen auf das sich mit der Geschwindigkeit $+\mathfrak{p}$ bewegende System, ist daher:

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V} - \mathfrak{p},$$

wobei die Subtraktion natürlich in geometrischem Sinne zu verstehen ist. Den algebraischen Betrag von $\mathfrak{V}'$ berechnen wir leicht, wenn wir die nebenstehende Fig. 1 zu Hilfe nehmen. Sei O ein Erregungszentrum; OP sei die Richtung der absoluten Bewegung der Materie. Dann ist die (relative) Geschwindigkeit $\mathfrak{V}'$ eines Relativstrahles gegeben als die Resultierende der Geschwindigkeiten $OC = -\mathfrak{p}$ und $OV = \mathfrak{V}$.

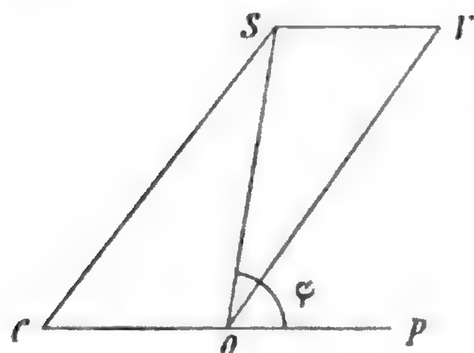


Fig. 1.

[1] Siehe W. Wien, l. c.

Es bestimmt sich also $OS = \mathfrak{B}'$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{p}^2 + 2\mathfrak{B}'\mathfrak{p}\cos\varphi.$$

Also wird

$$\mathfrak{B}' = -\mathfrak{p}\cos\varphi \pm \sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{p}^2\sin^2\varphi},$$

worin das obere Zeichen zu wählen ist. Setzen wir wieder $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{B}} = \sigma$, so wird

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\left[\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi} - \sigma\cos\varphi\right].$$

Da die Bewegungsrichtung unseres Systems mit der Normalen zur Oberfläche von K zusammenfällt, ist diese Größe $\mathfrak{B}'$ auch die relative Geschwindigkeit eines Strahles, der, von einem Flächenelement ausgesendet, mit der Normalen den Winkel φ einschließt. Ein solcher Strahl braucht also die Zeit $\frac{1}{\mathfrak{B}'}\frac{D}{\cos\varphi}$, um an die gegenüberliegende Seite von R zu gelangen. Dort fällt er unter dem (gleichen) Einfallswinkel φ auf und wird, da das Reflexionsgesetz für Relativstrahlen unverändert gilt, unter demselben Winkel φ reflektiert. Der reflektierte Strahl hat den Weg $\frac{D}{\cos\varphi}$ zurückzulegen, um wieder an die Oberfläche von K zu kommen. Da er aber mit der Richtung von $\mathfrak{p}$ den Winkel $180°-\varphi$ einschließt, ist seine Geschwindigkeit

$$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}\left[\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi} + \sigma\cos\varphi\right].$$

Es ist also die Zeit, welche ein solcher Strahl braucht, um von der Oberfläche von K ausgehend, nach ein- (oder mehr-) maliger Reflektion wieder nach K zu gelangen, jetzt:

$$\tau' = \frac{D}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{1}{\mathfrak{B}''}\right)$$

$$= \frac{D}{\mathfrak{B}\cos\varphi}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi} - \sigma\cos\varphi} + \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi} + \sigma\cos\varphi}\right]$$

$$= \frac{2D}{\mathfrak{B}\cos\varphi}\,\frac{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}{1-\sigma^2}. \tag{2}$$

(Wie man leicht einsieht, ist es auch hier für die Größe dieser Zeit ohne Einfluß, ob der Strahl ein- oder mehrmals zur Reflexion kommt.)

Der Energieinhalt des Raumes R ist also jetzt

$$= 2\pi i \int df \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \cos\varphi\, \tau'. \qquad (3)$$

Man könnte allerdings vorerst zweifeln, ob es auch hier gestattet ist, die Größe i als konstant anzusehen, mit anderen Worten, ob das Lambert'sche Cosinusgesetz bei einem bewegten Körper für den relativen Strahlengang richtig ist. Es wird aber die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente, welche dieselbe absolute Bewegung haben, also relativ gegeneinander ruhen, durch den relativen Strahlengang gegeben. Sind die beiden Elemente schwarz und von gleicher Temperatur, so fordert der zweite Hauptsatz, daß sich die beiden Elemente gleich viel Energie zustrahlen — und dies ist für jede mögliche Orientierung der beiden Flächenelemente gegen ihre Verbindungslinie nur möglich, wenn das Lambert'sche Gesetz für den relativen Strahlengang gilt. Um diesen Beweis präziser zu führen, könnte man sich etwa derselben Überlegungen bedienen, die Drude[1] verwendet, um das genannte Gesetz für ruhende Körper zu beweisen. Man kann sich das dort durch Fig. 108 gegebene System in gleichmäßiger Translation begriffen denken. Dieselbe wird an der Schlußweise nichts ändern, wenn man jetzt unter »Strahlen« die relativen Strahlen versteht.[2]

---

[1] Lehrbuch der Optik, p. 455.

[2] Es kann demnach auch die Erdbewegung keinen Einfluß auf die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente haben, was übrigens auch von den elektrischen Theorien, allerdings nur bis auf Größen erster Ordnung, gefordert wird. (Siehe H. A. Lorentz, Versl. k. Akad. van Wet., X, p. 804 [1902]; A. H. Bucherer. Drude Ann. XI, p. 270 [1903].) — Gl. (3) gibt die Energiemenge an, welche vom schwarzen Körper geliefert wird; außer derselben kann es noch in R Strahlungsenergie geben, die aus mechanischer Arbeit gewonnen ist und sich wieder in solche verwandelt. Dieselbe kommt für das Folgende nicht in Betracht. Ich hoffe übrigens demnächst eine Studie darüber veröffentlichen zu können. (Anm. b. d. Korrektur.)

Setzen wir nun in (3) für τ' seinen Wert aus (2) ein, dividieren durch das Volumen des Raumes R, also durch $D\int df$, so erhalten wir die Dichte der Energie dortselbst:

$$\frac{4\pi i}{\mathfrak{B}} \frac{1}{1-\sigma^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\varphi}.$$

Wir setzen diesen Ausdruck gleich $\frac{4\pi i}{\mathfrak{B}} \cdot \varkappa = \frac{4e}{\mathfrak{B}} \varkappa = \varepsilon\varkappa$;

dann ist also

$$\varkappa = \frac{1}{1-\sigma^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\varphi}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$\varkappa = \frac{1}{2(1-\sigma^2)} + \frac{1}{4\sigma} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma}. \tag{4}$$

Wenn σ sehr klein gegen 1 ist und wir uns auf die Glieder von der Ordnung σ^2 beschränken, so wird

$$\varkappa = 1 + \frac{2}{3}\sigma^2. \tag{5}$$

Die Größe (4) hat nur dann eine reelle Bedeutung, wenn $\sigma < 1$ ist und läßt sich dann stets in eine Reihe entwickeln, die nach geraden Potenzen von σ fortschreitet. Um diesen Faktor wird also die Dichte der Energie in R infolge der Bewegung geändert.

(Man kann sich diesen Wert von $\varkappa$ auch durch die folgende, allerdings nicht strenge Betrachtung plausibel machen. Denken wir uns die gesamte Strahlung in R nach drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegt, von denen die eine mit der Richtung der Bewegung zusammenfallen möge. Die Strahlung in der letztgenannten Richtung, also ein Drittel der gesamten, braucht zum Hin- und Hergang über die Strecke D die Zeit

$$\frac{D}{\mathfrak{B}-\mathfrak{p}} + \frac{D}{\mathfrak{B}+\mathfrak{p}} = \frac{2D}{\mathfrak{B}}(1+\sigma^2);$$

ihre Dichte wird also um den Faktor $(1+\sigma^2)$ vermehrt. Die Strahlung senkrecht zur Bewegungsrichtung, also zwei Drittel

der gesamten, braucht zum Hin- und Hergange durch den Raum R die Zeit

$$\frac{2l}{\mathfrak{B}}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right),$$

wo l die betreffende Querdimension von R ist. Und zwar führt zu diesem Werte eine Überlegung, welche auch bei der Theorie des Versuches von Michelson und Morley anzustellen ist.[1] Die Dichte dieser Energie wird also um den Faktor $1+\frac{1}{2}\beta^2$ vermehrt. Die Dichte der gesamten Energie ist also jetzt:

$$\frac{1}{3}\varepsilon(1+\beta^2)+\frac{2}{3}\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)=\varepsilon\left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right),$$

in Übereinstimmung mit (5).)

Die nächste Frage, die wir uns stellen wollen, ist die nach dem Drucke der Strahlung in dem bewegten Raume R. Um den Wert desselben abzuleiten, können wir denselben Weg einschlagen, den Boltzmann,[2] die Methode Bartolis[3] präzisierend, angegeben hat, um den Druck der Strahlung in einem ruhenden Raume zu berechnen. Wir denken uns also einen zylindrischen Raum, dessen Basisflächen durch zwei schwarze Körper verschiedener Temperatur gebildet werden und der nach außen durch vollkommene Spiegel abgeschlossen sei; das Innere dieses Raumes sei durch zwei aufklappbare und relativ zu den Basisflächen des Zylinders verschiebbare Spiegel in drei Zwischenräume geteilt. Denken wir uns jetzt dieses ganze System in der Richtung der Zylinderachse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt; denken wir uns ferner einen auf dem bewegten System befindlichen Beobachter, der ohne Kenntnis von der Bewegung den Bartoli-Boltzmann'schen Kreisprozeß abspielen läßt, so wird derselbe genau zu demselben Resultate gelangen müssen, wie wenn das ganze System in absoluter Ruhe wäre, d. h. der Strahlungsdruck muß auch hier gleich sein dem Drittel der Strahlungsdichte, ganz unabhängig davon,

---

[1] H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre... Arch. Neerl., XXI, 1886, p. 174; oder auch Drude, Optik, p. 439.

[2] Wied. Ann., 22, p. 294.

[3] Exner's Repertorium der Physik, 21, p. 198.

wie die gedrückte Fläche in Bezug auf die Richtung der absoluten Bewegung liegt; der Druck hat also dann den Wert

$$\frac{1}{3}\varkappa\varepsilon.$$

Gegen diese Schlußweise könnte allerdings vielleicht das Bedenken erhoben werden, daß bei Veränderung des Volumens eines in absoluter Bewegung begriffenen, von Strahlung erfüllten Hohlraumes auch die Arbeit anderweitiger (reaktionsloser) Kräfte ins Spiel kommen kann. Jedenfalls kann sich aber der Druck nur um Glieder von der Ordnung σ^2 von seinem Werte in einem ruhenden Raume und daher auch von $^1/_3\varkappa\varepsilon$ unterscheiden. (Das Vorzeichen von σ kann keine Rolle spielen.) Da wir nun im folgenden (§ 3) nur mit Volumsveränderungen von der Ordnung σ^2 zu tun haben werden, ist das Resultat gewiß bis auf Größen von der Ordnung σ^2 einschließlich richtig. Und darauf kommt es wohl hauptsächlich an.

Es ist zu erwähnen, daß der eben deduzierte Wert $^1/_3\varkappa\varepsilon$ nichts mit dem zu tun hat, was man gewöhnlich unter dem Drucke auf einen bewegten Spiegel versteht und welcher von Thiesen[1] untersucht worden ist. Bei der Berechnung des letzteren hat man von der Annahme auszugehen, daß die Strahlung nach allen Richtungen im absoluten Sinne gleichmäßig verteilt ist, während ja wir im Gegenteile zum Resultate kamen, daß innerhalb des Raumes R die Strahlung bezüglich der relativen Richtung gleichmäßig verteilt ist.

2.

Wir denken uns nun ein System, wie es durch Fig. 2 charakterisiert ist und das dem System ganz ähnlich ist, das wir eben nach Bartoli und Boltzmann betrachtet haben. Ein zylindrischer, nach außen durch vollkommene Spiegel abgeschlossener Raum, an dessen Basisflächen zwei schwarze Körper K und L befindlich sind. Ferner zwei vollkommene Spiegel s_1 und s_2, die wir ohne Arbeitsleistung entfernen oder mit einem Loch versehen können. Der Kürze wegen werden

[1] M. Thiesen, Verh. der Deutschen physik. Gesellsch., 1901, p. 177.

wir nur sagen, der Spiegel s_1 oder s_2 werde geöffnet oder geschlossen.

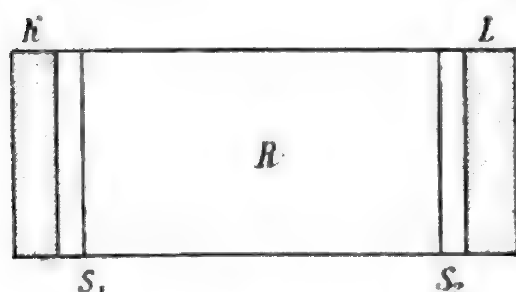


Fig. 2.

Der Querschnitt des Zylinders habe den Flächeninhalt 1; der Abstand der Spiegel s_1 und s_2 sei D. Den Zwischenraum zwischen K und s_1 sowie den zwischen L und s_2 habe ich nur eingeführt, um den Druck der Strahlung auf beide Seiten der Spiegel genau definieren zu können; die Größe desselben ist belanglos. Am einfachsten ist es, wenn wir annehmen, daß das Volumen dieser Räume so klein sei, daß es gegen das Volumen des Raumes R zwischen s_1 und s_2 vernachlässigt werden könne.

Ferner sei das Emissionsvermögen von K gleich e_1, das von L gleich e_2, und zwar sei $e_2 > e_1$, also auch die Temperatur von L größer als die von K.

Der ganze Raum zwischen K und L sei ganz frei von ponderabler Materie. Wenn daher das ganze System ruht, so herrscht in dem Raume, der mit K in Verbindung steht, die Energiedichte $\frac{4 e_1}{\mathfrak{V}} = \varepsilon_1$, in dem Raume, der mit L in Verbindung steht, die Energiedichte $\frac{4 e_2}{\mathfrak{V}} = \varepsilon_2$.

Dieses System wollen wir jetzt einem Kreisprozeß unterziehen. Die einzelnen Stadien desselben sollen sich nur durch die Geschwindigkeit unterscheiden, die wir dem gesamten System erteilen. Die relative Lage der einzelnen Teile des Systems soll immer dieselbe bleiben.

Ist der Wert der Geschwindigkeit des Systems $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots$, so sei $\sigma = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{V}}$, $\sigma_1 = \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{V}}, \ldots$; ebenso soll $\varkappa, \varkappa_1, \ldots$ die durch Gleichung (4) respektive (5) gegebene Bedeutung haben; wenn wir Größen von der Ordnung σ^4 vernachlässigen, soll also $\varkappa = 1 + \frac{2}{3}\sigma^2$, $\varkappa_1 = 1 + \frac{2}{3}\sigma_1^2, \ldots$ sein.

Wir wollen also unser System den folgenden Kreisprozeß durchlaufen lassen; behufs leichterer Übersicht füge ich die beifolgende Tabelle bei:

	$\mathfrak{p}$	s_1	s_2	Energiedichte in R	K	L
					gibt die Wärmemenge ab	
Anfang	0	o.	z.	ε_1	—	—
I.	$\mathfrak{p}_1$	o.	z.	$\varepsilon_1\varkappa_1$	$D\varepsilon_1(\varkappa_1-1)$	—
II.	$\mathfrak{p}_2$	z.	z.	$\varepsilon_1\varkappa_1=\varepsilon_2\varkappa_2$	—	—
III.	$\mathfrak{p}_3$	z.	o.	$\varepsilon_2\varkappa_2$	—	$D\varepsilon_2(\varkappa_3-\varkappa_2)$
IV.	$\mathfrak{p}_4$	z.	z.	$\varepsilon_2\varkappa_3=\varepsilon_1\varkappa_4$	—	—
V.	0	o.	z.	ε_1	$D\varepsilon_1(1-\varkappa_4)$	—

$$0<\mathfrak{p}_1>\mathfrak{p}_2>0 \qquad 0<\mathfrak{p}_3<\mathfrak{p}_4>0$$

Zu Anfang sei das System in absoluter Ruhe; s_1 sei offen, s_2 zugeschlossen; dann herrscht in R die Energiedichte ε_1.

I. Wir steigern die Geschwindigkeit des Systems auf den Wert $\mathfrak{p}_1$; dann herrscht in R die Energiedichte $\varepsilon_1\varkappa_1$; es mußte also K die Wärmemenge $D\varepsilon_1\varkappa_1-D\varepsilon_1=D\varepsilon_1(\varkappa_1-1)$ abgeben.

II. Nun werde auch der Spiegel s_1 geschlossen und die Geschwindigkeit von $\mathfrak{p}_1$ auf $\mathfrak{p}_2$ vermindert. Die Dichte in R bleibt beständig gleich $\varkappa_1\varepsilon_1$, da ja diesem Raume weder Arbeit noch Wärme zugeführt wird; und zwar werde $\mathfrak{p}_2$ so gewählt, daß

$$\varkappa_1\varepsilon_1=\varkappa_2\varepsilon_2 \tag{6}$$

ist. Während dieses Vorganges wird Wärme weder von K noch von L abgegeben oder empfangen.

III. Da nun in R dieselbe Energiedichte herrscht, wie sie der Emission von L bei der gegebenen Geschwindigkeit entspricht, kann nun s_2 geöffnet werden, ohne daß deswegen irgend welche Veränderung eintritt. Wir tun dies und verändern hierauf den Wert von $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_2$ auf $\mathfrak{p}_3$. Dabei gibt L die Wärmemenge $D\varepsilon_2(\varkappa_3-\varkappa_2)$ ab.

IV. Wir schließen wieder s_2 und lassen die Geschwindigkeit auf den Wert $\mathfrak{p}_4$ anwachsen. Ebenso wie bei II bleibt die Energiedichte in R unverändert $\varepsilon_2\varkappa_3$; wir wählen $\mathfrak{p}_4$ so, daß

$$\varepsilon_2\varkappa_3 = \varepsilon_1\varkappa_4 \tag{7}$$

ist.

V. Wir können nun wieder s_1 öffnen (ebenso wie s_2 bei Beginn von III) und lassen die Geschwindigkeit wieder auf Null sinken. Ist dies erreicht, so herrscht in R wieder die Energiedichte ε_1 und K muß dazu die (negative) Wärmemenge

$$D\varepsilon_1(1-\varkappa_4)$$

abgeben.

Nun ist der Anfangszustand wieder erreicht, der Kreisprozeß geschlossen.

Das Resultat des Kreisprozesses ist, daß K die Wärmemenge

$$Q_1 = D\varepsilon_1(\varkappa_1-1)+D\varepsilon_1(1-\varkappa_4) = D\varepsilon_1(\varkappa_1-\varkappa_4)$$

abgegeben hat und L die Wärmemenge

$$Q_2 = -D\varepsilon_2(\varkappa_3-\varkappa_2) = D\varepsilon_2(\varkappa_2-\varkappa_3)$$

aufgenommen hat.

Infolge der Gleichungen (6) und (7) sind diese Wärmemengen einander gleich. Da wir über das Verhältnis von $\mathfrak{p}_2$ zu $\mathfrak{p}_3$ keine Voraussetzung machen mußten, können wir $\mathfrak{p}_2 > \mathfrak{p}_3$, also auch $\varkappa_2 > \varkappa_3$ wählen; dann ist Q_1 (und Q_2) positiv und es ist also eine Wärmemenge vom kälteren Körper K auf den wärmeren L übergegangen, ohne daß sonst irgend eine Veränderung stattgehabt hätte.

Denn unser System befindet sich, wie zu Anfang, in absoluter Ruhe; die auf Erzeugung der notwendigen Geschwindigkeit respektive lebendigen Kraft verbrauchte Arbeit ist wieder gewonnen worden, also in Summe gleich Null. Es wäre allerdings vielleicht denkbar, daß auf das bewegte System Kräfte gewirkt haben (natürlich im Gegensatze zum Reaktionsprinzip), welche von der Geschwindigkeit abhängen und auf welche die obige Überlegung nicht anwendbar wäre. Da jedoch $Q_1 = Q_2$ ist, hat sich die Gesamtenergie des Systems nicht geändert, es müßte also die Arbeit auch solcher Kräfte in Summe gleich Null sein.

Unser Kreisprozeß führt also auf einen Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze und wir müssen daher nach einer neuen Annahme zur Lösung desselben suchen.

Eine solche Annahme wäre, daß das Emissionsvermögen e eines schwarzen Körpers caeteris paribus infolge der Bewegung auf den Betrag $\frac{1}{\varkappa} e$ sinkt. In der Tat würde dann die Dichte der Energie in einem leeren Raume, der mit dem schwarzen Körper in Verbindung ist, nach außen aber durch vollkommene Spiegel abgeschlossen ist, unabhängig von der Bewegung den Wert $\frac{4e}{\mathfrak{V}} = \varepsilon$ haben und der früher beschriebene Kreisprozeß würde resultatlos verlaufen. Natürlich haben wir festzuhalten, daß diese Änderung das eigentliche Emissionsvermögen trifft und nicht etwa damit etwas zu tun hat, wieviel ein bewegter Körper einem ruhenden Flächenelement zustrahlt oder dergleichen, in welchen Fällen die Abhängigkeit von der Bewegung ja auf der Hand liegt. Eine solche Änderung des Emissionsvermögens ist wohl kaum ohne Änderung des Energieinhaltes des schwarzen Körpers denkbar; und wenn dies der Fall ist, so muß die verlorene Energie doch wo anders auftreten; wenn etwa in Form der Arbeit einer Kraft, die auf den bewegten Körper wirkt, so würde diese Kraft gewiß keine Reaktion erfahren. Und in diesem Falle das Reaktionsprinzip zu leugnen, würde gewiß allen bisher ausgesprochenen Ansichten widersprechen. Diese Gründe scheinen mir die erwähnte Annahme unwahrscheinlich zu machen; zwingend sind sie wohl nicht. Und als unmöglich können wir die obige Hypothese nicht zurückweisen.

3.

Die Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze läßt sich jedoch, wie in der Einleitung erwähnt, auch durch eine andere Hypothese wieder herstellen; nämlich durch die Hypothese, daß die Dimensionen der Materie von der Bewegung derselben abhängig sind. Am einfachsten ist die Annahme, daß die senkrecht zur Bewegung orientierten Dimensionen unverändert bleiben, die in die Bewegungsrichtung fallenden Dimen-

sionen sich um den Faktor λ ändern, wo λ eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

In unserem Falle wird die Länge D sich mit der Geschwindigkeit ändern und in den verschiedenen Stadien unseres Kreisprozesses den Wert $D\lambda$, $D\lambda_1 \ldots$ annehmen, wo λ, $\lambda_1 \ldots$ immer dieselbe Funktion von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1 \ldots$ ist. In demselben Verhältnisse ändert sich dann natürlich auch das Volumen des Raumes R. Wenn sich also jetzt die Geschwindigkeit ändert, wird die Strahlung auf Veränderung des Volumens eine gewisse Arbeit leisten, die wir mit in Rechnung ziehen müssen. Der Druck der Strahlung ist natürlich nach wie vor gleich einem Drittel der Energiedichte, also gleich $\frac{1}{3}\varkappa\varepsilon$. (Die Überlegungen, die wir oben p. 476 anwandten, um diesen Wert abzuleiten, sind auch jetzt, wo λ einen von 1 verschiedenen Wert hat, genau in derselben Weise durchzuführen, da wir ja dort nur mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit zu tun hatten und daher der Wert von λ konstant bleibt.)

Nun wollen wir unser System denselben Kreisprozeß durchlaufen lassen wie früher und das Resultat desselben unter der veränderten Annahme berechnen. Und zwar wollen wir den Prozeß umkehrbar verlaufen lassen, was wir dadurch erreichen können, daß wir die Geschwindigkeit des Systems ganz allmählich ändern. (Allerdings werden wir später sehen, daß diese Maßregel unnötig ist.) Die nachfolgende Tabelle dürfte wieder zur Erleichterung der Übersicht beitragen.

	$\mathfrak{p}$	s_1	s_2	Energiedichte in R	K gibt ab		L gibt ab	
					Wärme	Arbeit	Wärme	Arbeit
A.	0	o.	z.	ε_1	—	—	—	—
I.	$\mathfrak{p}_1$	o.	z.	$\varkappa_1\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 D(\varkappa_1\lambda_1 - 1)$	$\frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_1^{\lambda_1}\varkappa\, d\lambda$	—	—
II.	$\mathfrak{p}_2$	z.	z.	$\varkappa_2\varepsilon_2$	—	—	—	—
III.	$\mathfrak{p}_3$	z.	o.	$\varkappa_3\varepsilon_2$	—	—	$\varepsilon_2 D(\varkappa_3\lambda_3 - \varkappa_2\lambda_2)$	$\frac{1}{3}\varepsilon_2 D\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\varkappa\, d\lambda$
IV.	$\mathfrak{p}_1$	z.	z.	$\varkappa_4\varepsilon_1$	—	—	—	—
V.	0	o.	z.	ε_1	$\varepsilon_1 D(1 - \varkappa_4\lambda_4)$	$\frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_{\lambda_4}^{1}\varkappa\, d\lambda$	—	—

Das Anfangsstadium ist dasselbe wie beim früher betrachteten Prozesse. Das System ruht; s_1 ist offen, s_2 zugeschlossen.

I. Es werde die Geschwindigkeit allmählich auf den Wert $\mathfrak{p}_1$ gebracht. Dann ist die Energiedichte in R ebenso wie früher $\varkappa_1\varepsilon_1$; ferner hat sich das Volumen von R vom Anfangswerte D auf den Betrag $D\lambda_1$ verändert. Der Energieinhalt von R ist also jetzt $\varkappa_1\varepsilon_1 D\lambda_1$; früher war er $\varepsilon_1 D$. Also muß K die Wärmemenge

$$\varepsilon_1 D(\varkappa_1\lambda_1 - 1)$$

abgegeben haben. Da sich ferner das Volumen geändert hat, ist von der Strahlung Arbeit geleistet worden, und zwar im Betrage

$$\int_1^{\lambda_1} D d\lambda \cdot \frac{1}{3}\varkappa\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 D}{3}\int_1^{\lambda_1}\varkappa d\lambda,$$

da die Volumsvergrößerung $Dd\lambda$, der jeweilige Druck $\frac{1}{3}\varkappa\varepsilon_1$ ist. Beide Größen, λ und $\varkappa$, sind Funktionen von $\mathfrak{p}$; wir können aber natürlich auch $\varkappa$ als Funktion von λ ansehen und umgekehrt. Das Integral ist von 1 bis λ_1 zu erstrecken, da dies den Werten 0 und $\mathfrak{p}_1$ der Geschwindigkeit entspricht. Auch diese Energiemenge muß von K geliefert werden.

II. Wir schließen auch s_1 und verändern die Geschwindigkeit allmählich auf den Wert $\mathfrak{p}_2$. Dann ändert sich auch die Energiedichte in R, da sich einmal das Volumen dieses Raumes ändert und dann bei dieser Änderung auch Arbeit geleistet wird. In einem beliebigen Augenblicke ist das Volumen durch $D\lambda$ gegeben und die Energiedichte kann mit $\varkappa\varepsilon$ bezeichnet werden, wo $\varkappa$ dem jeweiligen Werte der Geschwindigkeit entspricht, ε dagegen vorläufig unbekannt ist. Also ist der Energieinhalt von R in einem bestimmten Augenblicke gleich $D\lambda\varkappa\varepsilon$; die Abnahme desselben ist gleich der geleisteten Arbeit $\frac{1}{3}\varkappa\varepsilon D d\lambda$; also ist

$$d(\lambda\varkappa\varepsilon) = -\frac{1}{3}\varkappa\varepsilon d\lambda$$

oder

$$\frac{d(\varkappa\varepsilon)}{\varkappa\varepsilon} = -\frac{4}{3}\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Zu Anfang des Vorganges (II) hatten die hier vorkommenden Größen die Werte ε_1, $\varkappa_1$, λ_1. Als Endwerte wollen wir ε_2, $\varkappa_2$, λ_2 wählen; d. h. wir bestimmen $\mathfrak{p}_2$ (und damit $\varkappa_2$ und λ_2) so, daß ε der Wert ε_2 entspricht. Dann muß also nach obiger Differentialgleichung

$$\log \frac{\varkappa_1 \varepsilon_1}{\varkappa_2 \varepsilon_2} = -\frac{4}{3} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{8}$$

sein. Es ist also jetzt die Dichte der Energie in R gleich $\varkappa_2 \varepsilon_2$.

Weder von K noch von L wurde während dieses Teilprozesses Energie abgegeben.

III. Wir können nun den Spiegel s_2 öffnen, ohne daß dadurch ein Energieaustausch veranlaßt würde. Hierauf verändern wir die Geschwindigkeit auf den Wert $\mathfrak{p}_3$. Jetzt gibt L Energie in Form von Wärme und Arbeit ab, die genau so zu berechnen ist wie die beim Teilprozesse I von K abgegebene Energie. Es ist die abgegebene Wärme:

$$\varepsilon_2 D(\varkappa_3 \lambda_3 - \varkappa_2 \lambda_2),$$

die geleistete Arbeit:

$$\frac{1}{3} \varepsilon_2 D \cdot \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \varkappa \, d\lambda.$$

IV. Wir schließen den Spiegel s_2 und lassen die Geschwindigkeit allmählich den Wert $\mathfrak{p}_4$ annehmen, und zwar werde dieser Wert so bestimmt, daß die Energiedichte in R den Wert $\varkappa_4 \varepsilon_1$ erreicht. Da dieser Teilprozeß dem unter II beschriebenen ganz analog ist, schließen wir, daß die Gleichung

$$\log \frac{\varkappa_3 \varepsilon_2}{\varkappa_4 \varepsilon_1} = -\frac{4}{3} \log \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \tag{9}$$

erfüllt sein muß.

V. Wir können nun ohne weiteres den Spiegel s_1 öffnen; dann lassen wir die Geschwindigkeit wieder auf Null sinken. Dabei gibt K wieder Energie ab, und zwar

$$\varepsilon_1 D(1 - \varkappa_4 \lambda_4)$$

an Wärme und

$$\frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_{\lambda_4}^{1}\varkappa\, d\lambda$$

an Arbeit.

Das System hat jetzt wieder sein Anfangsstadium erreicht. Der Kreisprozeß ist also geschlossen; und da wir die Geschwindigkeitsänderungen unendlich langsam vor sich gehen ließen, ist der Prozeß auch umkehrbar. Das Resultat ist, daß K die Wärmemenge

$$Q_1 = \varepsilon_1 D(\varkappa_1\lambda_1 - 1) + \frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_{1}^{\lambda_1}\varkappa\, d\lambda$$
$$+ \varepsilon_1 D(1-\varkappa_4\lambda_4) + \frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_{\lambda_4}^{1}\varkappa\, d\lambda$$

abgegeben hat und L die Wärmemenge

$$-Q_2 = \varepsilon_2 D(\varkappa_3\lambda_3 - \varkappa_2\lambda_2) + \frac{1}{3}\varepsilon_2 D\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\varkappa\, d\lambda$$

gleichfalls abgegeben hat. Wir können auch sagen, K hat die Wärmemenge

$$Q_1 = \varepsilon_1 D(\varkappa_1\lambda_1 - \varkappa_4\lambda_4) + \frac{1}{3}\varepsilon_1 D\int_{\lambda_4}^{\lambda_1}\varkappa\, d\lambda$$

abgegeben und L hat die Wärmemenge

$$Q_2 = \varepsilon_2 D(\varkappa_2\lambda_2 - \varkappa_3\lambda_3) + \frac{1}{3}\varepsilon_2 D\int_{\lambda_3}^{\lambda_2}\varkappa\, d\lambda$$

aufgenommen. Und zwar sind hier auch noch die Gleichungen (8) und (9) zu berücksichtigen, deren Erfüllung für die Umkehrbarkeit unseres Prozesses nötig ist. Lassen wir in ihnen den log weg, so lauten sie:

$$\frac{\varkappa_1\varepsilon_1}{\varkappa_2\varepsilon_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{4/3}, \quad \frac{\varkappa_3\varepsilon_2}{\varkappa_4\varepsilon_1} = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right)^{4/3}. \tag{10}$$

Wir setzen nun nach dem zweiten Hauptsatze

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

oder wenn wir nach dem Stefan'schen Gesetze e und damit ε der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional annehmen:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{1/4}.$$

Setzen wir hierin die Werte von Q_1 und Q_2 ein, so erhalten wir nach einer einfachen Reduktion:

$$\frac{\varkappa_1\lambda_1 - \varkappa_4\lambda_4 + \frac{1}{3}\int_{\lambda_4}^{\lambda_1}\varkappa\, d\lambda}{\varkappa_2\lambda_2 - \varkappa_3\lambda_3 + \frac{1}{3}\int_{\lambda_3}^{\lambda_2}\varkappa\, d\lambda} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{3/4}$$

oder mit Benützung der Gleichungen (10):

$$= \frac{\varkappa_1^{3/4}\lambda_1}{\varkappa_2^{3/4}\lambda_2} = \frac{\varkappa_4^{3/4}\lambda_4}{\varkappa_3^{3/4}\lambda_3}$$

oder ferner

$$= \frac{\varkappa_1^{3/4}\lambda_1 - \varkappa_4^{3/4}\lambda_4}{\varkappa_2^{3/4}\lambda_2 - \varkappa_3^{3/4}\lambda_3}.$$

Hieraus können wir weiter schließen, daß das unbestimmte Integral

$$\int \varkappa\, d\lambda = 3\lambda(\varkappa^{3/4} - \varkappa) + \text{const}$$

sein muß, woraus folgt

$$\varkappa = \lambda^{-\frac{4}{3}}; \quad \lambda = \varkappa^{-\frac{3}{4}}. \tag{11}$$

(Die auftretende Integrationskonstante braucht nicht beachtet zu werden, da jedenfalls für $\varkappa = 1$ auch $\lambda = 1$ sein muß, da diese Werte der Geschwindigkeit Null entsprechen.)

Setzen wir dieses Resultat in die Gleichungen (10) ein, so folgt

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

im Widerspruche mit unserer ersten Voraussetzung, nach der ja den Körpern K und L verschiedene Temperatur und damit verschiedenes Emissionsvermögen zukommen sollte. Mit anderen Worten: Die beiden Teilprozesse II und IV sind nicht im stande,

die Größe ε im Raume R zu verändern. Daraus folgt, daß der betrachtete Kreisprozeß nicht durchführbar ist oder vielmehr zu keinem Resultate führen kann. In Übereinstimmung damit ist, daß für die angegebene Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ auch Q_1 und Q_2 verschwinden.

Daraus, daß $Q_1 = Q_2$ $(= 0)$ ist, folgt auch, daß die Summe der aufgewendeten Arbeit gleich Null sein muß. Von der Arbeit der Kräfte, welche die lebendige Kraft unseres Systems erzeugt und wieder vernichtet haben, war dies von vornherein klar. Wir sehen aber jetzt auch, daß die Arbeit der Molekularkräfte (die bei der Veränderung der Dimensionen der Materie geleistet wurde) und die Arbeit eventueller (reaktionsloser) Kräfte, welche der Äther auf die Materie ausübt, in Summa gleich Null sein muß. Dieser Feststellung zu Liebe habe ich auch die obigen Deduktionen in der vorliegenden umständlichen Weise geführt; wir hätten ja gleich von Anfang an die Bedingung aufsuchen können, daß Q und Q' verschwindet. (Wir hätten dann auch nicht das Stefan'sche Gesetz benützen müssen.)

Durch unsere Annahme von der Veränderung der Dimensionen der Materie sind also alle Widersprüche beseitigt.

Ist die Geschwindigkeit der Materie klein gegen die des Lichtes und vernachlässigen wir die höheren Potenzen von σ einschließlich der vierten, so ist nach Gleichung (11) und (5):

$$\lambda = \left(1 + \frac{2}{3}\sigma^2\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

worin wir Ausdruck (1) wiedererkennen.

Die Übereinstimmung mit der Annahme von Lorentz und Fitzgerald ist also eine vollständige.

Anhang.

Über die Reflektion an einem bewegten Spiegel.

Wir konstruieren zuerst nach dem Huyghens'schen Prinzip den reflektierten Strahl im absoluten Strahlengange. Eine Bewegung des Spiegels in seiner Ebene hat hierauf gar keinen Einfluß. Wir haben also hier nur die zur spiegelnden Ebene senkrechte Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ zu berücksichtigen. Dieselbe sei $\xi = \sigma_1 \mathfrak{B}$.

Sei nun (Fig. 3) AD ein Stück der Wellenebene des in der (absoluten) Richtung IA einfallenden Strahles. Der Punkt A

Fig. 3.

der Wellenebene trifft den Spiegel in der Lage S_1; der Punkt D trifft ihn erst in der Lage S_2, etwa in C. Und zwar ist offenbar

$$DC : CF = \mathfrak{B} : \xi = 1 : \sigma_1. \qquad (a)$$

Die Huyghens'sche Konstruktion liefert uns nun die Wellenebene CE des reflektierten Strahles als Tangente vom Punkte C an den mit dem Radius

$$AE = DC$$

um A gelegten Kreis. (Wir sprechen hier natürlich nur vom Durchschnitte dieser Ebene mit der Zeichenebene). Die Richtung des reflektierten Strahles ist durch AR, der Reflexionswinkel durch ρ gegeben. Der Effekt ist also derselbe, wie wenn die Reflektion an einem ruhenden Spiegel S' geschehen wäre, dessen Ebene mit der des bewegten Spiegels den Winkel ψ einschließt. Es ist also

$$i+\psi = \rho-\psi$$
$$\rho = i+2\psi$$

Um den Winkel ψ zu bestimmen, ziehen wir die Hilfslinie DF. Beachten wir, daß

$$\triangle FBC \sim \triangle DBA$$

und daher auch

$$\triangle FBD \sim \triangle CBA,$$

so erkennen wir, daß

$$\sphericalangle FDC = \psi$$

ist. Dann ist

$$\frac{\sin\psi}{\sin i} = \frac{FC}{FD} = \frac{FC}{\sqrt{\overline{FC}^2+\overline{CD}^2-2\,\overline{FC}.\overline{CD}.\cos i}}$$

oder nach *(a)*

$$\sin\psi = \frac{\sigma_1 \sin i}{\sqrt{1+\sigma_1^2-2\sigma_1\cos i}}.$$

Es lautet daher das Reflexionsgesetz für die absolute Strahlenrichtung:

$$\rho = i+2 \arcsin\frac{\sigma_1 \sin i}{\sqrt{1+\sigma_1^2-2\sigma_1\cos i}}$$

oder daraus:

$$\sin\rho = \frac{\sin i(1-\sigma_1^2)}{1+\sigma_1^2-2\sigma_1\cos i}; \quad \cos\rho = \frac{(1+\sigma_1^2)\cos i-2\sigma_1}{1+\sigma_1^2-2\sigma_1\cos i}. \qquad (12)$$

Ferner erkennt man sofort, daß der reflektierte Strahl in der Einfallsebene liegt.

Um aus der Richtung des Absolutstrahles die des zugehörigen Relativstrahles zu finden, können wir wieder Fig. 1 zu Hilfe nehmen. Der Winkel, den Absolut- und Relativstrahl miteinander einschließen, ist dort $\sphericalangle SOV = \alpha$, und zwar ist:

$$\sin\alpha : \sin\varphi = \mathfrak{p} : \mathfrak{V}; \quad \alpha = \arcsin(\sigma \sin\varphi). \qquad (13)$$

Ferner sieht man leicht, daß diese beiden Strahlen in einer Ebene liegen, der auch die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$

angehört (φ ist der Winkel, den der Relativstrahl mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ einschließt).

Wir betrachten nun die zwei in der Einleitung erwähnten Spezialfälle:

I. Die Geschwindigkeit sei senkrecht zur Ebene des Spiegels. Dann liegen der einfallende und reflektierte Relativstrahl in derselben Ebene wie die zwei absoluten Strahlen, der auch das Lot angehört. Bezeichnen wir den Einfalls- und Reflexionswinkel im relativen Strahlengange mit i' und ρ', so ist nach (13)

$$i' = i + \arcsin(\sigma \sin i')$$
$$\rho' = \rho - \arcsin(\sigma \sin \rho').$$

Daraus folgt:

$$\sin i' = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - 2\sigma \cos i + \sigma^2}}; \quad \sin \rho' = \frac{\sin \rho}{\sqrt{1 + 2\sigma \cos \rho + \sigma^2}}.$$

Setzen wir nun in der letzten Gleichung für $\sin \rho$ und $\cos \rho$ seinen Wert aus (12) ein, so sieht man leicht ein (hier ist natürlich $\sigma_1 = \sigma$ zu setzen), daß

$$\sin i' = \sin \rho',$$

daß also in diesem Falle das gewöhnliche Reflexionsgesetz streng gültig ist.

II. Die Geschwindigkeit des Spiegels liege in der Ebene desselben. Dann sind nach Obigem für die Absolutstrahlen die gewöhnlichen Reflexionsgesetze gültig, also $i = \rho$. In diesem Falle liegen also die beiden Absolutstrahlen symmetrisch in Bezug auf das Lot; dasselbe muß, wie man leicht durchblickt, dann auch von den Relativstrahlen gelten, welche also auch in diesem Falle den gewöhnlichen Reflexionsgesetzen genau gehorchen.

Es ist wohl wahrscheinlich, daß diese Sätze schon bekannt sind; da ich sie aber in der Literatur nicht finden konnte, habe ich es für nötig gehalten, dieselben hier zu beweisen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. IV. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Reziprozität des Strahlenganges in bewegten Körpern. Thermodynamische Ableitung des Fresnel'schen Fortführungskoeffizienten

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Die Reziprozität des Strahlenganges in ruhenden Körpern ist bekanntlich eine Forderung der thermodynamischen Grundsätze. Jeder Strahl, der auf beliebigem Wege von A nach B gelangt, muß auch umgekehrt auf demselben Wege von B nach A gelangen können.

Es fragt sich nun, ob dieser Satz auch gilt, wenn die Punkte A und B einem System angehören, das sich in gleichförmiger Translation durch den Äther bewegt. Auf den ersten Blick könnte man meinen, daß vielleicht die vom Strahlungsdruck geleistete Arbeit eine Kompensation etwaiger Wärmeverluste oder negativer Verwandlungen darstellt und daß daher das Reziprozitätsgesetz in bewegten Körpern nicht gültig sein muß. Denkt man sich jedoch das ganze bewegte System, dem die Punkte A und B angehören, von einer nach innen vollkommen spiegelnden Hülle umschlossen, deren Wärmeleitungsfähigkeit gleich Null ist; ist ferner die Temperatur aller Körper innerhalb dieser Hülle dieselbe, die Temperatur des Außenraumes Null, so kann das System bei seiner Translation wohl kaum einen Widerstand erfahren; es wird daher auch keine Arbeit geleistet — und es muß daher dann auch das Reziprozitätsgesetz des Strahlenganges gelten.

Wir stellen uns natürlich auf den Standpunkt eines absolut ruhenden Äthers und unterscheiden zwischen absoluter und relativer Strahlenrichtung, welch letztere von einem Beobachter wahrgenommen wird, der sich auf dem bewegten System befindet.[1] Für die gegenseitige Zustrahlung der Punkte A und B ist natürlich auch nur der relative Strahlengang maßgebend. Demgemäß sind es daher auch die relativen Strahlen, welche das Reziprozitätsgesetz zu befolgen haben.

Sei $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit des Lichtes im Äther, $\mathfrak{p}$ die Translationsgeschwindigkeit unseres materiellen Systems; sei ferner $\sigma = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{V}}$. Es ist bekannt, daß die Gesetze der Reflexion und Brechung der Relativstrahlen in bewegten Körpern dieselben sind, welche auch in einem ruhenden System gelten, wenn man annimmt, daß die Geschwindigkeit des Lichtes in einem bewegten Körper gleich

$$\mathfrak{V}+\mathfrak{p}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \tag{1}$$

ist und die Genauigkeit auf die erste Potenz der in den meisten Fällen sehr kleinen Größe σ beschränkt. Dabei ist in (1) die Addition natürlich geometrisch zu verstehen. Die Größe

$$1-\frac{1}{n^2}=k$$

wird der Fresnel'sche Fortführungskoeffizient genannt. Innerhalb dieser Genauigkeitsgrenze gilt daher auch die Reziprozität des Strahlenganges. Doch ist diese Beschränkung vom Standpunkte der Thermodynamik unstatthaft; wir wollen daher im folgenden untersuchen, was sich aus der exakten Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes bezüglich der Reflexion und Brechung in bewegter Materie folgern läßt.

Wir werden also annehmen, daß die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegter Materie durch

$$\mathfrak{V}+k\mathfrak{p}$$

---

[1] Siehe H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement .... Arch. Néerl., T. XXI, p. 106 (1886). Drude, Lehrbuch der Optik, p. 433.

gegeben ist, wobei wir k vorläufig unbestimmt lassen; diese Annahme ist bekanntlich mit der Supposition, daß der Äther in durchsichtiger Materie die Geschwindigkeit $k\mathfrak{p}$ hat, äquivalent. Unsere Betrachtungen werden nun etwas vereinfacht, wenn wir uns vorstellen, daß die Materie ruht, daß sich aber der freie Äther mit der Geschwindigkeit $-\mathfrak{p}$ bewegt, während dem Äther innerhalb durchsichtiger Körper die Geschwindigkeit

$$k\mathfrak{p}-\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(k-1) = -\varkappa\mathfrak{p} \qquad (\varkappa = 1-k) \tag{2}$$

zukommt. $\left(\text{Nach Fresnel wäre } \varkappa = \frac{1}{n^2}\cdot\right)$

Die Geschwindigkeit des Lichtes (in Bezug auf die Materie) ist dann im freien Äther durch

$$\mathfrak{B}-\mathfrak{p}$$

in durchsichtiger Materie vom Brechungsexponenten n durch

$$\frac{1}{n}\mathfrak{B}-\varkappa\mathfrak{p}$$

gegeben, wobei wieder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{p}$ als Vektoren aufgefaßt sind. Der analytische Ausdruck der (relativen) Lichtgeschwindigkeit ist dann im Äther[1]

$$-\mathfrak{p}\cos\varphi+\sqrt{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{p}^2\sin^2\varphi}, \tag{3}$$

in durchsichtiger Materie

$$-\mathfrak{p}\varkappa\cos\varphi+\sqrt{\frac{\mathfrak{B}^2}{n^2}-\mathfrak{p}^2\varkappa^2\sin^2\varphi}, \tag{4}$$

wobei φ der Winkel ist, den die Richtung des (relativen) Strahles mit der Bewegungsrichtung der Materie oder der negativen (relativen) Bewegungsrichtung des Äthers einschließt.

1. Reflexion.

Das Gesetz der Reflexion an einem bewegten Körper läßt sich aus dem Huyghens'schen Prinzip ohne weitere Annahme

[1] Siehe etwa F. Hasenöhrl, diese Sitzungsberichte, CXIII, p. 473, 1904.

rein geometrisch ableiten; wenn unsere Anschauungen richtig sind, muß sich also auch die Reziprozität des Strahlenganges bei der Reflexion ohne weiteres ergeben. Und zwar ist dies, wie ich gleich zeigen werde, auch der Fall.

Es ist nicht schwierig, den Gang der Strahlen bei der Reflexion mit Hilfe einer Konstruktion exakt anzugeben;[1] doch ist es mir trotz verschiedener Versuche nicht gelungen, daraus einen exakten analytischen Ausdruck abzuleiten. Doch läßt sich die Reziprozität des Strahlenganges, worauf es uns hier ankommt, auch ohne dem ableiten. Man kann sich da verschiedener Methoden bedienen, von denen ich hier nur die einfachste angeben möchte. Dieselbe geht vom Fermat'schen Prinzip des kürzesten Lichtweges aus, das in der Optik bewegter Körper bereits von H. A. Lorentz[2] verwendet wurde.

Wir denken uns eine spiegelnde Ebene; der senkrechte Abstand der Punkte A und B von derselben sei h_1 und h_2. Sei i der Einfallswinkel, ρ der Reflexionswinkel. Dann hat der einfallende Strahl den Weg $\frac{h_1}{\cos i}$, der reflektierte den Weg $\frac{h_2}{\cos \rho}$ zurückzulegen. (Die beiden Strahlen liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene mit dem Lot.) Es muß ferner noch die Richtung der Bewegung der Materie irgendwie gegeben sein. Und zwar schließe der einfallende Strahl mit letzterer den Winkel φ, der reflektierte den Winkel ψ ein.

Dann ist die Geschwindigkeit des einfallenden Strahles gemäß (3):

$$\mathfrak{V}_1' = -\mathfrak{p}\cos\varphi + \sqrt{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{p}^2\sin^2\varphi}$$
$$= \mathfrak{V}\left(-\sigma\cos\varphi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}\right)$$

und die Geschwindigkeit des reflektierten Strahles

$$\mathfrak{V}_2' = \mathfrak{V}\left(-\sigma\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}\right).$$

Daher ist die Zeit, welche ein Strahl braucht, um von A ausgehend nach einmaliger Reflexion nach B zu gelangen:

---

[1] F. Hasenöhrl, l. c., p. 488.

[2] L. c., p. 127 ff.

$$\tau_1 = \frac{1}{\mathfrak{B}_1'}\frac{h_1}{\cos i} + \frac{1}{\mathfrak{B}_2'}\frac{h_2}{\cos\rho}$$
$$= \frac{h_1}{\mathfrak{B}\cos i\,(-\sigma\cos\varphi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi})} +$$
$$+ \frac{h_2}{\mathfrak{B}\cos\rho\,(-\sigma\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi})}.$$

Nach dem Fermat'schen Satze muß nun die Zeit für den wirklichen Strahlengang einen Grenzwert erreichen, d. h. es muß

$$\delta\tau_1 = 0$$

sein. (Bildet man nun die Variation dieses Ausdruckes und setzt sie unter Berücksichtigung der geltenden Bedingungsgleichungen gleich Null, so erhält man Gleichungen, aus denen sich das exakte Reflexionsgesetz ergeben muß. Nun werden aber die Ausdrücke so kompliziert, daß ich da, wie erwähnt, zu keinem Resultat gelangen konnte.)

Wir nehmen nun an, daß sich ein Strahl auf demselben Wege umgekehrt von B nach A fortpflanzt; derselbe hat dann dieselben Strecken zu durchlaufen, seine Richtung schließt aber mit der Richtung der Bewegung des materiellen Systems die Winkel $(180-\psi)$ respektive $(180-\varphi)$ ein; daher ist die Zeit, welche er braucht, um von B nach A zu gelangen, gleich:

$$\tau_2 = \frac{h_1}{\mathfrak{B}\cos i\,(\sigma\cos\varphi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi})} +$$
$$+ \frac{h_2}{\mathfrak{B}\cos\rho\,(\sigma\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi})}.$$

Um die Reziprozität des Strahlenganges nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, daß, wenn $\delta\tau_1 = 0$ ist, auch $\delta\tau_2 = 0$ wird.

Es ist letzteres jedenfalls der Fall, wenn

$$\delta(\tau_1 - \tau_2) = 0$$

ist, und dieser letzte Ausdruck hat einen sehr einfachen Wert; es ist nämlich, wie man sofort sieht:

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{h_1}{\mathfrak{V}\cos i}\,\frac{2\sigma\cos\varphi}{1-\sigma^2} + \frac{h_2}{\mathfrak{V}\cos\rho}\,\frac{2\sigma\cos\psi}{1-\sigma^2},$$

also ist

$$\delta(\tau_1 - \tau_2) = \frac{2\sigma}{\mathfrak{V}(1-\sigma^2)}\,\delta\left(\frac{h_1\cos\varphi}{\cos i} + \frac{h_2\cos\psi}{\cos\rho}\right).$$

Nun ist aber der Ausdruck in der Klammer gleich der Projektion des gesamten Strahlenganges in die Richtung der Bewegung der Materie; da die Lage der Punkte A und B und ebenso die Bewegungsrichtung der Materie nicht variiert werden darf, ist die Variation dieses Ausdruckes gleich Null; also ist

$$\delta(\tau_1 - \tau_2) = 0; \quad \delta\tau_1 = \delta\tau_2;$$

wenn also $\delta\tau_1 = 0$ ist, so ist auch $\delta\tau_2 = 0$, und damit ist die gesuchte Reziprozität erwiesen.

2. Brechung.

Die Brechung der Strahlen kann ganz analog behandelt werden. Der Punkt A liege ebenso wie früher; der Punkt B dagegen auf der anderen Seite der Ebene, welche wir uns jetzt nicht spiegelnd denken, sondern welche die Begrenzung eines Mediums von Brechungsexponenten n sein soll. Statt des Reflexionswinkels ρ haben wir jetzt den Brechungswinkel β einzuführen und ψ sei jetzt der Winkel, den dieser letztere Strahl mit der Bewegungsrichtung der Materie einschließt. Den anderen Größen komme die dem Früheren analoge Bedeutung zu.

Die Geschwindigkeit des einfallenden Strahles hat denselben Wert $\mathfrak{V}_1'$ wie früher; dagegen ist die Geschwindigkeit des gebrochenen Strahles gemäß (4):

$$-\mathfrak{p}\varkappa\cos\psi + \sqrt{\frac{\mathfrak{V}^2}{n^2} - \mathfrak{p}^2\varkappa^2\sin^2\psi} =$$
$$= \frac{\mathfrak{V}}{n}\left(-\sigma\varkappa n\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\varkappa^2 n^2\sin^2\psi}\right).$$

Daher ist die Zeit, welche der Strahl braucht, um von A nach B zu gelangen:

$$\tau_1 = \frac{h_1}{\mathfrak{B}\cos i\left(-\sigma\cos\varphi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}\right)} +$$
$$+ \frac{h_2}{\frac{\mathfrak{B}}{n}\cos\beta\left(-\sigma\varkappa n\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\varkappa^2 n^2\sin^2\psi}\right)}.$$

Desgleichen ergibt sich für die Zeit, welche der Strahl braucht, um von B nach A zu gelangen, der Wert:

$$\tau_2 = \frac{h_1}{\mathfrak{B}\cos i\left(\sigma\cos\varphi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}\right)} +$$
$$+ \frac{h_2}{\frac{\mathfrak{B}}{n}\cos\beta\left(\sigma\varkappa n\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\varkappa^2 n^2\sin^2\psi}\right)}.$$

Also wird

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{2h_1\sigma\cos\varphi}{\mathfrak{B}\cos i(1-\sigma^2)} + \frac{2h_2\sigma\varkappa n\cos\psi}{\frac{\mathfrak{B}}{n}\cos\beta(1-\sigma^2\varkappa^2 n^2)}.$$

Wenn nun

$$\frac{1}{1-\sigma^2} = \frac{\varkappa n^2}{1-\sigma^2\varkappa^2 n^2}, \tag{5}$$

so ist aus denselben Gründen wie früher

$$\delta(\tau_1 - \tau_2)$$

gleich Null und die Reziprozität des Strahlenganges gesichert.

Für $\varkappa$ ergibt sich aus (5) der Wert:

$$\varkappa = -\frac{1-\sigma^2}{2\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{(1-\sigma^2)^2}{4\sigma^4} + \frac{1}{n^2\sigma^2}}.$$

Für den Fresnel'schen Fortführungskoeffizienten erhält man daraus den Wert

$$k = 1 - \varkappa = \frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \mp \sqrt{\frac{(1-\sigma^2)^2}{4\sigma^4} + \frac{1}{n^2\sigma^2}},$$

welcher, wenn unsere Anschauungsweise richtig ist, exakt gültig sein muß.

Entwickelt man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von σ, etwa bis einschließlich der zweiten, so wird

$$k = 1 - \frac{1}{n^2} - \sigma^2 \frac{1-n^2}{n^4},$$

wobei natürlich die zwei ersten Glieder mit dem Fresnel'schen Wert übereinstimmen.

Die Wärmestrahlung der Wasserstoffflamme

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. April 1904.)

Eine Frage, welche nicht nur wissenschaftlich, sondern auch für die Technik von Wichtigkeit ist, ist die Frage nach dem Verhältnis, in welchem die von einer Flamme in der Sekunde ausgestrahlte Wärme zu ihrer Verbrennungswärme steht oder, mit anderen Worten, welcher Bruchteil der Verbrennungswärme als strahlende Wärme ausgesendet wird. Bei der Hefner-Lampe, für welche die Gesamtstrahlung bereits bestimmt ist, läßt sich diese Frage einfach beantworten. In meiner letzten Abhandlung: »Die Gesamtstrahlung der Hefner-Lampe«[1] bin ich zu dem folgenden Ergebnis gelangt: Steht der Flamme der Hefner-Lampe eine Fläche von einem Quadratzentimeter Inhalt in der Entfernung von einem Meter so gegenüber, daß die Normale der Fläche horizontal ist und durch die Flammenmitte hindurchgeht, so fällt auf diese Fläche in jeder Sekunde eine Strahlung, deren Energie einer Wärmemenge von $0\cdot162\times10^{-4}\,\frac{g\ \mathrm{cal}}{\mathrm{sec}}$ oder einer Arbeit von 677 Erg äquivalent ist. Daraus folgt, daß die Flamme in der Sekunde nach allen Richtungen im ganzen eine Wärmemenge von $4\pi\times0\cdot162 = 2\cdot04\,g$ cal ausstrahlt. Dabei beträgt die in der Sekunde verbrannte Amylacetatmenge $0\cdot002678\,g$. Da nach Favre und Silbermann das Verbrennen von 1 g Amylacetat eine Wärme von $7971\cdot2\,g$ cal entwickelt, so beträgt

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXII, Abt. IIa, Dezember 1903.

die Verbrennungswärme bei der Hefner-Lampe pro Sekunde $7971 \cdot 2 \times 0 \cdot 002678 = 21 \cdot 35$ *g* cal. Wir gelangen also bezüglich der Hefner-Lampe zu dem Resultat, daß die Wärmestrahlung zur Verbrennungswärme in dem Verhältnis $2 \cdot 04 : 21 \cdot 35$ steht oder daß die ausgesandte Wärmestrahlung $9 \cdot 56\%$ der Verbrennungswärme beträgt.

Unter den Flammen, für welche unsere Frage von besonderem Interesse ist, nimmt wohl die Wasserstoffflamme die erste Stelle ein, weil bei ihr die chemische Reaktion ungemein einfach ist. Die gesamte Wärmemenge, welche entwickelt wird, wenn 1 *g* Wasserstoffgas mit 8 *g* Sauerstoffgas bei 0° C. und 760 *mm* Druck sich zu Wasser von 0° C. vereinigt, wurde von verschiedenen Forschern bestimmt. Wir wollen im folgenden denjenigen Zahlenwert zu Grunde legen, welchen Herr Jul. Thomsen gefunden hat, nämlich 34173 *g* cal, wobei die Kalorie sich auf die spezifische Wärme des Wassers bei 18° C. bezieht. Allerdings ist dieser Zahlenwert bei den Versuchen, welche ich im folgenden beschreiben werde, nicht ohneweiters anzuwenden, weil bei diesen Versuchen Wasserstoff in der Luft verbrennt und bei diesem Prozeß nicht flüssiges Wasser, sondern Wasserdampf gebildet wird. Hier ist nur die Verbindungswärme in Rechnung zu ziehen, nämlich diejenige Wärme, welche der Differenz der inneren Energie vor und nach dem Prozeß äquivalent ist. Die Wärme 34173 *g* cal, welche Herr Thomsen erhalten hat, setzt sich zusammen aus der Verbindungswärme, dann aus der Wärme, welche von der äußeren Arbeit herrührt und schließlich aus der Kondensationswärme des Wasserdampfes.

Herr Pfaundler hat in seinem Lehrbuche[1] die Verbindungswärme von 1 *g* Wasserstoff mit 8 *g* Sauerstoff bei 200° und 760 *mm* Druck zu $28769 \cdot 5$ *g* cal berechnet und dabei die Ansicht ausgesprochen, daß wahrscheinlich die so berechnete Verbindungswärme mit der Temperatur konstant bleibe. Da aber meine Messungen bei Temperaturen vorgenommen wurden,

---

[1] L. Pfaundler, Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, 9. Auflage, II, 2, § 94.

welche nur wenig um 9° schwankten, so hielt ich es mit Rücksicht auf die große Temperaturdifferenz zwischen 9° und 200° für angezeigt, die Frage nach der Verbindungswärme einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen, um die Verbindungswärme nicht nur für 9°, sondern für jede beliebige Temperatur zu erhalten.

Wir gehen zu dem Ende von dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik aus. Bezeichnet U die innere Energie der Masseneinheit und besteht die einzige Kraft, welche auf den Körper wirkt, aus einem auf die Oberfläche wirkenden Druck p, welcher in allen Punkten der Oberfläche gleich stark und überall senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist, so hat das Prinzip der Energie für eine unendlich kleine Zustandsänderung den Ausdruck

$$dU = JdQ - p\,dv, \qquad 1)$$

wo v das spezifische Volumen des Körpers, dQ die der Masseneinheit von außen zugeführte Wärme und J das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten. Die gesamte Masse, welche in unserem Falle in Betracht kommt, beträgt 9 *g*. Für ihren Anfangszustand sei die innere Energie der Masseneinheit mit U_1, für den Endzustand mit U_2 bezeichnet. Der Anfangszustand sei der Zustand des Gasgemenges bei 0° und 760 *mm* Druck, der Endzustand der Zustand des flüssigen Wassers bei 0° und 760 *mm* Druck. Da während der Zustandsänderung der Druck p konstant, und zwar gleich einer Atmosphäre bleibt, so erhalten wir aus der Gleichung 1)

$$U_2 - U_1 = JQ - p(v_2 - v_1) = JQ + p(v_1 - v_2), \qquad 2)$$

wo jetzt v_1 das spezifische Volumen des Gasgemenges und v_2 das spezifische Volumen des gebildeten Wassers bedeuten. Q bedeutet die ganze während der Zustandsänderung der Masseneinheit von außen zugeführte Wärmemenge. Diese Wärmemenge ist hier eine negative Größe, weil bei der Zustandsänderung Wärme tatsächlich nach außen abgegeben wird, und zwar von der ganzen Masse 9 *g* die Wärmemenge 34173 *g* cal. Was das Volumen v_2 anbelangt, so ist dieses

gegen v_1 ganz zu vernachlässigen. Wir können daher die Gleichung 2) in der Form schreiben:

$$9(U_2-U_1) = -34173J+9pv_1. \tag{2a}$$

$9v_1$ ist das Volumen, welches das ganze Gasgemenge im Anfangszustand einnimmt. Da bei 0° und 760 *mm* Druck 1 *g* Wasserstoff das Volumen 0·011167 m^3 und 1 *g* Sauerstoff das Volumen 0·00069968 m^3 einnimmt, so ist $9v_1 = 0·01676444\, m^3$. Ferner ist $p = 10333\, kg$ pro Quadratmeter, also ist $9pv_1 =$ $= 173·22$ Kilogrammeter. Setzen wir $J = 425$, so ist $34173J =$ $= 14523525$ Grammeter $= 14523·525$ Kilogrammeter. Somit ist

$$9(U_2-U_1) = -14350·305 \text{ Kilogrammeter}. \tag{2b}$$

Diesen Übergang aus dem Anfangszustand in den Endzustand wollen wir uns nun zerlegt denken in vier Teilprozesse. Im Anfangszustande hat das Gasgemenge die Temperatur 0° und den Druck 760 *mm*. Der erste Teilprozeß soll darin bestehen, daß das Gasgemenge bei der konstanten Temperatur 0° von dem Drucke 760 *mm* auf den Druck 4·6 *mm* (Druck des gesättigten Wasserdampfes bei 0°) gebracht werde. Der zweite Teilprozeß bestehe darin, daß das Gasgemenge bei dem konstanten Drucke 4·6 *mm* in Wasserdampf von 0° verwandelt werde, der dritte Prozeß darin, daß der Wasserdampf bei 0° und 4·6 *mm* Druck zu Wasser kondensiert werde und schließlich der vierte Prozeß darin, daß der Druck des Wassers bei der konstanten Temperatur 0° von 4·6 *mm* auf 760 *mm* erhöht werde.

Wir wollen die innere Energie der Masseneinheit am Schlusse des ersten, zweiten und dritten Teilprozesses beziehungsweise mit U', U'' und U''' bezeichnen. Da das Gasgemenge aus den vollkommenen Gasen Wasserstoff und Sauerstoff besteht, so ist die innere Energie des Gemenges nur eine Funktion der Temperatur. Es wird daher die innere Energie während des ersten Teilprozesses nicht geändert oder es ist $U'-U_1 = 0$, wofür wir auch schreiben wollen:

$$9(U'-U_1) = 0. \tag{3}$$

Während des zweiten Teilprozesses erfährt die innere Energie die Änderung $U''-U'$. Wir wollen dafür die identische Gleichung

$$9(U''-U') = 9(U''-U') \tag{4}$$

schreiben. Im dritten Teilprozeß wird gesättigter Wasserdampf von 0° und 4·6 *mm* Druck in flüssiges Wasser von derselben Temperatur und demselben Drucke verwandelt. Hier ist $U''-U'''$ gleich dem Arbeitsäquivalent derjenigen Wärme, welche Herr Zeuner die »innere latente Wärme« genannt hat. Die innere latente Wärme des Wassers beträgt bei 0° für 1 *g* Wasser 575·43 *g* cal; also ist $U''-U'''=425\times575\cdot43$ Grammmeter $=425\times0\cdot57543$ Kilogrammeter. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}9(U'''-U'') &= -9\times425\times0\cdot57543\\ &= -2201\cdot0 \text{ Kilogrammeter.}\end{aligned} \tag{5}$$

Was schließlich den vierten Teilprozeß anbelangt, so kommt nur die Arbeit des Oberflächendruckes in Betracht. Diese Arbeit ist aber wegen der geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers eine so geringe, daß wir davon ganz absehen können. Demnach ist

$$9(U_2-U''') = 0. \tag{6}$$

Wenn wir die Gleichungen 3), 4), 5) und 6) addieren, so erhalten wir

$$9(U_2-U_1) = 9(U''-U')-2201\cdot0 \text{ Kilogrammeter}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung 2*b*)

$$9(U''-U') = -12149\cdot305 \text{ Kilogrammeter} \tag{7}$$

oder

$$9(U''-U') = -425\times28\cdot587 \text{ Kilogrammeter.} \tag{7b}$$

Wenn also das Gasgemenge, welches aus 1 *g* Wasserstoff und 8 *g* Sauerstoff besteht und welches die Temperatur 0° und den Druck 4·6 *mm* hat, in Wasserdampf von derselben Temperatur und demselben Drucke verwandelt wird, so leisten dabei die inneren Kräfte eine Arbeit von 12149·305 Kilogrammmetern und diese Arbeit ist äquivalent 28587 *g* cal.

An dieser Zahl müssen wir noch eine Korrektion anbringen, um die Arbeitsleistung der chemischen Kräfte kennen zu lernen. Ich habe aus den Versuchen des Herrn Battelli für den Wasserdampf die Zustandsgleichung

$$p(v+0\cdot008402) = 46\cdot698T \qquad 8)$$

abgeleitet, worin T die absolute Temperatur, v das Volumen von 1 *kg* Wasserdampf (in Kubikmetern gemessen) und p den Druck (in Kilogrammen pro Quadratmeter gemessen) bedeuten. Diese Gleichung gilt bis in die Nähe der Kondensationsgrenze, dagegen nicht mehr für den Zustand der Sättigung. Daraus folgt, daß wenn trocken gesättigter Wasserdampf isotherm ausgedehnt wird, die inneren Kräfte eine Arbeit leisten. Ich habe diese Arbeit berechnet und werde die Berechnung zum Gegenstand einer demnächst erscheinenden Publikation machen. Hier sei nur folgendes erwähnt: Wird trocken gesättigter Wasserdampf von 0° isotherm ausgedehnt und kommt er dabei in solche überhitzte Zustände, für welche die Gleichung 8) gilt, so ist er dann ein vollkommenes Gas geworden. Bezeichnen wir für diesen Zustand die innere Energie von 1 *g* mit U, so ist nach meiner Berechnung

$$U-U'' = -425\times0\cdot00733 \text{ Kilogrammeter}$$

oder

$$9(U-U'') = -28\cdot040 \text{ Kilogrammeter.} \qquad 9)$$

Addieren wir diese Gleichung zur Gleichung 7), so wird

$$9(U-U') = -12177\cdot345 \text{ Kilogrammeter} \qquad 10)$$

oder

$$9(U-U') = -425\times28\cdot6526 \text{ Kilogrammeter.} \qquad 10a)$$

Somit ist die Arbeit der chemischen Reaktion für 0° gleich 12177·345 Kilogrammeter oder sie ist äquivalent 28652·6 *g* cal. Diese Wärme ist die Verbindungswärme bei 0°.

Die Verbindungswärme ändert sich mit der Temperatur. Die innere Energie ist sowohl für das Gasgemenge als auch für den überhitzten Wasserdampf nur eine Funktion der Temperatur. Wir wollen die Werte der inneren Energie für die Temperatur t mit U_t' beziehungsweise mit U_t bezeichnen. Die

spezifische Wärme bei konstantem Druck ist für Wasserstoff 3·409 und für Sauerstoff 0·21751. Das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen ist für beide Gase gleich 1·41; also ist die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für Wasserstoff 2·418 und für Sauerstoff 0·1543 und somit die Wärmekapazität des Gasgemenges bei konstantem Volumen 3·6524. Wir erhalten demnach

$$9(U'_t - U') = 425 \times 3\cdot6524\,t \text{ Grammeter}$$
$$= 425 \times 0\cdot0036524\,t \text{ Kilogrammeter.}$$

Was die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes bei konstantem Volumen anbelangt, so habe ich gefunden, daß diese Größe eine Konstante ist und den Wert 0·3639 hat. Daher ist

$$9(U_t - U) = 425 \times 3\cdot2751\,t \text{ Grammeter}$$
$$= 425 \times 0\cdot0032751\,t \text{ Kilogrammeter.}$$

Subtrahieren wir bei derselben Temperatur t die zweite Gleichung von der ersten, so wird

$$9(U'_t - U_t) - 9(U' - U) = 425 \times 0\cdot0003773\,t \text{ Kilogrammeter,}$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichung 10*a*) folgt

$$9(U'_t - U_t) = 425(28\cdot6526 + 0\cdot0003773\,t) \text{ Kilogrammeter.} \quad 11).$$

Die Verbindungswärme ist also bei der Temperatur t gleich

$$28652\cdot6 + 0\cdot3773\,t\ g \text{ cal.}$$

Das zu den Versuchen verwendete Wasserstoffgas wurde von der Sauerstoff-Fabrik in Berlin in Stahlzylindern bezogen und damit vor jedem Versuch ein sehr geräumiger Gasometer gefüllt. Der Gasometer stand in Verbindung mit einem Gasdruckregulator und dieser wieder mit einem Experimentiergasmesser, an welchem zugleich das Flammenrohr angebracht war. Der Druckregulator erzeugte einen ganz konstanten Überdruck von 76 *mm* Wassersäule. Die ausgeströmte Gasmenge,

welche je nach der Hahnstellung größer oder kleiner war, wurde mit dem Gasmesser gemessen, wobei ich mich ebenso wie bei den früheren Versuchen einer Sekundenpendeluhr mit Riefler'scher Kompensation und mit Halbminutensignal bediente. Ein Liter Wasserstoff hat bei der Temperatur 0° und dem Drucke 760 *mm* Quecksilber die Masse 0·089551 *g* und bei der Temperatur *t* und dem Drucke *p mm* Quecksilber die Masse

$$\frac{0\cdot089551}{1+0\cdot00367t}\,\frac{p}{760}\ \text{Gramm;}$$

somit ist die Verbindungswärme dieser Menge

$$\frac{0\cdot089551}{1+0\cdot00367t}\,\frac{p}{760}\,(28652\cdot6+0\cdot3773t)\,g\ \text{cal.}$$

Die Wärmestrahlung der Wasserstoffflamme wurde mit meinem Strahlungsmeßapparat in der früher angegebenen Weise bestimmt.[1] Die Wasserstoffflamme stand dem Strahlungsmeßapparat so gegenüber, daß die Gerade, welche den Mittelpunkt der Flamme mit dem Mittelpunkt der freien Steinsalzfläche verband, horizontal und zur Steinsalzfläche senkrecht war. Bezeichnen wir die Länge dieser Verbindungsgeraden mit e und betrachten wir ein Element ds der Steinsalzfläche, welches beim Mittelpunkt dieser Fläche liegt, so wollen wir die Strahlungsmenge, welche ds von der Flamme in der Sekunde erhält, durch $K\frac{ds}{e^2}$ ausdrücken. Die Strahlungsmenge, welche die ganze freie Steinsalzfläche in der Sekunde trifft, ist dann gleich $\frac{\pi R^2}{e^2+R^2}K$, wo R den Radius der genannten Fläche bedeutet. Diese Strahlungsmenge wird gemessen und daraus K bestimmt. Schließlich ist die Wärmemenge, welche die Flamme in der Sekunde nach allen Richtungen im ganzen ausstrahlt, gleich $4\pi K$. Der Abstand e war bei den Versuchen stets gleich 305 *mm*.

Die folgende Tabelle enthält nun die Versuchsergebnisse.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXII, Abt. IIa, Dezember 1903.

t	p	Ausflußmenge pro Sekunde in Litern	Verbindungswärme pro Sekunde	Gesamtstrahlung pro Sekunde	$\frac{\text{Gesamtstrahlung} \times 100}{\text{Verbindungswärme}}$
9·4	744·8	0·03530	85·83 *g* cal	5·54 *g* cal	6·46
8·8	744·2	0·03517	85·59	5·06	5·91
8·6	742·5	0·03489	84·80	5·05	5·95
8·1	738·3	0·04000	96·80	6·38	6·59
9·6	749·5	0·03256	79·54	4·27	5·85
10·0	747·7	0·03756	91·50	5·97	6·53
9·8	747·7	0·03578	87·24	5·39	6·18
9·75	749·0	0·02911	71·09	3·87	5·44
9·7	748·2	0·03667	89·41	5·45	6·10
9·1	737·3	0·04000	96·33	5·42	6·16
9·2	743·7	0·03633	88·30	5·98	6·77
8·6	744·6	0·03311	80·70	4·74	5·88
					Mittel = 6·15

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß wenn Wasserstoff in der Luft verbrennt, 6·15% der Verbindungswärme als strahlende Wärme ausgesendet wird.

Das Prozentverhältnis ist hier viel kleiner als bei der Hefner-Lampe, was damit zusammenhängt, daß die Wasserstoffflamme nichtleuchtend ist.

Versuche über den Ausfluß fester Körper, insbesondere des Eises, unter hohem Drucke

von

A. v. Obermayer,

k. M. k. Akad.

(Mit 10 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

Vorbemerkungen.

Im Jahre 1861 hat Tresca in Paris [1] mit Versuchen über den Ausfluß fester Körper unter hohem Drucke begonnen, welche er in den folgenden Jahren fortführte und zur Erklärung verschiedener, auf das Walzen und Pressen der Metalle bezüglicher Vorgänge verwertete.

Für den Ausfluß von Eis und Blei verwendete Tresca [2] Zylinder von 10 *cm* Bohrungsweite und eine Ausflußöffnung von 5 *cm* Durchmesser. Das Eis floß unter einem Drucke von 10.000 *kg* oder 126 kg/cm^2, das Blei unter einem Drucke von 50.000 *kg* oder 637 kg/cm^2 aus.

Durch die Versuche von Tresca angeregt, habe ich im Jahre 1868 [3] im physikalischen Institute der Wiener Universität Versuche über den Ausfluß plastischen Tons mit Hilfe einer Schraubenpresse vorgenommen, welche zwar das Geometrische der Vorgänge veranschaulichten, aber eine Messung der in

[1] H. Tresca, Sur l'écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions. Comptes Rendus, T. 59, p. 754. Mém. des savants étrangers, XVIII, p. 733 bis 799.

[2] Sur l'écoulement de la glace soumise à des fortes pressions. Comptes Rendus, T. 64, p. 398.

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. LVIII.

Betracht kommenden Drucke nicht gestatteten. Diese Versuche wurden auch auf das Abfließen des Tones an der Oberfläche eindringender Körper ausgedehnt und im Jahre 1875 im physikalischen Kabinett der Technischen Militärakademie fortgesetzt.[1] Im Jahre 1897 hatte ich Gelegenheit, Schießversuche gegen plastischen Ton [2] auszuführen, welche ergaben, daß an der Oberfläche der mit großen Geschwindigkeiten bewegten Geschosse kein Abfließen stattfindet, sondern, daß die Übertragung der Geschoßgeschwindigkeit an den plastischen Ton explosionsartige Erscheinungen hervorbringt.

Im Jahre 1894 hat James Dewar [3] Versuche über die Viskosität fester Körper angestellt, bei welchen verschiedene Salze mittels eines Stahlstempels aus einem gebohrten Stahlblocke durch eine enge Bohrung von $^1/_6$ Zoll (0·16 *cm*) und $^1/_2$ Zoll (1·27 *cm*) Länge hindurchgepreßt wurden. Es kamen dabei gerechnete Drucke von 30 bis 60 Tonnen auf den Quadratzoll (4725 bis 9450 *kg/cm²*) zur Anwendung. Geschmolzenes Ammoniumsulfocyanid gab unter 60 Tonnen Druck einen Strahl von 2·5 *cm* in der Minute. Manche Substanzen explodierten durch die enge Öffnung hindurch und der Stoß war mitunter so heftig, daß der starke Stahlzylinder brach. Dewar sagt von seinen als vorläufig bezeichneten Versuchen, daß dieselben genügen werden, um zu zeigen, daß die Erklärung der Ursache des Fließens der dem Experiment unterworfenen Körper eine lange Untersuchung notwendig machen werde.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Umwandlung von Bruchstücken oder Pulvern in homogene Körper durch starken Druck,[4] eine Art Zusammenschweißen, wie dies von Spring [5]

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXII.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVI, Abt. II a, p. 365.

[3] Proceedings of the Chemical Society, 1894, Nr. 140, p. 136; Naturw. Rundschau, IX, p. 488.

[4] Bull. de l'acad. Roy. de Belgique, Ser. 2, T. XIV, p. 746 bis 754, 1878; Beibl. II, p. 533.

[5] 1880, Recherches sur la proprieté que possedent les corps solides de se souder sous l'action de la pression. Bull. de l'acad. Roy. de Belgique, Ser. 2, T. XLIX, p. 322 bis 379.

nachgewiesen wurde, bei den Ausflußerscheinungen eine Rolle spielt. Dabei kommt ohne Zweifel bei stattfindenden Bewegungen der Einfluß etwaiger Temperaturserhöhungen in Betracht.

Über den Ausfluß des Eises hat Gustav Tamman [1] nach einer ausgezeichneten Methode mittels eines Hebelapparates Versuche angestellt, während welchen der Druck im ganzen ausfließenden Querschnitt und auch die Temperatur konstant gehalten werden können. Zum Ausfluß gelangt ein 5·033 *mm* im Durchmesser haltender Eiszylinder, dessen Grundfläche 0·1988 cm^2 beträgt, durch eine ringförmige zylindrische Ausflußöffnung von 0·5 *mm* Höhe. Es wird dies durch Einpressen eines zwischen der Druckfläche und dem Oberteile verjüngten Stiftes in die in einem Stahlzylinder enthaltene Eismasse erzielt. Der Durchmesser der Druckfläche beträgt 4·850 *mm*, der Querschnitt somit 0·1847 cm^2; die Wanddicke des Eiszylinders ist daher 0·092 *mm* und die Querschnittsfläche des hohlen Eisstrahles 0·0141 cm^2.

Die Ausflußgeschwindigkeit wird an dem Sinken des Drahtstiftes in der Sekunde gemessen und es kann ihre Abhängigkeit von Druck und Temperatur genau festgestellt werden. Ein Druckzuwachs von 100 kg/cm^2 bei konstanter Temperatur bringt in der Regel einen Geschwindigkeitszuwachs um das doppelte der vorhandenen Geschwindigkeit hervor. Die Geschwindigkeit nimmt hier viel rascher als der Druck zu.

Ein Versuch mit einer ringförmigen Ausflußöffnung von 0·0389 cm^2, welche dreimal so groß war als die früher besprochene,[2] der bei einer Temperatur von —21·3° C. vorgenommen wurde, ergab die folgenden Ausflußgeschwindigkeiten v in Skalenteilen pro Minute, bei verschiedenem Drucke p in kg/cm^2:

---

[1] Kristallisieren und Schmelzen. Ein Beitrag zur Lehre von der Änderung des Aggregatzustandes, p. 164 u. ff.

[2] Kristallisation und Schmelzung, p. 174.

p	v	$p^3 10^{-3}$	p^3/v
63	0·0	250	—
134	0·57	2406	422
204	1·5	8489	566
274	4·1	20570	502
333	6·9	36926	535
368	8·2	49836	608
437	15·7	83453	531
574	39	189119	480
709	85	356400	419
1002	220	1006012	457
1160	300	1560869	520

Beigesetzt sind die drei ersten Ziffern des Quotienten p^3/v. Die Konstanz dieser Quotienten zeigt, daß die Ausflußgeschwindigkeiten nahe proportional der dritten Potenz des Druckes wächst. Bei andern Versuchen stimmt dieses Gesetz weniger gut, es repräsentiert jedoch immerhin eine gewisse Annäherung.

Die Temperaturänderung von —15·7° auf —5·7° C. bewirkt bei konstantem Druck ein Anwachsen der Ausflußgeschwindigkeit auf das zwanzig- bis hundertfache des anfänglichen Wertes. Wenn der Druck gesteigert und in die Schmelzkurve gelegt wird, tritt ein sprungweises Anwachsen der Ausflußgeschwindigkeit ein. Aber nicht alle Körper verhalten sich wie das Eis. So nimmt bei Naphthalin und Piperin bei konstanter Temperatur die innere Reibung bei steigendem Druck anfangs ab und später wieder zu.

In einer späteren Versuchsreihe[1] hat G. Tamman mittels zweier Druckstifte von 0·1444 cm^2 und 0·1816 cm^2 Querschnitt und Konuswinkeln an der eindringenden Spitze von 95 und 100°, aus dem Stahlzylinder von 0·1988 cm^2 Querschnitt die Metalle

K, Na, Pb, Tl, Sn, Bi, Cd, Zn, Sb

ausfließen lassen. Es wurden dabei haltbare Röhren erhalten. In der eben angeführten Reihe nimmt im allgemeinen von links

[1] Annalen der Physik, Bd. X, p. 467, 1903. Die Beschreibung des Hebelapparates ist in den Annalen der Physik, Bd. VII, p. 98, 1902, gegeben.

nach rechts, bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke, die Ausflußgeschwindigkeit und Plastizität ab, die innere Reibung zu. Genaue Zahlenwerte lassen sich nicht gut angeben. Einem Temperaturzuwachs von 10° C. entspricht in der Regel eine Zunahme der Ausflußgeschwindigkeit um nahezu das Doppelte der Ausflußgeschwindigkeit.

Die gewöhnlich angewandten Drucke waren 500 bis 1000 *kg/cm*², bei Zink mußte auf 2000 *kg/cm*², bei Antimon auf 3000 *kg/cm*², bei 200 bis 250° C., hinaufgegangen werden.

Indem ich die eingangs bezeichneten Versuche wieder aufnahm, worin ich durch eine Subvention der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unterstützt wurde, beabsichtigte ich, eine eingehende Untersuchung der Vorgänge beim Ausflusse zylindrischer Blöcke durch kreisförmige Ausflußöffnungen, insbesondere der Strahlen verschiedener plastischer Substanzen und eines etwaigen Zusammenhanges der Trennungen in den Strahlen mit Trennungen im ausfließenden Blocke. Es wurde dabei gefunden, daß sich die relativen Verschiebungen nicht nur im Strahl, sondern auch im ausfließenden Block in Form einer Struktur aufzeichnen, wenn die ausfließende Substanz nicht vollkommen homogen war.

Endlich wurde nach einer Relation zwischen Druck und Ausflußmenge oder Ausflußgeschwindigkeit gesucht. Es ist dabei sehr schwierig, halbwegs übereinstimmende Resultate zu erhalten, da die Trennungen im ausfließenden Blocke gar nicht vorauszusehen sind und dadurch der folgende Versuch von den vorhergehenden, an demselben Blocke ausgeführten beeinflußt wird. Damit hängt zusammen, daß bei konstant gehaltenem Drucke die Ausflußgeschwindigkeit z. B. kontinuierlich abnimmt, oder daß in verschiedenen Versuchen, unter ganz gleichen Verhältnissen, verschiedene Resultate erhalten werden.

Auf die Erscheinungen, welche den Ausfluß begleiten, nehmen jene Eigenschaften, welche man als »zähflüssig« und als »dickflüssig« bezeichnet, bestimmenden Einfluß. Mit A. Heim[1] können jene Substanzen als zähflüssig bezeichnet

---

[1] Gletscherkunde, p. 190.

werden, bei denen die Kohäsion größer ist als die innere Reibung; sie weichen auf Druck plastisch aus, verringern bei Zug den Querschnitt und ziehen Fäden, ohne zu reißen. Beim Ausflusse geben dieselben kompakte Strahlen mit mehr oder minder glatter Oberfläche und genügen durchwegs der Kontinuitätsbedingung. Bei den dickflüssigen Substanzen ist die Kohäsion kleiner als die innere Reibung; sie weichen auf Druck plastisch aus, erweisen sich aber gegen Zug spröde und reißen ohne Querschnittsänderung. Sie genügen während des Ausflusses der Kontinuitätsbedingung nicht, es traten Zusammenhangstrennungen im ausfließenden Blocke und im Strahle ein. Dieselbe Substanz kann, wenn ihre Plastizität von der Temperatur abhängt, Übergänge aus dem dickflüssigen in den zähflüssigen Zustand zeigen, wie z. B. Weichparaffin, Wachs und dergleichen mehr.

Mit den Ausflußerscheinungen plastischer Substanzen sind Temperaturerhöhungen verbunden. Ich habe dieselben für Weichparaffin, Ceresin und Eis direkt nachgewiesen. Solche Temperaturerhöhungen können insbesondere bei schlechter Wärmeleitungsfähigkeit lokale Erweichungen und damit Vergrößerungen der Ausflußgeschwindigkeit erzeugen, ja es kann sogar zur Ausbildung von Gleitflächen kommen, wie dies bei Paraffin und Ceresin höchst wahrscheinlich ist. Die Strahlen pflegen sich dann zumeist in mehr oder minder tief greifende, nach auswärts gekrümmte Schuppen zu zerteilen.

Während die Ausflußmenge bei tropfbaren Flüssigkeiten der Quadratwurzel des Druckes proportional ist, wächst sie bei Schwarzpech, bei kleinen Ausflußöffnungen sehr nach wie der Druck, bei größeren Ausflußöffnungen etwas rascher.

Die Ausflußgeschwindigkeit wächst bei Weichparaffin und nach den Versuchen von Tamman auch bei Eis sehr nahe proportional mit der dritten Potenz des Druckes. Bei plastischem Ton beginnt der Ausfluß überhaupt erst von einem bestimmten Druck an und die Geschwindigkeit steigt beim Überschreiten einer bestimmten Druckgrenze viel rascher als der Druck.

Die relativen Verschiebungen der kleinsten Teilchen in plastischen Substanzen, wie dieselben beim Ausfluß unter hohem Drucke stattfinden, tragen zur Ausbildung einer

bestimmten Struktur bei. An plastischem Ton ist dieselbe schon 1879 von A. Daubrée[1] nachgewiesen worden. Zu den Ausflußversuchen mit dieser Substanz wurden die Apparate benützt, mit denen Tresca seine Versuche angestellt hatte. Daubrée bezeichnete die Erscheinungen an einem der Quere und der Länge nach gebrochenen Stücke Strahl als structure à la fois schisteuse et concentrique. Dieselbe ist zuerst durch Beimengung von Sand, dann von Glimmerblättchen, schließlich mit reinem Ton erzeugt worden.

Daubrée hat in den Werkstätten von C. Feil weiches Bleiglas, das in Muffeln geschmolzen und bis nahe zum Erstarren abgekühlt war, unter Druck ausfließen lassen. Es bildeten sich Streifen von großer Feinheit, welche sich durch die verschiedene Lichtbrechung kenntlich machen und welche den Vorgängen beim Ausfluß entsprechen.

Daubrée hat auch in den Wandungen eines durch Ausfluß erzeugten Bleirohrs an einem zufälligen Risse eine Struktur beobachtet, was bei der Homogenität des Bleies einigermaßen überrascht.

Beim Ausfluß von Weichparaffin, Wachs, Ceresin findet gleichfalls die Ausbildung einer Struktur während des Ausflusses statt. Dieselbe verrät sich auf Längsbrüchen der ausfließenden Blöcke und ist dort am deutlichsten, wo die größten relativen Verschiebungen auftreten. Diese Struktur verzeichnet an den verschiedenen Stellen die Richtung der tangentiellen Verschiebungen der Teilchen aneinander; sie schließt sich den Strömungslinien an, welche sich auch bei konzentrisch geschichteten Blöcken durch die Deformation der Trennungsfläche aufzeichnen. In einer tropfbaren Flüssigkeit entsteht durch den Ausfluß selbstverständlich keine Struktur.

Die als Schieferung (clivage) bezeichnete Struktur wird vielfach dem Drucke zugeschrieben. Jede Umlagerung der Teilchen kann aber nur durch Bewegung, d. i. relative Verschiebung der Teilchen (Differentialbewegung) gegeneinander erzeugt werden. Der Druck kann hier nur insofern in Betracht

[1] Études synthétiques de géologie expérimentale par A. Daubrée, 1879, p. 442, Fig. 142 und 143.

kommen, als durch denselben eine, wenn auch geringfügige, mit bleibender Gestaltveränderung verbundene, relative Verschiebung hervorgebracht wird, welche senkrecht zur Druckrichtung erfolgt, nach welcher Richtung also ein Ausweichen möglich sein muß.

In dem von Tyndall[1] angeführten Falle des Pressens eines Eiszylinders oder Eisprismas, wodurch senkrecht zur Druckrichtung Trennungsflächen, wie es scheint, durch innere Schmelzung entstehen, kann es doch nur durch den Druck hervorgebrachte Bewegung mit bleibender seitlicher Verschiebung sein, welche die Schichtung erzeugt.

Eine andere Frage ist die, ob in einem vollständig homogenen Körper durch relative Verschiebung eine Struktur entwickelt werden könne oder ob hiezu nicht eine geringfügige Inhomogenität von vornherein erforderlich ist. Spring[2] sucht die Ursache dieser Inhomogenität beim feuchten Ton in dem beigemischten Wasser, welches bei der Kompression frei werden soll. Eine Bestätigung dieser Ansicht habe ich bei dem Hollenburger Ton, den ich mit 19% Wassergehalt verwendete, nicht finden können.

Durch Behandlung mit Chlor bei passender Temperatur ist es Spring gelungen, aus faserigem Schmiedeeisen ein zartes kieseliges Skelett herzustellen, welches die faserige Struktur wiedergibt. Die Metallfasern würden hienach in einem Netze von Schlacke eingebettet sein und somit die Inhomogenität des Schmiedeeisens die Ursache der Struktur sein. Mit Öl überzogene Bleistücke, zum Ausfluß gebracht, geben nach Spring einen Bleidraht, der durch Hin- und Herbiegen sich zerfasert. Ebenso löst sich ein Bleidraht, welchen ich durch den Ausfluß von Bleizylindern erhielt, welche aus 2 *mm* dicken Bleischeiben mit etwas oxydierten Oberflächen geschlichtet waren, beim Hin- und Herbiegen in konzentrische Schichten auf. Es ist das jener Ausflußversuch, der sich für Vorlesungen empfehlen würde.

---

[1] Die Gletscher der Alpen, p. 500, Fig. 50, 51, 52, 53.

[2] Ann. de la Soc. géologique de Belgique, 1902, T. XXIX; Mém., p. 49 bis 60; Naturw. Rundschau, XVII, p. 452.

Die früher erwähnte, von Daubrée herrührende Beobachtung einer Schichtung in der Wandung einer gesprungenen Bleiröhre dürfte wohl mit einer Inhomogenität des Bleies zusammenhängen, denn ich war nicht im stande, in den Bleidrähten, welche durch den Ausfluß massiver gegossener Bleizylinder erhalten wurden, die geringste Spur einer konzentrischen Struktur nachzuweisen.

Ein anderer Beitrag zur Frage der Schieferung rührt von Marpmann[1] her. Bei Herstellung von Kunststeinen aus pulverförmigem Material unter Drucken von 120 bis 150 Atmosphären wurden Steine mit blätterigen Lagen erhalten. Indem der eingeschlossenen Luft das Entweichen gestattet wurde, ergaben sich ungeschichtete Steine. Marpmann sucht die Ursache der Schichtung in der Luft, welche den gepreßten Substanzen beigemengt ist. Bezüglich des plastischen Tons möchte ich dieser Anschauung nicht widersprechen; doch ist immer die Frage, ob das dem Tonpulver zugesetzte Wasser nicht zunächst die Luft verdrängt und ob das Kneten des Tons, welches ja unbedingt erforderlich ist, damit derselbe plastisch werde, nicht gerade die Luft auspreßt.

Der Gedanke, daß die Schieferbildung an eine Inhomogenität des Materials gebunden sei, ist selbst bei solchen Substanzen wie Wachs, Ceresin, Paraffin nicht vollständig von der Hand zu weisen. Diese Substanzen zeigen unter passenden Umständen einen körnigen Bruch, worin sich immerhin schon eine Ungleichmäßigkeit verrät.

Unter allen Umständen ist die Entstehung einer Struktur, also auch einer Schichtung oder Schieferung (clivage), durch eine vorhandene Inhomogenität eines Materials sehr begünstigt. Durch eine Schieferung werden die schon bestehenden Inhomogenitäten in einem bestimmten Sinne aneinandergereiht und dazu sind wohl tangentielle Verschiebungen der Schichten aneinander erforderlich.

---

[1] Beiträge zur Theorie der geschichteten Gesteine. Berichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig, 1897; Naturw. Rundschau, 1899, Bd. XIV, p. 87.

Die Presse und die Ausflußapparate.

Als Presse benützte ich einen Tangyes hydraulischen Schiffshebebock mit Manometer und 20.000 *kg* Tragfähigkeit.[1] Dieser kompendiöse Apparat wiegt bloß 46 *kg*, ist 16 englische Zoll (41 *cm*) lang, 8 Zoll (20·5 *cm*) breit und 11 Zoll (28 *cm*) hoch. Die Hubhöhe beträgt 6 Zoll, d. i. 15 *cm*. Der Durchmesser des Preßkolbens ist 8·3 *cm*.

Die Druckpumpe ist vollständig in dem aus Stahlguß gefertigten Stahlgehäuse eingeschlossen, welches auf seiner oberen Seite eine kleine Öffnung zum Einfüllen von Flüssigkeit — im vorliegenden Falle wurde Vaselinöl benützt — und eine zweite Öffnung für den Luftwechsel enthält. Die Pumpe wird durch einen auf die aus dem Gehäuse ragende Achse mit Vierkant aufgesetzten Hebel von 90 *cm* Länge bewegt.

Das Manometer gibt den Druck in kg/cm^2 und das entsprechende gehobene Gewicht in Tausenden von Kilogrammen an. Dem Tragvermögen von 20.000 *kg* entspricht ein Druck von 390 kg/cm^2 in der Presse. Jeder Kolbenhub erzeugt eine Erhebung des Preßkolbens um 1·628 *mm*.

Dieser hydraulische Hebebock wurde auf der 7 *cm* starken Tischplatte eines eichenen Untergestelles auf Eisenblech fixiert. Zwei der Füße des Gestelles sind, wie alle schwereren, öfter zu transportierenden Apparate des physikalischen Kabinettes der Technischen Militärakademie, mit Rollen versehen. Die beiden andern Füße tragen Hebel, welche, bis zur horizontalen Lage erhoben, sich feststellen lassen und dann zum Verschieben des Gestelles benützt werden können.

Durch die eichene Tischplatte reichen die Zapfen von 6 *cm* im Durchmesser haltenden eisernen Säulen, die sich mit einer Randverstärkung auf den oberen Blechbelag der Tischplatte stützen und unterhalb dieser letzteren mittels Schrauben und großen Unterlagsscheiben fest angezogen sind.

[1] Bezogen durch F. Haecht, Wien, I., Brandstätte 3. Der Spezialpreiskurant dieser Firma weist solche Tangyes hydraulische Schiffshebeböcke für Tragfähigkeiten von 7.000 bis 200.000 *kg* aus.

Die oberen Zapfen dieser Säulen von 4·8 *cm* Kerndurchmesser reichen im Falle der vorliegenden Versuche durch die Löcher in den quadratischen Flantschen des gußeisernen Ausflußzylinders, der auf den Verstärkungen der Säulen aufruht und durch Muttern und Gegenmuttern angezogen wird.

Die Säulen mit den Schrauben, Unterlagsscheiben und dem Tischplattenbleche sind in höchst dankenswerter Weise von Herrn Ignaz Griedl in Wien dem physikalischen Kabinett beigestellt worden.

Zwischen den Säulen läßt sich eine gußeiserne quadratische Preßplatte von 31 *cm* Seitenlänge und ausgerundeten Ecken, mit Führung an den Säulen, verschieben. Mit der Höhlung ihrer unteren, mittleren, ringförmigen Verstärkung ruht dieselbe auf dem Kopfe des Preßkolbens des Hebebockes.

Das Ausflußgefäß ist ein oben und unten offener Zylinder mit quadratischen Flantschen. Der innere Durchmesser der Bohrung ist 18 *cm*, der Querschnitt 254·47 cm^2, die Höhe des Zylinders beträgt 36 *cm*.

Auf die oberen Flantschen paßt ein quadratischer Deckel, der durch vier 3·2 *cm* im Durchmesser haltende Stahlschrauben mittels Muttern und Unterlagsscheiben angezogen werden kann. Ein solcher Deckel, aus Gußeisen gegossen, zersprang, als es bei einem Versuch zu einem Stoße kam. Ein zweiter Deckel wurde aus Stahlguß angefertigt, in der Mitte um eine 12 *cm* im Durchmesser haltende Öffnung ringförmig verstärkt. Zwei von den Rippen des Deckels tragen Ösen zum Einhängen von Haken. In die untere Fläche des Deckels ist konzentrisch, bis zu 16 *cm* Durchmesser, 1·5 *cm* tief ein Ringlager eingedreht.

Zum Pressen von Eisblöcken aus Eisstücken oder von Stücken plastischen Tons wurde eine Platte aus Hartmessing mit Handhabe in dieses Ringlager eingesetzt. Die Scheiben mit den Ausflußöffnungen waren zumeist aus Zinkguß hergestellt, jene mit den kleinen Ausflußöffnungen hielten allerdings den Druck nicht aus, erhielten Sprünge und mußten verstärkt werden. Diese Scheiben ließen sich in das Ringlager einsetzen.

Konzentrisch zur mittleren zentralen Durchbrechung war der Deckel, von einem Durchmesser von 18 *cm* an, nach außen,

an der unteren Fläche, um etwa 1 *mm* abgedreht, so daß er nach dem Aufsetzen in die obere Öffnung des Ausflußzylinders einfällt.

In die Bohrung des Ausflußzylinders paßt ein genau abgedrehter, gußeiserner Kolben von 7·5 *cm* Höhe, mit einer zylindrischen Höhlung an der Unterseite zur Aufnahme eines zweiteiligen Weißbuchenstempels, welcher auf der quadratischen Preßplatte aufruht.

Das Ausdrehen des Ausflußzylinders, das Abdrehen der beiden Deckel und des Kolbens wurde von der Gasmotorenfabrik von Langen und Wolf in Wien in ganz ausgezeichneter Weise besorgt, wofür ich hier mich besonders bedanke.

Da die Hubhöhe des Hebebockes bloß 15 *cm* beträgt, so mußte zur Erzielung größerer Erhebungen das Pressen unterbrochen, die Ventilschraube des Hebebockes geöffnet, der Preßkolben sinken gelassen, unter die hoch gehaltenen Weißbuchenstempel Holzunterlagen unterschoben und dann wieder aufgepumpt werden. Als solche Holzunterlagen wurden Weißbuchenklötze recht geeignet befunden, die mit dem Längsschnitt als Druckfläche Anwendung fanden. Eichenholz wurde sehr bald zerdrückt.

Bei der vollen Beanspruchung der Presse tritt durch die Kompression des Holzes, durch die Dehnung der Säulen und Schrauben, dem Verbiegen des Deckels ein merkliches Federn in der Druckrichtung ein.

Bei der gewählten Anordnung des Apparates steigt der ausfließende Strahl vertikal empor. Es scheint dies, nach einer Abbildung in Daubrée's Géologie expérimentale, auch bei den Tresca'schen Versuchen der Fall gewesen zu sein. Es erweist sich dies in allen Fällen als sehr vorteilhaft, in welchen die Strahlen unganz werden, wie bei Eis, ungleichmäßigem Ton, Paraffin; sie können dann beisammengehalten und so ein Bild des Vorganges gewonnen werden.

Außer diesem großen Ausflußgefäße wurden noch zwei kleinere von 6 *cm* und 2·5 *cm* innerem Durchmesser angewendet, auf deren Böden Hartmessingplatten mit den Ausflußöffnungen eingesetzt werden konnten. Dieselben wurden auf einem passenden Untergestell verwendet und ließen den Strahl nach

unten austreten. Die Stempel, welche auf den Inhalt der Ausflußgefäße wirkten, stützten sich auf eine 2 *cm* dicke Stahlplatte, welche unterhalb des großen Ausflußzylinders aufgelegt und durch Flügelschrauben getragen wurde.

Versuch einer direkten Druckbestimmung im Ausflußgefäß.

Es schien mir nicht ohne Bedeutung, den von der Presse durch ein den Ausflußzylinder erfüllendes plastisches Material auf die Ausflußöffnung übertragenen Druck direkt zu messen, diesen Druck auf den Gefäßquerschnitt umzurechnen und die so gewonnene Zahl mit der Angabe Q_m des Manometers des Hebebockes zu vergleichen, d. h. eine Art Eichung des Manometers auszuführen.

Als Füllmaterial wurde plastischer Ton und anfänglich die Ausflußöffnung von 1·5 *cm* angewendet, in welche ein zylindrischer Stempel paßte. Die ersten Messungen des Druckes auf diesen Stempel geschahen mit einem in Wiener Pfund geteilten, nach Kilogrammen geeichten, Burg'schen Dynamographen. Der aus den so gefundenen Zahlen berechnete Druck Q_p auf den Gefäßquerschnitt von 254·47 cm^2 lief zwar mit den Angaben Q_m des Manometers parallel, und zwar so genau, daß eine durch die Eichung nachgewiesene Unregelmäßigkeit in den Angaben des Dynamographen zum Ausdruck kam, aber die absoluten Werte von Q_p waren sämtlich kleiner als die entsprechenden Q_m.

Bei den späteren Versuchen wurde daher zu einer Hebelvorrichtung übergegangen und Stempeln von 3·1 *cm* und 4·1 *cm* Durchmesser in den zugehörigen Ausflußöffnungen angewendet.

Das Eigengewicht des 148 *cm* langen, eisernen Hebels beträgt 5·8 *kg*, die Längen der Hebelarme 144 *cm* und 7 *cm*. Ein Gewicht P am Ende des Hebels erzeugt auf den Stempel einen Druck q_p, welcher nach folgender Formel gerechnet wird:

$$q_p = \frac{5 \cdot 8 . 72 + 144\,P}{7}.$$

Die Verhältnisse der Querschnitte des Ausflußzylinders und der Stempel sind 254·47 : 7·534 = 33·71 und 254·47 : 13·20

$= 19 \cdot 28$. Die Division des am Manometer abgelesenen Pressendruckes durch diese Verhältniszahlen gibt den entsprechenden Druck auf den Querschnitt der Stempel.

Eine allmähliche Steigerung des Pressendruckes Q_m bringt den Stempel und damit das Hebelende zum Aufsteigen. In einer Versuchsreihe vom 8. April 1903, mit dem Stempel von $3 \cdot 1$ *cm* Durchmesser, bei einer Füllung des Zylinders mit hartem Ton, mußte der Pressendruck im Mittel auf 8870 *kg* gebracht werden, um den mit 4 *kg* belasteten Hebel zu erheben. Auf den Querschnitt des Stempels reduziert gibt dies $q_m = 8870 : 3 \cdot 371 = 263 \cdot 0$ *kg* dem Gewicht P 4 *kg* am Ende des Hebels entspricht ein Druck auf den Stempel von $q_p = 143 \cdot 1$ *kg*.

Um den Hebel wieder herabzudrücken, mußten am Ende desselben $13 \cdot 33$ *kg* im Mittel aufgelegt werden, welche auf den Stempel einen Druck von $q'_p = 335 \cdot 0$ *kg* hervorbringen. Dieser Druck, nach den Gesetzen der Druckfortpflanzung in Flüssigkeiten umgerechnet, würde auf den Kolben einen Druck von $335 . 33 \cdot 71 = 11290$ *kg*, d. i. einen Überdruck von $11290 - 8870 = 2420$ *kg* erzeugen, der den Manometerdruck Q_m in der Presse steigern müßte. Dieses Manometer zeigte indessen nur eine ganz geringfügige Druckvermehrung an. Es ist ganz unwahrscheinlich, daß dieser Überdruck von der Reibung des Tones an den Gefäßwänden aufgehoben werden könne und es bleibt daher nur die Annahme übrig, daß sich in der vorliegenden Versuchsanordnung der Druck im plastischen Ton nicht nach den Gesetzen des Flüssigkeitsdruckes fortpflanze. Es muß dagegen angenommen werden, daß beim Erheben des Stempels der auf die Stempelfläche übertragene Pressendruck q_m den Stempeldruck q_p zufolge des am Hebelarme aufgelegten Gewichtes P und eine Reibung F zu überwinden habe und daß beim Herabdrücken des Stempels durch das am Hebelende aufgelegte Gewicht P' der übertragene Pressendruck q_m und die Reibung zu überwinden sind, d. h. es ist:

$$q_p = q_m - F \qquad q'_p = q_m + F$$

woraus folgt:

$$q_m = {}^1/_2 (q'_p + q_p) \qquad F = {}^1/_2 (q'_p - q_p).$$

Der oben angeführte Versuch ergibt nach dieser Berechnungsart für $q_m = 239 \cdot 1$ *kg*, d. i. nur 24 *kg* weniger als der beobachtete reduzierte Pressendruck von 263 *kg* beträgt. Die Reibung wird zu $F = 96$ *kg* gefunden.

Bei einem Manometerstand von $Q_m = 6000$ *kg*, d. i. $q_m =$ 178 *kg*, trat der Ausfluß mit einer mittleren Ausflußgeschwindigkeit von $5 \cdot 53$ *cm*/min. ein. Bei $Q_m = 5500$ *kg*, d. i. $q_m =$ 163 *kg*, blieb der Stempel ruhig.

Aus anderen Versuchen am 8. und 9. April 1903, wobei jede Zahl das Mittel aus mehreren Beobachtungen ist, ergaben sich die folgenden Werte:

P	6	4	6 *kg*
q_p	184·3	143·1	184·3
P'	15·9	15·0	17·13
q'_p	387·9	369·3	413·0
$\frac{1}{2}(q'_p+q_p)$	286·1	256·2	298·7
q_m	293·9	272·8	324·3
$\frac{1}{2}(q'_p+q_p)$	101·8	113·1	114·4

Am 9. April wurden noch mit dem Stempel von 4·1 *cm* Durchmesser die folgenden Versuche ausgeführt:

P	8	12	8	12	16 *kg*
q_p	225·4	307·6	225·4	307·6	389·9
P'	21·75	30·3	23·4	28·1	34·1
q'_p	496·3	684·0	542·1	638·7	742·1
$\frac{1}{2}(q'_p+q_p)$	360·9	495·8	383·8	478·2	566·0
q_m	396·8	558·8	423·3	504·4	606·3
$\frac{1}{2}(q'_p-q_p)$	135·6	188·2	158·4	165·6	176·1

Bei abgehobenem Hebel begann der Stempel bei $Q_m =$ 3100 *kg*, d. i. $q_m = 160 \cdot 8$ *kg*, zu steigen. Der Ausfluß findet bei $Q_m = 4500$ *kg*, d. i. $q_m = 233 \cdot 4$ *kg* mit $15 \cdot 73$ *cm*/min. Geschwindigkeit statt. Während des Absinkens des Druckes

auf $Q_p = 4200$ *kg* ($217 \cdot 8$ *kg/cm*²) wurden noch $0 \cdot 7$ *cm* Strahl ausgestoßen. Auf der unteren Fläche des herausgestoßenen Stempels saß ein Tonkegel, der einen Winkel von 72° im Längsschnitt an der Spitze zeigt. Der Wassergehalt des Tons betrug $19 \cdot 1\%$.

Das Mittel aus allen $\frac{1}{2}(q_p' - q_p)$ ist $164 \cdot 8 \pm 8 \cdot 9$ *kg* und nahezu gleich dem vom Manometerdruck 3100 *kg*, bei welchem der Stempel zu steigen begann, auf den Stempel übertragenen Druck von $160 \cdot 8$ *kg*.

Bei einer andern Versuchreihe mit weicherem Ton ergab sich ein Mittelwert von $F = 63 \cdot 6 \pm 6 \cdot 0$ und im Mittel ein Manometerdruck zum Aufsteigen des Stempels von 1700 *kg*, d. i. $88 \cdot 16$ *kg* auf die Fläche des $4 \cdot 1$ *cm*-Stempels. An der unteren Fläche des Stempels haftete ein Konus aus Ton, der sich aus einer passenden Höhlung im Strahle leicht löste, mit etwas eingebogener Mantelfläche und einem Winkel von 102° im Längsschnitt. Die Mantelfläche des Konus war fein gefurcht.

Die beiden Tonkegel, welche auf den Flächen der Stempel sitzen geblieben waren, zeigen an der Grundfläche Winkel, deren Tangenten den Zahlen 165 und 64 nahe proportional sind; sie verhalten sich wie Reibungswinkel.

Zu einer Eichung der Manometerangaben war durch dieses Verfahren, welches auf der Annahme der gleichförmigen Fortpflanzung des Druckes beruht, nicht zu gelangen, da die Reibung im Ton eine Druckfortpflanzung herbeiführt, welche von jener in einer Flüssigkeit verschieden ist. Dafür spricht schon der Umstand, daß eine Tonplatte eine Belastung tragen kann, ohne sich fortgesetzt zu deformieren, während z. B. Schwarzpech dabei kontinuierlich auseinanderfließt.[1]

Ausflußversuche mit plastischem Ton.

Der trockene Ton wurde wie bei früheren Gelegenheiten von den Tonwerken des Baron Popp in Niederfucha bei

[1] K. R. Koch, Beiträge zur Kenntnis der Elastizität des Eises. Wiedem. Ann., 1885, Bd. 25, p. 438. — Diese Sitzungsberichte, Bd. 75 (1877), Abt. II, p. 665 ff.

Hollenburg in Niederösterreich bezogen. Mit Wasser befeuchtet und durchknetet, wurde er nach wiederholtem Einstampfen in den 18 *cm*-Ausflußzylinder durch verschiedene Ausflußöffnungen ausfließen gelassen und dadurch gleichmäßiger durchfeuchtet.

Der noch ungleichmäßige Ton gibt aus größeren Ausflußöffnungen einen Strahl, dessen Oberfläche mehr oder minder zerspalten und schuppenförmig abgesetzt ist. So wurde am 28. April 1902 aus der 9·6 *cm* ausgerundeten Ausflußöffnung ein Strahl erhalten, welcher sich anfänglich in drei Teile spaltete, die sich nach auswärts krümmten. Die Oberfläche zeigte zahlreiche Ansätze zu scheibenförmiger Absonderung, mehrfach auch stark nach auswärts gebogene Schuppen. Die beistehende Fig. 1 ist nach einer Photographie dieses Strahlstückes hergestellt. Mit derselben Ausflußöffnung wurde am 6. Oktober 1902 mit nicht vollständig gemischtem, d. i. verschieden hartem Ton ein ähnliches Resultat erlangt.

Bei kleineren Ausflußöffnungen ist die Oberfläche des Strahles rund umlaufend schuppig abgesetzt, alle Trennungsflächen zeigen eine Längsfurchung im Sinne des Ausflusses, so wie die umstehende Fig. 2.

Zu Ausflußversuchen mit horizontal geschichteten Eisblöcken (VII bis IX) wurden Gegenversuche mit ähnlich zusammengesetzten Tonblöcken durch die 12 *cm*-Ausflußöffnung unternommen. Die horizontalen Schichten im Gefäß durchdringen sich beim Ausfluß konzentrisch und umhüllen sich im Strahl in Form konzentrischer Röhren. Die umstehenden Figuren 3 und 4 zeigen, wie die nachfolgenden Schichten mit einer Wölbung voraus in die vorhergehenden eindringen. Die mit Englischrot gefärbten Tonschichten waren bei diesem Versuche etwas härter als die ungefärbten Schichten. Die zweite Schichte (Fig. 3) war im Laufe des Ausflusses von den weichen ungefärbten Schichten umfaßt und aus dem Gefäße hinausgeschoben worden. Bei einem späteren Versuch, am 11. April 1903, waren die schwarzen Schichten die weicheren. Zum Vergleich der Härte wurden die Tonblöcke durch eine 3 *cm*-Öffnung ausfließen gelassen. Der Ausfluß trat bei dem ungefärbten Tone bei 5500 *kg* Manometeranzeige, bei dem geschwärzten Tone bei 2000 *kg* ein. Die aus diesen Tonmassen



Fig. 1.

gebildeten Schichten wurden abwechselnd in das 18 *cm*-Gefäß eingetragen und durch die 12 *cm*-Ausflußöffnung ausgepreßt. Im Längsschnitt des ausgeflossenen Tonblockes (Fig. 4) erschien die dritte weiße Schichte von der zweiten und vierten, weichen, schwarzen Schichte umfaßt und gänzlich in den Strahl ausgetrieben.

In den weichen Ton eingebettete härtere Tonbrocken werden auch in die Ausflußöffnung überführt und ausgetrieben. Dieselben bedingen an der Oberfläche des Strahles gewöhnlich unganze Stellen. Selbstverständlich wird auch grobes Kohlenpulver, welches dem Tone beigemengt ist, mit den angrenzenden Tonpartien zum Ausfluß gelangen und sich dagegen nur wenig verschieben. Eine mechanische Entmischung einer inhomogenen Substanz während des Ausquetschens ist hienach kaum zu erwarten.

Wird ein durch den Ausfluß erhaltener zylindrischer Tonstrahl quer durchgebrochen, so zeigt derselbe einen Bruch, ähnlich dem Schmiedeeisen. Wird der Strahl der Länge nach

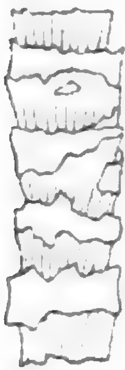


Fig. 2.

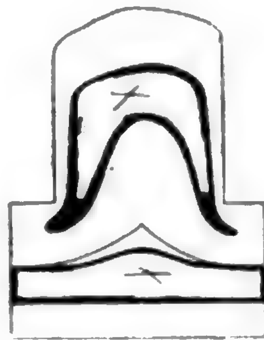


Fig. 3.

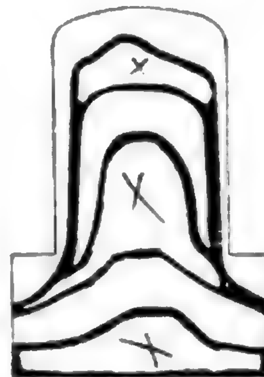


Fig. 4.

auseinandergebrochen, was bei abgeschnittenen Stücken von 5 bis 6 *cm* Länge, wenn dieselben stark angeritzt werden, leicht gelingt, so zeigt der Bruch eine ganz ausgezeichnete faserige Längsstruktur,[1] welche durch die relative Verschiebung der Tonteilchen aneinander während des Ausflusses erzeugt wird. Wenn die Höhe des ausfließenden Tonblockes nur mehr wenige Zentimeter beträgt, beginnt der Strahl hohl zu werden. Es können so Röhren von fast 10 *cm* Länge erhalten werden, die aber nicht rund bleiben, sondern durch den Luftdruck deformiert werden.

Quantitative Bestimmungen, über die Ausflußgeschwindigkeit des plastischen Tons sowie solche, welche mit Weich-

---

[1] Daubrée, Géologie expérimentale, p. 412. Structure schisteuse et concentrique.

paraffin unternommen wurden, haben zu keinen halbwegs vergleichbaren Resultaten geführt. Insbesondere bei den Ausflußversuchen aus kleinen Ausflußöffnungen zeigt es sich, daß für den Druck, bei welchem der Ausfluß eintritt, eine Grenze existiert, unter welcher der Ausfluß aufhört. Geringfügige Steigerungen des Druckes haben oft ein erhebliches Ansteigen der Ausflußgeschwindigkeit im Gefolge.

So wurde am 22. Dezember 1902 mit etwas härterem Ton und der 1 *cm*-Ausflußöffnung gefunden:

Manometeranzeige Q_m	7500	8000	9000 *kg*
Ausflußgeschwindigkeit ...	4·4	6·5	31·8 *cm*/min.

Mit der 1·5 *cm*-Ausflußöffnung ergab sich:

Q_m	7500	8000 *kg*
v	5·15	38·30 *cm*/min.

Im Absinken auf 7200 *kg* wurde bei diesem Versuch noch 5·5 *cm* Strahl ausgestoßen und dann trat Ruhe ein.

Wenn die bei demselben Drucke und bei verschiedenen Ausflußöffnungen erhaltenen Geschwindigkeiten nebeneinander gestellt werden, so fallen diese letzteren für die größere Ausflußöffnung zumeist schon in jenes Gebiet, in welchem die Ausflußgeschwindigkeit rasch anwächst.

Nur die untere Grenze des Druckes Q_m, für welche der Ausfluß eben beginnt, konnte für eine Versuchsreihe vom 22. Dezember 1903 für die Ausflußöffnungen von verschiedenem Durchmesser d festgestellt werden. Es ist:

$d =$ 1·00 *cm*	$Q_m =$ 7500 *kg*	$Q_m d =$ 7500
1·50	7000	10500
2·00	6400	12800
3·10	4800	14880
4·10	4000	16400
6·10	3000	18300
10·00	1800	18000

Wie das Produkt $Q_m d$ anzeigt, nimmt Q_m langsamer ab, als d zunimmt, d. h. der Druck nimmt langsamer ab, als der

Umfang der Ausflußöffnung zunimmt, selbstverständlich noch weit langsamer, als der Querschnitt der Ausflußöffnung wächst.

Ausflußversuche mit Weichparaffin.

Als Repräsentanten der knetbaren Substanzen wurde das Verhalten des Weichparaffins beim Ausfluß unter höherem Drucke untersucht. Das von Wagemann, in weißlich durchscheinenden Platten von anscheinend kristallinischem Gefüge, bezogene Weichparaffin hatte einen Schmelzpunkt von 40° C. Dem Schmelzen geht eine bei zirka 21 bis 24° C. merklich beginnende Erweichung voraus, welche mit der Temperaturerhöhung rasch zunimmt und die Substanz befähigt, Fäden zu ziehen, welche kurz abreißen.

Die von verschiedenen Ausflußversuchen herrührenden Weichparaffinproben haben sich während der Monate Juli und August bei Zimmertemperaturen, welche bis 24° C. anstiegen, unter dem eigenen Gewichte zu deformieren begonnen und haben den Beginn des Zerrinnens gezeigt.

Am 17. November 1902 wurden zwei Paraffinstücke mit geebneten Flächen aufeinander gelegt und, mit einem Becherglase bedeckt, sich selbst überlassen. Bis zum Monat März 1903 hafteten dieselben bereits recht fest aneinander; sie hatten unter dem eigenen Gewicht, bei Zimmertemperaturen, die nicht über 20° C. angestiegen sein dürften, zusammenzuschweißen begonnen. Am 2. Juni 1903 waren dieselben bereits vollständig vereinigt. Noch rascher sind zwei andere Paraffinstücke zusammengeschweißt, welche am 28. Juni 1903 mit geebneten Flächen aufeinander gelegt worden waren. Im August waren dieselben ineinander geflossen und später flachte sich der Paraffinblock so weit ab, daß die übergestülpte Öffnung des Becherglases ausgefüllt wurde. An dem untergelegten Papierblatte haftete das Paraffin jedoch nicht.

Wie später nachgewiesen wird, haben geringfügige Temperaturänderungen des Paraffins, in der Nähe der Zimmertemperatur, eine sehr merkbare Abnahme der inneren Reibung im Gefolge. Durch diesen Umstand wird nicht nur die Ausflußmenge gesteigert, sondern es werden hiedurch noch ganz besondere, den Ausfluß begleitende Erscheinungen herbeigeführt. In den

Gebieten der größeren Geschwindigkeit im ausfließenden Block tritt durch die innere Reibung eine Temperaturerhöhung ein, welche das Paraffin an diesen Stellen erweicht.

Diese Erwärmung des Paraffins wurde durch zentrale Befestigung eines 1 *cm* Stahlrohres im Paraffinblocke von 18 *cm* Durchmesser derart, daß das untere Ende 3·7 *cm* unter der Oberfläche festgehalten wurde, mittels eines Thermometers nachgewiesen. Das Ausfließen erfolgte aus der 6 *cm* Ausflußöffnung, und zwar durch 5 Minuten unter einem Drucke $Q_m =$ 4000 *kg*, durch 4 Minuten unter $Q_m = 3000$ *kg* und durch 2 Minuten unter 5000 *kg*. Die Temperatur im Stahlrohr stieg dabei von 19·5° C. auf 20·1° C, d. i. um 0·6° C. Nachdem in der Achse des Strahles und des ausfließenden Blockes, die relativen Verschiebungen der Paraffinteilchen geringer sind, als wie in größerer Enternung davon, so darf wohl angenommen werden, daß an jenen Stellen noch größere örtliche Temperaturerhöhungen, vielleicht um ganze Grade, stattfinden.

Diese Temperaturerhöhung dürfte auch bei einem Ausflußversuch aus dem Ausflußgefäß von 6 *cm* Durchmesser durch eine Ausflußöffnung von 0·2 *cm*, bei einer Temperatur von 15·5° C. unter einem Drucke von $Q_m = 3000$ *kg* das Zusammenschweißen der eingetragenen Paraffinstücke begünstigt haben. Der Strahl bildete einen vollkommen zusammenhängenden Faden, welcher sich auf ein Spulenbrett aufwickeln ließ. Die Berührung mit den Fingern genügte schon, den Faden so viel zu erwärmen, daß er abriß. Die Spule wurde mit den nebeneinander gelegten Windungen horizontal hängend aufbewahrt. Über den Sommer sanken die Windungen immer tiefer herab, rissen zum Teil oder schweißten zusammen. Eine ganz ähnliche Spule mit einem 0·6 *cm* dicken Wachsfaden zeigte während derselben Zeit bloß eine mäßige Senkung der Windungen. Der Druck von 106 kg/cm^2, der im Ausflußgefäß die Bewegung unterhielt, mit der etwa eingetretenen Temperaturerhöhung genügte, um das Zusammenschweißen zu vermitteln. Auch der Paraffinblock im Gefäß war kompakt geworden.

Als in den Ausflußzylinder von 18 *cm* Durchmesser Weichparaffinstücke eingestampft und dann durch die Öffnung von

3 *cm* Durchmesser mit $Q_m = 12.000$ *kg* ausgepreßt wurden, war der Strahl zerklüftet; bei einer Ausflußöffnung von 1 *cm* Durchmesser war die Oberfläche des Strahles grob schuppig oder vielmehr konisch abgesetzt. Der Druck $Q_m = 17.500$ *kg*, welcher im Ausflußgefäß einem Drucke von 68 *kg/cm*² oder 63 Atmosphären entspricht, hatte (bis etwa 16° C.) das Schweißen nicht herbeigeführt. Außerdem erwiesen sich die von demselben Blocke aus größeren Ausflußöffnungen gewonnenen Strahlen aus einzelnen Blättern zusammengesetzt, welche den eingetragenen Stücken entsprochen haben dürften und welche sich beim Verdrehen und Biegen voneinander lösten.

Bei 10° C. zeigt das Weichparaffin bereits merklich andere Eigenschaften. Ein Paraffinblock von 18 *cm* Durchmesser erforderte bei der Ausflußöffnung von 6 *cm* bereits einen Manometerdruck von 15.000 *kg*, damit der Austritt des Paraffins aus der Öffnung beginnen konnte. Dieser Druck sank aber plötzlich ab, das Paraffin trat anfangs in unregelmäßigen Bruchstücken, später als grobkörniges Pulver aus. Bei 12·5° C. ist bereits ein Ausfluß möglich, die Oberfläche des Strahles zeigt aber durchwegs mehr oder minder deutlich ausgebildete Schuppen.

Als Beispiel eines solchen Ausflusses sei der Versuch vom 6. November, bei 13·6° C. Temperatur, angeführt, wobei der gegossene Paraffinblock aus der Ausflußöffnung von 6 *cm* und später von 10 *cm* unter den in der Fig. 5 angeführten Drucken getrieben wurde.

Der Ausfluß aus der 6 *cm*-Öffnung fand anfänglich unter höherem Drucke statt und wurde dann bei 4500 *kg* fortgeführt. Auf dem 6 *cm*-Strahle zeigte sich eine feine Schuppung. Nach dem Einsetzen der 10 *cm*-Ausflußöffnung wurde zuerst mit 7000 *kg* ausgestoßen, der Druck auf 4000 *kg* absinken gelassen und die erste Marke gemacht. Sodann wurde der Druck auf 4000 *kg* konstant erhalten. Während der ersten 5 Minuten wurden 3·6 Strahl ausgestoßen. Zwischen der ersten und der zweiten, nach 5 Minuten gezogenen Marke befindet sich auf der Oberfläche des Strahles eine tiefgreifende, ringsumlaufende Schuppe. Die weiteren Marken, die nach je 5 Minuten gezogen

sind, stehen weniger weit voneinander ab. Die Oberfläche des Strahles ist glatt oder zeigt nur oberflächliche Schuppen und Längsstreifung. Es wurde nunmehr der Druck wieder auf 7000 *kg* erhöht; es entstand wieder eine ringsum laufende, tiefgehende Schuppe, aus welcher sich der Strahl mit deutlicher Längstreifung abhob. Durch den auf 4000 *kg* abgesunkenen Druck wurde in 5 Minuten ein längeres Stück Strahl ausgestoßen, welches noch eine tiefe Schuppe aufwies; dann glättete sich die Strahloberfläche und in den beiden folgenden Minuten traten kürzere Strahlstücke aus.

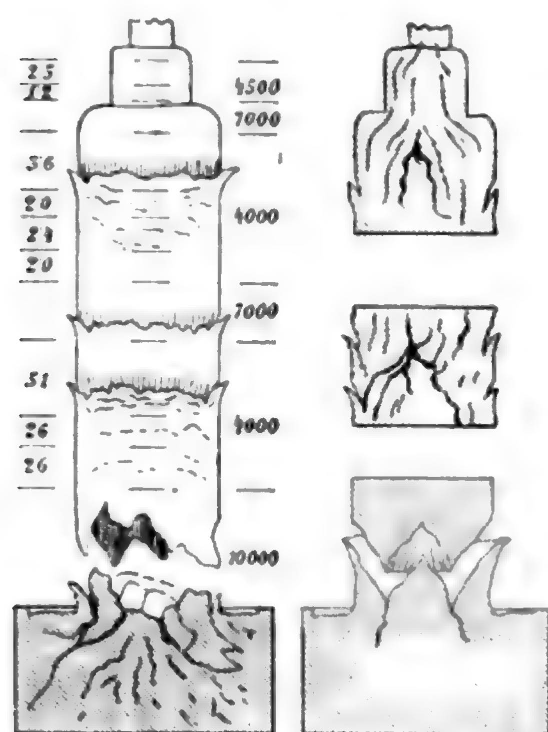


Fig. 5.

Zum Schlusse wurde der Druck rasch über 7000 *kg* gesteigert und dadurch der Strahl abgestoßen, so daß er sich von dem ausfließenden Blocke getrennt hat. Das untere Ende des Strahles ist gezackt, der Rest des Strahles am Blocke ebenfalls.

In der Fig. 5 ist noch der Schnitt des Blockes abgebildet, nachdem ein Strahl ausgestoßen worden war. Es zeigen sich ausgesprochene Trennungslinien auf dem Querschnitt und damit ist auch die Ursache des Ausstoßens des Strahles klar gelegt. Durch die eingetretenen Geschwindigkeitsdifferenzen wurden Spannungen erzeugt, welche die Trennung des Materiales herbeiführen. Zweifelsohne trägt hiezu die Erweichung durch Temperaturerhöhungen bei. In einer schematischen Figur ist überdies noch der Schnitt durch die Trennungsstelle des Strahles vom Blocke dargestellt. Die Längsschnitte des Strahles an den Stellen, an welchen die Oberfläche Schuppen zeigt, lassen im Inneren Trennungslinien erkennen. Hat die hohe Spannung nicht zu lange angehalten, so verlieren sich diese Linien und der Strahl wird wieder kompakt.

Alle Längsschnitte zeigen die Andeutung einer faserigen Struktur, welche sich sofort sehr deutlich erschließt, wenn der Strahl oder besser ein solcher Längsschnitt der Länge nach auseinander gebrochen wird. Ein Querbruch ist zackig, etwas gröber als bei sehnigem Schmiedeeisen, mit Andeutung einer konzentrischen Struktur.

Bei den kleineren Ausflußöffnungen kommen solche Trennungen im ausfließenden Blocke bei gesteigerter Ausflußgeschwindigkeit ganz auffallenderweise zur Geltung. Der Strahl scheint aus ineinander gesteckten Konusen zu bestehen; er wird mit konischer glatter Spitze oder auch mit mehreren Spitzen abgestoßen und der nachfolgende Strahl beginnt mit einer entsprechenden Höhlung. Die Oberflächen der abgestoßenen Teile sind alle mehr oder weniger glatt, was darauf schließen läßt, daß sich die Trennungen im ausfließenden Blocke aus Gleitflächen entwickelt haben.

Ein Ausflußversuch aus dem 18 *cm*-Ausflußzylinder, welcher am 5. Juni 1903 bei 19·6° C. aus der 10 *cm*-Ausflußöffnung unternommen wurde, ergab bei 3000 *kg* Manometeranzeige einen gleichmäßigen Strahl mit schwacher oberflächlicher Schuppung der Oberfläche; die Steigerung des Druckes auf 5000 *kg* hatte ein sehr rasches Austreten des Strahles zur Folge, wobei große Schuppen von 6 bis 8 *cm* Länge gebildet wurden, aus denen sich die Strahlteile mit deutlicher Längsstreifung abhoben. Das Paraffin erwies sich bereits recht zähe und das Ausstoßen wollte nicht so wie bei früheren Versuchen gelingen.

Nach dem geschilderten Verhalten des Paraffins beim Ausfluß darf es nicht Wunder nehmen, wenn zwischen den einzelnen Versuchen keine besondere Übereinstimmung besteht. Doch habe ich versucht, die Abhängigkeit der Ausflußgeschwindigkeit von der Temperatur aus den Versuchen mit 6 *cm*- und 10 *cm*-Ausflußöffnung in grober Annäherung festzustellen. Die folgenden Zahlen geben angenähert die Vergrößerung der Ausflußgeschwindigkeiten für einen Grad Celsius, für die darübergesetzten mittleren Temperaturen in Zentimetern pro Minute für die hier in Betracht kommenden Geschwindigkeiten.

Mittlere Temperatur	13·05°	14·65°	16·25°	17·90° C.
	0·195	0·274	0·320	0·436 *cm*/min.

Die Versuche wurden zwischen Temperaturen von 12·5 bis 19·6° C. durchgeführt. Die Kurven, welche das Ansteigen der Ausflußgeschwindigkeiten mit der Temperatur, für verschiedene Manometerdrucke und für die beiden Ausflußöffnungen angeben, sind zwar sehr unregelmäßig, zeigen aber für das Temperaturintervall zwischen 16·5 und 19·6° C. sehr nahe die gleiche Steigung.

Die angeführten Zahlen haben die folgende Bedeutung: Wenn z. B. bei $Q_m = 3000\,kg$ aus der Ausflußöffnung von 10 *cm* bei 16° C. in der Minute 0·640 *cm* Strahl ausfließen und die Temperatur wird auf 17° C. erhöht, so ist eine Strahllänge 0·640+0·320 = 0·960 *cm* in der Minute zu erwarten. Oder wenn aus der 6 *cm*-Ausflußöffnung bei 4000 *kg* und 19·9° C. 2·330 *cm*/min. ausfließen, so sinkt dies bei 15·58° C. auf 2·475—0·380.4·4 = 0·803 *cm*/min. herab.

Auf die Temperatur von 15·5° C. reduziert ergaben sich bei verschiedenen Drucken Q_m, verschiedenen Ausflußöffnungen die folgenden Ausflußgeschwindigkeiten des Weichparaffins in Zentimeter-Minuten aus dem Ausflußzylinder von 18 *cm* Durchmesser, welche selbstverständlich nur als beiläufige Annäherungen zu betrachten sind. Die den Manometeranzeigen des hydraulischen Hebebockes entsprechenden Drucke in Kilogramm-Quadratzentimetern sind unter q_m angeführt; sie sind etwas zu groß, da von den Manometerdrucken Q_m die zum Teile gänzlich unbekannten Reibungswiderstände nicht abgezogen sind.

Q_m	q_m	Durchmesser der Ausflußöffnungen in Zentimetern					
		1·5	2·0	3·1	4·1	6·0	10·0
3000	11·4	—	—	—	—	0·15*	0·48
4000	15·2	—	—	—	0·19	0·42	1·07
5000	19·0	—	—	0·22*	0·36	0·70*	—
6000	22·8	—	—	0·39	0·59*	—	—
7000	26·6	—	—	0·58	—	—	—
8000	30·5	0·32*	0·62*	0·79	—	—	—
9000	34·3	0·47	0·94	—	—	—	—
10000	38·1	0·62	1·26*	—	—	—	—
11000	41·9	0·89	—	—	—	—	—
12000	45·7	1·30	—	—	—	—	—
13000	49·5	1·83	—	—	—	—	—
Q_m^3		Werte von $Q^3 v$					
27		—	—	—	—	180	563
64		—	—	—	337	152	598
125		—	—	568	347	189	—
216		—	—	554	357	—	—
343		—	—	505	—	—	—
512		157	825	648	—	—	—
729		154	776	—	—	—	—
1000		160	792	—	—	—	—
1331		140	—	—	—	—	—
1728		133	—	—	—	—	—
2197		120	—	—	—	—	—

Die mit einem Sternchen bezeichneten Zahlen sind extrapoliert.

Die Ausflußgeschwindigkeit nimmt bei dem 18 *cm*-Ausflußzylinder im allgemeinen mit der dritten Potenz des Druckes zu. Bei der Ausflußöffnung von 1·5 *cm* Durchmesser nimmt dieselbe etwas langsamer mit dem Drucke zu.

Bei demselben Drucke nehmen die Ausflußgeschwindigkeiten im allgemeinen rascher als der Umfang, ungefähr so wie der Querschnitt der Ausflußöffnung oder nahe wie die Quadrate der Durchmesser der Ausflußöffnungen zu. Die Ausflußmengen wachsen daher nahe proportional den vierten Potenzen der Durchmesser.

Ausfluß von Schwarzpech.

Um das Verhalten einer recht zähen Flüssigkeit beim Ausfluß unter Druck kennen zu lernen, wurden Ausflußversuche mit Schwarzpech unternommen. Aus der Deformation einer zwischen rechteckige Zinkbleche gegossenen Pechplatte ergaben sich die Koeffizienten der inneren Reibung des Schwarzpeches bei 20·3° C. zu $\mu = 1 \cdot 503 . 10^8$ und bei 21·3° C. $\mu = 1 \cdot 050 . 10^8$, was einer Änderung des Wertes von 30% für 1° C. entspricht.

Die Ausflußversuche mit Schwarzpech erfolgten aus Zinkblechzylindern von 6 *cm* Durchmesser, mit Bodenplatten, welche Ausflußöffnungen von 0·6, 1·2 und 2·4 *cm* Durchmesser enthielten. Für die beiden kleineren Ausflußöffnungen wächst die durch Wägung bestimmte Ausflußmenge sehr nahe wie der Druck, bei der 2·4 *cm*-Ausflußöffnung aber rascher als der Druck. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich hier eine mit der Größe der Geschwindigkeit steigende Erwärmung geltend macht, welche bei der raschen Änderung der inneren Reibung mit der Temperatur den Ausfluß beschleunigt. Die beiden kleineren Ausflußöffnungen gaben beim Gesamtdruck von 36 *kg*, das sind 1·33 kg/cm^2 auf die Oberfläche, Ausflußmengen, welche der Potenz 3·6 des Durchmessers proportional sind.

Ausfluß von Weichparaffin aus einem kleineren Ausflußzylinder.

Im Mai und Juni des Jahres 1903 habe ich noch Ausflußversuche von Weichparaffin aus dem Ausflußzylinder von 6 *cm* Durchmesser unter Anwendung eines Hebels mit Gewichten an dem Ende ausgeführt. Das Paraffin wurde aus einer Ausflußöffnung von 1·2 *cm* ausgepreßt. Jeder Versuch dauerte mehrere Tage und die Marken wurden nach Ablauf ganzer

Tage auf dem Strahle gezogen. Die sehr kleinen Ausflußgeschwindigkeiten, die hier auf Zentimeter und Minuten umgerechnet sind, erwiesen sich indessen veränderlicher, als bei der konstanten Temperatur des Versuchsraumes erwartet wurde. Die Versuchstemperaturen waren im Laufe mehrerer Wochen zwischen 18·1 und 20·7° C. gelegen, die geringfügigen täglichen Änderungen scheinen jedoch ganz merklichen Einfluß genommen zu haben. Es sollen daher nur die angenähert auf 20° C. reduzierten, durch graphische Interpolation ausgeglichenen Versuchsergebnisse bei verschiedenen Drucken in Kilogramm-Quadratzentimetern angeführt werden.

$q =$	3	6	9	12	15	kg/cm^2
$v =$	0·0013	0·0092	0·0297	0·0650	0·1150	cm/min.
$q^3/v =$	208	235	245	265	291	

Die Ausflußgeschwindigkeit steigt hier etwas weniger rasch als die dritte Potenz des Druckes, etwa mit der Potenz 2·8 desselben.

Diese Versuche bestätigen die mit dem 18 *cm*-Ausflußzylinder gefundenen Resultate und lassen erkennen, daß bei 20° C. der Ausfluß des Weichparaffins schon bei Drucken beginnt, die unter 1 kg/cm^2 liegen. Bei noch höheren Temperaturen dürfte schon das Eigengewicht genügen, um einen Ausfluß zu erzeugen.

Auch hier scheinen Temperaturerhöhungen im Paraffin mitzuspielen. Während 1·7 kg/cm^2 Druck in 24 Stunden zirka 0·22 *cm* Strahllänge, d. i. 0·0092 *cm/h* geben, erzeugten 15 kg/cm^2 mehr als die zehnfache Strahllänge, d. s. 2·23 *cm* in 30 Minuten oder 4·46 *cm/h*, d. i. das 487fache an Ausflußgeschwindigkeit.

Ausflußversuche mit gelbem Wachs.

Unter Benützung des 18 *cm*-Ausflußgefäßes wurde nur ein Versuch mit 2·34 *kg* gelbem Wachs bei 10° C. aus der Ausflußöffnung von 6 *cm* vorgenommen. Bei 20.000 *kg* Manometeranzeige wurde ein Strahl erhalten, welcher sich wiederholt in mehrere Teile spaltete, die sich nach außen völlig umbogen und auf den Trennungsflächen eine sehnige Struktur zeigte.

Die Außenfläche war anfänglich stark schuppig und die kleinen Schuppen nach außen gekräuselt. Im weiteren Fortschreiten des Ausflusses trat der Strahl kompakt aus, die Oberfläche begann sich zu glätten und es hatte den Anschein, als ob die Temperatur des Wachses gestiegen und dieses dadurch geschmeidiger geworden wäre.

Aus dem Ausflußgefäß von 6 *cm* wurden bei 15·5° C. von den eingetragenen Wachsstücken durch die Ausflußöffnungen von:

$d = 0{\cdot}4$ *cm*	bei 5000 bis 6000 *kg*	
0·8	3000 » 4000	
1·2	1500 » 3000	

sehr schöne glatte Wachsfäden erhalten, die sich auf Spulen aufwickeln ließen. Das in Stücken eingetragene Wachs war vollständig zusammengeschweißt.

Ausflußversuche mit Ceresin.

Das dem gelben Wachs im äußeren Ansehen ähnliche Ceresin wurde von Wagemann bezogen und schmolz bei 57° C. Die Blöcke, welche in den Ausflußzylinder von 18 *cm* gegossen wurden, zogen sich beim Erstarren außerordentlich stark zusammen, so daß sie sich von der Wand lösten und in der Mitte eine Vertiefung von mehreren Zentimetern bildeten.

In einen dieser Blöcke war das Stahlröhrchen zur Temperaturbestimmung eingegossen worden. Die Temperatur zu Beginn des Ausflußversuches durch die 6 *cm*-Ausflußöffnung war 20·4° C. Bei 5200 *kg* Manometeranzeige wurde kein Austreten des Ceresins erzielt; der Ausfluß begann bei 12.000 bis 13.000 *kg* und erfolgte noch weiter, als die Manometeranzeige auf 11.000 *kg* gesunken war. Es wurde zirka 10 *cm* Strahl ausgestoßen. Während der Versuchsdauer von 6 Minuten stieg die Temperatur im Röhrchen auf 21·2° C., es fand eine Temperaturerhöhung um 0·8° C. statt.

Die Oberfläche des Strahles war durchaus von feinen Rissen durchsetzt, an manchen Stellen traten tiefer reichende, klaffende Spalten mit der Tendenz einer rosettenartigen Zerteilung auf.

Bei einem zweiten derlei Versuche bei 19° C. mußte die Manometeranzeige auf 14.000 *kg* gesteigert werden, um den Ausfluß einzuleiten. In der ersten Minute wurden 5·0 *cm*, in der zweiten Minute 10 *cm* Strahl mit ganz ähnlich zerteilter Oberfläche wie beim ersten Versuch ausgestoßen. Während der Druck auf 8000 bis 9000 *kg* sank, traten noch 5·5 *cm* zylindrischer Strahl aus und dann spalteten sich von der Oberfläche lange hohle Schuppen ab, welche sich nach außen krümmten. Das Innere des Strahles wurde brüchig.

Die Vorgänge im Ceresinblock, welcher dem Ausfluß unterworfen ist und welche das Zerspalten des Strahles be-

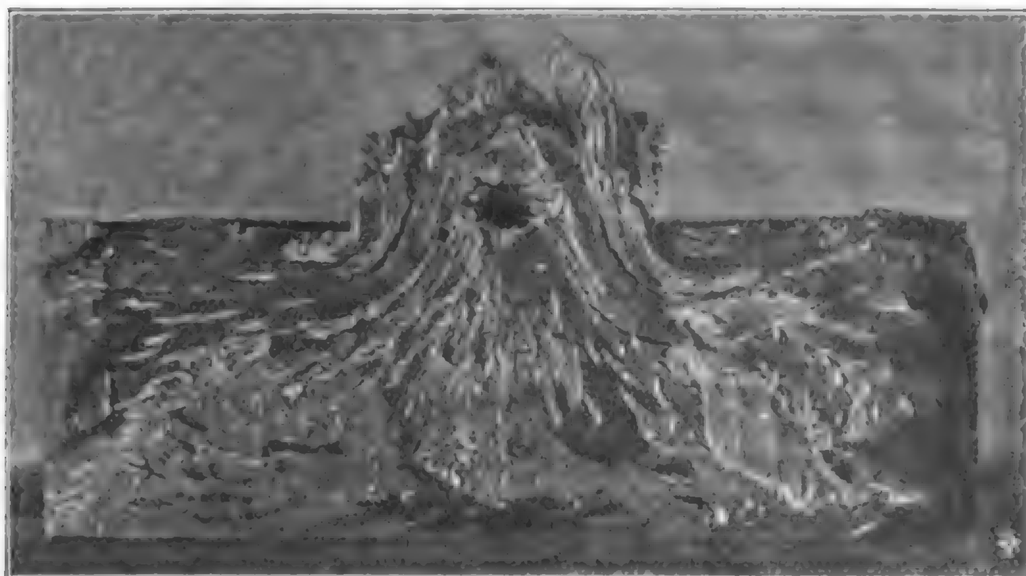


Fig. 6.

dingen, sind auf einem Längsschnitt desselben, Fig. 6, zu erkennen.[1] Die Spaltungen des Strahles bereiten sich schon im Inneren des Blockes vor; das Ceresin zerteilt sich dort und die Trennungsflächen scheinen den Strömungslinien zu entsprechen. Ein Querbruch des Versuchstückes (Fig. 7) zeigt die Struktur, die im Ceresin zufolge der relativen Verschiebung entstanden ist.

Aus dem 6 *cm*-Ausflußgefäß wurde durch die 1·2 *cm*-Ausflußöffnnng ein durchaus unregelmäßig gespaltener Strahl

[1] Solche Brüche lassen sich am besten durch schiefe Beleuchtung mit Auerlicht und etwas abgeblendetem Objektiv photographieren.

erhalten, dessen Teile wie die Schuppen eines Kieferzapfens ineinander stecken und nach außen gekrümmt sind. Das Ceresin ist bei gewöhnlicher Temperatur weitaus weniger plastisch als das gelbe Wachs. Ein Längsbruch des ausfließenden Ceresinzylinders ließ zwar keine Trennungen erkennen, wie in den Versuchen mit dem 18 *cm*-Ausflußgefäß, zeigte aber eine ganz ausgesprochene, den Strömungslinien entsprechende Struktur.



Fig. 7.

Ausflußversuche mit Eis.

Zu diesen Versuchen wurden eine durch einen Hartmessingring gebildete Ausflußöffnung von 12 *cm* und eine solche mit abgerundeten Kanten von 9·6 *cm* verwendet.

Zu den ersten Versuchen im Februar 1902 wurden Blöcke aus Kunsteisstücken gepreßt, später konnte ich durch das dankenswerte Entgegenkommen des kaiserlichen Rates Wolfbauer, Direktor der ersten österreichischen Gesellschaft für Lagerhäuser,[1] Wasser in Blechgefäßen im dortigen Kellergeschoß, wo jahraus jahrein eine Temperatur von —12° C. erhalten wird, frieren lassen. Die tiefen Temperaturen des

[1] Wien, II., Freilagergasse 6, nächst der Jubiläumsbrücke.

Winters 1902/1903 ermöglichten es, Wasser in Blechzylindern vor den Fenstern frieren zu lassen.

Nachdem ich mich überzeugt hatte, daß das Eis bei einem Drucke von 20.000 *kg*, das sind ungefähr 78 kg/cm^2, aus der 12 *cm*-Ausflußöffnung zum Ausfluß gebracht werden könne, versuchte ich, horizontal und konzentrisch geschichtete Eisblöcke zu verwenden. Der Versuch, rot gefärbtes Eis durch Frieren von Wasser, welches mit Fuchsin gefärbt ist, zu erhalten, mißlang, da das Fuchsin ausgeschieden wurde. Nur unter Anwendung einer Kältemischung, bei beständigem Umrühren, kann ein rot gefärbtes Eis erhalten werden. Trotzdem gelangen die Versuche mit geschichtetem Eis, sie gaben dieselben Erscheinungen wie geschichteter Ton. Ruß, besser noch eine Mischung von Chromgelb mit Englischrot, zwischen ungefärbte Eisschichten eingefügt, verhindern zwar die Regelation, lassen aber recht deutlich erkennen, wie die unteren Schichten mit Wölbung in die oberen eintreten, die äußeren Schichten zu einer dünnen Eisröhre ausziehen und wie durch den zentralen Druck das Abreißen der von den anfänglich ausgeflossenen Schichten herrührenden, äußeren, konzentrischen Eisröhren und die Trennung des Eisstrahles in Scheiben herbeigeführt wird.

Zu den Ausflußversuchen mit Eis wurde der Ausflußzylinder mit Kotzen umhüllt und mit kalten Eisstücken gefüllt oder eine Blechbüchse mit Kältemischung eingesetzt. Auch die Zimmertemperatur wurde möglichst erniedrigt. Während bei den anfänglichen Versuchen mit ungenügender Kühlung viel Schmelzwasser auftrat, war dies in den späteren Versuchen fast gänzlich vermieden.

Bei dem Drucke von 20.000 *kg* biegt sich der Deckel und das Eis scheint als papierdünnes Blatt in den so entstehenden Zwischenraum eingedrungen zu sein, mitunter schien der Deckel sogar angefroren zu sein. Nach dem Abheben desselben blieb ein solcher papierdünner Eisring auf der Flantsche liegen. Vielleicht ist es aber auch eine Wasserschichte, welche nach Aufhören des Druckes friert.

Bei dem Drucke 20.000 *kg* entsteht im Mittel im Ausflußgefäß ein Druck von 78 kg/cm^2. Dadurch wird eine Erniedrigung der Schmelztemperatur um $0 \cdot 00707 . 78 = 0 \cdot 55°$ C. herbei-

geführt. Da sich etwa 6·3 *kg* Eis im Ausflußgefäß befinden, so müssen 22 *g*, d. i. der 286te Teil der Eismasse schmelzen, um die Wärmemenge zu binden, welche zur Temperaturerniedrigung des Eises von der spezifischen Wärme 0·508 nötig ist.

Das Eintreten des Eises in die Ausflußöffnung geschieht mitunter schon bei 15.000 bis 16.000 *kg*, während der ganze Block sich erst zu deformieren beginnt und der Druck steigt erst dann auf 20.000 *kg*, wenn die Strahlbildung in der 7 *cm* langen Ausflußöffnung weiter fortgeschritten ist. Dieses Umstandes wegen, ergibt sich die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit stets größer als diejenige während des weiteren Verlaufes.

Die Strahllängen sind zumeist von der oberen Fläche des ausfließenden Eisblockes gezählt. Als Ausflußzeiten sind nur die Zeiten gerechnet, während welcher der Ausfluß wirklich stattfand, daher die Zeiten, welche während des Unterlegens des Stempels zur Erzielung größerer Hubhöhen verfließen, ausgeschieden sind.

Von dem beim Versuch IV am 12. Dezember 1903, bei zirka 0°, in 30 Minuten erhaltenen 33 *cm* langen Strahl ist hier die Abbildung in Fig. 8 beigegeben, welche die scheibenförmigen Trennungen im Strahle deutlich erkennen läßt. So wie das obere Ende der Strahlen nach aufwärts konvex gekrümmt ist, so zeigen auch die Scheiben, wie sie durch Zerspalten des Strahles erhalten werden, eine konvexe Krümmung im Sinne der Bewegung.

Mit der Ausflußöffnung von 9·6 *cm* Durchmesser und ausgerundeten Kanten wurden sehr zerklüftete Strahlen erhalten. Bei einem Versuch mit einem Eisblock, welcher aus Eisstücken gepreßt war, zeigte der Strahl eine rosettenförmige Zerspaltung und breitete sich derartig aus, daß er die ganze 12 *cm*-Öffnung im Deckel erfüllte. Der Druck mußte bei diesen Versuchen stets sehr hoch gehalten werden. Die beigedruckte Fig. 9 läßt die Zerklüftung des Strahles deutlich erkennen und zeigt die Tendenz der Eisstücke, sich schuppenartig nach auswärts zu krümmen.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß die 7 *cm* lange, zylindrische, 12 *cm* im Durchmesser haltende Öffnung, welche in den



Fig. 8.

früheren Ausflußversuchen angewendet wurde, unter Umständen eine derartige seitliche Ausbreitung des Eisstrahles behindert.

Um auch die Eistemperatur schätzen zu können, wurde in einer Versuchsreihe, welche in die Kälteperiode vom 14. bis 28. Jänner 1903 fiel, in die Zylinderachse eine Stahlröhre von



Fig. 9.

1 *cm* Durchmesser und 1 *mm* Wandstärke eingesetzt und einfrieren gelassen. Die unten geschlossene Röhre enthielt etwas Quecksilber und konnte ein Thermometer aufnehmen, welches auch während des Ausflusses darin verblieb. Durch das Einfrieren war die Stahlröhre von der unteren Hälfte des ausfließenden Eisblockes festgehalten, so daß der Strahl daran

emporglitt, und es kam dieselbe erst mit jenen unteren Schichten in Bewegung, sobald sich diese am Ausfluß zu beteiligen begannen. Der Eisstrahl enthielt hienach eine 1 *cm* im Durchmesser haltende, zylindrische Höhlung. So waren in dem Versuch XIV, bei einer von der Oberfläche des Deckels gezählten Strahllänge von 30·7 *cm*, 19 *cm* Strahl an dem Stahlröhrchen vorübergeglitten und das obere Ende des Röhrchens hatte sich 11·7 *cm* über den Deckel erhoben. Im Versuch XV waren 14 *cm* Strahl an dem Röhrchen vorübergeglitten.

Da die Bewegung des Stahlröhrchens anfangs langsam vor sich geht und erst später rascher wird, sobald die Schichten, die es festhalten, in den Ausfluß einbezogen werden, so waren im Versuch XIV der Höhe nach etwa 8 *cm* des Blockes, im Versuch XV etwa 6 *cm* desselben ausgeflossen, ehe das Röhrchen aufstieg.

Die Kühlung des Apparates war bei dieser Versuchsreihe mit besonderer Sorgfalt durchgeführt und auch kaltes Eis auf den Deckel aufgelegt worden.

Die Temperaturen im Apparate wurden mittels eines Fastreschen, in Fünftelgrade geteilten Thermometers bestimmt.

Aufloßversuche mit Eis aus kleineren Ausflußgefäßen.

In das Ausflußgefäß von 6 *cm* Durchmesser, welches unter Null Grad abgekühlt war, wurden Eisstücke eingetragen und durch die 1·5 *cm*-Ausflußöffnung zum Ausfluß gebracht. Bei einem Gesamtdruck von 10.000 bis 11.000 *kg* oder 340 bis 380 kg/cm^2 wurden in einer Minute 8 *cm* Strahl erhalten, d. i. eine Ausflußmenge von 14·14 cm^3. Für den eben bezeichneten Druck beträgt die Schmelzpunkterniedrigung bereits 2·5° C. und es müssen 2·1 *g* Eis schmelzen, um die Temperatur der 130 *g* Eis von 0·508 spezifischer Wärme, die sich im Ausflußgefäße befanden, entsprechend herabzusetzen. Der Strahl war in deutlich getrennte Scheiben gespalten und fiel in Stücken herab.

Bei einem zweiten derartigen Versuch war das Eis ganz weich und mit Schmelzwasser durchzogen, das Gefäß höchstens auf 0° C. abgekühlt. Bei Drucken zwischen 8000 und 9000 *kg* wurden in 1·25 Minuten 125 *mm* Strahl erhalten. Derselbe war

vollständig zusammenhängend und zeigte nur wenig tiefgehende, der scheibenförmigen Absonderung entsprechende Einschnürungen an der Oberfläche. Dieselben standen nahezu 1 *mm* voneinander ab. Der Strahl machte den Eindruck, als ob er von einem weichen Körper gewonnen wäre; allerdings brach er sehr leicht mit körnigem Bruche. Kleine Scheiben, die von demselben abgeschnitten und durch Abschmelzen verdünnt wurden, zeigten im Nörremberg'schen Polarisationsapparat sehr kleine, ziemlich gleichmäßig angeordnete Körner von etwa 0·3 bis 0·6 *mm* Durchmesser, die kristallographisch verschieden orientiert waren.

Nummer des Versuches	Datum	Zeit		Strahllänge[1] in Zentimetern	Eistemperatur in Grad Celsius	Ausfluß-	
						Geschwindigkeit $\frac{cm}{min.}$	Menge $\frac{cm^3}{min.}$
Ausflußversuche mit Eis durch eine Ausflußöffnung von 12 *cm* Durchmesser aus dem Zylinder von 18 *cm* Durchmesser bei gleichzeitiger Temperaturmessung. Der Druck schwankt zwischen 18.000 und 20.000 *kg*.							
XII	17. Jänner 1903	11h 59m		—	—1·8	—	—
		12 05	6 Min	17	0·0	2·83	318·8
XIII	17. Jänner 1903	3 23		—	—4·3	—	—
		3 31	8 »	10·2	0·0	1·28	144·7
XIV	18. Jänner 1903	10 31		—	—6·5	—	—
		10 36	5 »	7·0	—6·4	1·40	158·3
		10 37		—	—6·0	—	—
		10 44	7 »	7·5	—3·8	1·07	121·0
		10 48		—	—1·9	—	—
		10 59	11 »	16·9	0·0	1·54	174·2
		11 02	3 »	4·8	0·0	1·60	180·9

[1] Die Strahllänge ist von der oberen Fläche des Deckels, welcher die Ausflußöffnung enthält, gezählt.

Nummer des Ver-suches	Datum	Zeit		Strahllänge in Zentimetern		Eis-tempe-ratur in Grad Celsius	Ausfluß-	
							Ge-schwin-digkeit $\frac{cm}{min.}$	Menge $\frac{cm^3}{min.}$
XV	19. Jänner 1903	10h 26m		— 3·5		—8·0	—	—
		10 34	8 Min.	0·0		—6·2	0·438	49·6
		10 41	7 »	3·5		—4·0	0·475	53·7
		10 46	5 »	4·5		—2·5	0·900	101·8
		10 48		—		—1·8	—	—
		10 54	6 »	8·5		—0·4	1·417	160·3
		11 02	8 »	18·0		0·0	2·25	254·5
		11 04		—		—	—	—
		11 08	4	9·0		0·0	2·25	254·5
XVII	22. Jänner 1903	11 30		— 2·2	—	—10·8	—	—
		11 36	6 »	— 0·5	1·7	— 7·6	0·290	32·8
		11 43	7 »	— 1·0	1·5	— 5·4	0·216	24·4
		11 48	5 »	—	2·4	— 3·8	0·480	54·3
		11 56	8 »	—	5·9	— 2·3	0·750	84·8
		11 59		—	—	— 2·2	—	—
		12 07	8 »	—	9·0	— 1·0	1·125	127·3
		12 17	10 »	—	15·3	0·0	1·530	171·1
XVIII	26. Jänner 1903	4 48		— 1·8	—	—	—	—
		4 50	2 »	2·0	3·8	0·0	1·90	214·9
		4 52		—	—	—	—	—
		4 59	7 »	—	14·0	—	2·00	226·2
		5 01		—	—	—	—	—
		5 05	4 »	—	12·1	—	3·03	342·7
XIX	26. Februar 1903	11 28		— 1·5	—	0·0	—	—
		11 30	2 »	2·5	4·0	—	2·0	226·2
		11 32	2 »	6·5	4·0	—	2·0	226·2
		11 33	1 »	8·6	2·1	—	2·1	237·5
		11 35		9·5	—	—	—	—
		11 37		13·6	4·1	—	—	—

Nummer des Versuches	Datum	Zeit		Strahllänge in Zentimetern		Eistemperatur in Grad Celsius	Ausfluß- Geschwindigkeit $\frac{cm}{min.}$	Ausfluß- Menge $\frac{cm^3}{min.}$
XIX	26. Februar 1903	11ʰ 39ᵐ		17·7	4·1	—	—	—
		11 41		23·0	5·3	—	—	—
		11 42		25·8	2·8	—	2·3	260·1
		11 44		26·9	—	—	—	—
		11 45		29·5	2·6	—	—	—
		11 46		31·9	2·4	—	2·5	282·7
		11 47		35·7	3·8	—	3·8	429·8
Ausflußversuche von Eis durch eine Ausflußöffnung von 9·6 *cm* Durchmesser mit abgerundeten Kanten, aus dem Zylinder von 18 *cm* Durchmesser, bei einem Drucke von 20.000 bis 22.000 *kg*.								
III	12. Dezember 1902	10ʰ 25ᵐ		—	—	−8·5	—	—
		10 35	10 Min.	13·5	—	—	1·35	97·7
		10 40	5 »	18·5	5·0	—	1·00	72·4
		10 45	5 »	25·0	6·5	—	1·30	94·1
VI	13. Dezember 1902	11 33		—	—	—	—	—
		11 43	10 »	12·0	12·0	0·0	1·20	86·8
		11 54	9 »	—	13·0	—	1·18	85·4
		11 58	4 »	—	6·0	—	1·50	108·5

Zu dem Versuch XIV vom 18. Jänner wurde ein Gegenversuch derart angestellt, daß ein Eiszylinder in den Apparat eingeführt und derselbe bei der niederen Zimmertemperatur (3·5° C.) sich selbst überlassen und die Zunahme der Temperatur in den eingefrorenen Stahlröhrchen beobachtet wurde. Es ergab sich:

11h 20m	....—7·4° C.	12h 31m	....—2·0° C.
30	....—6·4	43	....—1·6
40	....—6·0	1 0	....—1·0
55	....—4·2	10	....—0·8
12 11	....—3·2	40	....—0·4
20	....—2·6		

Die Temperatur steigt hiebei in 2 Stunden 20 Minuten um 7° C., während dieselbe im Versuch XIV in 31 Minuten um 6·5° C. angestiegen ist. Es tritt ähnliches auch bei den andern Ausflußversuchen ein.

Im Versuch XV steigt die Ausflußmenge in der Minute auf das Fünffache, während die Temperatur von —6·2° C. auf 0° zugenommen hat. Dasselbe tritt in dem Versuch XVII ein, welcher als der gelungenste der ganzen Versuchsreihen bezeichnet werden kann.

Der Versuch XVIII ist mit Eiszylindern ausgeführt, welche aus Strahlresten in Wasser zusammengefroren waren und sehr nahe die Temperatur Null hatten. Auch dürfte das Eis hier von Schmelzwasser durchzogen gewesen sein. Der Eintritt des Eises erfolgte schon bei 15.000 bis 16.000 *kg*; während des Versuches wurde der Druck zwischen 19.000 und 21.000 *kg* erhalten. Die Ausflußgeschwindigkeit ist nahe 2 *cm*/min., meist aber größer.

Am 26. Februar wurde noch ein Versuch mit Kunsteis ausgeführt, wovon ein behauener Block und darunter Eisstücke in den Ausflußzylinder eingetragen und unter Anwendung der erwähnten Platte zu einem kompakten Zylinder gepreßt wurden. Die Ausflußgeschwindigkeit wurde bei dem Drucke von 18.000 bis 20.000 *kg* gerade so groß gefunden wie bei den durch Frieren erhaltenen Eiszylindern. Die Dicke der Scheiben, in welche der Strahl sich spaltet, war hier, wo viel Schmelzwasser auftrat, etwa 1·5 *cm*. Der Zylinderrest wurde vom Strahle getrennt und für sich ausgepreßt. Es ergab sich ein ganz zerborstener Eisstrahl, kaum zusammenhängend und eine trichterförmige Höhlung in dem wenige Zentimeter hohen Eisrest. Der Ausfluß geht dabei sehr rasch vor sich, weil der Druck nur auf die untere ringförmige Fläche des Eisrestes im

Ausflußzylinder wirkt und pro Flächeneinheit über 100 *kg/cm*²
ansteigt.

Die Abbildung 10 gibt die obere Ansicht des Eisrestes aus dem Ausflußzylinder und die obere Ansicht des anschließenden Strahlstückes. Das letztere zeigt eine Andeutung einer radialen Struktur, entsprechend dem seitlichen Einfließen des Eises und stellenweise eine Andeutung einer konzentrischen Struktur.

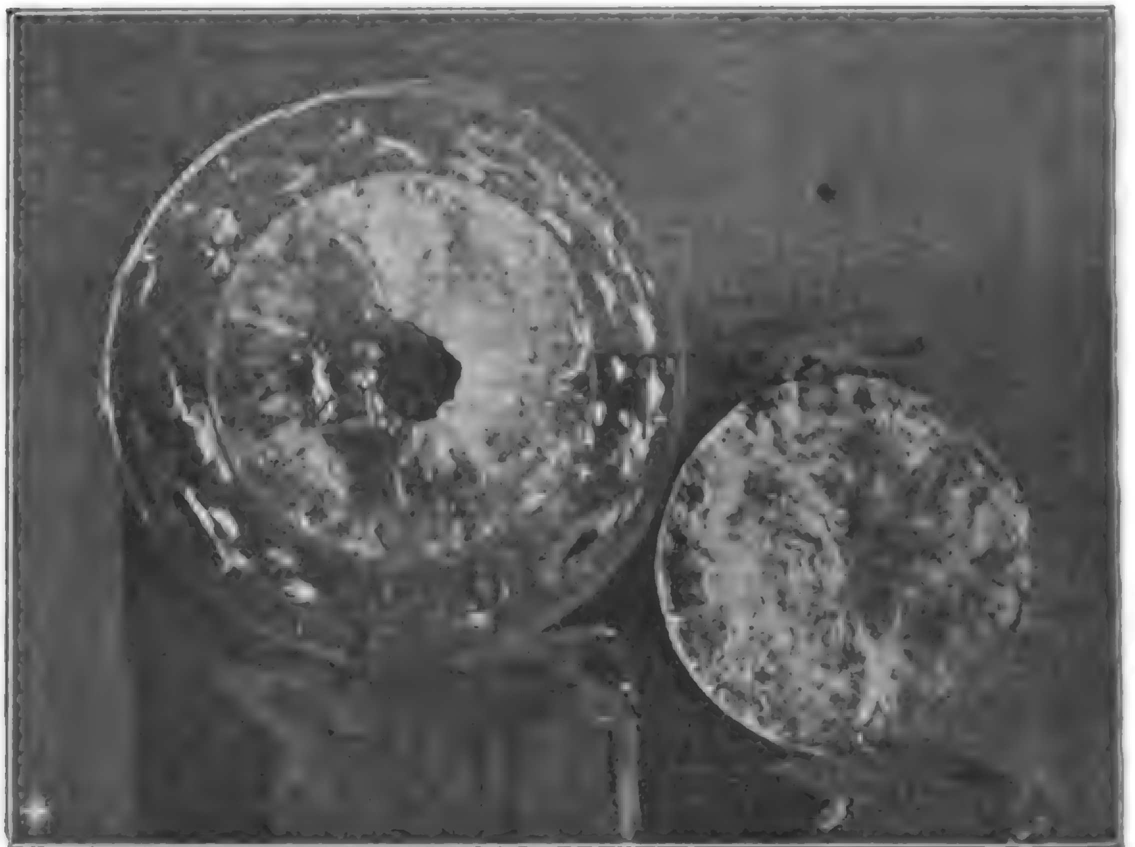


Fig. 10.

Wird die Ausflußmenge des Eises durch die 12 *cm*-Öffnung bei 20.000 *kg* Druck und —6° C. Temperatur zu 30 *cm*³/min., jene des wasserdurchsetzten Eises von 0° C. zu 270 *cm*³/min. angenommen, so folgt daraus, daß mit der Zunahme der Temperatur von —6° C. auf 0° C. eine Vergrößerung der Ausflußmenge auf das Neunfache verbunden ist.

Über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Eises in Gletschern führt A. Heim in dem »Handbuch der Gletscherkunde«, p. 179, einige Daten an, wobei die Geschwindigkeit des Gletschers im Sommer sich zu jener im Winter wie 100 : 25 (grönländische Gletscher der Randzone, Grindel-

waldgletscher, unterer Teil) und wie 100 : 22 (Glacier des Bois, Mer de Glace, unterer Teil) verhält. Es sind dies nur Verhältniszahlen, welche Mittelwerten entsprechen. Das absolute Maximum und Minimum würde (p. 180) bei den grönländischen Gletschern der Randzone wahrscheinlich das Verhältnis 100 : 10 zeigen. Es ist dies nahe die Zahl, welche aus den obigen Versuchen folgt.

Die Versuche von Pfaff[1] über das Einsinken eines hohlen Eisenzylinders von 11·5 *cm* Durchmesser und 1·7 *mm* Wandstärke in das Eis bei 2 Atmosphären Druck geben allerdings für Temperaturen nahe an Null und solche zwischen —4° C. und —1° C. ein Verhältnis der Einsinktiefen von 15 : 1; es ist aber fraglich, ob diese Vorgänge mit dem Ausfluß gleichartig anzusehen sind.

A. Heim führt in seinem »Handbuch der Gletscherkunde«, p. 32, aus, daß das Eis beim Pressen plötzlich trüb wird und danach von lauter feinen Haarrissen durchsetzt erscheint, welche dasselbe in Körnchen teilt.

An Lamellen von Scheiben der Eisstrahlen habe ich in der Tat diese von Heim beobachteten Körner aufgefunden; die feinen Risse sind mit freiem Auge wahrzunehmen. Der Eisrest, welcher nach dem Versuch XIX im Ausflußzylinder verblieben war, wurde aus demselben herausgenommen und erwies sich so ziemlich durchsichtig. Als nach dem erneuerten Eintragen desselben die Presse angezogen wurde, zeigte sich in dem durch die Öffnung sichtbaren Teile des Eises die plötzliche, von Heim angeführte Trübung des Eises, ehe der Ausfluß begann.

Im natürlichen Wassereise steht die optische Achse der Eiskristalle senkrecht auf der Oberfläche, eine Tatsache, welche zuerst Brewster (1817) und dann unabhängig davon Bertin (1863)[2] aufgefunden haben. Bertin empfiehlt 10 *mm* dicke Eisplatten, welche in der Turmalinzange oder im Polarisationsmikroskop die farbigen Ringe mit dem schwarzen Kreuz sehr gut zeigen. Er weist nach, daß das Eis zu den positiven

[1] Poggendorff's Annalen, Bd. 155, p. 169 u. ff., 1875, Versuche über die Plastizität des Eises.

[2] Propriété optique de la glace. Ann. de chim. et de phys. (3), T. 69, 1863.

einachsigen Kristallen gehöre, was schon Brewster[1] erkannte. Bertin berichtet auch über die Zeitschriften, in denen Brewster seine Beobachtungen veröffentlichte.[2] Indem Bertin Wasser in einem unter 45° geneigten Gefäße frieren ließ, zeigte er, daß die optische Achse der Eiskristalle stets senkrecht auf der Abkühlungsfläche stehe.

Die Brechungsexponenten des ordentlichen und außerordentlichen Strahls im Eise wurden von Reusch bestimmt.[3] Er fand für rotes Licht $n_0 = 1 \cdot 30598$ und $n_e = 1 \cdot 30734$. Dieser geringe Unterschied in den Brechungsexponenten erklärt die Notwendigkeit der Anwendung von Eisplatten von 7 bis 18 *mm* Dicke, wenn die farbigen Ringe mit dem schwarzen Kreuze gesehen werden sollen.

Das Kunsteis, wie es von den Eisfabriken geliefert wird, zeigt in dem klaren durchsichtigen Teile der parallelopipedischen Blöcke die Kristallindividuen verschieden orientiert und durch feine Haarrisse getrennt. Auf diese Tatsache hat bereits Bertin hingewiesen (1878).

Werden aus dem Eise, welches dem Ausfluß unterworfen war, Plättchen ausgeschnitten, welche durch Abschmelzen hinreichend verdünnt werden, so zeigen sich dieselben im parallelen Lichte im Nörremberg'schen Apparat aus einer großen Anzahl verschieden orientierter Körner von kaum 1 *mm* Durchmesser zusammengesetzt, welche sich durch die verschiedene, beim Drehen des Plättchens wechselnde Färbung verraten. Besonders klein erscheinen diese Körner in der äußeren konzentrischen Schichte des Strahles. Durch den Ausfluß sind die Kristallindividuen nicht bloß zerbrochen und zerteilt, sondern auch gegeneinander verdreht worden, ehe sie wieder zusammenfroren.

---

[1] Philos. Transactions, 1818, p. 109 und 211.

[2] Sur les propriétés optiques de la glace. Ann. de chim. et de phys. (4), T. 1, p. 240, 1864. — Kristallform des Eises. Poggendorff's Annalen, Bd. 32, p. 399. — Philos. Magazine (3), Vol. 4, p. 245, dann unter: Sur la structure optique de la glace. Ann. de chim. et de phys. (5), T. 13, p. 283, 1878. — Journal de Physique de Ducrotay de Blainville, Octobre 1817, T. 85, p. 398.

[3] Beiträge zur Lehre vom Eise. Poggendorff's Annalen, Bd. 121, p. 573, 1864.

Überall dort, wo das Eis trüb ist, sind die Körner kleiner als dort, wo es durchsichtig ist. In dem Maße, als das Eisplättchen sich durch Abschmelzen verdünnt, treten die einzelnen Körner deutlicher hervor, bei dickeren Plättchen überlagern sich dieselben und verhindern die Wahrnehmung der Ausdehnung des einzelnen Kornes. Bei schiefer Beleuchtung sieht man auch die Trennungsflächen der Körner, die das Eisplättchen netzförmig durchziehen.

Die Eisausflußversuche, im Zusammenhange mit der optischen Untersuchung, lassen hienach auf den Mechanismus der scheinbar plastischen Umformung des Eises schließen. Die mit dem allseitig wirkenden, nach verschiedenen Richtungen, ja selbst in parallelen Ebenen verschiedenen Drucke und den dadurch bedingten scherenden Wirkungen verbundenen relativen Verschiebungen zerteilen das Eis in um so kleinere Körner, je beträchtlicher diese Verschiebungen sind. Diese Körner haben den Druck zu übertragen; die verschiedenen Flächen derselben beteiligen sich in verschiedenem Maße hieran. Dort, wo der Druck größer ist, findet eine stärkere Erniedrigung des Schmelzpunktes und damit Abschmelzen, daneben zum Teile Wiederfrieren statt. Die dünnen, durch das Abschmelzen erzeugten Wasserschichten erleichtern die gegenseitige Verschiebung, vielleicht auch die Verdrehung der Körner, so daß selbst ein Eiskristall, dem Ausfluß unterworfen, in lauter kleine, verschieden orientierte Eiskörper zerfällt, die nach den Verschiebungen immer wieder aneinander frieren. Der Eisausfluß unterscheidet sich hiedurch vom Ausfluß anderer Körper, die sich auch in kleine Teile zerteilen, wie z. B. gewisse Gattungen von Seife, die aber nach dem Ausfließen getrennt bleiben und in Pulverform austreten.

Ein Ausflußversuch mit einem Eisblock, der aus Platten geschlichtet ist, zwischen welche Farbstoff eingestreut wurde, läßt im Eise dieselben relativen Verschiebungen erkennen wie z. B. geschichteter plastischer Ton, der dem Ausfluß unterworfen wurde. Es findet auch beim Eise die Entstehung äußerer, konzentrischer, 1 bis 4 *mm* dicker Schichten, die von ganz dünnen Eisschichten umgeben sind, statt. Bei einem abgebrochenen derlei Strahl war die Wölbung der eindringenden

unteren Schichte von solchen dünnen äußeren Schichten umgeben. Tyndall,[1] welcher diese Erscheinung nicht zu beobachten Gelegenheit hatte, hält das Gleiten der Eisfasern aneinander für ausgeschlossen und ein solches Gleiten überhaupt nur in zähflüssigen Körpern für möglich. Aus diesem Grunde schreibt er auch [2] bei Besprechung der Hypothese, welche die Blaubandstruktur der Gletscher durch die Differentialbewegung erklärt: »Wenn Struktur der Gletscher durch die Differentialbewegung geschaffen werden kann, warum ist die große wirkliche Differentialbewegung, welche die Versuche festgestellt haben, nicht im stande, sie zu erzeugen.«

Der Unterschied zwischen zähflüssigen und dickflüssigen Körpern während eines Ausflußversuches ist der, daß die ersteren die Kontinuitätsbedingung erfüllen, während in den letzteren Zusammenhangstrennungen, zum Teile schon im ausfließenden Blocke, zum Teil im Strahl erleiden. Diese letzteren sind teils scheibenartige Trennungen der Strahloberfläche, die mehr oder minder tief greifen, oder schuppenförmige Abtrennungen mit Krümmung nach außen; aber die relativen Verschiebungen im Ausflußgefäß sind die gleichen.

Die Bedingungen, unter welchen am Eisstrahl schuppenförmige Zerklüftungen entstehen, habe ich unter Anwendung der Ausflußöffnung von 9·6 *cm* Durchmesser mit wulstförmigen Rändern aufgefunden. Es tritt hiebei eine sehr mächtige Keilwirkung der in die ausfließenden Schichten eindringenden unteren Schichten ein, welche zu einer rascheren Bewegung der inneren Portionen des Strahles führt, wodurch die Krümmung der abgespaltenen Eisblätter herbeigeführt wird. Diese Erscheinung ist, z. B. bei gelbem Wachs und niedriger Temperatur, auch bei einer innen zylindrischen Ausflußöffnung, sehr auffallend. Der Strahl, welcher aus der 2 *cm* langen, 6 *cm* im Durchmesser haltenden Ausflußöffnung gewonnen war, zeigte sich an der Oberfläche mit Schüppchen bedeckt, die sich nach außen rollen.

---

[1] Die Gletscher der Alpen, p. 496.

[2] Ebenda, p. 485.

Den Ausfluß des Eises begleitet stets ein mehr oder minder wahrnehmbares Knistern, welches von der allmählichen Trennung des Strahles in Scheiben herrührt. Das Knistern ist bei kaltem und daher hartem Eise besonders auffallend; es tritt aber auch bei Anwendung der Ausflußöffnung mit wulstförmigen Rändern auf und hält dort noch an, wenn selbst der Druck in der Presse merklich gesunken ist.

Im großen zeigt sich die Bewegung des Eises zufolge des aus der Schwere entspringenden Druckes in der Gletscherbewegung; nur sind die relativen Verschiebungen dort weitaus kleinere und die Zeiträume, in denen sich dieselben vollziehen, unvergleichlich längere als in den Ausflußversuchen. Damit im Zusammenhange steht die Möglichkeit der Bildung großer Körner des Gletschereises, welch letztere bei Annäherung an das Ende des Gletschers, d. i. mit dem Alter des Eises, das in langen Gletschern hier mehrere hundert Jahre betragen kann, an Größe wachsen und wahrscheinlich allmählich eine bestimmte Orientierung annehmen.

Die im Jahre 1882 von Forel[1] in überzeugender Weise dargelegte Hypothese, daß das Infiltrationswasser, welches im Sommer in die Kapillarspalten zwischen die Gletscherkörner eindringt, durch die im Innern des Gletschers während des Winters aufgespeicherte Kälte zum frieren kommt, dadurch die Gletscherkörner vergrößert und das Vorrücken der Gletscher bedingt, wurde von demselben Forscher[2] im Jahre 1890 nach den von ihm angestellten Infiltrationsversuchen mit den Worten aufgegeben: Les théories qui cherchent à expliquer l'accroissement du grain du glacier par congélation de l'eau d'imbibition arrivant en contact avec la masse centrale refroidie, tombent devant le fait de l'imperméabilité constatée de la glace saine du glacier.

Die Frage der Vergrößerung des Gletscherkornes suchte 1885 Hagenbach-Bischoff[3] durch die Annahme zu lösen,

[1] Le grain du glacier. Arch. des sc. phys. et nat. de Genève, 1882, 3. Pér., T. 7, p. 329 u. ff.

[2] Etudes glaciaires. Arch. des sc. phys. et nat. de Genève, 1890, 3. Pér., T. 18, p. 5 u. ff.

[3] Das Gletscherkorn. Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Basel, 1885, Bd. 7, p. 192 bis 216.

daß sich die Gletscherkörner bezüglich der Erniedrigung des Schmelzpunktes durch Druck verschieden verhalten könnten, je nachdem der Druck in der Richtung der optischen Achse oder senkrecht dazu erfolge und daß infolge dessen die einen Körner wachsen, die anderen schwinden würden.

Im Jahre 1889[1] untersuchte Hagenbach-Bischoff, ob sich ein Unterschied in der Verbindung von Eisstücken durch Regelation, je nach der kristallographischen Orientierung, finden ließ. Zu diesen Versuchen wurden Würfel aus Eis von der Oberfläche stehenden Wassers benützt und optisch gleich oder verschieden orientiert aufeinander gepreßt. In einem Versuchsraume, dessen Temperatur höher war als 0°, ergab sich, wie auch Heim gefunden hatte, der gesuchte Unterschied; bei Temperaturen unter 0° jedoch zerteilten sich die regelierten Würfel ganz unabhängig von der Regelationsfläche. Beim Schmelzen solcher regelierter Eiswürfel zeigten sich nur jene Würfel vollständig vereinigt, bei welchen nicht nur die optischen Hauptachsen, sondern auch die Nebenachsen gleich orientiert waren. Da es nun sehr unwahrscheinlich ist, daß in der Gletscherbewegung, wenn sich die Körner aneinander verschieben, dieselben gerade in eine solche Lage, vollständig gleicher Orientierung, kommen, so wird damit auch eine hierauf bezügliche Hypothese Heim's zur Erklärung der Vergrößerung des Gletscherkornes hinfällig. Hagenbach faßt die Ergebnisse seiner Versuche in dem Satze zusammen: Die Bildung des Gletscherkornes ist keine nur dem Gletscher eigentümliche oder von der Bewegung desselben abhängige Erscheinung, sondern eine Folge der ganz allgemeinen physikalischen Tatsache, daß ein Aggregat von Eiskristallen stets grobkörnig wird, indem die Moleküle aus den kleineren in die größeren überkristallisieren.

Im Jahre 1890 kam James C. Mc Connel[2] durch Biegungsversuche von Eisstäben zu dem Schluß, daß sich ein Eiskristall so verhalte, als ob er aus einer unendlichen Anzahl dünner

[1] Über Gletschereis. Repertorium der Physik, 1889, Bd. 25, p. 776 u. ff.; Naturw. Rundschau, 1890, V, p. 96.

[2] On the plasticity of ice crystal. Proceedings of the Roy. Soc., 1890, Vol. 48, p. 259; Naturw. Rundschau, 1891, VI, p. 49.

Blätter aufgebaut wäre, deren Gleiten aneinander durch eine die Blätter verbindende zähe Substanz beträchtlich erschwert wird.

Im Jahre 1892 zeigte Emden[1] an Versuchen, daß jedes Stück Eis mit der Zeit in ein Aggregat von optisch einachsigen, Tyndall'sche Schmelzfiguren und Forel'sche Streifen zeigende Körner übergeht, die langsam, aber mit abnehmender Geschwindigkeit wachsen. Trübes Eis eines Bunsen'schen Eiskalorometers klärte sich bereits durch Bildung von kleinen Körnern in 2 Tagen und zeigte nach 7 Wochen etwa haselnußgroße Körner.

Das Umkristallisieren kleiner Körner in größere habe ich an Versuchsstücken — Strahl und dem Ausfluß unterworfen gewesenem zylindrischen Eisblocke — leicht beobachten können Diese Versuchsstücke wurden in einer doppelwandigen, mit Blech ausgekleideten Kiste, bei einer Außentemperatur nahe an Null Grad aufbewahrt. Nach 7 Tagen zeigten sich an der einen Fläche eines Strahlstückes bereits zirka hanfkorngroße Körner, das Aussehen desselben war gänzlich verändert. Die Körner lösten sich nicht zu schwierig voneinander. An Plättchen die vom Strahle abgeschnitten worden und durch Abschmelzen auf einer ebenen Metallplatte hinlänglich verdünnt waren, konnten Körner von zumeist mehreren Millimetern Größe nachgewiesen werden, während in Plättchen, die unmittelbar nach dem Versuche abgetrennt worden waren, die Körnchen kaum die Größe eines Millimeters erreichten. Auch Abschnitte vom oberen Rande des Blockes zeigten nebst kleineren bis zu mehreren Millimetern große Körner.

Die äußeren klaren Eisschichten der Kunsteisprismen zeigen nach längerem Liegen in großen Eiskästen, insbesondere dort, wo das Schmelzwasser abtropft, eine deutliche Abgrenzung der verschieden orientierten Kristallindividuen, aus denen sich das klare Eis zusammensetzt. Nach 1 bis 2 Wochen schreitet die Trennung in Eiskörner sehr merkbar fort und die Körner lösen sich leicht voneinander.

---

[1] Über das Gletscherkorn. Denkschriften der Schweizer naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1892, Bd. 33; Arch. des sc. phys. et nat. de Genève, 3. Pér., 1892, T. 20, p. 211 u. 1894, T. 22, p. 366; Naturw. Rundschau, 1892, VII, p. 495.

Im Jahre 1889 berichtet Forel[1] in der Sitzung der Naturforschenden Gesellschaft zu Genf über das Gleiten der Eisschichten in Gletschern aufeinander, und zwar nach der Schieferungsebene. Es wurde dasselbe aus der Hebung einer künstlichen Grotte erkannt, welche bei Chamonix in die linke Flanke des Bossongletschers gehauen war, und die nach einigen Jahren bis zur Oberfläche gehoben war. Die Strömungslinien des Eises würden hienach nicht parallel zur Gletscherachse bleiben, sondern sich heben und nach und nach an der Gletscheroberfläche erscheinen. Die innere Bewegung soll nicht durch Umbildung der plastischen Masse, sondern durch Gleiten der verschiedenen, durch Schieferungsebenen (clivage) getrennten Schichten, der Blaubandstruktur, aufeinanderfolgen.

Im Jahre 1895 setzte O. Mügge[2] die von Mc. Connel begonnenen Versuche fort. Er fand, daß Eisstücke, parallel zur Oberfläche geschnitten, auf zwei Holzleisten gelegt und belastet, sich nicht biegen, wenn die zur Längsrichtung senkrechte optische Achse horizontal liegt, daß dagegen eine wirkliche Biegung eintritt, wenn dieselbe vertikal steht, wobei nach der Biegung die optische Achse senkrecht zur Krümmungslinie der Basisfläche gerichtet ist. Wenn dagegen die Stäbe senkrecht zur Oberfläche, d. i. parallel zur optischen Achse geschnitten sind, so daß die optische Achse in die Längsrichtung des Stabes fällt, dann deformieren sich die Stäbe so, daß die optische Achse gleichgerichtet bleibt. Die einzelnen Schichten, senkrecht zur optischen Achse, gleiten aufeinander wie die Platten eines Glassatzes (Transversalverschiebung).[3]

1896 gibt Harry Fielding Reid[4] ein Bild der Vorgänge in einem Gletscher und unterscheidet zwischen der den jährlichen

---

[1] Archives des sc. phys. et nat. de Genève, 1889, 3. Pér., T. 22, p. 276; Naturw. Rundschau, 1890, V, p. 28.

[2] Über die Plastizität des Eises. Neues Jahrbuch der Mineralogie, 1895, Bd. II, p. 241; Naturw. Rundschau, XI, 1896, p. 370.

[3] Ich habe mit einem senkrecht zur Oberfläche eines durch Frieren in einer großen eisernen Wanne erhaltenen Eises ausgeschnittenem Stabe von 1·5 *cm* Seitenlänge des Querschnittes, der kristallographisch noch am besten entsprach, bei 0·5 *kg* Belastung eine Senkung um 2 bis 3 *mm* in 5 Tagen erhalten.

[4] Mechanics of Glaciers. Journal of Geology, Chicago, 1890. Vol. 4, p. 912.

Schneelagen entsprechenden Schichten, welche erst unterhalb der Schneegrenze (névé line) an der Gletscheroberfläche zum Vorschein kommen und den Strömungslinien des Eises, welche oberhalb der Schneegrenze nach abwärts führen, unterhalb derselben zur Oberfläche emporsteigen. Diese Strömungslinien scheinen nahezu in jenen Flächen zu liegen, welche Heim als jene der Blaubänderung in sehr anschaulicher Weise beschreibt.[1]

Im Iahre 1897 versuchte Israel Russell,[2] anknüpfend an Mc. Connel und Mügge's Untersuchungen, eine Erklärung der Gletscherbewegung, womit allerdings noch eine Hypothese über die Kornvergrößerung verbunden wurde.

In der im August 1898 stattgehabten Konferenz der internationalen Gletscherkommission[3] wurde die Einführung des Namens Bänderung, zum Unterschied von Schichtung im eigentlichen Sinne des Wortes, gewählt und eine Reihe von Untersuchungen für wünschenswert erklärt, welche sich auf die Erscheinungen an Gletschern beziehen. Es wurde dortselbst von Hagenbach-Bischoff ein Befund über die Körnerstruktur am Unteraar- und am Rhônegletscher abgegeben. Die Beziehung zwischen Bänderung und Gletscherkorn besteht darin, daß in den blauen Bändern im allgemeinen die Gletscherkörner größer und klarer, d. h. luftfreier sind als in dem weißen Eis dazwischen. Wenn im blauen Eis selbst sich weitere Bänderung, d. h. Trennung in Schichten durch die nahezu in einer Ebene sich aneinanderschließenden Grenzflächen der Körner, gebildet wird, hat man den Eindruck einer aus ungeformten Steinen aufgebauten Zyklopenmauer, bei deren Aufführung man gesucht hat, in bestimmten Intervallen die Horizontalen einzuhalten.

Die von der internationalen Gletscherkommission empfohlenen Untersuchungen an Gletschern entspringen wohl dem Umstande, daß übereinstimmende Anschauungen in Bezug auf die Entstehung der Blaubänderung nicht bestehen.

[1] Handbuch der Gletscherkunde, p. 134 und 213.

[2] The American Journal of Sciences, 1897 (4) Vol. II, p. 344 bis 346.

[3] Ed. Richter. Die Arbeiten der internationalen Gletscherkommission. Petermann, Mitteilungen, 1899, Bd. 45. p. 14.

Die eben angeführte kurze Übersicht der Forschungsergebnisse über die Eigenschaften des Gletschereises läßt erkennen, daß von den verschiedenen, die Gletscherbewegung behandelnden Theorien doch nur jene in Betracht kommen, welche die Ursache der Gletscherbewegung in der Schwerkraft und in der scheinbar plastischen Umformung der Eismasse suchen.

Während in den Ausflußversuchen relative Geschwindigkeitsdifferenzen von 20 *cm*/min. auf den Meter vorkommen, dürften dieselben in Gletschern mindestens 100.000mal kleiner sein. Die Deformation des Eises in den Ausflußversuchen ist mit der Zerteilung in ganz kleine Körner verbunden, die immer wieder zusammenfrieren, so zwar, daß beim Ausfluß reinen Eises die konzentrische Schichtung, die mit demselben verbunden ist, fast überdeckt wird.

In den breiten Eisströmen der Gletscher übernehmen die großen Eiskörner die Rolle, welche in den Ausflußversuchen die kleinen Körner spielen. Diese großen Körner aber haben sich zur Unterhaltung der Gletscherbewegung nur sehr wenig in langen Zeiträumen umzulagern und zu verdrehen, ohne sich zu zerteilen. In den Gebieten der größten relativen Verschiebungen im Gletscher sind es außer dem allgemein herrschenden Drucke insbesondere die Beanspruchungen auf Abscheren, denen die Gletscherkörner ausgesetzt sind. Je nach der kristallographischen Orientierung verhalten sich die Eiskörner verschieden gegen solche Beanspruchungen. Im Laufe der hier in Betracht kommenden langen Zeiträume werden sie diesen Beanspruchungen teils durch Deformation, teils durch Abschmelzen und Wiederfrieren nachgeben. Dabei mag ein Umkristallisieren in bestimmtem Sinne nicht ausgeschlossen sein. In dem Schmelzwasser gibt es keine Druckrichtung. Der Flüssigkeitsdruck ist eine skalare Größe, er mißt einen Zustand der Flüssigkeit, der sich auf irgendein eingetauchtes Flächenelement als normal gerichteter Druck äußert. Derselbe kann daher in keinem Zusammenhang mit der kristallographischen Orientierung allenfalls anschießender Eiskristalle stehen und auch nicht dazu herangezogen werden, die Orientierung der

Gletscherkörner in der Blaubänderung, mit den optischen Achsen senkrecht zu den Trennungsflächen, zu erklären.

Die Spannungen, welche in der großen Masse des Gletschereises durch das raschere Fortrücken der Gletschermitte entstehen, führen zum Reißen des Eises an den Rändern, geradeso wie in den Ausflußversuchen die durch die gewölbt nachdringenden Schichten ausgelösten Spannungen zur Zerteilung des Strahles in Scheiben führen, mit Trennungsflächen senkrecht auf der Richtung der Spannungen.[1]

Obzwar das Gletschereis schon durch die Kornstruktur inhomogen ist, so scheint diese doch allein zur Bildung von Bänderungen nicht auszureichen. Es dürften hiezu vielmehr die sonstigen Ungleichheiten im Eise, als Luft-, Wasser-, Schutt- und Schneeeinschlüsse, dann geringfügige Temperaturdifferenzen und die durch alle diese Umstände bedingte verschiedene Härte des Eises in Betracht kommen. Immer aber würde ich mit Rücksicht auf die eingangs auseinandergesetzten Bedingungen der Bildung einer Struktur die Ausbildung der Bänderung mit den durch die scherenden Kräfte in der Eismasse ausgelösten, relativen Verschiebungen eher erklären zu können glauben, als durch den Druck in der Eismasse überhaupt. Die eigentümliche, von Hagenbach-Bischoff und von E. v. Drygalski festgestellte Orientierung der Gletscherkörner in den Schichten der Blaubänderung scheint sogar dafür zu sprechen, daß in diesen Eispartien das Gleiten der Schichten aufeinander begünstigt ist, worauf auch die Beobachtungen von Forel hinweisen.

Ausflußversuche mit Kampfer.

Zu diesen Versuchen wurde der Ausflußzylinder von 6 *cm* Innenweite benützt und der Kampfer in Stücken eingetragen. Die Zimmertemperatur war ungefähr 10 bis 12° C.

Bei einem Drucke von 11.000 bis 12.000 *kg*, entsprechend 380 bis 410 kg/cm^2, wurden aus einer Ausflußöffnung von

---

[1] K. R. Koch, Künstliche Nachahmung der Gletscher, Wiedemann's Annalen, 1894, Bd. 52, p. 212 u. ff.

0·6 *cm* Durchmesser in 80 Sekunden 5·3 *cm* Strahl erhalten. Die Ausflußgeschwindigkeit betrug hienach 11·24 *cm*/min.

Zum Ausfluß aus der Öffnung von 12 *cm* war ein Druck von 9.000 bis 10.000 *kg*, d. i. 300 bis 340 kg/cm^2 erforderlich. In 80 Sekunden wurden 14·5 *cm* Strahl erhalten. Die Ausflußgeschwindigkeit ist hienach 10·87 *cm*/min. und die Ausflußmenge 12·30 cm^3/min.

Die Kampferstrahlen gleichen den aus dem gleichen Gefäß erhaltenen Eisstrahlen vollkommen und sind genau so in Scheiben geteilt.

Der Kampferzylinder, welcher aus dem Ausflußgefäße genommen worden war, spaltete sich in zwei Teile. Diese wurden genau aufeinander gepreßt über ein Jahr, von einem Becherglase bedeckt, liegen gelassen, ohne daß dieselben zusammengeschweißt wären.

Ausfluß von Blei.

Hiezu wurde das kleine gußeiserne Ausflußgefäß von 2·5 *cm* innerem Durchmesser benützt, in welches ein Stempel aus Stahlguß mit einem zylindrischen, 7·5 *cm* im Durchmesser haltenden Kopfe paßt und auf dem entsprechenden Untergestelle verwendet.

Zumeist wurden die ausfließenden Bleizylinder aus 2 *mm* dicken Bleiplatten 24 bis 30 *mm* hoch geschlichtet. Die ausfließenden Bleidrähte lassen äußerlich nichts von ihrer konzentrischen Schichtung erkennen. Diese wird erst an Querschnitten oder beim Brechen durch Hin- und Herbiegen der Strahlen kenntlich. Die Drähte treten etwas erwärmt aus den Ausflußöffnungen.

Längsschnitte der ausgeflossenen geschichteten Bleizylinder lassen die Deformation der Schichten sehr gut erkennen, mitunter lösen sich auch die einzelnen Schichten voneinander. Die Längsschnitte der Strahlen zeigen sehr deutlich das konzentrische Eindringen der oberen in die unteren Schichten und geben ein sehr gutes Bild der Vorgänge beim Ausfluß. Die zum größten Teil ausgeflossenen Schichten überziehen im Strahle die inneren Schichten in der Form ganz dünnwandiger

Röhren, die sich vom Strahle lösen, wenn derselbe schwach gebogen wird.

Zur Anfertigung der Längsschnitte wurde eine eigene Vorrichtung benützt, welche aus einer Holzunterlage mit scharfkantiger Rinne zur zentralen Einlagerung der Bleistrahlen, zwei beiderseits des Strahles verschiebbaren, den Strahl fixierenden Leisten und einem nach der Mittellinie geschlitzten, parallelopipedischen Holzstücke besteht, in dessen Schlitz ein aus Stahlblech gefertigtes Messer verschiebbar ist. Das geschlitzte Holzstück wird durch einen die Unterlage umfassenden Rahmen so geführt, daß sich das Messer zentral auf den Bleistrahl aufsetzt. Unter der hydraulischen Presse wird das mit Seife geschmierte Messer herabgedrückt. Die Trennungsflächen der Schichten treten dabei hinlänglich deutlich hervor, wenngleich das Blei geneigt ist, sich längs der Schnittfläche zu schmieren. Die Längsschnitte der zum Ausfluß benützten Bleizylinder können mit demselben Apparat bei zusammengeschobenen Leisten ausgeführt werden.

Massiv gegossene Bleizylinder bedürfen zum Ausfluß der Anwendung eines höheren Druckes als geschichtete Zylinder. Die Bleidrähte treten mit glatter glänzender Oberfläche aus den Ausflußöffnungen und zeigen weder beim Zerschneiden noch beim Abbrechen durch Hin- und Herbiegen eine Struktur. Dieselben schnüren sich im letzteren Falle flach ein und brechen erst ab, wenn sie beträchtlich verdünnt sind.

Die Drucke, welche erforderlich waren, um den Ausfluß der Bleizylinder aus einer bestimmten Ausflußöffnung zu unterhalten, wurden von einem Versuche zum nächsten sowohl bei geschichteten als bei massiven Bleizylindern recht unregelmäßig gefunden. Während eines und desselben Versuches hielt sich der Druck insoweit konstant, als es eben das stoßweise Pumpen an der Presse zuließ. Es mußte aus diesen Gründen verzichtet werden, bei diesem kleinen Ausflußgefäß die Abhängigkeit der Ausflußgeschwindigkeit vom Drucke näher zu untersuchen. Es dürfte dies nur unter Anwendung kontinuierlicher Drucke, wie sie etwa die Tamman'sche Hebelvorrichtung erzeugt, möglich sein.

Die mit verschiedenen Ausflußöffnungen mit massiven und geschichteten Bleizylindern erhaltenen Versuchsresultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. In derselben sind der Gesamtdruck Q in Kilogrammen, der auf die Flächeneinheit des Ausflußgefäßes reduzierte Druck in kg/cm^2 und die Länge des in der Versuchszeit t ausgeflossenen Bleidrahtes angegeben.

Durchmesser der Ausfluß-öffnung	Bleizylinder							
	massiv gegossen				aus Platten geschlichtet			
	Q Kilogramm	kg/cm^2	l Millimeter	t Sekunden	Q Kilogramm	kg/cm^2	l Millimeter	t Sekunden
3 *mm*	14500	2954	295	60	13600	2772	345	60
6	11200	2283	120	43	—	—	—	—
	8500	1730	122	55	8200	1670	128	35
7	—	—	—	—	5800	979	119	42
9	7900	1610	113	105	4500	916	120	85
	5700	1160	83	80	4600	936	114	76
	7300	1490	115	66	—	—	—	—
12	5400	1100	108	105	4100	836	108	105

Bei allen Ausflußöffnungen kommt der Unterschied in der Größe des den Ausfluß massiver und geschichteter Zylinder unterhaltenden Druckes deutlich zum Ausdrucke. Außerdem stellt sich die Geschwindigkeit der aus geschichteten Bleizylindern erhaltenen Strahlen größer dar als bei massiven Blöcken. Diese Versuche bilden die Erklärung für jenen Teil der Unregelmäßigkeiten, die sich beim Ausfluß von Weichparaffin dadurch ergeben, daß im ausfließenden Blocke Trennungen eintreten.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. V. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Notiz über das Vorkommen von Radium im Monazitsand

von

L. Haitinger und **K. Peters.**

Laboratorium der österreichischen Gasglühlicht- und Elektrizitätsgesellschaft in Atzgersdorf bei Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Mai 1904.)

Bei der Verarbeitung von brasilianischem Monazitsand im Großbetriebe wurden gelegentlich bedeutende Mengen salpetersaurer Salze der Thorerde (welche noch mit anderen seltenen Erden verunreinigt war) durch Ammoniak gefällt. Aus den eingedampften Filtraten wurde zunächst eine erhebliche Menge von Ammonnitrat durch Kristallisation entfernt und die Mutterlaugen zwecks Reinigung mit Ammoncarbonat behandelt, wodurch eine wesentlich aus Calciumcarbonat bestehende Fällung erhalten wurde. Diese Fällung erwies sich als sehr schwach radioaktiv. Etwa 50 *kg* derselben wurden in verdünnter Salzsäure gelöst, von einem geringen manganhaltigen Rückstand abfiltriert und mit sehr wenig verdünnter Schwefelsäure versetzt. Die Schwefelsäuremenge war so berechnet, daß die ihr entsprechende Gipsmenge im angewandten Flüssigkeitsvolumen in Lösung bleiben konnte.

So wurden etwa 150 *g* einer Fällung erzielt, die, am Elektroskop geprüft, recht starke, Elektrizität zerstreuende Wirkung aufwies. Sie wurde mit Soda geschmolzen, ausgelaugt, schwefelsäurefrei gewaschen und in Salzsäure gelöst. Es blieb ein kleiner, aber nicht ganz unbedeutender Rest ungelöst, der auch wiederholtem Aufschließen stand hielt und noch viel aktiver als das Ausgangsprodukt war. In diesem Teile konnte spektroskopisch kein Radium entdeckt werden und ist dessen chemische Natur noch nicht erforscht. Die salzsaure Lösung wurde mit Ammoniak unter Zusatz von

Wasserstoffsuperoxyd gefällt, wodurch eine gallertartige Fällung abgeschieden wurde, die nach dem Trocknen schwach aktiv war. Das Filtrat wurde mit oxalsaurem Ammon gefällt, das ausgefallene Oxalat abfiltriert, geglüht, in Salzsäure gelöst und zur Trockne gebracht. Durch Ausziehen mit Alkohol konnte eine kleine, strontiumhaltige Fraktion abgetrennt werden. Der verbleibende Rückstand bestand vornehmlich aus Chlorbaryum und erwies sich als ziemlich radioaktiv. Die Gesamtmenge, die uns zur Verfügung stand, war nicht gerade sehr groß und, anderweitig abgelenkt, überließen wir das Präparat durch zwei Jahre sich selbst. Inzwischen zeigten sich die Aufbewahrungsgefäße stark braun gefärbt, was uns veranlaßte, neuerdings die Aktivität zu prüfen. Wir fanden dieselbe durch das bloße Stehen auf mehr als das Doppelte gesteigert.

Durch mehrmaliges Kristallisieren gelang es, eine Fraktion zu erhalten, welche nach dem spektroskopischen Befunde der Herren Exner und Haschek unzweifelhaft Radium enthält. Berücksichtigt man die Provenienz dieses Präparates, so liegt der Gedanke nahe, daß das Radium aus jenen mineralogischen Bestandteilen des Monazitsandes stammt, welche auch Uran enthalten. Nach einer allerdings nur sehr beiläufigen Schätzung dürfte das Verhältnis zwischen den absoluten Mengen von Radium und Uran im Monazitsande ähnlich sein wie in der Pechblende. Als Ausgangsmaterial zur Radiumgewinnung wird der Monazitsand[1] daher wohl nicht gut dienlich sein können, dagegen ist der von uns geführte Nachweis des Vorkommens von Radium in Thorpräparaten nicht ohne Interesse für die Beurteilung der Aktivität des Thors.

Indem wir den Herren Exner und Haschek für die spektroskopische Untersuchung bestens danken, glauben wir auch erwähnen zu sollen, daß unser Präparat wohl auch die erste nicht aus Joachimsthaler Pechblende stammende Substanz ist, in welcher Radium spektralanalytisch nachgewiesen wurde.

---

[1] Der Gehalt des Monazitsandes an Uran ist außerordentlich gering. F. Zerban (Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft, 1903, 3911) bestimmte ihn zu 0·04%.

Über die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 *km* nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege

von

J. Hann.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. April 1904.)

Im vorigen Herbste hatte ich Veranlassung zu fragen, welche Temperaturabnahme mit der Höhe die bis dahin vorliegenden Temperaturaufzeichnungen bei den internationalen Ballonaufstiegen (bemannte und unbemannte) ergeben mögen, da die in den »Berliner wissenschaftlichen Ballonfahrten« publizierten bezüglichen Ergebnisse nun doch schon überholt waren oder wenigstens eines Vergleiches mit den Ergebnissen der viel zahlreicheren neuen Aufstiege bedurften. Ich schrieb mir zu diesem Zwecke die abgelesenen oder registrierten Temperaturen in 1, 2, 3 etc. bis 10 *km* aus den vorliegenden Publikationen heraus,[1] wobei natürlich fast immer Interpolationen zwischen zwei nächstgelegenen Höhenintervallen nötig wurden oder die Temperaturabnahme pro 100 *m* in den benachbarten Höhenschichten zu Hilfe genommen werden mußte.

[1] Königl. Preuß. Meteorolog. Institut: Wissenschaftliche Luftfahrten, III. Bd., p. 73; — Assmann und Berson, Arbeiten am aeronautischen Observatorium in den Jahren 1900 und 1901, Berlin 1902; detto, 1. Oktober 1901 bis 31. Dezember 1902, Berlin 1904; — Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt, H. Hergesell, 1901, 1902 und 1903, Jänner bis Mai; außerdem Hergesell, in Met. Z. 1900, p. 11/12.

Da sich meine Fragestellung hauptsächlich auf die größeren Höhen der freien Atmosphäre über 5 *km* hinaus bezog, nachdem für die unteren Schichten die Berliner Fahrten schon ziemlich zureichendes und verläßliches Beobachtungsmaterial geboten hatten, so ließ ich alle Ballonaufstiege, die 5 *km* nicht erreicht hatten, prinzipiell weg (einige wenige an den Tagen mit höheren Aufstiegen wurden mitgenommen), Serien von zwei und mehr Aufstiegen am gleichen Tage und am gleichen Orte wurden schließlich nur in Mittelwerten verwendet, um einem einzigen Tage und einem Orte nicht ein zu großes Gewicht für das Gesamtmittel zu geben.

Die Orte, deren Ballonaufstiege benützt wurden, waren Paris, Straßburg, Berlin, Wien; die relativ wenigen Aufstiege zu Moskau und Petersburg glaubte ich ausschließen zu müssen, um dem Gesamtmittel nicht seine klare Bedeutung für das westliche Zentraleuropa zu nehmen.

Es wurden alle publizierten Beobachtungsergebnisse verwendet bis Mai 1903, für den Juni 1903 nur die drei Wiener Aufstiege, weil die Publikation für Juni 1903 noch nicht vorlag und andere Arbeiten mich zum Abschlusse drängten, zudem noch einige Wiener Aufstiege vom August und November 1903.

Die Ergebnisse der ersten internationalen Fahrten wurden zumeist einem Artikel von Herrn Prof. Hergesell in Met. Z., 1900, p. 11 (ohne die interpolierten Werte für große Höhen) entnommen. Zudem wurden verwendet die drei Fahrten von Welsh 1852, 17. und 26. August und 10. November, deren Ergebnisse mit den neueren Beobachtungen in Übereinstimmung sind, dann die Berliner Fahrten März 1893 bis März 1899 bis 6 *km*, 11 an der Zahl. Ich wagte es schließlich, aus dem so zusammengestellten Beobachtungsmateriale Monatsmittel zu bilden, wenigstens zu einer ersten Orientierung. Dabei zeigte es sich, daß eigentümlicherweise von einigen Monaten recht zahlreiche, von anderen aber wieder relativ sehr wenige Ballonaufstiege vorliegen. Die Zahl der verwendeten Aufstiege bis zu 6 *km* Höhe, wobei aber, wie oben angegeben, manche Serien bloß als Mittelwerte zählen, sind in den einzelnen Monaten:

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
10	12	16	14	18	12	11	11	12	16	11	13	156

Der Mai zählt die meisten, Jänner, Juli, August, November die wenigsten Aufstiege. Diese Zahlen repräsentieren leider nicht ebensoviele Tage, da Aufstiege zu Paris, Straßburg, Berlin, Wien am selben Tage als 4 gezählt wurden; mancher Tag hat dagegen allerdings bloß zwei bis drei, ja selbst nur eine Temperaturreihe geliefert; für die älteren Ballonaufstiege ist dies letztere die Regel.

Als diese Zusammenstellung eben zum Abschlusse gekommen war, publizierte Herr Teisserenc de Bort in den »Comptes rendus« der Pariser Akademie (Tome CXXXVIII, p. 42) die Temperaturergebnisse von 581 Aufstiegen seiner Registrierballons zu Paris (unbemannte Ballons) in Form von Mitteln für die Jahreszeiten für Höhenintervalle von 500 *m* bis zu 5 *km*, darüber, und zwar bis 14 *km*, für Höhenintervalle von Kilometern. Eine größere Publikation darüber steht in Aussicht.

Ich glaube dessenungeachtet die wesentlichsten Ergebnisse meiner begonnenen Arbeit nicht zurückhalten zu sollen, weil selbe auf einem anderen Materiale beruht, sich zumeist auf andere, mehr kontinentale Orte bezieht (die Aufzeichnungen der Pariser »Ballons sondes« an den internationalen Termintagen sind in die obigen Mittel etwa mit dem Gewichte $^1/_4$ eingetreten) und auch die Aufzeichnungen in bemannten Ballons umfaßt. Auch ist die Bearbeitung des Materiales eine völlig verschiedene.

Bei der geringen Zahl der Beobachtungen und Registrierungen, auf welchen meine Monatsmittel beruhen, haben natürlich die Mittelwerte der Temperaturen selbst fast keine Bedeutung, wozu noch kommt, daß auf die Daten für die untersten Schichten die tägliche Temperaturschwankung einen undefinierbaren Einfluß genommen hat (viele Aufstiege am frühesten Morgen, fast alle bemannten Fahrten fanden in den

ersten Vormittagsstunden statt); die mittleren Temperaturen an der Erdoberfläche, die ich allein in meine Tabellen aufgenommen habe, zeigen dies deutlich genug, aber es setzt sich dies bis in die hohen Regionen fort. Die Zufallswitterung der Aufstiegstage ist in den Mitteln durchaus noch nicht eliminiert, selbst oberhalb 3 *km*, die untere Grenze der Höhenschichten, auf welche sich meine Diskussion beschränken soll (obere Grenze 10 *km*).

Bei Prüfung meiner Temperaturmittel aus relativ so zahlreichen Ballonaufstiegen staunte ich über die glücklichen Ergebnisse der ersten Berliner Ballonfahrten, wie sie in dem Werke »Wissenschaftliche Luftfahrten« enthalten sind. Die Jahreszeitenmittel repräsentierten dort fast die normale Temperatur von Berlin, während meine obigen Temperaturen noch weit von einem beiläufigen Normalwerte für das westliche Mitteleuropa sich entfernen.

Ein Vergleich dürfte von Interesse sein.

Mittlere Temperaturen.

	Zahl	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
			Berliner Fahrten 1891/98			
Erde	56	0·3	8·7	18·4	9·3	9·2
1 *km*	56	— 0·6	2·5	11·0	5·4	4·6
2	50	— 5·1	— 2·1	5·3	1·6	— 0·1
3	40	— 10·8	— 8·6	0·9	— 2·6	— 5·3
4	32	—14·6	—14·5	— 5·0	— 7·7	—10·4
			Spätere Fahrten, aber obige eingeschlossen			
Erde	159	— 0·2	6·3	16·6	10·3	8·3
1 *km*	159	0·3	3·3	12·5	8·2	6·1
2	159	— 1·9	— 2·3	6·8	4·1	1·7
3	159	— 6·9	— 7·4	1·7	— 0·7	— 3·3
4	158	—12·7	—13·2	— 3·8	— 6·5	— 9·0

Das Frühjahr ist im Mittel der zahlreicheren Aufstiege zu kalt, Herbst und Winter zu warm. Aus diesen Zahlen einen jährlichen Gang der Temperatur in den höheren Schichten der Atmosphäre direkt ableiten zu wollen, ist natürlich unmöglich. Die Temperaturzunahme bis 1 *km* im Winter resultiert aus den frühen Morgenaufstiegen und der Witterungslage, die bei der weitaus größten Zahl der Fahrten eine antizyklonale war.

Ich konnte also nur versuchen, die Temperaturunterschiede für Höhenstufen von 1 *km* zu benutzen (und zu diskutieren), die von den zufälligen Wetterlagen, in den höheren Schichten wenigstens, weit unabhängiger sind als die Temperaturen selbst. Inwieweit auch auf diese zyklonale und antizyklonale Wetterlagen einen Einfluß haben, darüber soll später eine kleine Untersuchung angestellt werden.

Die Temperaturabnahme von der Erdoberfläche bis zu 1000 *m* Höhe ist zu sehr von der Tageszeit der Ballonaufstiege abhängig, als daß man einigermaßen allgemeinere Schlüsse aus den bezüglichen Zahlen ziehen könnte. Es können nur die höheren Schichten in Betracht kommen. Die tägliche Temperaturschwankung ist in der freien Atmosphäre über 1 *km* vom Erdboden schon so geringfügig, daß die Temperaturabnahme zwischen 1 und 2 *km* von derselben schon fast unabhängig ist. Die Tabelle II enthält den jährlichen Gang in etwas ausgeglichenen Werten.

Diese letzteren Zahlen zeigen schon einen ziemlich regelmäßigen Gang. Ich habe aber doch nur Höhenstufen von je 2 *km* weiter behandelt, da nicht zu besorgen ist, daß dadurch beachtenswertes Detail verloren geht. Ein Nebengedanke dabei war, diese Temperaturdifferenzen an die vieljährigen Mittelwerte der Temperatur auf dem Sonnblickgipfel anzuschließen, um derart auch den Temperaturgang in den Höhenschichten von 5, 7 und 9 *km* zu erhalten, da sich die Mittelwerte selbst, wie schon bemerkt, kaum verwerten lassen.

Tabelle I.

Temperaturänderung pro Kilometer Erhebung.

	Temperatur an der Erdoberfläche	Kilometer 0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Zahl der Ballonaufstiege		159	159	159	158	158	156	150	139	122	118
Jänner	—0·7	+4·6	—2·5	—5·9	—6·0	—6·3	—7·4	—7·6	—7·1	—7·9	—7·6
Februar	0·3	—1·7	—2·2	—5·1	—6·0	—7·2	—7·0	—7·2	—7·6	—6·4	—5·3
März	3·1	—2·9	—4·9	—5·5	—6·7	—6·6	—7·3	—7·1	—6·7	—4·6	—3·0
April	7·0	—3·6	—4·8	—4·0	—5·3	—6·9	—7·4	—7·0	—4·9	—6·6	—4·1
Mai	8·9	—2·7	—6·9	—5·9	—5·3	—6·7	—7·3	—7·5	—7·3	—8·0	—7·2
Juni	16·1	—3·6	—7·2	—5·4	—5·9	—5·9	—6·2	—8·4	—8·5	—8·8	—6·7
Juli	15·5	—5·7	—4·8	—4·5	—5·0	—5·6	—6·7	—6·9	—7·1	—7·4	—8·2
August	18·2	—3·1	—4·9	—5·4	—5·8	—6·1	—6·2	—6·2	—7·6	—6·7	—5·7
September	16·4	—3·9	—5·1	—4·5	—5·6	—5·8	—6·7	—7·0	—7·7	—7·6	—7·4
Oktober	11·3	—4·0	—4·5	—4·8	—5·5	—5·6	—6·9	—6·4	—6·4	—6·6	—5·2
November	2·9	+1·6	—2·6	—5·0	—6·4	—6·4	—6·8	—7·8	—7·7	—8·6	—7·3
Dezember	—0·1	—1·5	—2·0	—3·9	—5·3	—6·5	—5·8	—5·2	—6·9	—6·5	—6·4
Jahr	8·3	2·2	4·4	5·0	5·7	6·3	6·8	7·0	7·1	7·1	6·3

Tabelle II.

Mittlere Temperaturdifferenzen für Intervalle von je 1 *km* Höhenunterschied

ausgeglichen nach der Formel $(a+2b+c):4$.

	Kilometer									
	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	(10—11)
Jänner	2·3	5·2	5·8	6·5	7·0	6·9	7·1	7·2	6·7	3·3
Februar	3·0	5·4	6·1	6·8	7·2	7·2	7·2	6·3	5·3	2·0
März	4·2	5·0	6·2	6·8	7·3	7·1	6·5	5·6	4·9	1·1
April	5·3	4·9	5·7	6·8	7·3	7·2	6·0	6·4	4·6	1·1
Mai	6·5	5·3	5·5	6·6	7·1	7·6	7·0	7·8	6·3	1·8
Juni	6·5	5·3	5·5	6·0	6·6	7·8	7·8	8·2	7·2	3·1
Juli	5·4	5·0	5·4	5·8	6·5	7·1	7·6	7·6	7·2	4·6
August	4·9	4·9	5·5	5·9	6·4	6·6	7·5	7·1	6·8	6·0
September	4·9	4·8	5·6	5·8	6·6	6·7	7·3	7·1	6·5	6·8
Oktober	4·2	4·8	5·7	5·9	6·8	6·9	7·1	7·3	6·2	6·9
November	2·9	4·7	5·9	6·2	6·6	6·8	7·2	7·6	6·6	6·1
Dezember	2·3	4·7	5·8	6·4	6·4	6·5	7·1	7·3	7·0	4·8
Jahr	4·4	5·0	5·7	6·3	6·8	7·0	7·1	7·1	6·3	(4·0)

Der jährliche Gang dieser Temperaturdifferenzen für je 2 *km* Höhenabstand wurde dann mittels Sinusreihen berechnet, die so erhaltenen Zahlenwerte stehen in Tabelle III neben den rohen Mitteln. Die Formeln selbst sind:

1 bis 3 *km*... $9\cdot37+2\cdot04\sin(300°+x)+0\cdot37\sin(244°+2x)$
3 » 5 ...$12\cdot02+0\cdot77\sin(54\cdot5+x)+0\cdot19\sin(306+2x)$
5 » 7 ...$13\cdot85+0\cdot72\sin(2+x)+0\cdot21\sin(259+2x)$
7 » 9 ...$14\cdot25+0\cdot98\sin(50+x)+1\cdot03\sin(139+2x)$

Die Amplitude des jährlichen Ganges nimmt merkwürdigerweise oberhalb 7 *km* wieder zu.

Tabelle III. Temperaturdifferenzen für Höhenschichten von je 2 *km*.

	Beobachtet				Berechnet			
	1—3	3—5	5—7	7—9	1—3	3—5	5—7	7—9
	Kilometer							
Jänner	7·5	12·3	13·9	14·3	7·3	12·5	13·7	14·2
Februar ...	8·4	12·9	14·4	13·5	8·0	12·8	14·1	12·9
März	9·2	**13·0**	14·4	12·1*	9·4	**12·9**	14·6	12·3*
April	10·2	12·5	14·5	12·4	10·7	12·6	**14·8**	12·9
Mai	**11·8**	12·1	**14·7**	14·8	**11·4**	12·1	14·6	14·4
Juni	**11·8**	11·5	14·4	**16·0**	**11·4**	11·5	14·1	15·6
Juli.......	10·4	11·2*	13·6	15·3	10·8	11·2*	13·6	**15·7**
August ...	9·8	11·4	13·0*	14·6	10·1	11·3	13·3	14·9
September .	9·7	11·4	13·3	14·4	9·4	11·5	13·3*	14·2
Oktober ...	9·0	11·6	13·7	14·4	8·7	11·7	13·3	14·2
November .	7·6	12·1	13·4	14·8	7·9	11·9	13·4	14·8
Dezember..	7·0*	12·2	12·9	14·4	7·3*	12·2	13·4	14·9
Jahr	9·37	12·02	13·85	14·25	9·37	12·02	13·85	14·25

In der Höhenschichte von 1 bis 3 *km* tritt das Maximum der Wärmeabnahme im Mai und Juni ein, ein sehr bemerkenswertes Resultat, auf welches wir später noch etwas näher eingehen werden. In den nächsten Höhenschichten von 3 bis 5 und 5 bis 7 *km* tritt das Maximum schon früher ein, im Februar und März und im April. Das ist auffallend, um so mehr als in der Höhenschichte von 7 bis 9 *km* das Maximum sich auf den Sommer verspätet. Es wird eine weitere Prüfung nötig werden, wie weit dies in der Unzulänglichkeit der Zahl der Beobachtungen begründet sein mag.

Der Eintritt des Maximums der Wärmeabnahme zwischen 1 und 3 *km* in der freien Atmosphäre im Mai und Juni stimmt völlig überein mit dem Ergebnis, das man bisher aus den Beobachtungen an Gebirgsstationen abgeleitet hatte. Man mochte zweifeln und hat gezweifelt, ob letzteres Resultat auch für die freie Atmosphäre gelten möge. Man hatte Grund dazu, denn zu dieser Zeit sind die Täler schon stark erwärmt, während die größeren Berghöhen eben erst ihre Schneelage verloren haben oder sie selbst noch aufweisen. Darauf konnte man mit Recht die rascheste Wärmeabnahme im Hochgebirge im Frühsommer zurückführen. Nun stellt sich aber heraus, daß zur selben Zeit auch in der freien Atmosphäre die rascheste Wärmeabnahme mit der Höhe sich einstellt, also das für die Gebirge gefundene Resultat allgemeine Geltung hat. Das ist höchst wichtig, denn es erklärt uns manche charakteristischen Witterungserscheinungen des Frühsommers, die Gewitter- und namentlich die Hagelhäufigkeit, die besondere Tendenz zu heftigen, aufsteigenden Luftbewegungen.

Die Übereinstimmung des jährlichen Ganges der Temperaturdifferenzen zwischen 1 und 3 *km* im Gebirge und in der freien Atmosphäre ist sogar überraschend groß.

Die mittleren Temperaturdifferenzen Sonnblick (3106 *m*) — Bad Gastein (1023 *m*) sind ($\Delta h = 3083\ m$):

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
8·8	10·8	12·7	13·8	**14·0**	**14·5**	13·2	13·0	12·5	11·6	9·5	8·7*	11·91

Diese Differenzen sind eigentlich noch um $4^0/_0$ zu verkleinern, also das Jahresmittel auf 11·47 zu reduzieren. Die Gleichung für diese Temperaturdifferenzen ist:

Sonnblick-Bad Gastein:

$$11\cdot47+2\cdot56 \sin(296+x)+0\cdot72 \sin(296+2x)$$

Ballonbeobachtungen:

$$9\cdot37+2\cdot04 \sin(300+x)+0\cdot37 \sin(244+2x)$$

Der jährliche Gang ist also fast genau derselbe, nur die Amplitude und das Jahresmittel selbst ist etwas größer. Die mittlere Temperaturabnahme zwischen Bad Gastein und Sonnblick ist 0·57, jene in der freien Atmosphäre 0·47 pro 100 *m*. Hätte ich statt der Beobachtungen zu Bad Gastein in Tallage jene einer Gipfelstation von 1000 *m* Höhe verwenden können, so würde die Übereinstimmung noch viel größer, in der Amplitude vielleicht eine vollständige geworden sein.

Um den jährlichen Gang der Temperaturdifferenzen zwischen 3 bis 5, 5 bis 7, 7 bis 9 *km* einigermaßen auf seine allgemeine Gültigkeit prüfen zu können, will ich doch die von Teisserenc de Bort publizierten Ergebnisse von 518 Ballonaufstiegen zum Vergleich herbeiziehen. Teisserenc de Bort hat aber bisher bloß Jahreszeitenmittel mitgeteilt. Es entsteht daher die Frage, wie weit man den jährlichen Gang bloß aus den Mitteln der Jahreszeiten beurteilen kann.

Es ergab sich das einigermaßen überraschende Resultat, daß man aus den Mitteln der Jahreszeiten die ganzjährige Temperaturwelle mit vollkommener Genauigkeit berechnen kann.

Einige Proben werden dies nachweisen.

Sonnblick, reduziertes Mittel 1851/95:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
—12·5	—8·0	0·3	—5·1	—6·33

Kältester Monat	....	Februar	—12·9
Wärmster „	....	Juli	1·2

Die vier Jahreszeiten geben:

$$t = -6 \cdot 33 + 6 \cdot 56 \sin (257 \cdot 2^\circ + x),$$

die Amplitude muß aber, um mit jener aus den Monatsmitteln vergleichbar zu werden, im Verhältnis des Bogens zum Sinus von 45° vergrößert, also mit:

$$\frac{\pi}{4} : \sin \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 111$$

multipliziert werden. Dann erhält man 7·28.

Die Berechnung des ersten Gliedes aus den Temperaturmitteln der 12 Monate ergibt die Gleichung

$$t = -6 \cdot 33 + 7 \cdot 18 \sin (257 \cdot 0 + x).$$

Die Übereinstimmung ist also eine vollständige. Sie ist vielleicht eine zufällige? Ich rechne deshalb noch den jährlichen Temperaturgang zu Graz und als extremsten, von jenem auf dem Sonnblick am meisten abweichenden Temperaturgang jenen von Jakutsk. Die Ergebnisse sind:

Jährlicher Temperaturgang zu Graz.

Aus den Mitteln der Jahreszeiten:

−2·2°, 8·4, 17·6, 8·2,

hier ist also der Frühling wärmer als der Herbst, entgegengesetzt wie auf dem Sonnblick. Es gaben

die Jahreszeiten ..... $8 \cdot 0 + 10 \cdot 99 \sin (270 \cdot 6^\circ + x)$,
die 12 Monate .... $8 \cdot 0 + 10 \cdot 85 \sin (270 \cdot 8 + x)$,

somit trotzdem völlig übereinstimmend.

Jakutsk:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
−40·2°	−9·5	16·3	−11·0	−11·10°

Gleichung des jährlichen Ganges aus den Mitteln der Jahreszeiten:

$$-11 \cdot 10 + 31 \cdot 39 \sin (271 \cdot 5 + x),$$

aus den 12 Monaten:

$$-11 \cdot 10 + 31 \cdot 19 \text{ in} (270 \cdot 9 + x).$$

Die Phasenzeit ist völlig übereinstimmend (bis auf einen halben Tag), die Amplitude (nach Multiplikation mit 1·111) um 0·2°, d. i. um 0·7% zu groß.

Man ist also völlig berechtigt, aus den Mitteln der Jahreszeiten das erste Glied der Sinusreihen, die den jährlichen Gang darstellen sollen, zu berechnen.

Wir können demnach die von Teisserenc de Bort mitgeteilten Temperaturen der Jahreszeiten für unseren Zweck verwenden.

Temperaturdifferenzen nach 581 Ballonaufstiegen von Teisserenc de Bort.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1 bis 3 *km*	7·8*	**10·8**	10·1	8·6	9·33
3 » 5	11·6	**11·9**	11·0*	11·2	11·42
5 » 7	**13·8**	**13·8**	13·0*	13·4	13·50
7 » 9	13·8*	14·0	**15·6**	15·0	14·60
9 » 11	11·0	6·9*	12·3	**13·0**	10·80

Auch in diesen Zahlen fällt die große Änderung auf, die im jährlichen Gange zwischen den tieferen und den höheren Schichten eintritt. Die letzteren haben, wie bei uns vorhin, das Maximum der Temperaturabnahme nach oben im Sommer und im Herbst. Die Gleichungen für diese Jahresperioden sind:

Nach 581 Aufstiegen:

1 bis 3 *km*	$9·33+1·76 \sin (313·7+x)$
3 » 5	$11·42+0·51 \sin (40·6+x)$
5 » 7	$13·50+0·50 \sin (63·4+x)$
7 » 9	$14·60+1·14 \sin (240·8+x)$
9 » 11	$10·80+3·45 \sin (192·0+x)$

Nach 150 Aufstiegen (rund):

1 bis 3 *km*	$9·37+2·04 \sin (300·0+x)$
3 » 5	$12·02+0·77 \sin (54·5+x)$
5 » 7	$13·85+0·72 \sin (2·0+x)$
7 » 9	$14·25+0·98 \sin (50·0+x)$

Die Änderung des jährlichen Ganges mit zunehmender Höhe erfolgt nach den Ergebnissen von Teisserenc de Bort schon viel regelmäßiger als in unseren Zahlen.

Die rascheste Wärmeabnahme in dei freien Atmosphäre tritt nach 581 Aufstiegen in Paris (genähert) ein:

				Eintritt des Maximums
Höhenschichte	1	bis	3 *km*	15. Mai
»	3	»	5	14. Februar
»	5	»	7	27. Jänner
»	7	»	9	28. Juli
»	9	»	11	15. September.

Also zuerst eine Verfrühung des Eintrittes in den höheren Schichten, wie bei uns, dann in 7 bis 9 *km* eine Verspätung um ein halbes Jahr gegenüber der vorhergehenden Schichte; in 9 bis 11 *km* tritt das Maximum gar erst Mitte September ein. Das ist höchst merkwürdig. Auch in den von mir berechneten rund 150 Ballonaufstiegen zeigt sich dieselbe Verspätung (in obiger Gleichung für 7 bis 9 *km* tritt sie allerdings nicht hervor, weil das zweite Glied, das eine größere Amplitude hat als das erste, fehlt. Unsere Zahlen für 7 bis 9 *km* sind noch aus zu wenig Beobachtungen abgeleitet).

Die relativ wenigen älteren bemannten Berliner Ballonfahrten (bis zu 3 *km*), 40 an der Zahl, ergeben folgende Temperaturdifferenzen von 1 bis 3 *km*:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
10·2	11·1	10·1	8·0	9·85,

welche die Formel liefern:

$$\Delta t(1 \text{ bis } 3\, km) \ldots .\quad 9 \cdot 85 + 1 \cdot 72 \sin(358° + x).$$

Die Amplitude stimmt fast vollständig mit den obigen, die Zeit der raschesten Wärmeabnahme fällt aber schon zirka auf den 1. April. Also selbst diese wenigen Fahrten haben schon im allgemeinen zutreffende Resultate für die jährliche Periode der Wärmeabnahme mit der Höhe ergeben.

In den Höhenschichten von 3 bis 7 *km* ist die Amplitude des jährlichen Ganges der Temperaturunterschiede gegen 3 *km*

rund dreimal kleiner als in der Schichte 1 bis 3 *km* und die Phasenzeit verfrüht sich bemerkenswerterweise um zirka $3^1/_2$ Monate im oberen Niveau.

Dann von 7 bis 9 *km* verdoppelt sich die Amplitude der Temperaturdifferenzen und das Maximum tritt im Hochsommer ein, statt Ende Jänner; in den Zahlen von Teisserenc de Bort sowohl als in den meinen.

Das setzt sich aber auch noch in die größeren Höhen fort, wie aus den Mitteltemperaturen hervorgeht, die Teisserenc de Bort aus 141 Ballonaufstiegen bis zu 14 *km* abgeleitet hat. Dieselben liefern folgende Temperaturdifferenzen:

Temperaturdifferenzen.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
9 bis 11 *km* ...	11·0	6·9*	12·3	**13·0**	10·80
10 » 11 ...	3·9	0·9*	5·0	**6·1**	3·97
11 » 12 ...	0·0	—0·5*	2·4	**2·7**	1·25

Über 12 *km* tritt sogar eine geringe Temperaturzunahme mit der Höhe ein. Also jedenfalls wiederholt sich der jährliche Gang, den wir schon früher für die Schichte 7 bis 9 *km* gefunden, auch in den höchsten Schichten: Minimum im Frühjahr, Maximum im Herbst, und zwar mit vergrößerter Amplitude.

In den höchsten Schichten finden wir eine fast völlige Umkehrung des jährlichen Ganges gegen die Verhältnisse in den untersten Schichten.

Die Schichte 10 bis 11 *km* gibt die Gleichung

$$3 \cdot 97 + 2 \cdot 96 \sin (193° + x).$$

Nach dieser Gleichung sind die Monatsmittel in meiner Tabelle p. 577 für diese Schichte berechnet worden, um auch zu Differenzen für 9 bis 11 *km* gelangen zu können. Oberhalb 9 *km* nimmt nicht bloß die Wärmeabnahme mit der Höhe wieder ab, sondern es wird auch ihre jährliche Periode eine ganz andere als unterhalb 9 *km*. Mit der Verringerung der Wärmeabnahme geht parallel eine Zunahme der Jahresschwankung derselben.

Im Frühjahr findet oberhalb 9 *km* die langsamste Wärmeabnahme statt, im Herbste die rascheste. Dies hat natürlich zur Folge, daß die Jahresschwankung der Temperatur selbst in den höchsten Schichten abnimmt.

Im Herbste findet die rascheste Abkühlung der Atmosphäre statt, im Frühling die rascheste Erwärmung. Aber dies gilt doch zunächst nur für die untersten Schichten. Es dürfte überhaupt verfrüht sein, besonders so nebenbei, eine Erklärung der oben dargestellten merkwürdigen Verhältnisse geben zu wollen. Ich begnüge mich, darauf aufmerksam gemacht zu haben.

Mittlere Monatstemperaturen für 7 *km* und 9 *km* Seehöhe. Meine Versuche, die oben berechneten Temperaturdifferenzen an die in unseren Alpen in 1 *km* und 3 *km* Seehöhe in günstigster Lage beobachteten mehrjährigen Mitteltemperaturen anzuschließen, führten zu keinen befriedigenden Resultaten. Die Abweichungen gegen die im Ballon beobachteten Temperaturen werden zu groß, was allerdings auch darin liegen mag, daß die mittleren Örter der Ballontemperaturen mehr auf das westliche Europa fallen und nicht in die im Winter schon viel kältere Gegend der Ostalpen. Ich will nur die an die Mitteltemperaturen des Sonnblickgipfels angeknüpften Temperaturen hier anführen (Tabelle IV).

Ich wage nicht zu entscheiden, ob diesen Zahlen eine erhebliche Bedeutung zukommt.

Die Jahresschwankung der Temperatur auf dem Sonnblick im 17jährigen Mittel ist 14·5°, in 5 *km* erhielte man 16·1°, in 7 *km* 16·7° und in 9 *km* 14·8°, also keine Abnahme, vorerst sogar eine erhebliche Zunahme.

Aber auch die Temperaturmittel von Teisserenc de Bort aus 581 Ballonaufstiegen ergeben nicht die erwartete Abnahme der Jahresschwankung der Temperatur bis zu 10 *km*.

Jahresschwankung der Temperatur in der freien Atmosphäre nach Teisserenc de Bort.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 *km*
14·7	13·5	13·0	13·6	13·7	14·4	14·1	13·7	12·3	10·1

Tabelle IV.

Temperaturmittel.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Sonnblick 1886 bis 1893 inklusive												
-13·1	-13·6*	-12·2	- 8·9	- 4·7	- 1·3	**0·9**	0·8	- 1·0	- 5·0	- 8·1	-11·9	- 6·51
Temperatur in 5 *km*												
-25·6	-26·4*	-25·1	-21·5	-16·8	-12·8	**-10·3**	-10·5	-12·5	-16·7	-20·0	-24·1	-18·53
Temperatur in 7 *km*												
-39·3	-40·5*	-39·7	-36·3	-31·4	-26·9	-23·9	**-23·8**	-25·8	-30·0	-33·4	-37·5	-32·38
Temperatur in 9 *km*												
-53·5*	-53·4*	-52·0	-49·2	-45·8	-42·5	-39·6	**-38·7**	-40·0	-44·2	-48·2	-52·4	-46·63

Also bis zu 3 *km*, wie in den Gebirgen, eine Abnahme der Jahresschwankung, dann wieder eine Zunahme bis zu 7 *km* und erst dann wieder eine Abnahme, die aber erst in 10 *km* erheblich wird. Die obigen, an die Sonnblicktemperaturen angeknüpften Temperaturmittel geben im allgemeinen einen ähnlichen Verlauf der Änderung der Jahresschwankung der Wärme mit der Höhe.

Da die auf dem Umweg über den Sonnblick abgeleiteten Monatsmittel der Temperatur für 7 und 9 *km* Seehöhe dem Bedenken unterliegen, ob sie für die freie Atmosphäre Gültigkeit beanspruchen dürfen, so habe ich doch versucht, aus den bei den Ballonaufstiegen beobachteten Temperaturen selbst solche Mittel zur Orientierung wenigstens zu erlangen. Zu diesem Zwecke wurden die Monatsmittel für 7 *km* mit jenen aus $(6+8):2$ in ein Mittel vereinigt, ebenso jene für 9 *km* mit den Mitteln aus $(8+10):2$, um doch etwas sicherere Zahlen zu erlangen. Es zeigte sich aber dabei, daß dadurch die in den

Höhenschichten von 7 und 9 *km* selbst beobachteten Temperaturen kaum geändert wurden, die Mittel aus 6 und 8 *km* geben fast immer die Mittel in 7 *km* etc. Diese Mittel wurden dann durch die bekannten Sinusreihen ausgedrückt (aber bloß die ganzjährige und halbjährige Temperaturwelle) und mittels derselben die Monatstemperaturen berechnet. Durch diese berechneten Temperaturen wurden die gar zu sehr von einem normalen jährlichen Gang abweichenden rohen Mittel ersetzt und auf diesen derart »verbesserten« jährlichen Gang abermals die periodischen Formeln angewendet. Diese letzteren lieferten dann die definitiven Monatsmitteln.

Dieser Rechnungsvorgang soll für die Höhe von 7 *km* als Beispiel fast vollständig angeführt werden.

Temperaturmittel für 7 *km* Seehöhe.
(Sämtlich negativ.)

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Beobachtet												
31·8	**36·1**	**37·9**	32·0	33·4	26·5	23·7	19·5*	21·1	26·4	30·5	30·3	29·1
(6+8 *km*) : 2												
31·6	**36·3**	**37·7**	31·0	33·3	26·6	23·6	20·2*	22·0	26·4	31·0	30·5	29·2
Mittel												
31·7	**36·2**	**37·8**	31·5	33·3	26·5	23·7	19·9*	21·6	26·4	30·7	30·4	29·15
Berechnete Mittel (erste Rechnung)												
33·3	**34·6**	**35·8**	35·0	31·8	26·8	22·4	21·0*	22·4	25·8	29·5	31·6	29·15
Definitiv berechnete Mittel (zweite Rechnung)												
34·0	**35·6**	**35·8**	34·3	30·9	26·4	22·6	21·0*	22·3	25·4	29·1	32·1	29·15

In die zweite Rechnung wurden im Jänner, Mai, November und Dezember statt der beobachteten Werte 31·7, 33·3, 30·7 und 30·4, die den jährlichen Gang unterbrechen, die berechneten Werte 33·3, 31·8, 29·5 und 31·6 eingestellt und die Rechnung wiederholt. Diese zweite Rechnung ergab die definitiven Monatstemperaturen.

In ähnlicher Weise wurde auch verfahren, um die plausibelsten Werte der Monatstemperaturen in 9 *km* Seehöhe zu erhalten. Die Resultate sind:

Berechnete mittlere Monatstemperaturen in 7 *km* und 9 *km* Höhe. (Sämtlich negativ.)

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Temperatur in 7 *km* Höhe												
34·0	35·6	35·8*	34·3	30·9	26·4	22·6	**21·0**	22·3	25·4	29·1	32·1	29·15
Temperatur in 9 *km* Höhe												
47·5	48·7	49·2*	48·4	45·9	41·9	37·5	**34·9**	35·1	38·0	41·9	45·3	42·86

Die Jahresschwankung in 7 *km* beträgt 14·8°, in 9 *km* 14·3°, hat also kaum abgenommen.

Die Gleichungen für den jährlichen Wärmegang in 7 und 9 *km* Höhe sind:

7 *km*... $-29\cdot15+7\cdot35 \sin(233°+x)+0\cdot90 \sin(51°+2x)$.

9 ... $-42\cdot86+7\cdot23 \sin(224\ \ +x)+1\cdot07 \sin(18\ \ +2x)$.

Der jährliche Gang ist innerhalb der Fehlergrenzen ganz derselbe in 7 und in 9 *km*. Die Amplituden nehmen mit der Höhe nicht ab.

Auf dieses besonders merkwürdige und unerwartete Ergebnis der Temperaturaufzeichnungen in sehr großen Höhen

mittels Ballons hat zuerst Teisserenc de Bort aufmerksam gemacht.

Die mittleren Jahrestemperaturen und die mittlere Temperaturabnahme mit der Höhe in der freien Atmosphäre bis zu 10 *km* Seehöhe können jetzt schon als sehr verläßlich festgestellt betrachtet werden, die Zunahme der Beobachtungen hat kaum eine Änderung derselben in den großen Höhen mehr ergeben, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Mittlere Temperatur.

Höhe in Kilometern	Berliner Ballonfahrten bis 1898 (75)	Internationale Ballonfahrten bis 1903 (160 rund)	Bemannte Fahrten allein [1]	Teisserenc de Bort 581 (bis 1903)
1.......	5·4	6·0	5·5	5·3
2.......	0·5	1·7	0·3	0·7
3.......	— 5·0	— 3·3	— 4·4	— 4·0
4.......	—10·3	— 9·0	—10·3	— 9·4
5.......	—16·6	—15·3	—16·5	—15·4
6.......	—24·2	—22·1	—23·0	—21·9
7.......	(—30·2)	—29·1	—30·2	—29·0
8.......	(—37·4)	—36·2	—37·0	—36·2
9.......	(—46·4)	—43·2	—	—43·5
10.......	—	—49·0	—	—49·3

[1] Die Wärmeabnahme mit der Höhe pro 1 *km*, welche die bemannten Fahrten allein ergeben (siehe später), wurde an die mittlere Temperatur in 1000 *m*, welche die Gipfel und Gehängestationen auf der Nordseite der Alpen aufweisen:

Bad Gastein (1023 *m*)........	5·4°,
Klösterle (1062 *m*)...........	5·2
Hohenpeissenberg (994 *m*)....	5·5
Höchenschwand (1011 *m*)	5·9
Mittel......	5·5°,

angeschlossen. Diese Zahl stimmt auch, wie man sieht, sehr gut mit der bisher aus den Ballonfahrten überhaupt für 1 *km* gefundenen Mitteltemperatur.

Desgleichen kann natürlich auch die Temperaturabnahme mit der Höhe für je 1 *km* Höhenintervall als nun schon recht gut festgestellt beobachtet werden.

Temperaturabnahme mit der Höhe pro 100 *m*.

Kilometer	Berliner Ballonfahrten (75)	Internationale Aufstiege (160)	Teisserenc de Bort (581)
0— 1......	0·50	(0·22)	(0·18)
1— 2......	0·50	0·44	0·46
2— 3......	0·54	0·50	0·47
3— 4......	0·53	0·57	0·54
4— 5......	0·64	0·63	0·60
5— 6......	0·69	0·68	0·65
6— 7......	0·66	0·70	0·71
7— 8......	0·70	0·71	0·72
8— 9......	(0·81)	0·71	0·73
9—10......	—	0·63	0·58

Oberhalb 9 *km* wird, wie Teisserenc de Bort und Assmann gezeigt haben, die Temperaturabnahme wieder kleiner, um endlich in Isothermie und sogar in geringe Temperaturzunahme überzugehen, wie folgende Ergebnisse von 141 Ballonaufstiegen zu Paris (von Teisserenc de Bort) bis zu 14 *km* Seehöhe zeigen.

	10	11	12	13	14 *km*
Temperatur...	—50·1	—54·0	—55·2	—54·4	—54·1
Änderung pro 100 *m*	—0·39	—0·12	+0·08	+0·03	

Es gehört dies zu den weiteren Rätseln, welche uns die neuesten Ergebnisse der Ballonaufstiege zu lösen gegeben haben.

Die mittlere Temperaturabnahme von 1 bis 5 *km* und von 5 bis 10 *km* beträgt in Monatsmitteln:

Temperaturabnahme pro 100 *m*.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Höhenschichte 1 bis 5 *km*												
·50	·53	·56	·57	·60	·58	·54	·53	·53	·51	·49	·48*	·535
Höhenschichte 5 bis 10 *km*												
·70	·66	·63*	·63	·72	·75	·72	·69	·68	·69	·70	·70	·69

Die durchschnittliche Temperaturabnahme von 1 bis 10 *km* ist demnach 0·62. Die älteren Berliner Ballonfahrten haben für Erdoberfläche bis 9 *km* 0·63 pro 100 *m* ergeben.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe in Niederdruck- und Hochdruckgebieten.

Teisserenc de Bort hat schon vor längerer Zeit aus den Ergebnissen seiner Ballonaufstiege das Resultat abgeleitet, daß in den unteren Schichten bis zu 6 bis 7 *km* (ebenso wie ich noch früher aus den Temperaturaufzeichnungen auf Berggipfeln bis über 3 *km* gefunden hatte) die Temperaturabnahme mit der Höhe in den Barometermaximis langsamer erfolgt als in den Barometerminimis, daß aber in größeren Höhen das Verhältnis sich umkehrt. Bestimmte Zahlenangaben darüber hat Teisserenc de Bort bis zu dieser Zeit noch nicht veröffentlicht.

Es interessierte mich, zu untersuchen, welche bezügliche Ergebnisse sich aus den bisherigen internationalen Ballonaufstiegen ableiten lassen möchten. Es ist dies ja ein anderes Material als das, auf welches Teisserenc de Bort seine Resultate gestützt hatte, bezieht sich auf eine mehr kontinentale Lage und begreift zu einem guten Teil auch die Aufzeichnungen bei bemannten Ballonaufstiegen in sich.

Es war natürlich schwierig, aus bloß 156 Ballonaufstiegen ein genügendes Material für diese Untersuchung auszuwählen, am schwierigsten selbstverständlich für die Niederdruckgebiete oder Barometerminima. Die weitaus größte Zahl aller bisherigen internationalen Ballonaufstiege fand in Hochdruckgebieten statt, Tage mit eigentlichen Barometerminima fehlen fast gänzlich. Ich habe die Zahlen für das Winterhalbjahr und für das Sommerhalbjahr gesondert berechnet, um ein Urteil über etwaige Unterschiede zu ermöglichen. Eine weitere Trennung des Materiales auch nur nach Jahreszeiten war unmöglich, wenn ich irgend verläßliche Mittelwerte erhalten wollte.

Für die Temperaturabnahme mit der Höhe in den Barometermaximis konnte ich die Temperaturaufzeichnungen bei 23 Ballonaufstiegen verwenden, davon entfallen 12 auf das Winterhalbjahr, 11 auf das Sommerhalbjahr, für die Berechnung der Temperaturabnahme in den Barometerminimis gelang es mir, 10 Ballonaufstiege im Winterhalbjahr und 11 im Sommerhalbjahr ausfindig zu machen, die einigermaßen die Verhältnisse in den Niederdruckgebieten (auch Regenareas) zu repräsentieren schienen.

Während es für die Maxima möglich ist, für die Temperaturverhältnisse in der zentralen Area derselben Beobachtungen zu finden, ist dies für die Barometerminima bekanntlich aus verschiedenen Gründen nicht möglich.

Da nicht alle verwendeten Ballonaufstiege bis zu 10 *km* hinaufreichten, so wurden natürlich nur die Temperaturdifferenzen von einer Höhenschicht zur nächsten, nicht die Mitteltemperaturen verwendet zur Feststellung der Wärmeabnahme mit der Höhe.

Die Temperaturmittel selbst sind kaum vergleichbar, mögen aber doch auch angeführt werden.

Die Tabelle V zeigt, daß die Temperaturabnahme mit der Höhe in den Hochdruckgebieten etwa bis zu 5 *km* Seehöhe langsamer erfolgt als in den Niederdruckgebieten, dann aber wird sie rascher, ganz besonders im Winterhalbjahre. Die Zahlen für das Sommerhalbjahr in großen Höhen der Niederdruckgebiete sind recht unsicher.

Tabelle V.

Temperaturänderung pro Kilometer Erhebung in Hochdruck- und Niederdruckgebieten.

Höhenschicht Kilometer	I. Hochdruckgebiete Winter-Halbjahr	Sommer-Halbjahr	Mittel	II. Niederdruckgebiete Winter-Halbjahr	Sommer-Halbjahr	Mittel
0— 1.....	+2·1	—2·1	0·0	—2·9	—3·8	—3·3
1— 2.....	—1·9	—4·8	—3·3	—5·7	—5·8	—5·8
2— 3.....	—4·9	—4·3	—4·6	—4·8	—5·4	—5·1
3— 4.....	—6·6	—5·4	—6·0	—5·9	—5·5	—5·7
4— 5.....	—6·2	—5·8	—6·0	—6·7	—6·5	—6·6
5— 6.....	—7·5	—6·6	—7·0	—6·1	—6·6	—6·3
6— 7.....	—7·2	—7·0	—7·1	—6·7	—7·4	—7·0
7— 8.....	—7·6	—6·3	—7·0	—5·3	—7·4	—6·3
8— 9.....	—7·7	—8·0	—7·8	—5·1	—7·5	—6·3
9—10.....	—6·8	—6·1	—6·4	—4·7	—5·4	—5·0
0 - 5.....	3·5	4·5	4·0	5·2	5·4	5·3
5—10.....	7·3	6·8	7·1	5·6	6·9	6·2
0—10.....	5·4	5·6	5·5	5·4	6·1	5·7

Temperaturabnahme pro 100 *m*:

Hochdruckgebiete 0 bis 5 *km* ...... 0·40
5 » 10 ...... 0·71

Niederdruckgebiete 0 bis 5 *km* ...... 0·53
5 » 10 ...... 0·62

Tabelle VI.

Mittlere Temperaturen in den Hochdruck- und Niederdruckgebieten.

Höhenschicht Kilometer	I. Hochdruckgebiete			II. Niederdruckgebiete		
	Winter- Halbjahr	Sommer- Halbjahr	Mittel	Winter- Halbjahr	Sommer- Halbjahr	Mittel
Erde......	0·9	13·2	7·0	4·7	11·9	8·3
1........	3·0	11·1	7·0	1·8	8·1	5·0
2........	1·1	6·3	3·7	— 3·9	2·3	— 0·9
3........	— 3·8	2·0	— 0·9	— 8·7	— 3·1	— 5·6
4........	—10·4	— 3·2	— 6·8	—14·6	— 8·6	—11·6
5........	—16·6	— 9·0	—12·8	—21·3	—15·1	—18·2
6........	—24·1	—15·6	—19·8	—27·4	—21·7	—24·5
7........	—31·3	—22·6	—27·0	—34·1	—28·2	—31·1
8........	—38·9	—28·9	—33·9	—39·4	(—34·7)	—37·0
9........	—46·6	—36·9	—41·7	—44·5	(—41·2)	—42·8
10........	—53·4	—43·0	—48·2	—49·2	(—47·7)	—48·5
1—5....	— 5·3	1·4	— 2·0	— 9·3	— 3·3	— 6·3
6—10....	—38·9	—29·4	—34·1	—38·9	(—34·7)	—36·8
Mittel.....	—22·1	—14·0	—18·0	—24·1	—19·0	—21·5

Für die Barometerminima sind im Sommerhalbjahr oberhalb 7 *km* sehr wenige Beobachtungen vorhanden, weshalb die Temperaturen für 8, 9, 10 *km* eingeklammert wurden, um ihre Unsicherheit direkt ersichtlich zu machen.

Mittlere Temperaturabnahme mit der Höhe in Hoch- und Niederdruckgebieten pro 100 *m*.

	Höhenschichte 0 bis 5 *km*	5 bis 10 *km*	Mittel
I. Winterhalbjahr:			
Hochdruckgebiet.......	0·35	0·73	0·54
Niederdruckgebiet	0·52	0·56	0·54
II. Sommerhalbjahr:			
Hochdruckgebiet	0·45	0·68	0·56
Niederdruckgebiet	0·54	(0·69)	0·61
III. Jahresmittel:			
Hochdruckgebiet	0·40	0·71	0·55
Niederdruckgebiet	0·53	0·62	0·57

Wie bemerkt, hat Teisserenc de Bort schon vor mehreren Jahren aus den Registrierungen seiner Ballons sondes dieselben Resultate abgeleitet, ohne jedoch bestimmte Zahlenwerte dafür anzuführen. Seine letzte Äußerung darüber ist folgende:

»Die Temperatur hat in den Maxima und Minima des Druckes einen verschiedenen Charakter. Anfangs, wie man aus den Beobachtungen auf Bergen schon weiß, nimmt sie rascher ab mit der Höhe in den Minima als in den Maxima, nachher, eine ganz unerwartete Tatsache, vermindert sich die Abnahme sehr und hört sogar ganz auf in dem Minimum, während sie in dem Maximum sich fortsetzt bis zu einer Höhe von 12 bis 13 *km*. Es ergibt sich daraus, daß bis zu einer mittleren Höhe von 5 bis 7 *km* die Temperatur in der Region eines Minimums niedriger ist als in der eines Maximums, hierauf gleicht sich der Unterschied aus und in der Folge wird die Temperatur im Maximum niedriger.

Eine direkte Verifikation dieser verschiedenen Charaktere ergibt sich aus der Tatsache, daß zur selben Jahreszeit die

größten Kältegrade in großen Höhen sich in den Hochdruckgebieten gefunden haben.«[1] Soweit Hr. Teisserenc de Bort in »Rapport du Comité International. Réunion de Southport 1903«, Paris 1904, p. 35.

Die mittlere Temperaturabnahme mit der Höhe in den Niederdruckgebieten entspricht ungefähr der Wärmeabnahme in gesättigt feuchten, aufsteigenden und dabei ihren Wasserdampf kondensierenden Luftmassen bei den mittleren Temperaturen in den Gegenden der Ballonaufstiege.

---

[1] Eine der allerniedrigsten Temperaturen in sehr großen Höhen, welche sich in den Publikationen der internationalen aeronautischen Kommission vorfinden, ist jene vom 5. Dezember 1901. Von den beiden zu Trappes (bei Paris) von Teisserenc de Bort in die hohen Regionen losgelassenen Ballons sondes ergab der eine eine Temperatur von —72·9° in 12·8 *km*, der andere —73·8° in 12 *km* Höhe. Die Witterungslage war damals die eines hohen Barometermaximums über Zentraleuropa, auch Paris lag noch auf der Isobare von 770 *mm*. Im Mittel von sechs Ballonaufstiegen an diesem Tage, zwei in Trappes, einer in Meudon, einer in Straßburg, zwei in Berlin, ergeben sich folgende Mitteltemperaturen in verschiedenen Höhen in diesem typischen Barometermaximum.

5. Dezember 1901. Barometermaximum.

	Höhe in Kilometern										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temp.	-3·2	-2·6	-2·5	-4·6	-9·6	-16·6	-23·8	-29·9	-37·4	-44·9	-53·3

Temperaturabnahme pro 100 *m*.

Kilometer									
0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
+·06	+·01	—·21	—·50	—·70	—·72	—·61	—·75	—·75	—·84

Temperaturabnahme bis 5 *km* —0·27, von 5 bis 10 *km* aber —0·73. Von 10 bis 12 *km* ist die Temperaturabnahme sogar 1° pro 100 *m*.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe in den Hochdruckgebieten ist unten verlangsamt durch die häufigen Temperaturumkehrungen, oberhalb 5 *km* nähert sie sich namentlich im Winter der Temperaturänderung in aufsteigenden oder herabsinkenden trockenen Luftmassen. Nach unseren Ergebnissen, die aber noch aus zu wenigen Beobachtungen abgeleitet worden sind, würde sich ergeben, daß die mittlere Wärmeabnahme von der Erdoberfläche bis zu 10 *km* in den Hochdruck- und Niederdruckgebieten dieselbe ist und rund 0·56° pro 100 *m* beträgt, natürlich nur zufällig dieselbe, welche die Temperaturbeobachtungen in allen Gebirgsländern der Erde im Jahresdurchschnitt ergeben haben.

Die Tabelle VI der mittleren Temperaturen selbst, der viel weniger allgemeine Bedeutung zukommt, würde gleichfalls ergeben, daß in der Höhenschicht zwischen 5 und 10 *km* die mittlere Temperatur in den Hochdruck- und Niederdruckgebieten nahe dieselbe ist. In den höchsten Schichten über 9 *km* sind im Winterhalbjahre (und nur diese Zahlen sind einigermaßen verläßlich) die Barometermaxima kälter als die Barometerminima, was auch schon Teisserenc de Bort ganz bestimmt ausgesprochen hat, ohne die Temperaturen selbst, auf welchen dieser Satz beruht, bisher mitgeteilt zu haben. Die Bestätigung desselben durch die Ergebnisse der internationalen Ballonfahrten hat jedenfalls einiges wissenschaftliche Interesse, besonders da hier die Temperaturmittel selbst mitgeteilt werden.

In den unteren Schichten zwischen der Erdoberfläche und 5 *km* ist der Luftkörper der Antizyklonen wärmer als jener der Zyklonen, wie ich dies zuerst aus den Temperaturbeobachtungen auf dem Sonnblickgipfel nachgewiesen habe.[1] Ich fand den Temperaturunterschied von 0·5 bis 3·5 *km* 5° zu Gunsten der Antizyklonen für 7^h morgens im Winterhalbjahr; in unseren Tabellen beträgt dieser Unterschied 4° (Barometermaxima —5·3°, Minima —9·3°) für 1 bis 5 *km*. Also

---

[1] **Hann**, Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel nebst Bemerkungen über die Theorie der Zyklonen und Antizyklonen. Diese Sitzungsber., Bd. 100, April 1891.

eine volle Bestätigung meines vor 13 Jahren schon erhaltenen Resultates.

Ich möchte noch einen Vergleich der Mitteltemperaturen hier aufstellen in der korrekteren Form, daß ich die Mitteltemperaturen der Höhenschichten dazu benütze, und zwar nur für das Jahr und für die verläßlichsten Daten, jene des Winterhalbjahres.

Mittlere Temperaturen von Höhenschichten.

	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Jahresmittel, *a* Hochdruck-, *b* Niederdruckgebiete										
a......	7·0	5·3	1·4	-3·8	-9·8	-16·3	-23·4	-30·5	-37·8	-45·0
b......	6·7	2·0	-3·2	-8·6	-14·9	-21·3	-27·8	-34·0	-39·9	-45·6
Differenz (Hoch—Niederdruck)										
	(0·3)	3·3	4·6	4·8	**5·1**	5·0	4·4	3·5	2·1	0·6
Winterhalbjahr, *a* Hochdruck-, *b* Niederdruckgebiete										
a......	2·0	2·0	-1·3	-7·1	-13·5	-20·3	-27·7	-35·1	-42·8	-50·0
b......	3·3	-1·0	-6·3	-11·6	-18·0	-24·3	-30·7	-36·7	-42·0	-46·7
Differenz (Hoch—Niederdruck)										
	-1·3	3·0	**5·0**	4·5	4·5	4·0	3·0	1·6	-0·8	-3·3

Diese letzteren Zahlen sind verläßlicher als die Jahresmittel.

Hiernach ist der Temperaturunterschied zwischen dem Luftkörper der Antizyklone und der Zyklone zu Gunsten der ersteren in den mittleren Schichten am größten, im Winterhalbjahr in der Höhenschichte 2 bis 4 *km* etwa, im Jahresmittel in der Schichte von 4 bis 5 *km*, ein Resultat, das die innere Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Die Ergebnisse für das Winterhalbjahr stimmen mit dem von Teisserenc de Bort ausgesprochenen Satz.

Der mittlere Temperaturunterschied zwischen den Hochdruck- und Niederdruckgebieten beträgt im Winterhalbjahre:

	Temperaturdifferenz		
	0—5	5—10	0—10 *km*
Hochdruck—Niederdruck....	3·1°	0·9	2·0

Einige Temperaturergebnisse der bemannten Ballonfahrten.

Es schien mir nicht überflüssig, zu untersuchen, wie sich die Ergebnisse der Temperaturbeobachtungen bei den bemannten Ballonaufstiegen verhalten zu jenen, welche mit den Ballons sondes erhalten worden sind. Anfangs war ja das Urteil über die Registrierungen der letzteren kein ganz übereinstimmend günstiges, worin allerdings inzwischen eine Änderung der Ansichten eingetreten ist. Trotzdem schien mir eine Zusammenstellung der gegenwärtig bekannt gewordenen Temperaturbeobachtungen in bemannten Ballons nicht überflüssig. Diese Zusammenstellung hat ja auch an sich ein größeres allgemeines Interesse. Natürlich beschränkte ich mich auf die Mitteilung der Temperaturen für Höhenstufen von je 1 *km*. Die eingeklammerten Zahlen sind durch Interpolation erhalten worden in den Fällen, wo die oberste Höhenstufe nicht ganz erreicht wurde, das Zurückbleiben aber 500 *m* nicht überschritten hat.

Es wurden im allgemeinen nur jene Fahrten aufgenommen, bei denen die Höhe von 6 *km* erreicht worden ist, im Falle von zwei Fahrten am gleichen Tag aber auch jene, bei welchen nur 5 *km* erreicht worden sind. Am Schluß ist des erheblichen Interesses halber noch eine kleine Tabelle angehängt worden mit den Temperaturergebnissen der gleichzeitigen Fahrten zu Berlin, Wien, Straßburg und Rom am 1. April 1903.

Tabelle VI.

Die bei bemannten Ballonaufstiegen bis oder über 6 *km* beobachteten Temperaturen.

Datum		Ort	Erde	Kilometer									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
März 14	1893	Berlin	8·9	5·6	0·0	— 5·6	—11·4	—18·8	—27·3	—	—	—	—
» 24	1899	»	—5·5	—11·8	—18·2	—25·2	—30·8	—36·2	—40·6	—44·4	—48·5	—	—
» 5	1903	»	6·6	2·4	— 3·5	— 6·8	—11·8	(—18·5)	—	—	—	—	—
April 19	1901	Berlin	5·0	— 0·5	— 6·0	— 9·2	—14·8	—21·2	(—28·5)	—	—	—	—
Mai 11	1894	Berlin	11·2	7·0	2·3	— 4·6	— 9·1	—16·6	—22·5	—31·0	—36·8	—	—
» 13	1897	»	2·0	— 0·7	— 7·3	—14·2	—20·0	—27·6	(—34·7)	—	—	—	—
» 1	1902	»	6·2	— 1·4	— 8·5	—12·0	—19·2	—26·4	—34·0	—	—	—	—
» 1	1902	Wien	6·2	1·4	— 6·4	—10·0	—17·0	(—22·0)	—	—	—	—	—
Juni 5	1902	Berlin	20·9	17·3	9·2	2·5	— 4·3	—11·5	—19·0	—	—	—	—
» 4	1903	Wien	15·5	11·0	6·0	1·5	— 3·2	— 9·1	—11·5	—20·9	(27·6)	—	—

Juli 11	1901	Berlin	12·3	16·0	9·0	3·0	— 1·5	— 7·4	—12·0	—19·5	—	—	—
» 31	1901	»	23·4	14·0	9·5	6·0	0·5	— 7·0	—12·5	—19·2	—26·5	—30·4	—38·9
» 3	1902	»	10·4	5·5	— 2·3	— 3·6	— 8·7	—14·5	—22·0	—29·0	(—36·5)	—	—
» 3	1902	Straßburg	10·6	6·5	3·2	0·4	— 3·9	—10·2	—	—	—	—	—
August 17	1852	London	23·3	15·5	10·3	2·6	— 3·2	— 9·3	—13·8	—	—	—	—
» 26	1852	»	19·5	13·0	5·9	4·4	— 1·2	— 9·6	—16·4	—	—	—	—
» 7	1902	Berlin	15·7	13·0	6·0	3·2	— 2·0	— 8·0	(—12·5)	—	—	—	—
» 7	1902	Wien	17·7	19·4	14·0	7·0	— 0·4	— 6·0	—	—	—	—	—
» 6	1903	»	17·8	13·0	7·5	3·0	— 2·5	— 8·8	—	—	—	—	—
Septbr. 6	1894	Berlin	12·1	5·9	— 0·5	— 6·6	—13·4	—16·9	—25·0	—	—	—	—
» 15	1898	»	19·0	11·0	4·5	3·0	— 1·3	— 5·6	—13·3	—	—	—	—
» 15	1898	London	26·1	17·9	12·2	6·6	1·4	— 5·2	—13·3	—22·0	—30·7	—	—
Oktober 19	1893	Berlin	4·9	— 2·4	— 5·1	— 7·4	—14·3	—20·6	—24·6	—	—	—	—
» 3	1898	»	14·8	12·4	8·9	3·6	— 1·3	— 7·0	—14·1	—19·4	—	—	—

Datum			Ort	Erde	Kilometer									
					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Oktober	3	1898	Sitten	17·0	13·2	8·2	2·5	— 4·3	— 9·4	—17·5	(—25·0)	—	—	—
»	3	1899	Berlin	12·8	4·0	— 0·2	— 6·0	—10·2	—15·6	—23·1	(—31·0)	—	—	—
»	2	1902	Wien	10·7	7·5	2·4	— 2·3	— 9·8	—14·4	—20·6	—27·0	—	—	—
Novbr.	10	1852	London	9·4	3·3	2·1	— 1·4	— 8·1	—11·2	—17·2	—24·0	—	—	—
»	14	1896	Berlin	— 1·1	(—1·0)	— 1·0	— 4·7	—11·1	—19·3	(—26·4)	—	—	—	—
»	8	1900	»	2·3	5·3	1·3	— 2·2	— 8·6	—14·0	—22·5	—	—	—	—
»	7	1901	Wien	— 1·7	7·3	1·6	— 6·0	— 9·7	—16·7	—	—	—	—	—
»	5	1903	»	9·4	3·3	— 2·0	— 3·5	—10·5	—16·9	—24·2	—	—	—	—
Dezemb.	4	1894	Berlin	0·1	4·3	2·5	— 3·9	—10·0	—16·9	—23·8	—30·2	—37·9	—46·4	—
»	22	1900	»	3·6	—2·0	— 6·2	—14·5	—21·3	—29·3	—35·7	(—45·0)	—	—	—
April	3	1903	Berlin	3·7	—2·6	— 9·0	—15·0	—23·0	—29·5	—	—	—	—	—
			Wien	3·8	(—2·3)	— 8·3	—13·5	—18·0	(—25·5)	—	—	—	—	—
			Straßburg	7·6	(4·5)	— 3·5	— 7·5	—12·0	—	—	—	—	—	—
			Rom	16·7	4·7	0·0	— 3·0	—11·6	(—16·0)	—	—	—	—	—

Diese Tabelle wurde dazu verwendet, um die Ergebnisse der Temperaturabnahme mit der Höhe mittels der Registrierballons zu prüfen. Natürlich konnten hiezu nicht die Mitteltemperaturen selbst, sondern nur die einzelnen Temperaturunterschiede in den Höhenstufen von je 1 *km* verwendet worden. Nur diese wurden zu Mittelwerten vereinigt.

Das Ergebnis ist folgendes:

Mittlere Temperaturabnahme mit der Höhe, bloß aus den Beobachtungen in bemannten Ballons berechnet.

	Höhenstufe in Kilometern								
	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Zahl der Beobachtungen . .	36	36	36	36	28	14	7	2	1
Erste Jahreshälfte	·61	·47	·56	·66	·60	—	—	—	—
Zweite Jahreshälfte	·43	·47	·61	·59	·69	—	—	—	—
Gesamtmittel .	·52	·47	·59	·62	·65	·72	·68	·62	(·85)
Nach Teisserenc de Bort Ballons sondes (581 Beobachtungen)									
Mittel	·46	·47	·54	·60	·65	·71	·72	·73	·58

Die Übereinstimmung ist eine vollkommen befriedigende bis zu 8 bis 9 *km*, wo von bemannten Ballons nur sieben Beobachtungen vorliegen. Man konnte gewiß nicht mehr erwarten.

Das Ergebnis der vorstehenden Vergleichung ist also für die mittels den Registrierballons erhaltenen Resultate sehr günstig.

Der Vergleich für größere Höhenstufen mit meinen Gesamtmitteln (156 Aufstiege zirka) ergibt natürlich ebenfalls eine gute Übereinstimmung.

Temperaturabnahme pro 100 *m*.

	Höhenschichte			
	1—3	3—5	5—7	7—9 *km*
Bloß bemannte Fahrten.....	0·49	0·60	0·69	0·65
Gesamtmittel	0·47	0·60	0·69	0·71

Da ich zur Ableitung der angeführten Mittelzahlen der Temperaturabnahme mit der Höhe bei bemannten Ballonfahrten die einzelnen Temperaturdifferenzen verwendet habe, konnte ich auch die mittlere Abweichung der Einzelwerte vom Mittel leicht erhalten, welche mittlere Abweichung von großem Interesse ist, da sie beurteilen läßt, inwieweit der Mittelwert eine reelle Bedeutung hat. Ich führe daneben auch die größten Werte der Temperaturabnahme in jeder Kilometerschicht an.

Mittlere Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert der Temperaturabnahme.

	Höhenschichte in Kilometern						
	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8
Beobachtungen	36	36	36	36	28	14	7
Mittel	·52	·47	·59	·62	·65	·72	·68
Maximum	·81	·77	·83	·84	·85	·94	·87
Mittl. Abweichung .	·14	·16	·09	·09	·13	·12	—

Die mittleren Abweichungen vom Mittelwerte sind relativ sehr klein, am kleinsten bemerkenswerterweise zwischen 3 *km*

und 5 *km*. Der wahrscheinliche Fehler unserer Mittelwerte ist demnach sehr klein, er beträgt ±0·02, d. i. etwa 3 bis 4⁰/₀ des mittleren Betrages der Wärmeabnahme.

Die Maxima der Temperaturabnahme mit der Höhe erreichten in allen Schichten den Betrag von 0·8° pro 100 *m* und überschritten ihn zumeist, namentlich in den höheren Schichten oberhalb 5 *km*, wo gelegentlich fast eine vollständige adiabatische Temperaturabnahme angetroffen wurde, wohlgemerkt für ein Höhenintervall von 1 *km*.

Über das Restglied trigonometrischer Reihen

von

Otto Biermann in Brünn.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

In den nachstehenden Zeilen soll es sich darum handeln, bei näherungsweiser Darstellung einer Funktion von der Periode 2π durch eine endliche trigonometrische Reihe das Restglied in einer Art abzuleiten und in eine Form zu bringen, wie das bei der Lagrange'schen Interpolationsfunktion geschieht. Dann soll nach Übergang von der endlichen trigonometrischen Reihe zu der unendlichen, ja sogar der Fourier-schen Reihe die Stellung der von solchen Reihen bekannten Sätze zu den sich hier aufdrängenden Aufgaben bezeichnet werden. Und endlich soll die Verwertung der abgeleiteten Formel beziehungsweise des Restgliedes in zwei Fällen behandelt werden, und zwar in dem einer bestimmten Spannungskurve eines Wechselstromes und dem des Ganges der Lufttemperatur in einem besonderen Beispiele.

Es sei $f(\omega)$ eine in dem Intervalle von 0 bis 2π definierte eindeutige Funktion von der Periode 2π. Es gehöre also zu jedem Werte $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ ein bestimmter Wert von $f(\omega)$ und wenn auch nicht festgesetzt wird, wie dieser bestimmte Wert herzustellen sei, so denke man doch, daß die Bestimmung von $f(\omega)$ auf einem arithmetischen Gesetze beruht, denn $f(\omega)$ wäre andernfalls gar keine Funktion.

Es seien insbesondere die Werte von $f(\omega)$ an den $2n+1$ Stellen α_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots 2n)$ des Intervalles 2π gegeben $\eta_\nu = f(\alpha_\nu)$, dann ist

$$g(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega-\alpha_0)\ldots/\ldots\sin\frac{1}{2}(\omega-\alpha_{2n})}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_\nu-\alpha_0)\ldots/\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha_\nu-\alpha_{2n})}\,[1]$$

eine Funktion, die die genannten Eigenschaften von $f(\omega)$ auch besitzt. Führt man $g(\omega)$ als eine Näherungsfunktion von $f(\omega)$ ein, so hat man zu setzen

$$f(\omega) = g(\omega) + R(\omega),$$

wo das Restglied $R(\omega)$, das durch $f(\omega)$ und durch die getroffenen Festsetzungen zur Bestimmung von $g(\omega)$ definiert wird, an den Stellen α_ν verschwinden muß. Danach setze man etwa

$$R(\omega) = r(\omega) \prod_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\frac{1}{2}(\omega-\alpha_\nu)$$

oder nach Einführung der Bezeichnung

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\frac{1}{2}(\omega-\alpha_\nu) = \Pi(\omega),$$

$$R(\omega) = r(\omega)\,\Pi(\omega)$$

und bestimme $r(\omega)$.

Um das zu tun, betrachte man die Funktion

$$\Phi(v) = f(v) - g(v) - r(\omega)\,\Pi(v),$$

die in dem Intervall 2π mindestens an den $2n+2$ Stellen $v = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ und $v = \omega$ verschwindet. Ist $\Phi(v)$ $2n+1$-mal differentiierbar, so kann man auf Grund des Satzes von Rolle sagen, die erste Ableitung $\Phi'(v)$ hat in dem durch die Nullstellen von $\Phi(v)$ bestimmten Intervall mindestens $2n+1$ Nullstellen, die zweite Ableitung $\Phi''(v)$ hat ebendort oder genauer in dem durch die früher benannten Nullstellen von $\Phi'(v)$ bestimmten Intervall mindestens $2n$ Nullstellen u. s. w.

---

[1] Wo durch die Striche / im Zähler und Nenner angezeigt sein soll, daß beziehungsweise die Faktoren $\sin\frac{1}{2}(\omega-\alpha_\nu)$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha_\nu-\alpha_\nu)$ zu unterdrücken sind.

und endlich die $(2n+1)^{\text{ste}}$ Ableitung $\Phi^{(2n+1)}(v)$ hat in dem erstgenannten Intervall mindestens eine Nullstelle, die mit $\bar{\omega}$ bezeichnet sei. Dann hat man

$$f^{(2n+1)}(\bar{\omega}) - g^{(2n+1)}(\bar{\omega}) - r(\omega)\,\Pi^{(2n+1)}(\bar{\omega}) = 0 \qquad A)$$

und

$$r(\omega) = \frac{f^{(2n+1)}(\bar{\omega}) - g^{(2n+1)}(\bar{\omega})}{\Pi^{(2n+1)}(\bar{\omega})},$$

so daß die Darstellung gilt:

$$f(\omega) = g(\omega) + \frac{f^{(2n+1)}(\bar{\omega}) - g^{(2n+1)}(\bar{\omega})}{\Pi^{(2n+1)}(\bar{\omega})}\,\Pi(\omega),$$

wozu nochmals hervorgehoben werde, daß $\bar{\omega}$ eine unbekannte Stelle zwischen den α_ν und ω ist.

Soll darnach eine Funktion $f(\omega)$ von der Periode 2π näherungsweise durch eine endliche trigonometrische Reihe angegeben werden, sobald man die Werte von $f(\omega)$ an $2n+1$ Stellen α_ν des im Endlichen gelegenen Intervalles von der Länge 2π bestimmt hat, so bilde man auf Grund eben dieser Festsetzungen erstens $g(\omega)$ und $g^{(2n+1)}(\omega)$, bestimme zweitens den $(2n+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten von $f(\omega)$ und suche eine Größe M größer als der größte Wert von $R(\omega)$; und damit weiß man eine Größe, bis auf welche genau man $f(\omega)$ durch $g(\omega)$ anzugeben vermag.

Der Ausdruck $g(\omega)+R(\omega)$ kann aber auch dazu dienen, eine Abhängigkeit $f(\omega)$ näherungsweise zu beschreiben, selbst wenn gar nicht bekannt ist, ob diese Abhängigkeit eine Funktion in dem früheren Sinne ist, aber von ihr gewisse Eigentümlichkeiten gelten. Hat diese Abhängigkeit einen natürlichen Verlauf, das soll heißen, ist sie solcher Art wie die in der Natur allein vorkommenden Funktionen, und kann man $f^{(2n+1)}(\alpha_\nu)$ näherungsweise mit Hilfe der Differenzenquotienten $(2n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung ausdrücken, wobei zufolge der Beziehung

$$\lim_{\Delta\omega=0}\left(\frac{\Delta^{2n+1}f(\omega)}{\Delta\omega^{2n+1}}\right) = f^{(2n+1)}(\omega)$$

$\Delta\omega$ klein zu nehmen ist, so kann man in

$$\left(\frac{\frac{\Delta^{2n+1} f(\omega)}{\Delta \omega^{2n+1}} - g^{(2n+1)}(\omega)}{\Pi^{(2n+1)}\omega}\right)_{\omega = \bar{\omega}} \Pi(\omega)$$

einen Ausdruck sehen, der die Angabe einer Größe M der früheren Art unter der Annahme gestattet, daß der $(2n+1)^{\text{ste}}$ Differenzenquotient der Abhängigkeit $f(\omega)$ sich näherungsweise verhält wie der Differentialquotient einer nach der Taylor'schen Reihe entwickelbaren Funktion.

Jedenfalls aber wird bei äquidistanten α, $\Delta\omega < \frac{2\pi}{2n+1}$ zu nehmen sein, weil sonst im Falle $\Delta\omega = \frac{2\pi}{2n+1}$ der $(2n+1)^{\text{ste}}$ Differenzenquotient von $f(\omega)$ gleich dem von $g(\omega)$ wäre und dann in dem Ausdrucke $g(\omega)+R(\omega)$ nicht mehr von der Abhängigkeit $f(\omega)$ enthalten wäre als das, was mit den Werten τ_ρ schon hineingetragen ist. Andernfalls aber überträgt man auf Grund der Beobachtung und Erfahrung von den Eigentümlichkeiten der Abhängigkeit $f(\omega)$ mehr auf das Restglied und man gewinnt die Möglichkeit, diese Abhängigkeit näherungsweise durch $g(\omega)$ zu beschreiben und den Fehler abzuschätzen. Das soll später in einem besonderen Falle geschehen.

Im Anschlusse sei bemerkt, daß die Gleichung *A)* an einer Nullstelle von $\Pi^{(2n+1)}(\omega)$, darum weil $r(\omega)$ und $R(\omega)$ in unserem Intervall endlich bleiben, durch die folgende zu ersetzen ist: $f^{(2n+1)}(\omega)-g^{(2n+1)}(\omega) = 0$; damit ist aber klar, daß $r(\omega)$ an einer Nullstelle von $\Pi^{(2n+1)}(\omega)$ durch den Ausdruck zu berechnen ist:

$$\frac{f^{(2n+2)}(\omega) - g^{(2n+2)}(\omega)}{\Pi^{(2n+2)}(\omega)}.$$

Und nun gehen wir zu der zweiten der in der Einleitung genannten Aufgaben. Wenn man $g(\omega)$ auf die Form bringt:

$$g(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega + \ldots + a_n \cos n\omega +$$
$$+ b_1 \sin \omega + \ldots + b_n \sin n\omega,$$

so erhalten die Koeffizienten in dem bei der Anwendung wohl ausschließlich vorkommenden Falle äquidistanter Stellen α,

$$\alpha_0 = \alpha,\ \alpha_1 = \alpha + \frac{2\pi}{2n+1}, \ldots \alpha_{2n} = \alpha + \frac{2n.2\pi}{2n+1},$$

als Lösungen der $2n+1$ linearen Gleichungen

$$f(\alpha_\nu) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \alpha_\nu + \ldots + a_n \cos n\alpha_\nu + \\ + b_1 \sin \alpha_\nu + \ldots + b_n \sin n\alpha_\nu$$

bekanntlich die folgenden Darstellungen:

$$a_\mu = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \cos \mu\alpha_\nu$$

$$b_\mu = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \sin \mu\alpha_\nu,$$

die nach Einführung des Zeichens $\frac{2\pi}{2n+1} = \Delta\alpha_\nu$ die Schreibweise gestatten:

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \cos \mu\alpha_\nu \Delta\alpha_\nu,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \sin \mu\alpha_\nu \Delta\alpha_\nu$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Läßt man n unendlich werden, so entsteht in der Grenze

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos \mu\alpha \, d\alpha,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin \mu\alpha \, d\alpha$$

und $g(\omega)$ geht in die Fourier'sche Reihe über

$$G(\omega) = \lim_{n=\infty} g(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega + \ldots \\ + b_1 \sin \omega + b_2 \sin 2\omega + \ldots,$$

die unter gewissen Bedingungen an $f(\omega)$ konvergiert und diese Funktion darstellt.

Man gewinnt also bei dem Übergange zur Grenze die Gleichung

$$f(\omega) = G(\omega) + \lim_{n=\infty} R(\omega);$$

und wenn hier eine für das Verschwinden der Grenze des Restes hinreichende oder auch eine notwendige Bedingung erfüllt ist, so nehmen wir, wie Teixeira[1] in seiner die Konvergenz der Lagrange'schen und trigonometrischen Interpolationsfunktionen betreffenden Arbeit die Beziehung

$$G(\omega) = f(\omega)$$

auf.

Es sind z. B. für das Verschwinden der Grenze unseres Restgliedes die folgenden Bedingungen hinreichend:

Sobald $f(\omega)$ Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung hat, so verschwindet $\lim_{n=\infty} R(\omega)$, wenn nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe δ und irgend eines $\bar{\omega}$ der früheren Art eine ganze Zahl n derart zu finden ist, daß für jede ganze Zahl $\nu \geqq n$

$$\left| \frac{f^{(2\nu+1)}(\bar{\omega}) - g^{(2\nu+1)}(\bar{\omega})}{\Pi^{(2\nu+1)}(\bar{\omega})} \Pi(\omega) \right| < \delta$$

wird, welches auch der Wert von $\bar{\omega}$ ist.

Doch wenn nun auch $\lim_{n=\infty} R = 0$ ist, so folgt noch nicht, daß $f(\omega)$ durch die formal gebildete Fourier'sche Reihe $G(\omega)$ dargestellt wird. Wenigstens muß man diese Möglichkeit einräumen, wenn man so wie Benze bedenkt, daß das auf dem Rolle'schen Satze gegründete Restglied bei dem Übergange zur Grenze darum vielleicht nicht mehr anwendbar ist, weil von den Nullstellen von $\Pi(\omega)$ unendlich viele in das Intervall von der Größe 2π hineinfallen. Auch ist die Konvergenz oder Divergenz von $G(\omega)$ nicht in Frage gezogen.

Man kann also nur sagen, sobald $f(\omega)$ durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist, wofür Dirichlet, wenigstens betreffs der, mit Riemann zu reden, in der Natur allein vorkommenden

[1] Crelle's Journal, Bd. 126.

Funktionen, hinreichende Bedingungen aufgestellt hat, dann wird nach dem Satze von Cantor,[1] wonach nämlich eine Funktion, wenn sie überhaupt durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist, nur in einer Weise ebenso zu entwickeln ist,[2] $f(\omega)$ durch die Reihe dargestellt, die zuerst nur formal durch $G(\omega)$ gegeben ist, und notwendig wird dann

$$\lim_{n=\infty} R = 0.$$

Also die Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion $f(\omega)$ durch die Fourier'sche Reihe sind gewiß auch hinreichend für das Verschwinden der Grenze des Restgliedes.

Hätte man aber umgekehrt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden der Grenze des auf eine bestimmte Funktion $f(\omega)$ und eine bestimmte Näherungsfunktion $g(\omega)$ bezüglichen Restgliedes, so müssen diese noch nicht notwendig und hinreichend sein für die Darstellbarkeit von $f(\omega)$ durch die Fourier'sche Reihe.

Die Verhältnisse liegen also hier anders als dort, wo die ganze rationale Funktion

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

als Interpolationsfunktion einer in der Umgebung von a endlichen, stetigen, unbeschränkt differentiierbaren Funktion $f(x)$ eingeführt wird. Denn dort ist das gleichmäßige Verschwinden des Lagrange'schen Restgliedes

$$\frac{f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))}{n!}(x-a)^n \qquad (0<\vartheta<1)$$

hinreichend für die Darstellbarkeit von $f(x)$ durch die Taylor'sche Reihe und ferner ist, wie Pringsheim[3] gezeigt hat, das gleichmäßige Verschwinden des Cauchy'schen Restgliedes notwendig für die Darstellbarkeit von $f(x)$ durch die Taylor'sche Reihe.[4]

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 72.

[2] Vergl. auch Hurwitz, Math. Ann., Bd. 57.

[3] Math. Ann., Bd. 44.

[4] Auf die Verwandtschaft der Untersuchungen an dieser Stelle mit denen von Runge (Bd. 46, Zeitschrift für Mathematik und Physik) bin ich nur nachträglich hinzuweisen im stande.

Zur dritten in der Einleitung genannten Aufgabe übergehend, sei nun anzuführen gestattet, daß dann, wenn $f(-\omega) = \pm f(\omega)$ ist, in der Fourier'schen Reihe $G(\omega)$ die Koeffizienten b beziehungsweise a alle herausfallen und daß dann, wenn

$$f(\omega-\pi) = -f(\omega)$$

ist, wie z. B. bei den Spannungskurven der Wechselströme,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_{2\nu} \cos 2\nu\omega + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} b_{2\nu} \sin 2\nu\omega = 0$$

wird, und somit gilt

$$G(\omega) = a_1 \cos\omega + a_3 \cos 3\omega + \ldots$$
$$+ b_1 \sin\omega + b_3 \sin 3\omega + \ldots$$

Hier setze man, wenn n gerade ist, was wir jetzt voraussetzen wollen,

$$g(\omega) = a_1 \cos\omega + a_3 \cos 3\omega + \ldots + a_{n-1} \cos(n-1)\omega +$$
$$+ b_1 \sin\omega + b_3 \sin 3\omega + \ldots + b_{n-1} \sin(n-1)\omega,$$

dann ist

$$g^{(2n+1)}(\bar\omega) =$$
$$= -a_1 \sin\bar\omega - a_3 3^{2n+1} \sin 3\bar\omega - \ldots - a_{n-1}(n-1)^{2n+1} \sin(n-1)\bar\omega$$
$$+ b_1 \cos\bar\omega + b_3 3^{2n+1} \cos 3\bar\omega + \ldots + b_{n-1}(n-1)^{2n+1} \cos(n-1)\bar\omega$$

Im Falle $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\nu = \nu \dfrac{2\pi}{2n+1}$ erhält man noch insbesondere

$$\Pi(\omega) = +\sin\frac{\omega}{2} \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \sin\left(\frac{\omega}{2} - \mu\frac{2\pi}{2n+1}\right) \sin\left(\frac{\omega}{2} - (n+\mu)\frac{2\pi}{2n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{\omega}{2} \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \left\{\cos\left(\omega - (n+2\mu)\frac{2\pi}{2n+1}\right) - \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right\}$$

und jetzt sind bis auf die Differentiation von $\Pi(\omega)$ alle Vorbereitungen getroffen, um die Spannungskurve eines Wechsel-

stromes näherungsweise analytisch darstellen und das Restglied beurteilen zu können.

Zur Bestimmung der $2n+1^{\text{sten}}$ Ableitung des Produktes $\Pi(\omega)$, das wir in der Form schreiben wollen:

$$\Pi(\omega) = u_0(\omega)\, u_1(\omega) \ldots u_n(\omega),$$

sei wegen einer etwaigen Anwendung des Restgliedes gesagt, daß man diese Ableitung in der symbolischen Gestalt auszudrücken vermag:

$$\left(\frac{du_0}{d\omega} + \frac{du_1}{d\omega} + \ldots + \frac{du_n}{d\omega}\right)^{(2n+1)},$$

wo also nach Ausführung der $(2n+1)^{\text{sten}}$ Potenz des Klammerausdruckes die k^{te} Potenz von $\frac{du_\nu}{d\omega}$ durch $\frac{d^k u_\nu}{d\omega^k}$, der nullte Differentialquotient durch u_ν zu ersetzen ist, so daß die $(2n+1)^{\text{ste}}$ Ableitung Glieder der Form enthält:

$$A_\nu u_0 u_1 \ldots u_{\nu-1} \frac{d^{2n+1} u_\nu}{d\omega^{2n+1}} u_{\nu+1} \ldots u_n,$$

wobei A_ν ein Zahlenkoeffizient ist.

Man beachte auch noch, daß dann, wenn

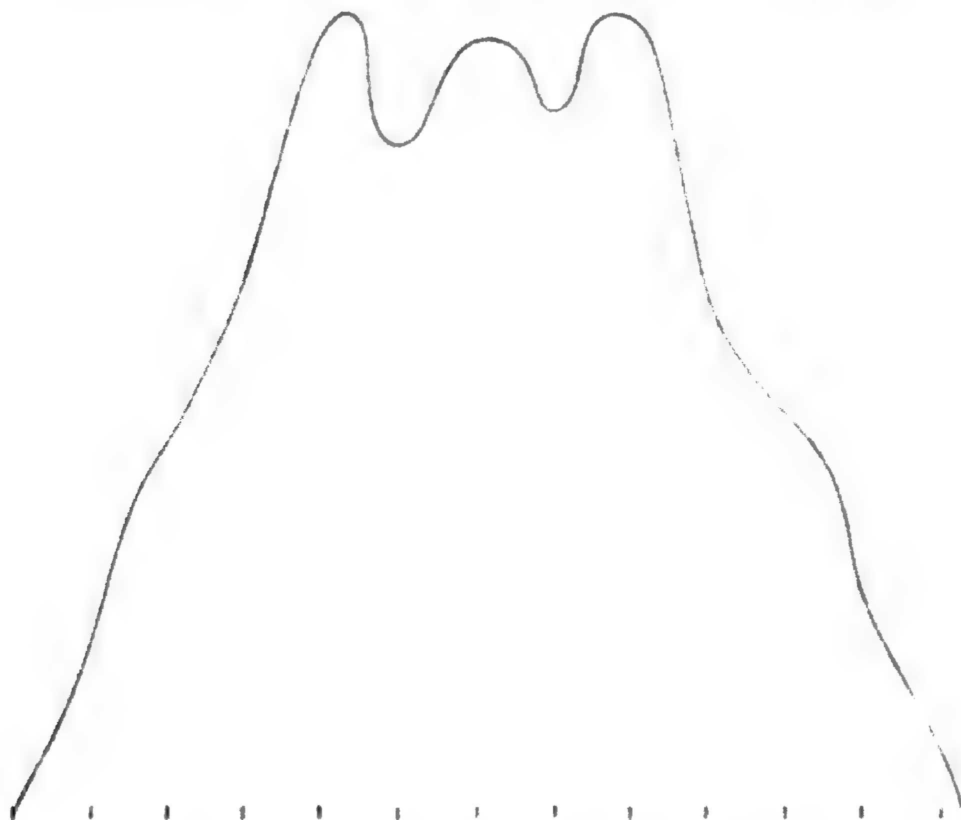
$$(c_0+c_1+\ldots+c_n)^m = C_0+C_1+\ldots+C_m$$

gesetzt wird, diese Glieder schrittweise aus den folgenden Relationen zu finden sind:

$$\begin{aligned}
C_0 &= c_0^m \\
c_0 C_1 &= m c_1 C_0 \\
2c_0 C_2 &= 2mc_2 C_0 + (m-1) c_1 C_1 \\
3c_0 C_3 &= 3mc_3 C_0 + (2m-1) c_2 C_1 + (m-2) c_1 C_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
mc_0 C_m &= m\,.\,mc_m C_0 + ((m-1)m-1) c_{m-1} C_1 + \ldots \\
&\quad \ldots + (m-(m-1)) c_1 C_{m-1}.
\end{aligned}$$

Ist die in nachstehender Figur enthaltene Spannungskurve von einem Induktorgenerator, die in dem von Dr. Niethammer bearbeiteten vierten Bande des Handbuches der

Elektrotechnik von Heinke p. 48 sich vorfindet, näherungsweise analytisch darzustellen, so setze man $n = 12$, bemesse die nachstehenden Werte η_ν, dann ergibt sich leicht $g(\omega)$:



$\eta_0 = 0, \quad \eta_1 = 16, \quad \eta_2 = 34, \quad \eta_3 = 48 \cdot 8, \quad \eta_4 = 70 \cdot 4, \quad \eta_5 = 61,$
$\eta_6 = 70 \cdot 8, \quad \eta_7 = 64 \cdot 2, \quad \eta_8 = 73, \quad \eta_9 = 47, \quad \eta_{10} = 36 \cdot 2,$
$\eta_{11} = 18 \cdot 8, \quad \eta_{12} = 4 \cdot 4,$

$$g(\omega) = 29 \cdot 74 \cos \omega - 17 \cdot 07 \cos 3\omega - 5 \cdot 86 \cos 5\omega - \\ - 1 \cdot 65 \cos 7\omega - 2 \cdot 95 \cos 9\omega - 0 \cdot 26 \cos 11\omega \\ + 26 \cdot 95 \sin \omega + 19 \cdot 42 \sin 3\omega - 5 \cdot 65 \sin 5\omega + \\ + 2 \cdot 17 \sin 7\omega - 1 \cdot 32 \sin 9\omega - 1 \cdot 25 \sin 11\omega,$$

doch das Restglied wurde nicht untersucht.

Im weiteren soll uns ein Beispiel über den Gang gewisser Mittelzahlen der Temperaturen näher beschäftigen. Wir entnehmen aus einer im Jahre 1901 von St. Kostlivy veröffentlichten Arbeit: »Der tägliche Temperaturgang von Wien (Hohe Warte)[1] für die Gesamtheit aller Tage sowie an heiteren und

[1] Denkschriften der Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 73.

trüben Tagen« und hier aus den Angaben auf p. 241 über den täglichen Temperaturgang an heiteren Tagen als Mittelwerte der Temperaturen an einem Tage zwischen dem 1. Oktober und 31. März um

6^h a. ...	$-1\cdot72$	2^h p. ...	$4\cdot61$	10^h p. ...	$-0\cdot22$
7 ...	$-1\cdot87$	3 ...	$4\cdot76$	11 ...	$-0\cdot64$
8 ...	$-1\cdot41$	4 ...	$4\cdot34$	12 ...	$-0\cdot37$
9 ...	$-0\cdot44$	5 ...	$3\cdot30$	1 a. ...	$-0\cdot16$
10 ...	$0\cdot76$	6 ...	$2\cdot27$	2 ...	$-0\cdot45$
11 ...	$1\cdot89$	7 ...	$1\cdot78$	3 ...	$-0\cdot81$
12 ...	$3\cdot07$	8 ...	$0\cdot78$	4 ...	$-1\cdot12$
1 p. ...	$3\cdot92$	9 ...	$0\cdot23$	5 a. ...	$-1\cdot44$

Indem man nun auf Grund der Angaben um 6^h a., 2^h p., 10^h p. eine Näherungsfunktion sucht, findet man

$$g(\omega) = 0\cdot89 - 2\cdot61 \cos\omega + 1\cdot64 \sin\omega,$$

wo auf den Bogen von der Länge 2π die 24 Stunden des Tages fallen.

$\Pi(\omega)$ hat den Maximalwert $\frac{1}{4}$, weiter ist

$$\Pi'''(\omega) = \frac{27}{32} \cos\frac{\omega}{2}(1-2\cos\omega)$$

und diese Funktion verschwindet an den Stellen $\omega = \frac{\pi}{3}$, π, $5\frac{\pi}{3}$, nimmt für $2\frac{\pi}{3}$ den Wert $\frac{27}{32}$, an den Stellen 0 und $4\frac{\pi}{3}$ den Wert $-\frac{27}{32}$ an; ferner ist an diesen drei Stellen $|\Pi''''(\omega)| = \frac{81}{64}$.

Liest man zu den Zeiten 6^h a., 2^h p., 10^h p. die Temperaturen ab, so ergibt sich für $|R(\omega)|$ ein gänzlich unbrauchbarer Wert, ob man die vierte Ableitung von $f(\omega)$ bei Gebrauch von $\Delta\omega = \frac{2\pi}{24}$ oder $= \frac{2\pi}{48}$ oder $= \frac{2\pi}{96}$ durch den vierten Differenzenquotienten ersetzt, also die um jede Stunde, jede halbe oder Viertelstunde gemessenen Temperaturen nach den angegebenen Stunden benützt.

Danach bleibt nur übrig, wenn man an drei Ablesungen festhalten will, die Temperaturen zu anderen Stunden zu benützen. Es erscheint passend, um 7^h a., 3^h p., 11^h p. die Temperaturen abzunehmen, weil die um 3^h p. die höchste ist und um die anderen Zeiten Minima bestehen, die durch ein, physikalisch genommen, besonders im Dezember bedeutendes Maximum um 1^h a. getrennt sind, das wohl ausschließlich dem Freiwerden von Wärme bei dem Übergang des Wasserdampfes in den festen Aggregatzustand zuzuschreiben ist; oder aber man muß mehr als drei Ablesungen zur Beschreibung des Ganges der täglichen Temperatur vornehmen, was vollends mit anderwärts gemachten Erfahrungen und Überlegungen übereinstimmt.

Entsprechend dem zweiten Vorschlage, die Temperaturen um 7^h a., 3^h p., 11^h p. zu verwerten, findet man, wenn der Zeit 7^h a. $\omega = 0$ zugeordnet wird, die Näherungsfunktion $g(\omega) = 0 \cdot 75 - 2 \cdot 62 \cos \omega + 3 \cdot 12 \sin \omega$, doch es wird gleich $|R(\omega)|$ an der Stelle $\bar{\omega} = \frac{\pi}{3}$, wenn $\Delta \omega = \frac{2\pi}{24}$ gesetzt wird, durch die Ungleichung zu beurteilen gegeben,

$$|R(\omega)| < 24,$$

d. h. die neue Näherungsfunktion ist wieder unbrauchbar.

Damit ist auch in der einfachsten Art ersichtlich gemacht, daß man den Gang der täglichen Temperatur mit drei Angaben nicht beschreiben kann. Ferner leuchtet mit dieser ausführlichen Behandlung des letzten Beispieles ein, in welcher Weise das hier aufgenommene Restglied trigonometrischer Reihen zu benützen ist.

Zum Schlusse sei noch folgendes bemerkt: Ist $g(\omega)$ die eingangs eingeführte Näherungsfunktion der vorgegebenen Funktion $f(\omega)$ von der Periode 2π, nimmt also $g(\omega)$ an $2n+1$ Stellen α_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots 2n)$ eines Intervalls von der Länge 2π dieselben Werte an wie $f(\omega)$, schreibt man sie zunächst in der der Lagrange'schen Interpolationsformel analog gebildeten Art und bringt sie hierauf in die Gestalt

$$g(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\nu \cos \nu\omega + b_\nu \sin \nu\omega),$$

so sind natürlich die Koeffizienten a und b mit den α_ν bestimmt.

Ist umgekehrt eine solche Funktion, wie das letzte Aggregat sie anzeigt, gegeben, so sind durch die Koeffizienten a und b $2n+1$ Werte α als ein Lösungensystem von $2n+1$ transzendenten Gleichungen gegeben oder zu bestimmen.

Sind die gegebenen α_ν im ersten Falle äquidistant, $\alpha_\nu = \alpha + \nu \frac{2\pi}{2n+1}$, so haben die Koeffizienten a und b die schon angegebenen Werte:

$$a_\mu = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} f(\alpha_\nu) \cos \mu \alpha_\nu$$

$$b_\mu = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} f(\alpha_\nu) \sin \mu \alpha_\nu .$$

Umgekehrt werden die Größen α_ν, die einem derartigen System von Konstanten a und b zugehören, äquidistant sein.

Stellt man die Aufgabe, die Konstanten a und b so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der Differenzen der an $2n+1$ Stellen α_ν irgend gegebenen Werten $f(\alpha_\nu)$ und der berechneten Werte

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} (a_\mu \cos \mu \alpha_\nu + b_\mu \sin \mu \alpha_\nu)$$

ein Minimum werde, so ergeben sich, wie leicht zu zeigen ist, die früheren Werte für die Konstanten a und b und auch eine Restformel wie früher.

Will man, daß die Annäherung eine möglichst gute werde, so sucht man mit Bessel die Koeffizienten a_ν und b_ν auf Grund der Forderung, daß die Summe der Fehlerquadrate über das ganze Intervall von 0 bis 2π ein Minimum werde, d. h. daß

$$\int_0^{2\pi} [f(\omega) - g(\omega)]^2 d\omega$$

ein Minimum werde, und es ergeben sich die Fourier'schen Konstanten

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos\mu\alpha\, d\alpha,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin\mu\alpha\, d\alpha.$$

Den Werten dieser a und b zugehörig sind $2n+1$ Größen α_ν und man vermag die dem jetzt bestehenden $g(\omega)$ entsprechende Funktion $\Pi(\omega)$ und das Restglied der Form nach vorzustellen.

Es kommt uns hier auch nur auf die Gestaltung dieses Restes an, denn die wirkliche Berechnung wird wegen der notwendigen Auflösung eines Systems transzendenter Gleichungen nur in besonderen Fällen ausführbar sein.

Es ist noch lehrreich mit Fischer zu bemerken, daß der Bessel'sche Satz in dem Grenzfalle $\lim n = \infty$ ergibt:

$$\lim R = 0.$$

In der Tat, wenn in der Näherungsfunktion $g(\omega)$ die Konstanten a und b die früher angegebenen Fourier'schen Konstanten sind, so ist nach Harnack (wie er schreibt)[1]

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\omega)-g(\omega)]^2 d\omega =$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega)^2\, d\omega - \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(a_\nu^2+b_\nu^2)$$

und nach dem Fundamentalsatze von Hurwitz, l. c., ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)$$

und so wird

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\omega)-g(\omega)]^2 d\omega = 0.$$

Dieser Satz $\lim R = 0$ steht in Einklang mit früher gemachten Äußerungen.

[1] Siehe das »Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung« von Serret-Harnack (Anhang zu Band II).

Ein Vorschlag zur Bestimmung der Venusrotation

von

F. Löschardt,

Dechant in Zichyfalva (Torontáler Komitat).

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Dreizehn Jahre sind schon verflossen, seit Schiaparelli durch seine das größte Aufsehen erregende Arbeit über die Rotation des Planeten Venus[1] die astronomische Welt hinsichtlich dieser Frage in zwei Lager spaltete, indem ein Teil derselben im Anschluß an ihn für eine Rotationsdauer von 224·7 Erdtagen, der andere aber für eine weit schnellere, beiläufig 24stündige, sich erklärte, ohne aber zu einem sicheren, ganz einwandfreien Resultat gekommen zu sein. Wohl hat Schiaparelli's Auftreten zahlreiche Beobachter veranlaßt, den Planeten zum Gegenstande neuerlicher sorgfältiger Untersuchungen zu machen und die Ergebnisse in eingehenden, oft mit Zeichnungen ausgestatteten Berichten mitzuteilen. Es ist hier nicht notwendig, sie alle anzuführen. Obgleich aber unter ihnen es einige gibt, die, wie z. B. Herr Leo Brenner von der Manorasternwarte, mit apodiktischer Sicherheit die Frage gelöst zu haben glauben, so tauchen doch immer noch Zweifel darüber auf. So ist das Lowell-Observatory in Arizona durch eine lange Reihe im letzten Sommer angestellter sorgfältiger Beobachtungen an einem mächtigen Instrument[2] abweichend

[1] »Considerazioni sul moto rotatorio del pianeta Venere« in den Rendiconti des Reale Instituto lombardo di scienze e lettere, Vol. XXIII, 1890.

[2] Scientific American. Dezember 1903.

von Schiaparelli und Leo Brenner zu dem Ergebnis gekommen, die Rotation des Planeten habe zum mindesten eine Dauer von einigen Wochen.

Es scheint also die Meinung berechtigt zu sein, daß die Lösung unserer Frage in desto größere Ferne rücke, je mehr Mühe auf sie verwendet wird. Denn mit der direkten Beobachtung wandernder Flecken auf der Planetenoberfläche ist man noch zu keinem sicheren Resultat gelangt. Aber auch die Spektralanalyse des von dem Planeten reflektierten Sonnenlichtes, welche in neuerer Zeit von Bielopolszky in Pulkova und von andern versucht wurde, hat noch keine einwandfreie Entscheidung herbeigeführt.

Es ist gewiß eine auffallende Tatsache, daß trotz fortgesetzter Anstrengungen es noch nicht gelungen ist, bei unserm Nachbarplaneten die Rotationsdauer auch nur einigermaßen sicher zu bestimmen. Die Astronomen sind mit staunenswertem Scharfsinn und enormem Kraftaufwand in die tiefsten Tiefen des Weltraumes eingedrungen und haben dort mitunter geradezu verblüffende Entdeckungen gemacht. Aber unsern nächsten Nachbar, den — wenn man sich so ausdrücken darf — populärsten, von den Dichtern besungenen, vom gemeinen Manne viel bewunderten, von manchen Völkern als Gottheit verehrten, unseres Abend- und Morgenhimmels schönsten Schmuck bildenden Stern wenigstens ebenso genau wie seine weit entfernteren Stammesgenossen Mars, Jupiter und Saturn kennen zu lernen, ist ihnen bis heute noch nicht gelungen.

Da es nun weder mit dem Fernrohr noch mit dem Spektroskop gelingen will, das in Rede stehende Problem zu lösen, so müssen wir uns, ohne die direkte Beobachtung und Analysierung des von dem Planeten reflektierten Lichtes deshalb aufzugeben, noch an einen andern Faktor der Sonnenwirkung um Aufklärung wenden.

Dieser Faktor ist die Wärme.

Herr S. P. Langley in Amerika hat durch seine Untersuchungen des Sonnenspektrums nachgewiesen, daß die Sonnenenergie, welche als Wärmestrahlen von unserm Zentralkörper verausgabt wird, fünfmal so groß ist als diejenige,

welche als Lichtstrahlung in Erscheinung tritt. Wir haben demnach in den Wärmestrahlen ein Mittel von fünffach größerer Differenzierungsfähigkeit, als die leuchtenden Strahlen besitzen, zur Verfügung für Beobachtung von Veränderungen in den Reflektions- und Absorptionsverhältnissen des zeitweise uns zugekehrten Teiles der Venusoberfläche. Trachten wir also diesen günstigen Umstand auszunützen.

Unter der Voraussetzung, daß die Oberfläche des Planeten keine gleichförmige Dichte hat, sondern so wie unsere Erde aus Festländern und Meeren besteht, müssen, wie bekannt, die Wärmestrahlen der Sonne von ersteren stärker reflektiert, von letzteren stärker absorbiert werden.

Es handelt sich also einfach darum, die Zeit des Maximums und Minimums der von Venus kommenden Wärmestrahlung zu ermitteln. Hat Venus unter obiger Voraussetzung eines teilweise festen, teilweise tropfbar-flüssigen Zustandes ihrer Oberfläche eine Rotationsdauer von 224·7 Erdtagen (Rotation = Revolution), wie Schiaparelli meint, so muß um ihre obere Konjunktion herum stets und immer das Maximum, um die untere herum aber das Minimum auftreten, d. h. Maximum und Minimum und der Übergang von einem zum andern wird einfach eine Funktion des Phasenwechsels sein. Die Kurve wird steil, aber kontinuierlich auf- und absteigen und nur aus einem Wellenberg und einem Wellental bestehen. Die Lichtseite wird uns eine sehr hohe, die Schattenseite eine sehr niedrige Temperatur zeigen.

Bei einer kürzeren Rotationsdauer wird der Verlauf der Kurve während eines Venusjahres ein ganz anderer sein. Im Verlauf eines solchen werden mehrere Rotationen stattfinden und jede wird ein Maximum und Minimum der Wärmestrahlung aufweisen und die Tagesmittel werden im Laufe eines Venusjahres eine Kurve bilden, deren Größe und Ausschlagsweite von der Größe des Winkels abhängig ist, welchen die Rotationsebene mit der Ekliptik bildet — dies alles unter der Annahme, daß die Verteilung von Festland und Wasser (die Ursache der Strahlungsdifferenzen) auf der Oberfläche des Planeten ungleichmäßig und weder zum Äquator noch zum Kolur der Tag- und Nachtgleichen symmetrisch ist,

was auch mit der allergrößten Wahrscheinlichkeit der Fall sein wird.

Diese Betrachtung zeigt uns, daß es an der Zeit sei, bei unsern Beobachtungen außer dem Refraktor und dem Spektroskop auch noch das Radiometer oder besser das Bolometer zu Hilfe zu nehmen und nebst den Beleuchtungsveränderungen (helle und dunkle Flecke) auch die Änderungen der Wärmestrahlung auf dem Planeten zu beobachten.

Wenn es wahr ist — und es ist kein Grund zu zweifeln vorhanden — daß Langley's verbessertes Bolometer eine Temperaturveränderung auch nur von einem Hundertmillionteilteile eines Grades des hundertteiligen Thermometers anzuzeigen im stande ist,[1] so kann es nicht ausbleiben, daß man endlich mittels dieses Instrumentes bei an verschiedenen Orten der Erde durch einige Venusumläufe fortgesetzter Registrierung der Wärmestrahlung des Planeten unter gehöriger Berücksichtigung aller dabei Einfluß habenden Störungen zu einer befriedigenden Berechnung seiner Rotationsdauer gelangen werde. Die Beobachtung mit dem Bolometer dürfte wohl auch ihre Schwierigkeiten haben, aber dennoch wahrscheinlich ein bestimmteres Resultat als mit dem Spektroskop geben.

Natürlich wird damit nicht bloß die Wärmemenge des erleuchteten Teiles der Venusphase, sondern mit ihr zugleich auch die des dunklen Teiles zur Registrierung gelangen.

Daher sei es gestattet, noch in Betreff der Nachtseite des Planeten, welcher man in Bezug auf unser Problem bisher noch wenig Aufmerksamkeit schenkte, einiges zu bemerken.

Nicht wenige Beobachter haben seit mehr als 100 Jahren dieselbe bisweilen in grauem Lichte schimmern sehen. Ich selbst habe diese Erscheinung wiederholt beobachtet. So finde ich in meinen Beobachtungsnotizen unter dem Datum 3. Mai 1892 folgende Aufzeichnung, begleitet von einer natürlich mangelhaften Handzeichnung: »$6^h 15^m$ Venus im Stundenwinkel 51°, D. +27°, steht hinter feinen Cirrhi und bietet einen höchst überraschenden Anblick. Von Flecken ist zwar

[1] Siehe die Schrift: The new spectrum, by S. P. Langley. From the smithsonian report for 1900, p. 683—692. Washington, 1901.

nichts, außer der gewöhnlichen Schattierung an der Lichtgrenze und dem sehr hellen Nordhorn wahrzunehmen; doch zeigt sich die ganze Nachtseite als bedeutend kleinere Halbkugel in stahlblauem Lichte, welches an der Lichtgrenze am dunkelsten, viel dunkler als der Himmelsgrund ist und gegen den Ostrand mehr an Intensität abnehmend ins Graue übergeht. Man sieht fast den ganzen Ostrand mit Ausnahme eines kleinen Stückes in der Mitte. Leider konnte ich die Erscheinung nur durch etwa 4 bis 5 Minuten beobachten, da sich die Cirrhi alsbald verdichteten und den Planeten fast ganz verschwinden ließen.« Ferner am 18. Juni desselben Jahres, 5^h30^m: »Venus im Stundenwinkel 52°, D. +21° 10′, ist ruhig, scharf. Längs der Lichtgrenze in der Nachtseite zeigt sich ein tiefblaues Band, dunkler als der Himmelsgrund.«

Diese sonderbare, eben nicht seltene und hinreichend beglaubigte Erscheinung hat bisher noch keine stichhältige Erklärung gefunden. Nur darin stimmen die Ansichten überein, daß sie nicht der Widerschein des reflektierten Erdenlichtes sein kann. Vielleicht bietet uns gerade der dunkle Teil der Phase, der immer größer wird, je mehr der Planet sich der Erde nähert, ein geeignetes Mittel, die Rotationsdauer durch Beobachtung seiner Wärmestrahlung zu bestimmen. Ist nämlich die Nachtseite nicht ewig von der Sonne abgewendet, so muß deren Temperatur wenigstens zeitweilig, je nachdem sie vom Ozean oder festen Lande ausgestrahlt wird, ebenso wie die der Lichtseite veränderlich sein und das Sichtbarwerden der dunklen Scheibe, falls es periodisch auftritt, die Wiederkehr ähnlicher Verhältnisse anzeigen. In dieser Beziehung sei es gestattet, noch auf einen besonderen Umstand aufmerksam zu machen.

Wir sehen in der Nachtseite häufig, aber nicht immer, den Planetenrand so scharf von dem Himmelsgrunde sich abheben und den wahren Umfang des Planetenkörpers zur Anschauung bringen, als ob gar keine Atmosphäre dort vorhanden wäre. Diese Erscheinung kann wohl nur der glatte Spiegel eines oder mehrerer Meere verursachen. Es fragt sich nun, ob diese Erscheinung bloß eine zufällige, lediglich von unserer Atmosphäre abhängige oder eine periodische ist. Meine

oben angeführten Beobachtungen zeigen, daß selbst das Vorhandensein von Cirrhi keinen ungünstigen Einfluß hatte und hinwiederum, daß bei klarer, ruhiger Luft und scharfer Definition nicht die ganze Nachtseite, sondern nur ein tiefblaues Band an der Lichtgrenze sich zeigte. Man kann also getrost annehmen, daß man es mit einem periodischen und nicht zufälligen Wechsel zu tun habe, welchen zu beobachten von großem Vorteil wäre. Da aber das Spektroskop hier gar keine Anwendung finden kann, so dürfte das Bolometer besonders um die Zeit der unteren Konjunktion, wenn die Venussichel schon schmal ist und daher die neu zugeführte Wärme nur einen geringen Bruchteil der Wirkung auf das Instrument ausmacht, sich zur Anwendung ganz besonders empfehlen. Die große Nähe und der bedeutend wachsende Durchmesser der Scheibe dürften die Beobachtungen sehr erleichtern.

Damit wäre aber die Frage zur Lösung gebracht und würde sich dann wieder einmal das Losungswort bewahrheiten: Durch Nacht zum Licht!

Farbengleichung mit Zuhilfenahme der drei Grundempfindungen im Young-Helmholtz-schen Farbensystem

von

V. Grünberg,
Professor an der Landes-Oberrealschule in Znaim.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Jänner 1904.)

Alle bisher aufgestellten Farbengleichungen, insbesondere die von König und Dieterici herrührenden,[1] lassen eine direkte Beziehung zwischen den Wellenlängen zweier komplementärer Farben nicht erkennen.

Zu einer solchen Beziehung aber kann man leicht gelangen, wenn man sich von folgender, rein rechnerischer Erwägung leiten läßt:

Bezeichnen

$$\rho, \gamma \text{ und } \beta$$

die den drei Grundempfindungen des Young-Helmholtz'schen Farbensystems, also der Rot-, Grün- und Blauempfindung, zukommenden Wellenlängen und die zwei beliebigen Komplementärfarben entsprechenden Wellenlängen:

$$\lambda \text{ beziehungsweise } \lambda',$$

so enthält sowohl die Farbe von der Wellenlänge λ, als auch die von der Wellenlänge λ' im allgemeinen alle drei Gattungen von Strahlen.

---

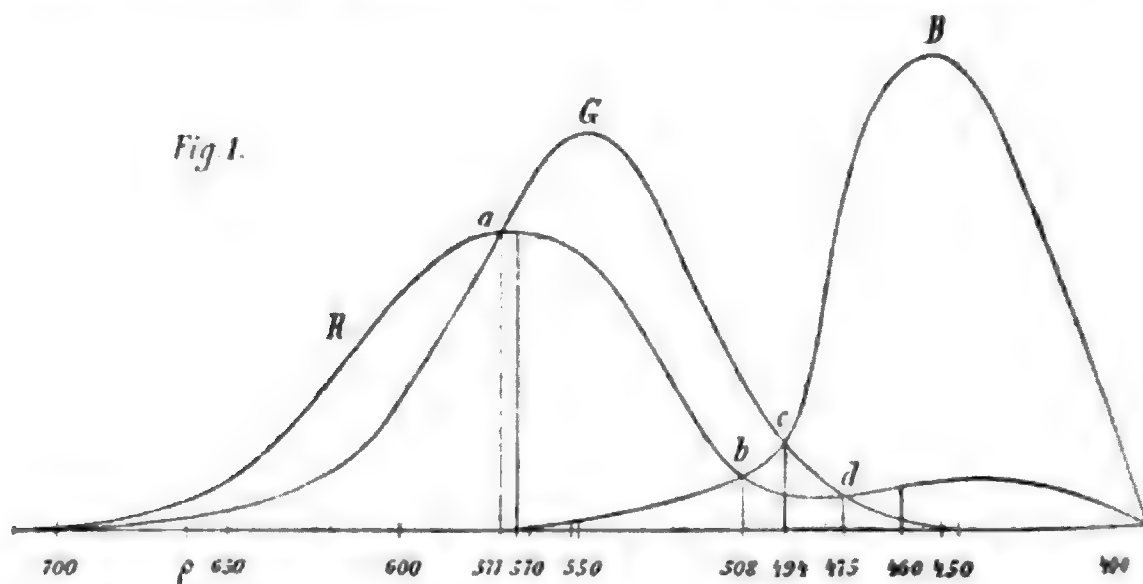
[1] Sitz. Ber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1886, XXXIX, 20.

Durch die eine, dem roten Spektralende näher liegende Farbe (Wellenlänge λ) werde eine Empfindung ausgelöst, deren Rotwert x und deren Grünwert y sei, während der in derselben enthaltene Blauwert[1] unter der Empfindungsschwelle bleiben möge.

Die letztgenannte Voraussetzung kann mit vollem Rechte gemacht werden, da es sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, hier nur um Farbenempfindungen handelt, denen Wellenlängen zwischen

675 und 560

entsprechen und da in diesem Intervalle, wie ein Blick auf die von König-Dieterici[2] beziehungsweise von F. Exner[3] angefertigten Elementarempfindungskurven lehrt (siehe Fig. 1), die Blauempfindung tatsächlich noch nicht in Betracht kommt.



Die zweite Farbenempfindung, welche die dem violetten Spektralende näherliegende Komplementärfarbe (Wellenlänge λ') auslöst, enthalte: den Grünwert y' und den Blauwert z, während der Rotwert es sei, der diesmal nicht in Betracht komme.

Freilich ist die Berechtigung dieser letzten Annahme aus den Elementarempfindungskurven nicht auf den ersten Blick

[1] Die Begriffe Rotwert, Grünwert und Blauwert werden hier in demselben Sinne gebraucht, wie dies von Helmholtz in seiner physiol. Optik. II. Aufl., p. 342 geschieht.

[2] A. a. O., p. 16.

[3] Franz Exner: Über die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Farbensystem. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXI, Abt. II a, Juni 1902.

hin ersichtlich, da in dem hier, wie später gezeigt werden wird, maßgebenden Wellenlängenintervall

494 bis 460

die Rotkurve allerdings eine Rolle spielt. Allein bei näherer Betrachtung zeigt sich, daß dieselbe gerade in dem bezeichneten Intervalle mit der Abszissenachse nahezu parallel verläuft, so daß eine Vernachlässigung ihres Einflusses nichts anderes als eine Parallelverschiebung der Abszissenlinie bedeutet.

Nehmen wir nun an, daß bezüglich der in den beiden betrachteten Farben vorhandenen Rot-, Grün- und Blauwerte das in der Farbentheorie allgemein angewendete Prinzip der Schwerpunktsbestimmung gelte.

Alsdann müßte für die ersterwähnte Farbe von der Wellenlänge λ:

$$x.\rho+y.\gamma=(x+y).\lambda$$

sein, woraus folgt:

$$y=\frac{\rho-\lambda}{\lambda-\gamma}.x$$

In ähnlicher Weise ergäbe sich für die zur obigen komplementäre Farbe (Wellenlänge λ') aus:

$$y'.\gamma+z.\beta=(y'+z)\lambda'$$

$$y'=\frac{\lambda'-\beta}{\gamma-\lambda'}.z.$$

Der in beiden zu einander komplementären, sich also zu »Weiß« ergänzenden Farben enthaltene Grünwert:

$$y+y'$$

erscheint sonach gegeben durch:

$$\frac{\rho-\lambda}{\lambda-\gamma}.x+\frac{\lambda'-\beta}{\gamma-\lambda'}.z.$$

Setzen wir nun, wie dies wohl allgemein geschieht, voraus, daß in der Empfindung »Weiß« die Rot,- Grün- und Blauwerte gleich groß seien,[1] daß also:

$$y+y' = x = z$$

sei, so resultiert aus:

$$y+y' = \frac{\rho-\lambda}{\lambda-\gamma} \cdot x + \frac{\lambda'-\beta}{\gamma-\lambda'} \cdot z$$

sofort für die Empfindung »Weiß« die Gleichung:

$$\frac{\rho-\lambda}{\lambda-\gamma} + \frac{\lambda'-\beta}{\gamma-\lambda'} = 1,$$

worin ρ, γ und β die den drei Grundempfindungen, λ und λ' die zwei beliebigen, zueinander komplementären Farben entsprechenden Wellenlängen bedeuten.

Um zu erfahren, ob diese Farbengleichung wirklich anwendbar sei, soll zunächst zu einer Bestimmung der drei den Grundempfindungen entsprechenden Wellenlängen ρ, γ und β geschritten werden.

Zu diesem Zwecke bedarf es dreier voneinander unabhängiger Gleichungen, die man erhält, wenn man für die Wellenlängen der beiden Komplementärfarben λ und λ' drei durch die unmittelbare Beobachtung gefundene Wertepaare einsetzt.

Diese Wertepaare entnehmen wir der hier folgenden Tabelle. Sie rühren von Helmholtz, Kries, Frey, König und Dieterici[2] her. Die fettgedruckten Werte für λ' sind direkt beobachtet, die anderen durch Interpolation gefunden. Für unsere Gleichungen zu benützen sind die aus den fünf Beobachtungen resultierenden Mittelwerte von λ' und die dazu gehörigen λ.

---

[1] Vergl. F. Exner, a. a. O., p. 5, »indem man die rein rechnerische Annahme macht, daß durch unzerlegtes weißes Licht die drei Elementarempfindungen gleich stark angeregt werden«.

[2] Vergl. Helmholtz, Handbuch d. phys. Optik, II, 1896, p. 317 bis 319.

λ	λ′ Helmholtz	Kries	Frey	König	Dieterici	Mittel der beob. Werte	Berechneter Wert	Differenz
675	—	—	—	**496·5**	—	—	494·3	+ 2·2
670	—	—	—	—	**494·3**	—	494·2	+ 0·1
663	—	—	—	**495·7**	—	—	493·9	+ 1·8
660	—	—	—	—	**494**	—	493·8	+ 0·2
656·2	**492·1**	**492·4**	**485·2**	496·2	494·4	492·1	493·6	— 1·5
650	491·8	492·36	485·1	**496·7**	**494·8**	492·1	493·3	— 1·2
638	491·2	492·28	484·9	**495·9**	494·06	491·6	492·6	— 1·0
635	491·05	492·26	484·85	495·89	**494**	491·6	492·4	— 0·8
626	490·60	**492·2**	**484·6**	495·85	**493·1**	491·4	491·6	— 0·2
615·3	490·0	490·2	483·8	**496**	492·6	490·5	490·5	0
612·3	489·85	**489·6**	**483·6**	494·9	492·4	490·0	490·0	0
610	489·75	489·3	483·3	494·1	**492·2**	489·7	489·68	+ 0·02
607·7	**489·7**	489·0	483·0	493·3	491·6	489·3	489·29	+ 0·01
599·5	488·3	**487·8**	**481·8**	489·8	488·9	487·3	487·5	— 0·2
588	486·15	485·0	479	486·5	**485·9**	484·5	483·4	+ 1·1
587·6	485·95	**484·7**	**478·9**	486·3	485·85	484·3	483·2	+ 1·1
586·7	485·7	484	**478·7**	486	485·78	484·0	482·7	+ 1·3
585·7	485·5	483·25	478·2	485·7	**485·7**	483·7	482·6	+ 1·1
585·3	**485·4**	483	478	485·5	485·1	483·4	481·7	+ 1·7
582·0	484·65	481·5	476·5	**483·6**	481·8	481·6	480·3	+ 1·3
579·7	483·9	**478·7**	475	483·1	478·5	479·8	477·5	+ 2·3
578	483·4	475·4	474	**476·6**	**476·6**	477·2	475·6	+ 1·6
577·7	483·3	474·9	**473·9**	475	475·8	476·6	475·3	+ 1·3
577	483·1	**473·9**	473·3	471·8	474	475·2	474·4	+ 0·8
576	482·8	470·9	472·4	**467**	471·5	472·9	473·05	— 0·15
575·6	482·65	469·5	472	463·8	**470**	471·6	472·4	— 0·8
575·5	482·62	**469·3**	471·9	463	469·6	471·3	472·3	— 1·0
574·5	482·3	467·6	471	**455**	465·85	468·4	470·6	— 2·2
573·9	**482·1**	466·7	470·4	453	463·6	467·2	469·5	— 2·3
573	479·8	465	469·5	**450**	460·2	465·0	467·7	— 2·7

λ	λ'							Differenz
	Helmholtz	Kries	Frey	König	Dieterici	Mittel der beob. Werte	Berechneter Wert	
572·9	479·55	**464·8**	469·4	—	459·8	468·4	467·5	+ 0·9
572·8	479·3	464·56	**469·3**	—	459·4	468·1	467·2	+ 0·9
571·5	475·9	461·25	466·4	—	**455**	464·7	466·2	— 1·5
571·4	475·65	461	466·2	—	**442**	461·2	463·8	— 2·6
571·3	475·4	460·8	466	—	**448**	462·5	463·5	— 1·0
571·1	474·9	**460·4**	465·6	—	—	467	462·9	+ 4·1
571	474·65	**452·1**	465·4	—	—	464·1	462·6	+ 1·5
570·7	473·9	446·3	**464·8**	—	—	461·6	461·8	— 0·2
570·4	473·15	**440·4**	464	—	—	459	460·7	— 1·7
570·1	472·4	**429·5**	463·3	—	—	455	459·7	— 4·7
569	469·5	—	**460·4**	—	—	465	455·6	+ 9·4
568·1	467	—	**452·1**	—	—	459·5	451·6	+ 7·9
567·1	**464·5**	—	445·4	—	—	455	445·6	+ 9·4
566·4	463·5	—	**429·5**	—	—	446·5	440·7	+ 5·8
566·3	463·4	—	**440·4**	—	—	451·0	440·1	+10·9
564·4	**461·8**	—	—	—	—	461·8	419·5	+42·3
563·6	**433**	—	—	—	—	433	406·2	+26·8

Durch Einsetzung verschiedener, einander koordinierter λ und λ' aus der Tabelle in die obige Farbengleichung:

$$\frac{\rho-\lambda}{\lambda-\gamma}+\frac{\lambda'-\beta}{\gamma-\lambda'}=1$$

erhielt ich nun durch Rechnung Werte für

β, γ und ρ,

welche nicht sehr voneinander abweichen und im Mittel ergeben:

$$\beta = 482$$
$$\gamma = 506$$
$$\rho = 665.$$

Die Werte für β (Blauempfindung) und γ (Grünempfindung) treffen mit den von Exner durch Messung gefundenen [1]

475 beziehungsweise 508

nahe zusammen, namentlich erscheint der Wert für die Grünempfindung

$$\gamma = 506$$

in guter Übereinstimmung mit dem schon von König-Dieterici angegebenen Werte.[2]

Der Wert für die Rotempfindung:

$$\rho = 665$$

würde ergeben, daß diese Grundempfindung dem äußersten sichtbaren Rot, für welches als Mittel der Beobachtungswerte: [3]

Nach	Helmholtz	656·2
»	Kries	656·2
»	Frey	656·2
»	König	675
»	Dieterici	670
		3313·6 : 5 = 662·7

oder rund

$$\lambda = 663$$

angenommen werden kann, nahe liegt, und zwar gegen Purpur zu, wie dies Exner's [4] und wohl auch schon König-Dieterici's Annahmen entspricht.

---

1 A. a. O., p. 12.

2 A. a. O., p. 24.

3 Vergl. Helmholtz, Handb. d. phys. Optik, p. 317 bis 319 und unsere Tabelle.

4 A. a. O., p. 12.

Die obige Farbengleichung geht nun nach Einsetzung der für die drei Grundempfindungen erhaltenen Wellenlängen über in:

$$\frac{665-\lambda}{\lambda-506}+\frac{\lambda'-482}{506-\lambda'}=1,$$

woraus nach einfacher Rechnung folgt:

$$\lambda'=\frac{1494\lambda-836418}{3\lambda-1677}$$

oder

$$\lambda'=\mathbf{498}-\frac{\mathbf{424}}{\lambda-\mathbf{559}}.$$

Setzt man beispielsweise

$$\lambda=\rho=665$$

so findet man

$$\lambda'=494$$

als Wellenlänge der zur Grundempfindung »Rot« komplementären Farbe, was wieder mit Exner's Annahme [1] vollkommen zusammentrifft.

Ferner zeigt sich im Einklange mit den Ergebnissen Exner's bei Einsetzung von

$$\lambda=577$$
$$\lambda'=474\cdot4$$

was auch dem aus den Beobachtungen von Helmholtz, Kries, Frey, König und Dieterici gewonnenen Mittelwerte für

$$\lambda=577 \text{ (siehe Tabelle)}$$
$$\lambda'=475$$

sehr nahekommt.[2]

In ebenso guter und zum Teile noch besserer Übereinstimmung zeigen sich nun, wie aus unserer Tabelle hervorgeht, viele andere aus obiger Gleichung gerechnete Werte für λ' mit den bezüglichen, aus den fünf Beobachtungen hervorgehenden Mittelwerten.

[1] A. a. O., p. 12.

[2] Als beobachteten Mittelwert findet Exner a. a. O. $\lambda'=473\cdot3$, weil er den aus der Helmholtz'schen Messungsreihe durch Interpolation gewonnenen Wert 483·1 nicht in Rechnung zieht, wobei sich der oben angeführte, mit Exner's Beobachtung vollkommen übereinstimmende Durchschnittswert 475 ergibt.

Gleich von den höchsten beobachteten Rotwerten angefangen (welche übrigens wenig verläßlich sind, da nach Exner: »der Farbenton im äußersten Rot des Spektrums sich kaum merklich ändert und für die meisten Beobachter bis etwa $\lambda = 610$ hin konstant bleibt«[1]), betragen die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten λ' (siehe Tabelle, Differenzkolonne), um 1 herum schwankend, oft nur wenige Zehntel und übersteigen die Ziffer 2 nur in einzelnen Fällen.

Erst von $\lambda = 569$ an zeigen sich größere Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten λ'; doch sind die hier aufgestellten Beobachtungsmittel schon von sehr fraglichem Werte.

Bezüglich der einzelnen Beobachter kann man unserer Tabelle folgendes entnehmen:

Helmholtz: Die ersten zehn Werte stimmen gut; einzelne ($\lambda = 610$) besonders gut. Die folgenden erweisen sich als zu hoch.

Frey: Bis etwa $\lambda = 576$ bleiben die Werte hinter den berechneten und den Mittelwerten zurück; von da an zeigen sie bis zum Schlusse gute Übereinstimmung mit denselben.

König: Werte erst zu hoch bis $\lambda = 578$; die folgenden zwei Werte stehen mit den berechneten im Einklang. Von $\lambda = 577$ angefangen erweisen sie sich wieder als zu klein.

Dieterici: Ähnlich wie bei König; etwas besser.

Kries: Gute Übereinstimmng der Werte vom Anfange bis zum Schlusse, die letzten vier ausgenommen.

Nach diesem Ergebnisse scheint Kries der verläßlichste der fünf genannten Beobachter zu sein.

Trotzdem ergab eine Rechnung, welche sich bloß auf die Kries'schen Beobachtungen stützte, für ρ, β und γ Werte, die noch sehr stark von den durch Einsetzung der Mittelwerte gefundenen abweichen.

ρ erschien viel zu groß (771), β und γ fielen fast in einen Wert zusammen (492 beziehungsweise 493).

---

[1] A. a. O., p. 13.

Aus der obigen Beziehung zwischen λ und λ' ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$(\lambda-559)(498-\lambda') = 424.$$

Es müßten also die koordinierten λ und λ' auf dem einen Aste einer gleichseitigen Hyperbel liegen, welche zu den Geraden

$$x = 498$$

$$\text{und } y = 559$$

asymptotisch verläuft.

Der andere Ast der Kurve käme nicht in Betracht.

Alle Wellenlängen, welche etwa zwischen den Werten

494 und 563

liegen, ergeben komplementäre Wellenlängen, welche die Reihe der beobachteten Werte (siehe Tabelle) nach der einen oder andern Richtung überschreiten.

Dies ist so zu deuten, daß die den Wellenlängen 494 bis 563 entsprechenden Ergänzungsfarben sich nicht innerhalb des sichtbaren Spektrums befinden. Dieselben liegen vielmehr im Ultrarot beziehungsweise Ultraviolett.

Wie eine Betrachtung der von König-Dieterici[1] oder der von Exner[2] angefertigten Elementarempfindungskurven lehrt, entsprechen die Wellenlängen 494 bis 563 dem grünen Teile des Spektrums. Die demselben komplementären Farbentöne bilden das sogenannte Purpur, die Mischfarbe von Rot und Violett.

In seinem Handbuche der physiologischen Optik, 2. Aufl., p. 317, führt Helmholtz eine nach seinen Messungen angefertigte Kurve an, welche die Beziehungen zwischen den Wellenlängen zweier Ergänzungsfarben darstellen soll. Dieselbe nähert sich in ihrer Form sehr stark dem einen Aste einer gleichseitigen Hyperbel, was mit meiner Darstellung im Einklange steht.

1 A. a. O., p. 16.

2 A. a. O., p. 12.

Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen

(IV. Mitteilung)

von

Dr. **Jean Billitzer.**

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1904.)

Die Ermittlung von Polarisationskapazitäten hat bereits den Gegenstand mehrerer Untersuchungen gebildet,[1] ohne daß die Resultate der Messungen bislang zu etwas anderem, als zum Ausbau einer Theorie der unmittelbar beobachteten Erscheinungen verwertet worden wären. Bei dem innigen Zusammenhange, den die Polarisationskapazität aber nach der v. Helmholtz'schen Theorie auch mit den kapillarelektrischen Erscheinungen aufweisen muß, ist es wohl angezeigt, die Resultate der genannten Untersuchungen einer Diskussion der elektrokapillaren Erscheinungen unterzulegen, zumal ihre Bedeutung und die Auffassungsweise, die man sich von ihrer Natur zu bilden hat, durchaus noch nicht so eindeutig festgelegt ist, sondern noch immer den Gegenstand zahlreicher Erörterungen bildet.

Für eine solche Diskussion ist es nun von ganz besonderem Werte, daß gerade die Polarisationskapazität des Quecksilbers

---

[1] F. Kohlrausch, Pogg. Ann., 148, p. 443 (1872).
Warburg, Wied. Ann., 67, p. 493 (1899).
E. Neumann, ib., p. 499.
Orlich, Inaug. Dissert. Berlin, 1896.
Scott, Wied. Ann., 67, p. 388 (1899).
Schönherr, Drude's Ann., 6, p. 372 (1901).
M. Wien, ib., 8, p. 732 (1902).
F. Krüger, Zeitschr. für phys. Chemie, 45, p. 1 (1903).

in verschiedenen Lösungen und bei verschiedenen Polarisationen recht eingehend untersucht worden ist. So haben Scott und Krüger (l. c.) gefunden, daß die Polarisationskapazität des Quecksilbers keine konstante Zahlengröße ist, sondern daß sie, beispielsweise in $H_2SO_4+HgSO_4$, im unpolarisierten Zustande außerordentlich groß ist, schon bei einer Polarisation durch etwa 0·4 Volt auf den 250. Teil fällt, um bei weiterer Polarisation noch weiter abzunehmen und ein Minimum zu durchlaufen, das nach Scott (l. c.) in Schwefelsäure und Salzsäure zugleich mit dem Maximum der Oberflächenspannung erreicht wird, in Komplexsalzlösungen, wie KCNS, Na_2S etc., aber an einer anderen Stelle liegt.

Schon daraus allein läßt sich eine wichtige Folgerung ziehen. Ist nämlich die Kapazität nicht durchwegs konstant, so läßt sich die Gleichung:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{C}{2} e^2 \qquad (1)$$

(worin γ die Oberflächenspannung, C die Polarisationskapazität, e die »absolute« Potentialdifferenz und γ_0 die Oberflächenspannung für $e = 0$ bezeichnet), durch Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{\delta \gamma}{\delta e} = -\varepsilon \quad (\varepsilon = \text{Flächendichte})$$

nur in dem Intervalle gewinnen, in welchem C als konstant betrachtet werden darf.

Nun verlangt aber die Helmholtz'sche Theorie, daß ε verschwindet, wenn die Oberflächenspannung des polarisierten Quecksilbers ihren Maximalwert erreicht und sagt uns damit etwas über die Größen e aus, welche in Gleichung (1) einzuführen sind. Da uns aber die Größen C durch die Messungen von Scott und Krüger gegeben sind und für γ_0 nach Helmholtz der Maximalwert zu nehmen ist, den die Oberflächenspannung des Quecksilbers bei kathodischer Polarisation erreicht, sind wir in den Stand gesetzt, die Helmholtz'sche Theorie wenigstens in dem Bereiche, in welchem C als konstant angesehen werden darf (Polarisation von zirka —0·6—1·2 Volt) zu

prüfen, indem wir die experimentell ermittelten Daten in Gleichung (1) einführen und die berechneten Oberflächenspannungen mit denen vergleichen, die Lippmann[1] beobachtet hat. Der Vergleich wird am bequemsten durch eine

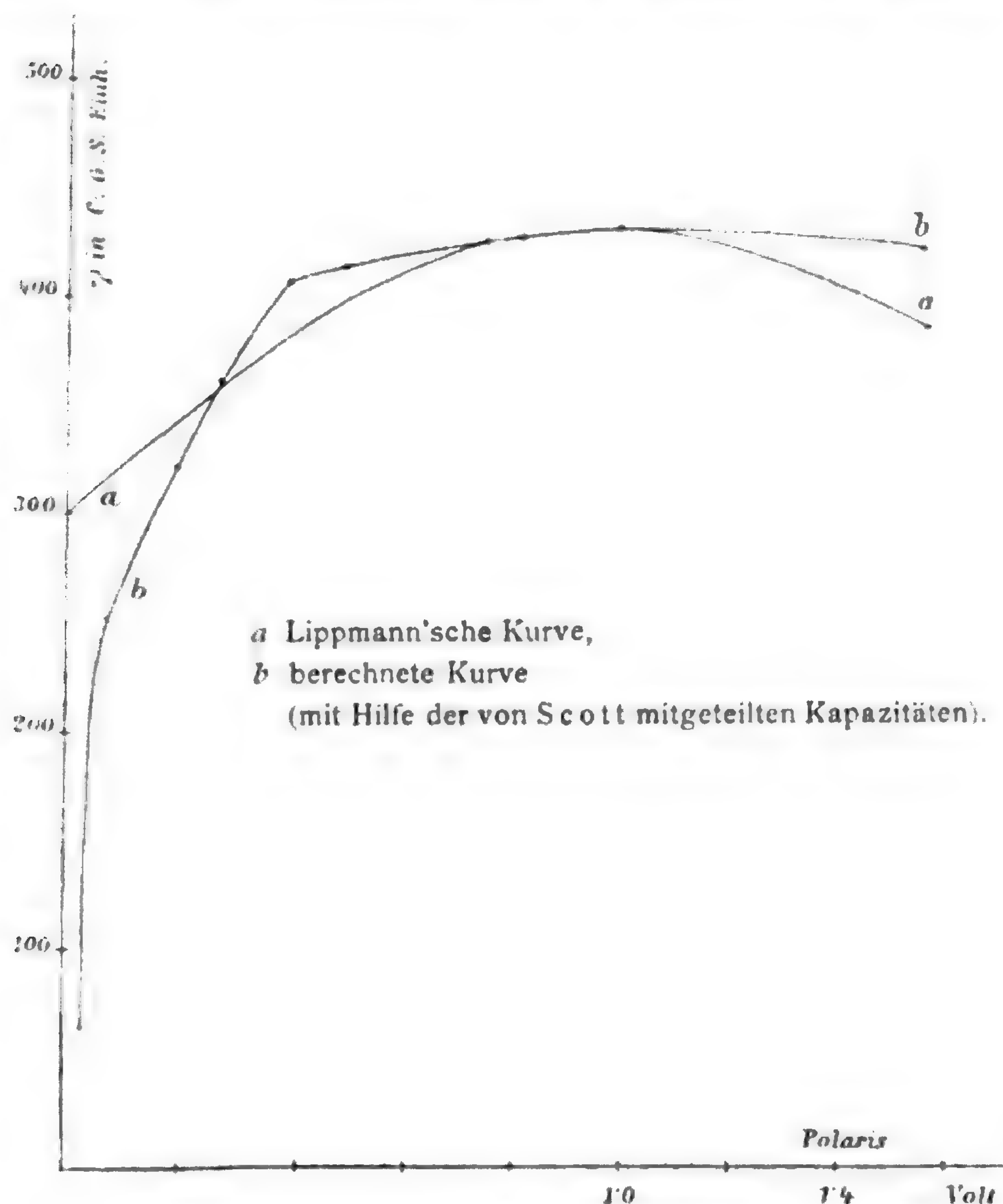


Fig. 1.

graphische Aufzeichnung durchgeführt und es sind zu diesem Zwecke in Fig. 1 die Lippmann'sche und darüber die Kurve gezeichnet, welche man durch Auftragung der Zahlen erhält, die aus (1) durch Einsetzen der Größen im absoluten Maße gewonnen werden. Zur Berechnung dienten die Daten von Scott und Lippmann.

[1] Thèse de doctorat und Ann. chim. phys. (5), 5, 494 (1875).

Wie man sieht, besteht eine Übereinstimmung beider Kurven weder in diesem Gebiete noch im weiteren Verlaufe.[1]

Es ist nun in der vorigen Mitteilung bereits angedeutet worden (und wird demnächst exakter bewiesen werden), daß die Gleichung (1) durch die Einführung eines Gliedes, welches e in der ersten Potenz enthält, zu vervollständigen ist; dabei gewinnt die Gleichung die Form:

$$\lambda = \gamma_0 - Ae - \frac{C}{2} e^2, \quad (2)$$

worin A eine Konstante bedeutet, die der Zunahme der Kapillarkonstante mit zunehmender Lösungstension, respektive mit zunehmender Polarisation Rechnung trägt, von e unabhängig ist und deren Größe sich daraus ergibt, daß der Maximalwert der Oberflächenspannung erreicht wird, wenn $e = -\frac{A}{C}$ ist.

Auch in dieser Gleichung ist das letzte Glied nur dann durch Integration zu gewinnen, wenn C konstant ist und sie kann kein von dem früheren abweichendes Resultat ergeben, wenn wir wieder dieselben Werte für e einsetzen, weil A dann null wird;[2] doch wird das Ergebnis ein ganz anderes werden, wenn wir nicht mehr, wie dort, e beim Maximum $= 0$ setzen, sondern uns von dieser Annahme, für deren Richtigkeit immer weniger Gründe sprechen, freimachen. Dann kann aber kein Zweifel mehr darüber bestehen, welche Werte für e zu wählen sind; denn außer der Helmholtz'schen Theorie der Kapillarelektrizität liefern uns nur die elektroendosmotischen Methoden zur Ermittlung »absoluter« Potentiale, die in der ersten Mitteilung beschriebenen Beobachtungen von Konzentrations-

[1] Als Näherungsformel kann man ja Gleichung (1) oder (2) immerhin zur Prüfung im ganzen Gebiete vertreten. Man integriert in einem engen Intervalle, ohne die Änderung der Kapazität zu berücksichtigen, und setzt dann den Mittelwert von C ein, der Fehler kann nicht groß sein.

[2] Ist $A \gtrless 0$, so ist allerdings zu erwarten, daß Konzentrationsketten mit Quecksilber ein von dem gewöhnlichen abweichendes Verhalten aufweisen, die Abweichungen können freilich nur ganz minimale sein, eine experimentelle Prüfung ist im Gange, welche entscheiden soll, ob sie der Messung zugänglich sind.

änderungen, welche eine Tropfelektrode in ihrer Umgebung hervorruft etc., endlich gewisse, noch näher zu beschreibende Versuche über Kolloidfällungen einen Aufschluß über diese Größe.[1] Da aber sämtliche hier angeführten Methoden das übereinstimmende Resultat liefern, daß der Maximalwert der Oberflächenspannung beim »absoluten« Potential von zirka —0·75 Volt erreicht wird, ist nunmehr e auf diesen Wert zu beziehen.

Führt man jetzt die Rechnung mit Hilfe der Gleichung (2) durch, so erhält die Kurve aber in ihrem ganzen Verlaufe die Gestalt der Lippmann'schen Elektrokapillarkurve (wie ein Blick auf die Fig. 2 lehrt), ohne daß sich freilich beide Kurven decken würden. Dies deutet vielleicht darauf, daß C und damit auch A zu klein gewählt worden sind (cf. Fußnote 1 der vorigen Seite) und erinnert daran, daß die Polarisationskapazität sich aus den kapillarelektrischen Messungen größer berechnet, als sie nach den direkten Messungen von Scott und Krüger sein sollte — ein Umstand, auf den wir zu sprechen kommen werden. Setzt man daher größere Werte für C ein, indem man die Scott'schen Zahlen mit einem konstanten Faktor multipliziert, so nähern sich beide Kurven immer mehr und decken sich fast vollständig, wenn der Multiplikator 1·76 ist, wie es Fig. 2 veranschaulicht. Es versteht sich von selbst, daß γ_0 hier nicht mehr die maximale Oberflächenspannung bedeutet, sondern die Kapillarkonstante im Punkte $e = 0$ ausdrückt, die nach den Lippmann'schen Messungen etwa 365 im absoluten Maße beträgt.[2]

Wegen der nur beschränkten Gültigkeit der Gleichung (2) kann sie freilich nur etwa den Charakter einer empirischen Gleichung für sich in Anspruch nehmen, immerhin scheint die Übereinstimmung bemerkenswert zu sein und ist lediglich mit der Annahme, daß die Doppelschicht bei —0·4 Volt verschwindet, zu erzielen, zudem werden wir Gründe kennen lernen, die dafür sprechen, daß die Kapazität hier tatsächlich größer ist als bei den Versuchsanordnungen von Scott und Krüger.

[1] Vergl. Zeitschr. für phys. Chemie, *45*, 437 (1903).

[2] L. c.

Es ist schon bemerkt worden, daß man bisher an der Annahme festhielt, für C sei in Gleichung (1) ein konstanter Wert einzusetzen. Diese Annahme rührt wohl von Lipp-

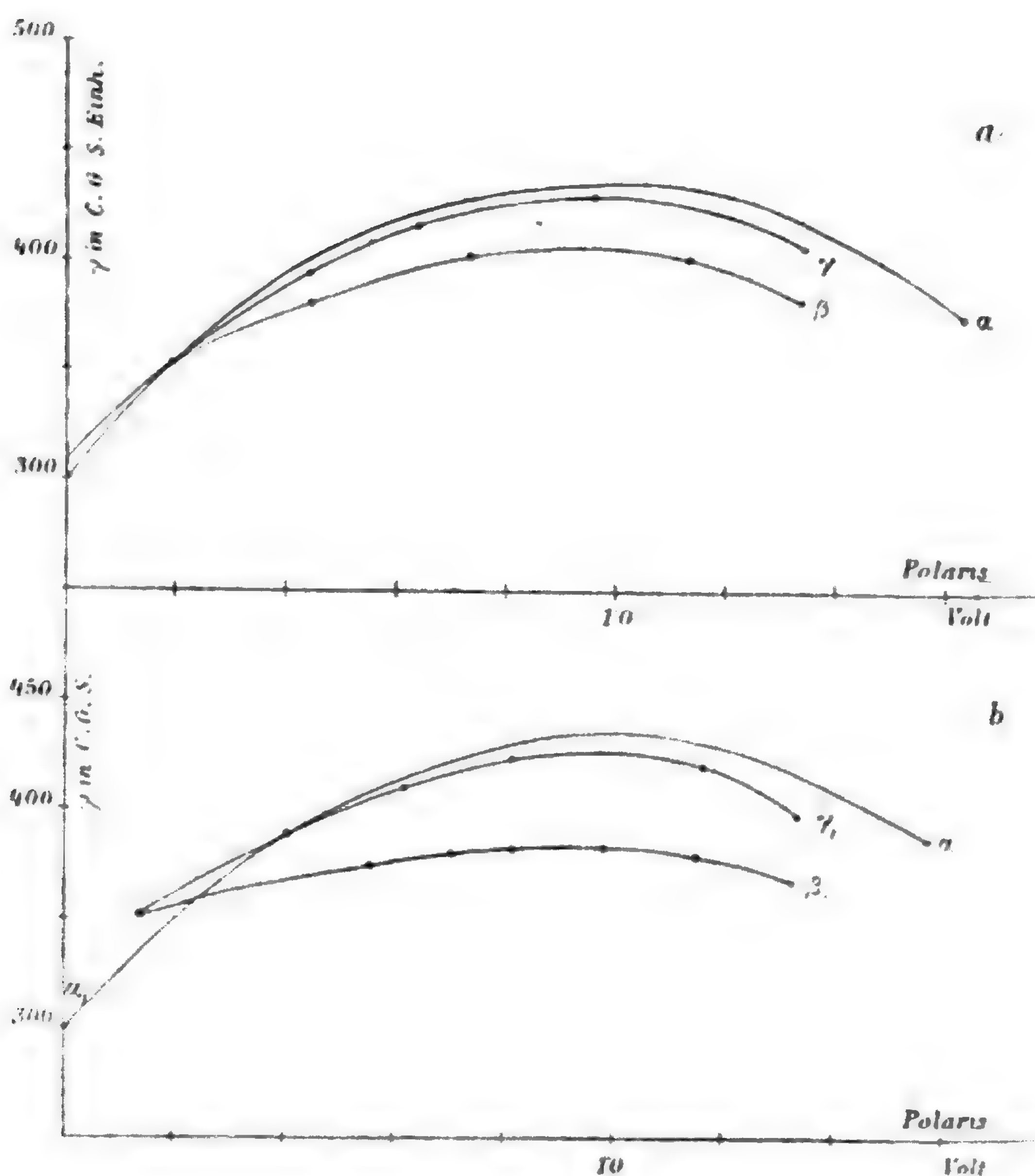


Fig. 2.

a α Lippman'sche Kurve,
β aus den Kapazitäten von Krüger (siehe p. 650) berechnete Kurve
γ » » » » » durch Multiplikation dieser Kapazitäten mit 2.

b α_1 Lippmann'sche Kurve,
β_1 aus den Kapazitäten von Scott (siehe p. 650) berechnete Kurve.
γ_1 » » » » » durch Multiplikation dieser Kapazitäten mit 1·76.

mann[1] her und wurde von Bouty[2] u. a. ohne Prüfung bewahrt.

Lippmann berechnete die Kapazität aus der Elektrokapillarkurve, indem er, vom Energiesatze ausgehend, annahm, daß die zugeführte Elektrizitätsmenge einmal zur Ladung des neu sich bildenden Oberflächenelementes ds, sodann zur weiteren Ladung der alten Oberfläche s dient und daß demnach:

$$dq = X\,ds + Ys\,de \tag{3}$$

ist, wenn dq die zugeführte Elektrizitätsmenge, de die Änderung der Potentialdifferenz Hg/Elektrolyt bedeuten, während mit X und Y zwei Koeffizienten bezeichnet werden, deren erster die Kapazität der Trennungsfläche für konstantes Potential genannt wird, während der zweite die Kapazität einer konstanten Flächengröße bedeutet.

Für eine umkehrbare Änderung der Oberfläche, unter Ab- und Zufuhr von elektrischer und von Oberflächenenergie, muß für einen Kreisprozeß die Summe der Energieänderungen verschwinden, es wird also: $e\,dq + \gamma\,ds = 0$.

Setzt man darin den Wert von dq aus (3) ein und differentiiert den Koeffizienten von ds partiell nach e, den von de partiell nach s, so erhält man, da der Ausdruck ein vollständiges Differential vorstellt:

$$\frac{\partial(\gamma + eX)}{\partial e} = Ye \tag{4}$$

und ebenso aus (3):

$$\frac{\partial X}{\partial e} = Y; \tag{4a}$$

setzt man diesen Wert von Y in (4) ein, so folgt endlich:

$$X = -\frac{\partial \gamma}{\partial e} \qquad Y = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial e^2}.$$

---

[1] Compt. rend., *95*, 686 (1882).

[2] Ann. chim. phys. (7), *3*, 179 (1894).

Die Koeffizienten der Gleichung (3) sind also respektive gleich dem ersten beziehungsweise zweiten Differentialquotienten der Oberflächenspannung nach der Potentialdifferenz, aber mit verkehrtem Zeichen genommen; da nun die Polarisationskapazität definitionsgemäß gleich ist: $C = \frac{dq}{de}$, folgt:

$$C = \frac{dq}{de} = -s\frac{d^2\gamma}{de^2} - \frac{d\gamma}{de} \cdot \frac{ds}{de}, \qquad (5)$$

wo die Kapazität durch lauter Größen ausgedrückt ist, welche mit der Elektrokapillarität verbunden sind.

Im Punkte, in welchem das Maximum der Oberflächenspannung erreicht wird, ist $\frac{d\gamma}{de}$ und $\frac{ds}{de} = 0$, aber auch bei allen anderen Polarisationen verschwindet das zweite Glied der Gleichung (5), wenn $\frac{ds}{de} = 0$ bleibt, also wenn die Oberfläche unbeweglich ist oder wenn der Meniskus immer in dieselbe Stellung zurückgeführt wird. Die Kenntnis der zweiten Ableitung der Oberflächenspannung nach der Potentialdifferenz genügt also zur Berechnung der Polarisationskapazität pro Flächeneinheit wenigstens in dem Intervalle, in welchem sie sich kaum mit der Potentialdifferenz ändert (denn nur dann liefert die partielle Differentiation die Gleichungen 4 und 4*a*).

Lippmann hat diese Rechnung (l. c.) selbst durchgeführt, indem er die bei verschiedenen Polarisationen ermittelten γ im absoluten Maße ausdrückte, zur Berechnung der zweiten Ableitung aber sonderbarerweise nicht die Differenzen zweier aufeinanderfolgender erster Differentialquotienten durch die Potentialdifferenz dividierte, sondern die Zunahme der Oberflächenspannung durch das Quadrat der Potentialdifferenz.

So findet er aus vier willkürlich herausgegriffenen zugehörigen Zahlen für die Quecksilberdrucke, die bei bestimmter Polarisation (in Daniells) erforderlich waren, den Meniskus in die ursprüngliche Stellung zurückzuführen (Anfangsdruck 750 *mm*):

Polarisation		Hg-Druck
0·2	Daniell	148 *mm*
0·5	»	282
0·9	»	358
1·261	»	301

$$X = \frac{358-148}{(0\cdot 9-0\cdot 2)^2}\,\frac{2.295}{750.10^{16}} = \frac{358-148}{(0\cdot 9-0\cdot 2)^2}\,\frac{2.0\cdot 3905}{10^{16}} = \frac{335}{10^{16}}$$

$$= \frac{358}{(0\cdot 9)^2}\,\frac{2.0\cdot 3905}{10^{16}} = \frac{347}{10^{16}} \quad \frac{358-282}{(0\cdot 9-0\cdot 5)^2}\,\frac{2.0\cdot 3905}{10^{16}} = \frac{342}{10^{16}}$$

$$= \frac{(0\cdot 9-1\cdot 261)^2}{358-301}\cdot\frac{2.0\cdot 3905}{10^{16}} = \frac{336}{10^{16}}.$$

Bouty[1] hat dann das Problem von neuem in Angriff genommen, er weist darauf hin, daß die Potentialdifferenzen in Volts auszudrücken, die angeführten Zahlen also durch 1·21 zu dividieren sind (1 Daniell = 1·1 Volt). X wird daher $\frac{285}{10^{16}}$, die Kapazität pro Flächeneinheit also: 28·5 MF. Im übrigen begnügt sich Bouty zu prüfen, ob die Elektrokapillarkurve mit Hilfe dieses Wertes gut beschrieben wird und ermittelt eine empirische Gleichung:

$$\gamma = 298+0\cdot 3905\left(\frac{796}{1\cdot 1.10^8}e-\frac{442\cdot 5}{1\cdot 21.10^{16}}e^2\right),$$

die ihren Verlauf gut darstellt. Zur Kenntnis der Polarisationskapazität trägt seine Arbeit kaum etwas bei.[2]

Diese Berechnungsweise der zweiten Ableitung der Oberflächenspannung nach der Potentialdifferenz erscheint ganz unzulässig, das Resultat, das sie liefert, bleibt daher wertlos, zudem ergibt es sich, daß X gar keinen konstanten Wert annimmt, wenn man andere als gerade die von Lippmann herausgegriffenen Zahlen zur Berechnung verwendet.

---

[1] Ann. chim. phys. (7), 3, p. 145.

[2] Die Ähnlichkeit dieser Gleichung mit der in der vorigen Mitteilung abgeleiteten und hier p. 640 ff. benützten ist höchst bemerkenswert.

Die Gleichung (5) zu prüfen, habe ich es daher für nötig erachtet, die Lippmann'schen Zahlen einer Neuberechnung zu unterziehen, obwohl die Berechnung nur zulässig ist, wo sich C kaum mit der Potentialdifferenz ändert und sie gerade dort sehr unsicher ist, weil sie auf der Differenz nur wenig verschiedener Zahlen basiert.

Polar. in Dan.	$\frac{d\gamma}{de}$	Diff.	$\frac{d^2\gamma}{de^2}$	C in M. F.	Scott (l. c.)	Polar.
0·020	740					
		—255	19600	—		
0·032	995					
		350	5550	227	219	(0·049 Volt)
0·075	645					
		0	0	—	144	(0·099 »)
0·124	645					
		45	1980	77·4		
0·155	605					
		30	895	35		
0·183	575					
		64	1180	46	116	(0·197 »)
0·233	511					
		66	550	21·5	99	(0·283 »)
0·306	445					
		80	1180	46	72·2	(0·329 »)
0·407	365					
		47	645	25·2	47·2	(0·396 »)
0·475	318					
		50	668	26·1	22·8	(0·494 »)
0·544	268					
		100	690	27	10·4	(0·659 »)
0·708	168					
		141	780	30·5	8·07	(0·761 »)
0·866	27					
		27	484	18·9	7·17	(0·899 »)
0·9	0					
		61	1150	44·9	7·36	(0·989 »)
0·949	61					
		120	600	23·5	10·0	(1·237 »)
0·13	181					
		97	251	37·9		
1·297	278				12·1	(1·319 »)

Die nunmehr berechneten Kapazitäten schwanken ziemlich unregelmäßig hin und her, wie es bei einer (übrigens nur im Intervalle von 0·5 bis 1·2 Dan. einwandfreien) Berechnung zwischen immerhin recht großen Intervallen der Potentialdifferenzen erwartet werden mußte. Zum besseren Vergleiche sind in der letzten Kolumne die Scott'schen Zahlen bei Polarisationen durch die eingeklammerten elektromotorischen Kräfte angeführt worden. Andere Autoren, wie Rothmund,[1] Smith[2] u. a. m. haben die Zunahme der Oberflächenspannung innerhalb kleinerer Potentialdifferenzen beobachtet; ich hoffte durch die Benützung ihrer Zahlen weniger unregelmäßige Werte für C zu erhalten, sah mich jedoch in dieser Erwartung getäuscht; offenbar sind die Fehlergrenzen der Beobachtung zu große, als daß eine derartige Rechnung strikt durchgeführt werden könnte.

II.

Obgleich an dieser Stelle nicht des Näheren auf die Theorie der Polarisationskapazität eingegangen werden soll, sind doch gewisse Eigentümlichkeiten zu besprechen, die sie aufweist, einmal weil ihre Nichtbeachtung zu der Ansicht geführt hat, daß ein Widerspruch mit der Theorie der Kapillarelektrizität besteht und dann, weil sie vielleicht etwas über die Größe der »absoluten« Potentiale auszusagen vermögen, deren Kenntnis ja für die Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen von größter Wichtigkeit ist.

So ist es als ein Widerspruch hingestellt worden, daß die direkten Messungen eine Polarisationskapazität von rund 7 M. F. pro Flächeneinheit beim Maximum der Oberflächenspannung ergeben, während sich aus der Elektrokapillarkurve ebendort eine solche von 28·5 M. F. berechnet. Auch die Neuberechnung, die wir ausgeführt haben, ergibt noch einen ziemlich abweichenden Wert.

Trotzdem glaube ich nicht, daß zur Zeit von einem Widerspruche gesprochen werden darf; zunächst weil die Berechnung

---

[1] Zeitschr. für phys. Chemie, 15, p. 1 (1894).

[2] Ib. 32, p. 433 (1900).

aus kapillarelektrischen Messungen doch nur eine approximative ist, sodann weil es mir scheint, als ergebe sich die Kapazität, unter sonst gleichen Versuchsbedingungen, um so größer, je kleiner der Durchmesser des Quecksilbermeniskus ist, an dem die Messung ausgeführt wird.

Die Regelmäßigkeit, mit der wir diesen »Gang« fast in allen Zahlenreihen Krüger's wiederfinden und die Konstanz der angeführten Kapazitäten machen es aber auch nicht wahrscheinlich, daß eine Oberflächenvergrößerung durch die von Krüger beobachtete Tröpfchenbildung während des Versuches uns die Existenz dieses »Ganges« vortäuscht.

Einige Zahlen mögen dies verdeutlichen (die Tabellen sind der zitierten Abhandlung von Krüger entnommen).

P	C	r	$C_{/}r^2$
—0·140	1·58*	1·25	1·08
	1·3 *	1·5	0·58
	3·47	2·25	0·685
—0·329	1·68	1·25	1·08
	2·03	1·5	0·9
	4·75	2·25	0·93
—0·554	3·49	1·25	2·24
	4·34	1·5	1·93
	8·58	2·25	1·7
—0·552	3·60	1·25	2·3
	4·38	1·5	1·95
	7·95	2·25	1·57
—0·651	267	1·5	204
	442	2·25	87 u. s. f.

Die Tröpfchenbildung tritt wohl selten in den Vordergrund und gibt sich meist dadurch zu erkennen, daß die Reihenfolge der Kapazitäten nicht dieselbe ist wie die der Radien; in der ersten Meßreihe ist dies durch einen Stern gekennzeichnet. Es versteht sich, daß hier nur Kapazitäten verglichen wurden, die bei gleicher Polwechselzahl ermittelt sind;

wie gut diese Zahlen untereinander übereinstimmen, zeigen die zwei Meßreihen bei den wenig verschiedenen Potentialdifferenzen —0·552 und —0·554 Volt an; die Möglichkeit eines Irrtums verliert dadurch jede Wahrscheinlichkeit.

Hätte Krüger die Größe der Polarisationskapazität nicht aus den Messungen an der 11·5 *mm*, sondern der 2·5 *mm* weiten Röhre berechnet, so hätte er *C* für die Flächeneinheit gleich 12 bis 14 M. F. gefunden.[1]

Scott findet mit seiner 1·5 *mm* weiten Röhre, wie bereits erwähnt, beim Maximum der Oberflächenspannung *C* nur gleich 7 M. F., sonst sind die Kapazitäten, die er angibt, im Einklange mit der Tatsache, daß seine Elektrode kleiner wie die von Krüger war, durchwegs größer wie die ersteren. Zum Vergleiche seien einige Zahlen nebeneinandergestellt:

Scott		Krüger[2]			
Polarisation	C pro Zentimeter		Polarisation	C pro Zentimeter	
		(2)	0·0 Volt	3160 M. F.	
0·049 Volt	219 M. F.	(5)	0·009 »	55·5 »	
0·099 »	144 »	....	....	....	
0·197 »	116 »	(11)	0·203 »	152·5 »	
0·329 »	72·2 »	(14)	0·322 »	24 »	
0·396 »	47·2 »	(17)	0·416 »	12·1 »	
0·494 »	22·8 »	(20)	0·511 »	15·3 »	
0·659 »	10·4 »	(23)	0·618 »	17·1 »	
0·766 »	8·07 »		0·725 »	8·95 »	4·5 *mm*
0·899 »	7·17 »	(28)	0·930 »	17·8 »	
1·041 »	7·55 »	(31)	0·949 »	13·5 »	11·5 *mm*
1·163 »	8·82 »	(32)	1·120 »	11·4 »	11·5
1·319 »	12·1 »	(34)	1·321 »	11·6 »	11·5

Scott erhält also im allgemeinen größere Werte und nur in dem Spannungsgebiete, in welchem die Oberflächenspannung des Quecksilbers groß wird, sind seine Zahlen kleiner

[1] Krüger setzt die Oberfläche des Quecksilbermeniskus wohl aus Versehen gleich $5/6\, r^2 \pi$ statt $6/5\, r^2 \pi$.

[2] Sämtliche Zahlen beziehen sich, wo nichts vermerkt ist, auf die Messungen mit der 3 *mm* weiten Röhre bei der Wechselzahl 125. Die eingeklammerten Zahlen geben die Nummer der Tabelle in der zitierten Abhandlung an.

wie die von Krüger (wenn wir zunächst von der Zahl für eine Polarisation durch 0·2 Volt absehen). Das ausgesprochene Minimum, das Scott bei einer Polarisation durch 0·9 Volt erhält, ist bei Krüger kaum zu finden und trat auch bei unserer Berechnung der Kapazität aus den kapillarelektrischen Messungen nicht hervor. Die Ursache dieser Abweichung kann nicht verborgen bleiben, wenn man die Verschiedenheit der Versuchsanordnung ins Auge faßt.

Krüger's Elektroden stellten kleine Näpfe vor, die mit Quecksilber beschickt wurden, und Lippmann bestimmte die Oberflächenspannung, indem er den Meniskus immer wieder in seine ursprüngliche Stellung zurückführte; in beiden Fällen blieb die Größe der Oberfläche unverändert. Scott's Elektrode bestand aber in einer mit Quecksilber beschickten U-förmigen Röhre, in welcher der Meniskus seinen Stand ändern konnte.

Da nun die Berührungsfläche des Quecksilbers mit dem Elektrolyten gewiß nicht auf die Quecksilberkuppe allein beschränkt bleibt, sondern sich auch über einen Teil der Seitenfläche breitet, mußte die benetzte Oberfläche kleiner werden, wenn sich der Meniskus mit zunehmender Oberflächenspannung zurückzog; da aber bei der Ermittelung der Zahlenwerte immer dieselbe Oberfläche in Rechnung gezogen wurde, fielen die letztberechneten Kapazitäten zu klein aus. Das Glied: $\frac{d\gamma}{de} \cdot \frac{ds}{de}$ der Gleichung (5), p. 644, fällt eben nur dann blos im Maximum der Elektrokapillarkurve fort, wenn $\frac{ds}{de}$ nicht durchwegs Null ist.

Wenn nun weiter die benetzte Seitenfläche zylindrisch ist und sie ihre Höhe von einem Falle zum anderen nur wenig ändert — eine Bedingung, die mit gewisser Annäherung erfüllt sein dürfte — so wird das Verhältnis der benetzten Seitenfläche zur benetzten Kuppe um so größer, je kleiner der Radius der Röhre wird; denn es wächst das Ausmaß der Seitenfläche dann linear mit dem Radius, die Größe der Kuppe aber etwa mit dem Quadrate desselben. Dadurch, daß immer nur die Meniskusfläche in die Rechnung eingeführt werden konnte, wurde die Oberfläche in allen Fällen zu klein ge-

nommen, der Fehler wird aber dabei prozentisch um so größer, je enger die gewählte Röhre war. So kann die Zunahme der Kapazität mit der Abnahme der Röhrenweite nicht mehr befremden; zugleich ergibt es sich, daß die Kapazitätsbestimmungen nur obere Grenzwerte ergeben können, endlich wird die Inkonstanz der auf kapillarelektrischem Wege bestimmten Größen durch die unvermeidlichen Änderungen der benetzten Oberfläche bei der unablässigen Bewegung des Meniskus leicht verständlich, welche die Ausführung einer Präzisionsmessung unmöglich macht.

Neben diesen schwer kontrollierbaren Fehlerquellen wird sich aber noch ein anderer Einfluß geltend machen, welcher besonders für kapillarelektrische Messungen, die ja die Kapazität pro Flächeneinheit berechnen lassen sollen, von Wichtigkeit sein dürfte.

Da zeigt es sich denn, daß die Kapazität auch eine Funktion der Oberflächen**krümmung** sein muß, weil diese nicht ohne Einfluß auf die Verteilung der Doppelschicht bleiben kann. Hat nämlich die Doppelschicht nach v. Helmholtz das Bestreben, dem elektrostatischen Drucke folgend sich auszubreiten, so muß sie an Orten größter Krümmung am dichtesten sein, ihre Dicke muß aber ebendort besonders klein werden, weil das Moment der Doppelschicht: σD ($\sigma =$ Flächendichte, $D =$ Dicke der Doppelschicht) konstant bleibt.[1] Nun ist die Kapazität der Doppelschicht wie die eines Kondensators dem Abstande beider Belegungen verkehrt proportional, also muß die Doppelschichtkapazität mit der Krümmung zunehmen. Diese war nun im Lippmann'schen Elektrometer etwa 100 mal so groß wie in den Kapillaren von Scott und den Elektroden von Krüger, die Meßresultate sind also nicht unmittelbar zu vergleichen.[2]

Die Abhängigkeit der Dicke der Doppelschicht von der Krümmung läßt aber voraussehen, daß ihre Verteilung auf

---

[1] Helmholtz, Abhandlungen, I, 856.

[2] Aus alledem ergibt sich zugleich, daß eine Multiplikation der Krüger-schen beziehungsweise Scott'schen Polarisationskapazitäten mit einem konstanten Faktor notwendig sein muß, die berechnete mit der beobachteten Kurve p. 641 und Fig. 2 zur Deckung zu bringen.

gewöhnlichen Quecksilberelektroden eine ungleichförmige sein muß und dies bildet eine weitere Fehlerquelle für die Berechnung von Polarisationskapazitäten pro Flächeneinheit.

All dies zusammengenommen kann also auf Grund der bisherigen Untersuchungen von einem Widerspruche der Resultate direkter Messungen mit den Folgerungen der Theorie der Kapillarelektrizität nicht wohl die Rede sein,[1] vielmehr scheint mir die Übereinstimmung hier so gut zu sein, als sie bei so ungenau zu ermittelnden Zahlenwerten und doch nur bedingungsweise einwandfreier Rechnung nur erwartet werden darf.

III.

Wir wollen uns jetzt der Besprechung der Eigentümlichkeiten zuwenden, die die Kapazität polarisierter Elektroden beim Durchgange durch ein bestimmtes Spannungsintervall, nämlich bei Potentialdifferenzen von rund —0·4 Volt gegen die Wasserstoffelektrode aufzuweisen scheint.

Schon auf p. 650 konnten wir wahrnehmen, daß Krüger bei einer Polarisation durch 0·203 Volt, also der Potentialdifferenz —0·448 Volt gegen die Wasserstoffelektrode, eine unverhältnismäßig große Kapazität gefunden hatte.

Krüger versucht dies auf eine eingetretene Tröpfchenbildung zurückzuführen, für welche auch eine beobachtete Widerstandsabnahme zu sprechen scheint (l. c., p. 28), durch die besondere Größe der Abweichung, viel mehr noch aber durch den Umstand, daß Scott, wie wir sehen werden, ein Ähnliches an festen Elektroden von Pt, platiniertem Pt, Ag und Pb gefunden hat, verliert diese Erklärungsweise an Wahrscheinlichkeit, zumal sich die Widerstandsabnahme in diesem Spannungsgebiete auf andere Weise erklären läßt.

Nachdem die Annahme, daß einem zum Maximalwerte der Kapillarkonstante polarisierten Quecksilbermeniskus die »absolute« Potentialdifferenz +0·75 Volt zukommt, durch

[1] Zumal die bei langsamen Schwingungen gemessenen Kapazitäten nicht ohneweiters mit den elektrokapillaren Messungen vergleichbar sind, wenigstens nicht, wenn sich die Kapazität noch mit der Frequenz ändert.

eine Reihe von Experimentaluntersuchungen gute Bestätigung gefunden hat, kommt dem Punkte, bei welchem eine polarisierte Elektrode die Potentialdifferenz von — 0·4 Volt gegen eine Wasserstoffelektrode annimmt, eine besondere Bedeutung zu; denn nach allem, was wir darüber wissen, ist es wenigstens mit allergrößter Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß hier die Potentialdifferenz der Elektrode gegen die Lösung verschwindet. Beim Passieren dieses Punktes kehrt sich die Lage der Doppelschicht um und wenn sie dabei ihre Dicke ändert, muß sich dieser Punkt in einer Richtungsänderung der e—C-Kurve zu erkennen geben. Aber das Verschwinden der Doppelschicht wird noch in anderer Weise zur Geltung kommen; denn in diesem Momente wirkt keine gegenelektromotorische Kraft der Diffusion mehr entgegen und ihre Begünstigung dürfte die Kapazität vermehren (vergl. Krüger, l. c., Warburg l. c.). Auch andere theoretische Betrachtungen, deren Darlegung

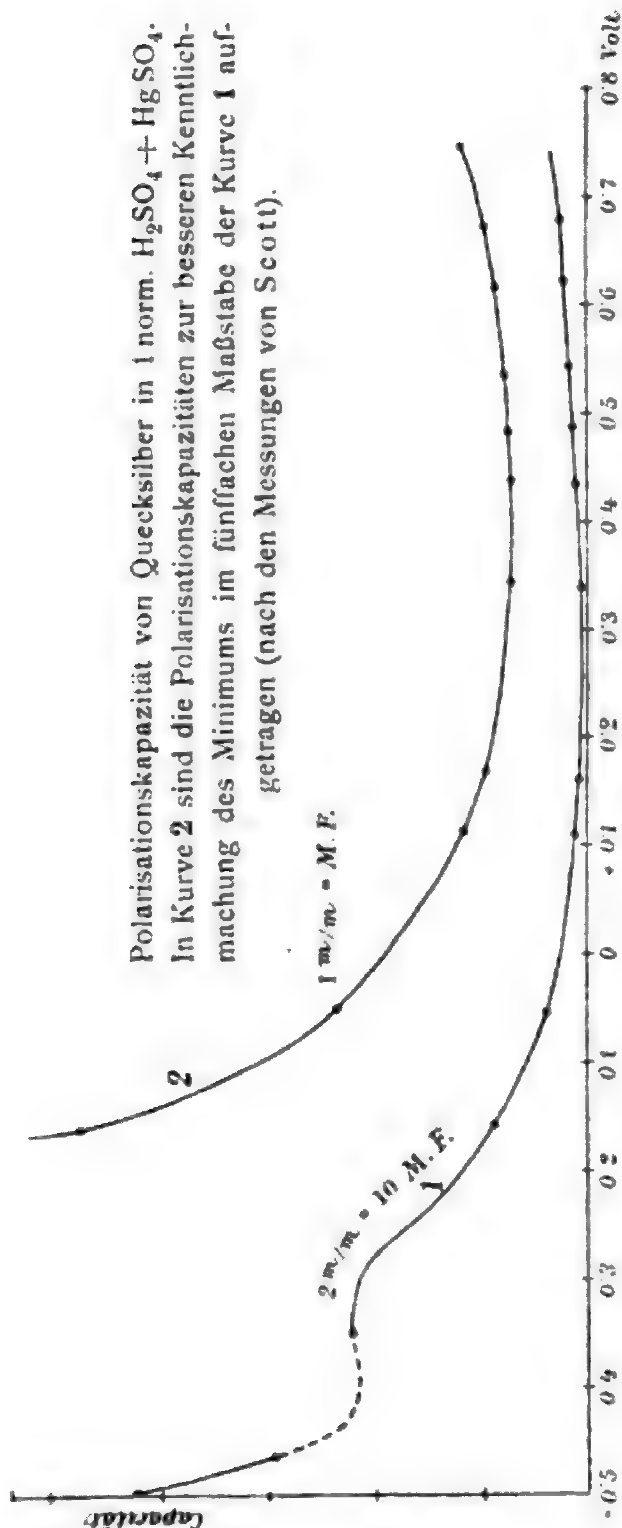


Fig. 3.

Polarisationskapazität von Quecksilber in 1 norm. $H_2SO_4 + HgSO_4$. In Kurve 2 sind die Polarisationskapazitäten zur besseren Kenntlichmachung des Minimums im fünffachen Maßstabe der Kurve 1 aufgetragen (nach den Messungen von Scott).

Ableitungen erfordern, die den Rahmen dieser Abhandlung übersteigen würden und deshalb a. a. O. wiedergegeben werden sollen, führen zum selben Ergebnisse und verlangen, daß die Kapazität bei der »absoluten« Potentialdifferenz 0 ein Maximum durchläuft.

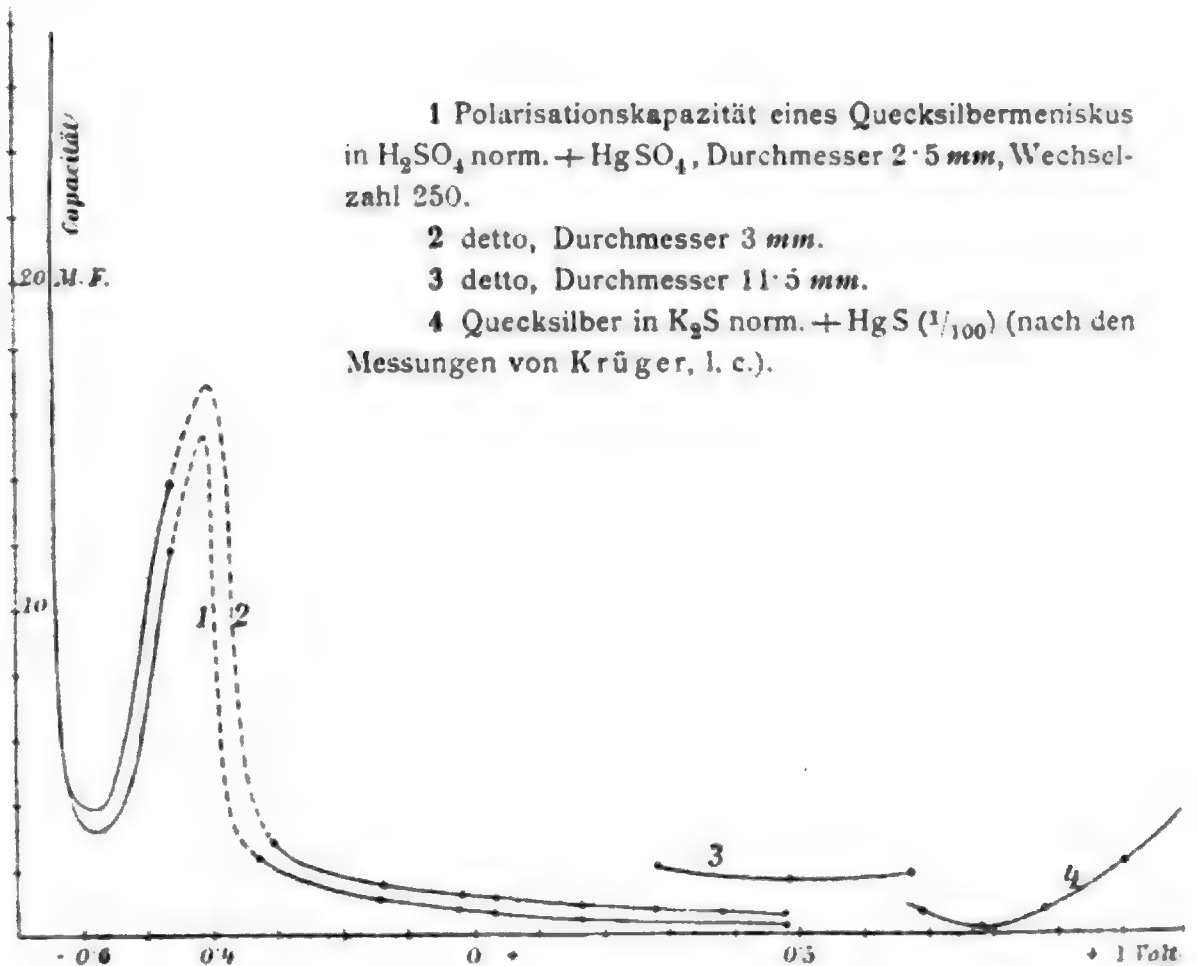


Fig. 4.

Leider haben weder Scott noch Krüger die Potentialdifferenz der Meßelektrode gegen eine dritte Elektrode bestimmt, sondern sie nahmen an, daß die Polarisation der zweiten, größeren Elektrode zu vernachlässigen sei und setzten die Polarisation der kleineren Elektrode gleich der polarisierenden elektromotorischen Kraft.

Diese Ungenauigkeit kann in einzelnen Fällen Abweichungen herbeigeführt haben und so sehen wir in Fig. 6, daß

die Polarisationskapazität platinierten Platins zwar ein deutliches Maximum aufweist, daß dieses aber im Intervalle —0·05 und —0·11 oder auch —0·11 und —0·20 Volt liegt. Die

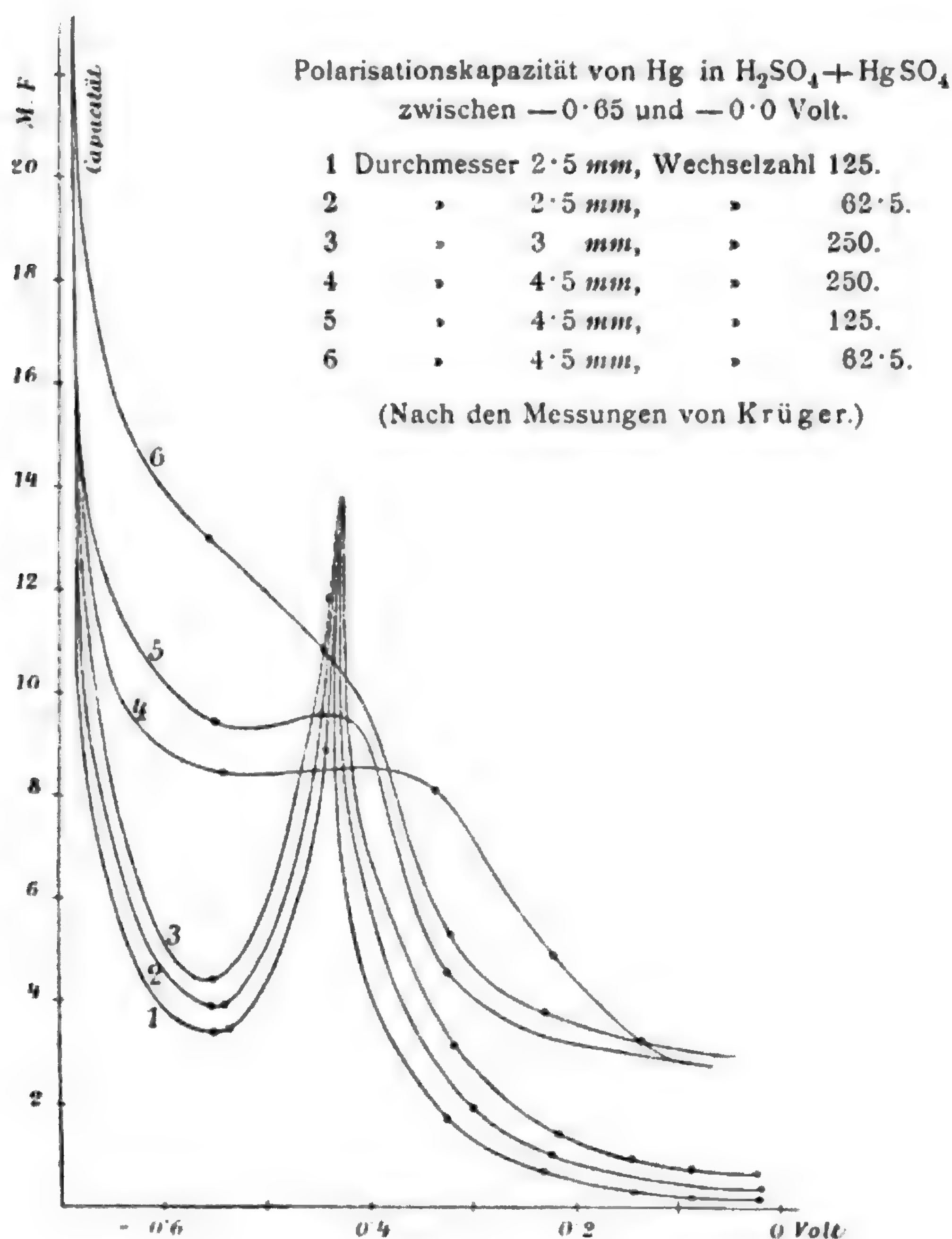
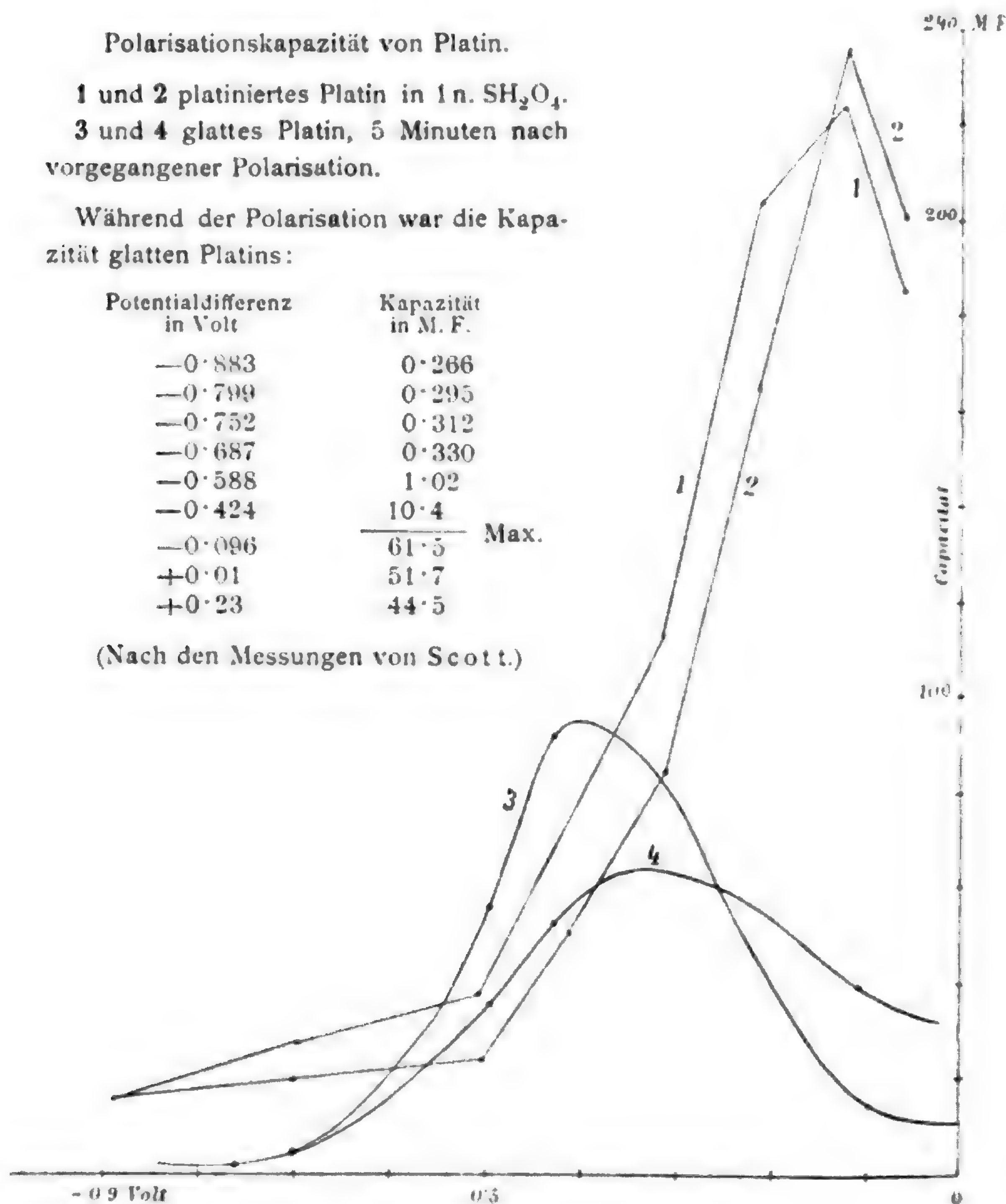


Fig. 5.

Kathode (Meßelektrode) war hier 0·3 *mm* groß und hatte eine Polarisationskapazität von zirka 2500 M. F., während die größte Polarisationskapazität glatten Platins nur 50 M. F. pro Zentimeter beträgt! Hier dürfte sich die Polarisation also wohl

auch zum Teile auf die Anode erstreckt haben und das ganze Diagramm wäre dann etwas nach der Seite des Sauerstoffes



Polarisationskapazität von Platin.

1 und **2** platiniertes Platin in 1 n. SH_2O_4.
3 und **4** glattes Platin, 5 Minuten nach vorgegangener Polarisation.

Während der Polarisation war die Kapazität glatten Platins:

Potentialdifferenz in Volt	Kapazität in M. F.	
—0·883	0·266	
—0·799	0·295	
—0·752	0·312	
—0·687	0·330	
—0·588	1·02	
—0·424	10·4	
—0·096	61·5	Max.
+0·01	51·7	
+0·23	44·5	

(Nach den Messungen von Scott.)

Fig. 6.

zu verschieben. Dafür spricht auch, daß die Abweichung des Meßergebnisses von unserer Erwartung beim glatten Platin kaum vorhanden ist. Die Kapazität der Meßelektrode betrug

hier nur mehr 6·25 bis 12·8 M. F. pro Zentimeter, war also etwa 500mal kleiner wie im ersten Falle.

Silber verhält sich allen Erwartungen entsprechend: die Kapazität hat ein Maximum nahe —0·3 Volt, dessen Lage und dessen geringe Schärfe bei der Größe der Elektrode nichts Auffälliges an sich hat. Viel merkwürdiger verhält sich das

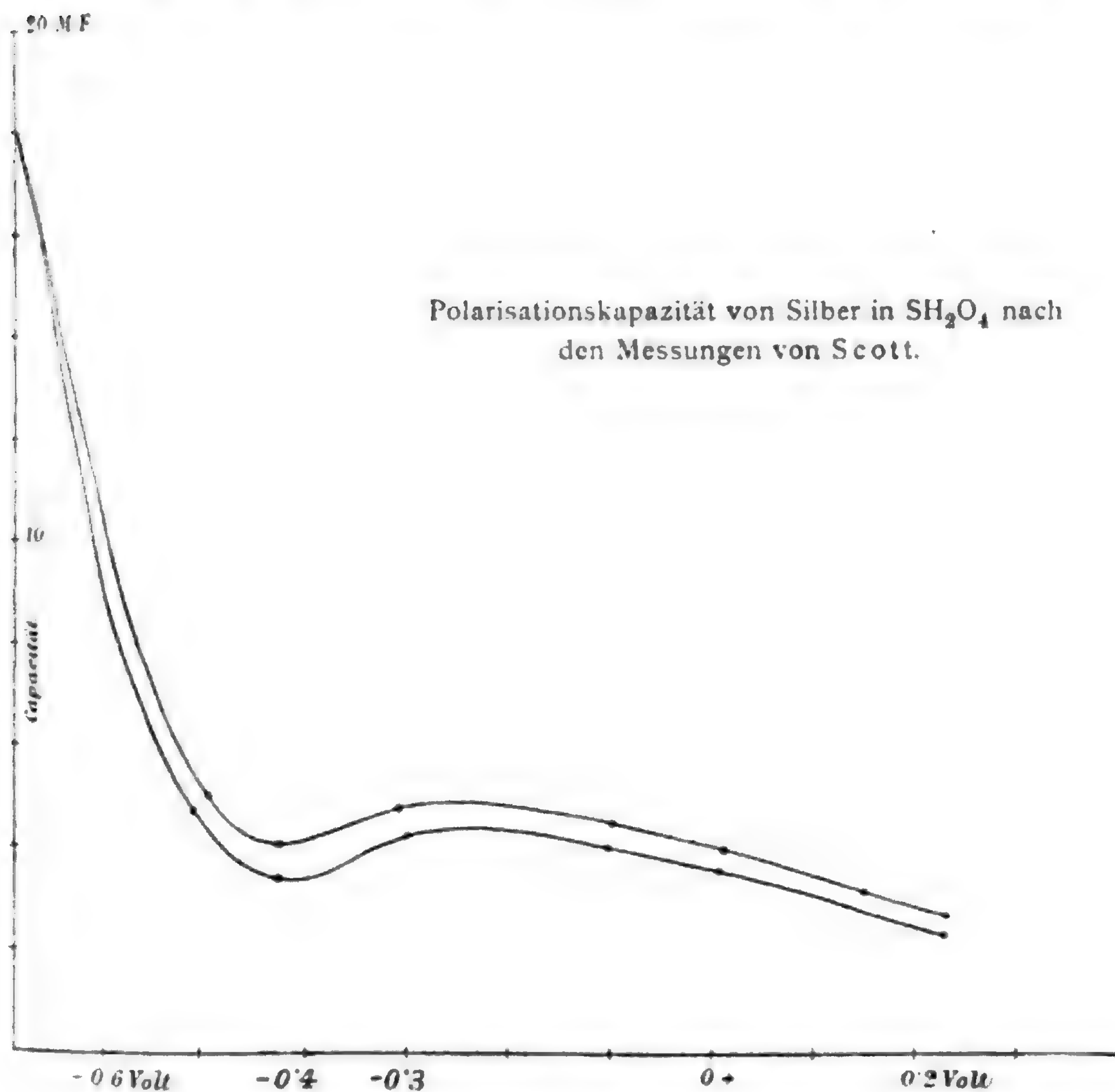


Fig. 7.

Blei (dessen benetzte Oberfläche Scott zwar nicht angibt, die aber nach seiner Angabe über den Minimalwert der Polarisationskapazität 13 M. F. pro Zentimeter etwa 30 mm^2 gemessen haben dürfte). Auch hier wieder ein flaches Maximum bei zirka —0·4 Volt, dann aber ein rascher Anstieg von —0·05 Volt, ein weitaus höheres Maximum bei etwa —0·18 Volt, ein

geringer Abfall und nun Konstanz! Die Form des zweiten Teiles der Kurve dürfte einer Übersättigung an Wasserstoff seinen Ursprung verdanken, daher wird wohl auch die bleibende

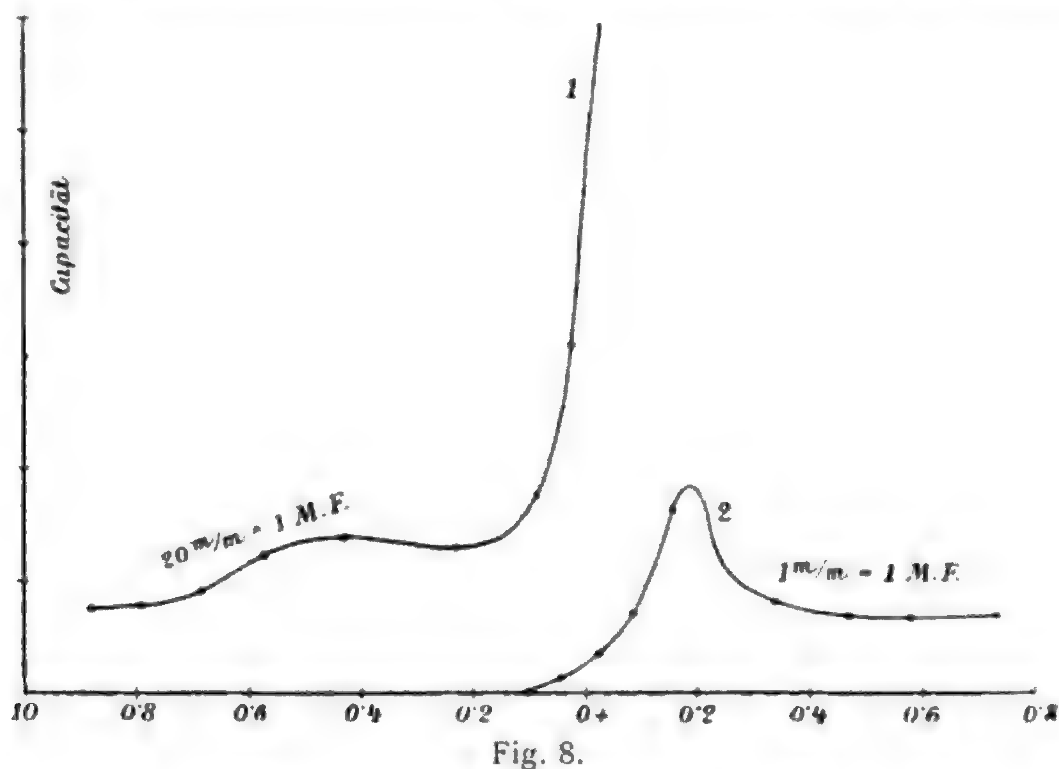


Fig. 8.

Polarisationskapazität von Blei in 1 n. SH_2O_4.

Die starke Zunahme bei 0·0 Volt erforderte ein Abbrechen der Kurve in der Figur, die dann in 20mal verjüngtem Maßstabe (bezüglich der Ordinate) in 2 fortgesetzt wird.

(Nach den Messungen von Scott.)

große Kapazität bei weiterer kathodischer Polarisation rühren (welche mehr wie 15mal so groß ist wie die Anfangskapazität!) und das Maximum bei —0·18 Volt entspricht vielleicht einer bedeutenderen Übersättigung, welche der oft explosionsartigen Wasserstoffentwicklung am Blei vorausgeht.

IV.

Wenige Worte seien zum Schlusse noch einer Besprechung der Tropfelektrode gewidmet.

Wie die Oberflächenspannung des Quecksilbers eine Funktion der Potentialdifferenz ist und man daher allgemein $\gamma = f(e)$ setzen kann, mag auch die Potentialdifferenz als Funktion der Oberflächenspannung betrachtet und durch eine

Gleichung: $e = F(\gamma)$ dargestellt werden, in der e allerdings im allgemeinen keine eindeutige Funktion von γ vorstellt, weil die gleiche Oberflächenspannung bei zwei verschiedenen Potentialdifferenzen erreicht werden kann, welche e aber im Maximum eindeutig bestimmt. Nun ist es erfahrungsgemäß festgestellt worden, daß ein Quecksilbermeniscus die maximale Oberflächenspannung annimmt, wenn er das Potential der Tropfelektrode im gleichen Elektrolyten besitzt. Daraus ergibt sich aber mit Rücksicht auf die genannte Funktion, daß auch das *Hg* des geschlossenen Strahles der Tropfelektrode die maximale Oberflächenspannung gegen die Lösung besitzt.

Solange man an der Ansicht festhalten konnte, daß in diesem ausgezeichneten Punkte die Doppelschicht verschwindet, war es aus der Nernst'schen Theorie ohneweiters verständlich, daß die Tropfelektrode gerade diesem Punkte zustreben müsse, auch konnte man sich vorstellen, daß die Potentialdifferenz hier verschwinde, weil die Kapazität bei der steten Oberflächenvergrößerung über alle Maßen groß werde. Nun es aber durch eine Reihe von Experimentaluntersuchungen gezeigt worden ist, daß die Doppelschichte hier nicht verschwindet, daß die Tropfelektrode auf dem aufsteigenden Aste der Elektrokapillarkurve keineswegs durchgehend die Merkurjonenkonzentration vermindert, wie es die früheren Theorien verlangen würden, daß sie vielmehr im Intervalle von $-0 \cdot 4$ bis $+0 \cdot 35$ Volt (wo sie den Scheitelpunkt der Elektrokapillarkurve erreicht) die Merkurjonenkonzentration ihrer Umgebung erhöht, also hier schon in Lösung geht und den negativen Teil der Doppelschicht trägt, muß die Anschauung über die Art der Wirkungsweise der Tropfelektrode von Grund aus umgestaltet werden, denn nun muß es notwendig den Anschein gewinnen, als wäre die Erreichung dieses Potentiales nur eine zufällige, die einer ganz andern als einer elektrischen Energieäußerung ihren Ursprung verdankt. Fassen wir die Wirkungsweise der Tropfelektroden in einen Satz zusammen: »Die Tropfelektrode strebt in allen Fällen dem Punkte zu, in welchem Quecksilber die maximale Oberflächenspannung erlangt und dem sie sich nähert, um ihn in Grenzfällen zu erreichen«, so erkennen wir, daß rein mecha-

nische Kräfte (zum Beispiel das Bestreben des *Hg*, der Flüssigkeit die kleinstmögliche Oberfläche zu bieten) das Verhalten der Tropfelektrode bestimmen können, wenn sie den elektrischen gegenüber genügend groß bleiben. Spielt doch auch bei der Stromerzeugung durch fallende Metallteilchen die elektrische Arbeit nur eine ganz untergeordnete Rolle, die gegen die Gravitation gar nicht in Betracht kommt (sonst müßte die Fallgeschwindigkeit der Teilchen während der Stromerzeugung abnehmen)! So kann auch bei der Tropfelektrode sehr wohl die elektrische Arbeitsleistung nur einen verschwindenden Betrag der gesamten sein. Die Erfahrung, daß die Tropfelektrode in allen Fällen, in denen *Hg*-Lösung eine unpolarisierbare Elektrode bildet, in denen die elektrische Arbeitsleistung also groß würde, sich dem Maximum kaum nähert, die Abweichungen in verschiedenen Lösungen etc. wären damit verträglich. Jedenfalls kann aber eine Deutung dieser Erscheinungen erst dann versucht werden, wenn das Verhältnis, in welches die verschiedenen Energiegrößen dabei eingehen, bekannt sein wird.

Zusammenfassung.

Da die Polarisationskapazität des Quecksilbers keine konstante Zahlengröße ist, sondern sich sehr wesentlich mit der Potentialdifferenz ändert, ist die Integralgleichung der Elektrokapillarkurve nur in dem Gebiete gültig, in welchem C konstant gesetzt werden darf. Für den anderen Teil der Kurve nimmt sie den Charakter einer Näherungsformel an.

Nachdem auf einige Eigentümlichkeiten gewiesen wird, die eine Abhängigkeit der gefundenen Polarisationskapazitäten vom Durchmesser der Elektroden und der Oberflächenkrümmung bedingen, ergibt es sich, daß die Übereinstimmung der direkt gemessenen Kapazitäten mit denen, die hier aus den kapillarelektrischen Messungen neu berechnet werden, so gut ist, als sie bei so ungenau zu ermittelnden Zahlenwerten und doch nur bedingungsweise zulässiger Rechnung nur erwartet werden darf. Endlich wird gezeigt, daß die Änderung der Polarisationskapazität mit der Potentialdifferenz im Ein-

klange mit des Verfassers früheren Untersuchungen mit der Annahme verträglich sind, daß die Doppelschicht bei —0·4 Volt gegen die Wasserstoffelektrode verschwindet, indem die Polarisationskapazität von Pt, Ag, Hg, Pb in diesem Punkte durch ein Maximum geht, dessen Eintritt sich voraussehen läßt.

Zum Schlusse wird ein Absatz der Besprechung der Tropfelektrode gewidmet.

Anmerkung während der Korrektur.

Als ich die vorliegende Studie abfaßte, war Gouy's ausführliche Publikation meiner Beachtung entgangen (Ann. chim. phys. [7] 29, p. 145—241, 1903). In derselben berechnet zwar M. Gouy die Polarisationskapazität aus seinen kapillarelektrischen Messungen in derselben Weise, wie wir es p. 646 unter Zugrundelegung der Lippmann'schen Messungen getan haben, er bemerkt aber nicht, daß diese Rechnung nur dann zu einwandfreien Resultaten führen kann, wenn sich die Kapazität nicht mit der Potentialdifferenz ändert, und gelangt zu Resultaten, die aber auch in der Nähe des Maximums, wo die Rechnung zulässig ist, weit von den bisherigen abweichen. So findet er, daß die zweite Ableitung der Oberflächenspannung nach der Potentialdifferenz in Schwefelsäure ein Maximum in der Nähe des Scheitelpunktes der Elektrokapillarkurve aufweist! Dies würde heißen, daß die Krümmung der Kurve dort am größten ist, während alle Forscher, welche diese Kurve ermittelt haben, darin übereinkommen, daß sie gerade dort recht flach ist. Die Berechnung basiert aber auf der Benützung der Differenz je zweier, in der Nähe des Maximums nur wenig verschiedener Zahlen, sie ist also gerade dort, wo sie überhaupt zulässig ist, nur sehr unsicher und kann recht wohl Fehler von mehreren 100 Prozent enthalten. Jedenfalls sind daher die von Scott und Krüger ermittelten Werte der Polarisationskapazität, die wir hier benützt haben, weitaus zuverlässiger, zumal die von Gouy mitgeteilten Zahlen auch durch die p. 651 besprochenen Fehlerquellen entstellt sein können; eine Veranlassung, etwas an dem Vorstehenden zu ändern, liegt, glaube ich, daher nicht vor.

Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur

von

Emil G. Bausenwein.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Die Theorie von W. Thomson[1] verlangt, daß

$$\frac{dE}{dT} T = \Pi,$$

wo $\frac{dE}{dT}$ die Änderung der thermoelektrischen Kraft mit der Temperatur, T die absolute Temperatur und Π den Peltiereffekt bedeutet.

Nun ist die Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur schon zu verschiedenen Malen untersucht worden, doch stets nur so, daß man einige ganz beliebige Punkte herausgriff.

So konnte z. B. Le Roux[2] konstatieren, daß beim Cu-Fe-Element der Peltiereffekt sich bei einer gewissen Temperatur umkehrt.

Von den übrigen Arbeiten[3] will ich nur die letzte mir bekannte von Battelli[4] erwähnen, der bei den Siedetemperaturen von vier Flüssigkeiten arbeitete und bis 202° C. kam.

---

[1] W. Thomson, Phil. Mag., *11*, 214 und 281.

[2] Le Roux, Compt. rend., *99*, 842.

[3] Naccari und Bellati, Atti del. R. Ist. veneto di sc. (5), *4*, p. 23 (1878); ibid. (5), *5*, p. 573 (1879); Campbell, Proc. Roy. Soc. Edinb. 1886/87, p. 387, Beibl., *12*, 402; ibid., *8*, 231, 710; Gore, Phil. Mag. (5), *5*, p. 349 (1886); Skobelzyn und Zinserling, Journal der russ. phys.-chem. Gesellschaft (4), *19*, 121 (1887), Beibl., *12*, 534.

[4] Battelli, Mem. dei Lincei, p. 285 (1889); Beibl., *14*, 296; Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (4a), *5*, p. 631 (1889).

Über Anregung durch Herrn Prof. Dr. Lecher habe ich in dessen Laboratorium die Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur innerhalb viel weiterer Grenzen, als dies meines Wissens bisher geschehen ist, untersuchen können.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Lecher für seine Förderung, die er mir während der ganzen Zeit meiner Arbeit angedeihen ließ, den besten Dank auszusprechen.

Methode.

Die Beschreibung einer Reihe von verschiedenen Vorversuchen übergehe ich, um gleich die definitive Beobachtungsanordnung zu schildern. Es mußte von vornherein darauf Rücksicht genommen werden, daß sämtliche hier in Betracht kommenden Größen möglichst gleichzeitig und an denselben Materialien gemessen wurden. Diese Größen sind: Peltiereffekt, thermoelektrische Kraft und Temperatur.

Messung des Peltiereffektes.

Da zunächst die Metallkombination Cu—Fe zur Untersuchung kam, so will ich an diesem Beispiele die Methode schildern. Die zu untersuchenden Metalle waren in der in nachstehender Figur skizzierten Weise angeordnet.

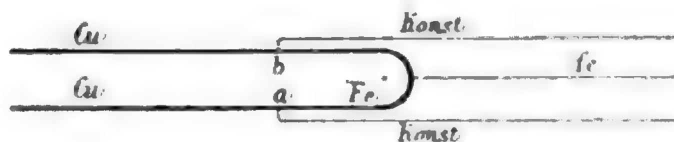


Fig. 1.

Es wird ein Gleichstrom von 6 Ampère durch eine Kombination von 3 *mm* dickem Kupfer—Eisen—Kupferdraht, Cu—Fe—Cu, geschickt. Dadurch tritt an den Stellen *a* und *b* Abkühlung respektive Erwärmung durch den Peltiereffekt ein. Derselbe wurde nun nicht seinem absoluten Werte nach in Kalorien gemessen, sondern durch seine thermoelektrische Wirkung auf ein Galvanometer. Zu diesem Zwecke ist sowohl bei *a* als *b* zwischen Cu und Fe ein dünner Konstantandraht (Konst.) eingelötet. Zum Verständnis des Spätern sei erwähnt, daß überdies in der Mitte des Fe-Bügels ein dünner Eisendraht (*fe*)

angelötet ist. Alle Lötungen wurden mit Messing oder Silber ausgeführt.

Nachdem der Gleichstrom eine genau bestimmte Zeit (30 Sekunden) durchgeflossen war, wurde er mittels einer eigens konstruierten Wippe (*W*, Fig. 3) ausgeschaltet und ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet. Der auftretende Ausschlag ist hervorgerufen durch die Temperaturdifferenz zwischen *a* und *b*. Hierauf wurde nach einer Pause von 30 Sekunden der Gleichstrom in entgegengesetzter Richtung wieder durch 30 Sekunden eingeleitet, wobei das Galvanometer selbstverständlich ausgeschaltet war. Dann folgte abermaliger Austausch des Gleichstrom- gegen den Galvanometerkreis durch die Wippe, wodurch ein Ausschlag nach entgegengesetzter Richtung resultierte u. s. w.

Den Peltiereffekt durch die thermoelektrische Kraft Kupfer–Eisen zu messen, war unmöglich, weil ja gerade im Inversionspunkte, wo der Peltiereffekt der Theorie nach gleich Null sein soll (im vorliegenden Falle bei zirka 300° C.), auch die thermoelektrische Kraft Cu–Fe gleich Null ist.

Die thermoelektrische Kraft Konstantan–Eisen dagegen ist, wie aus Tabelle 1 hervorgeht, ziemlich genau linear.

Tabelle 1.

t° C.	E	t° C.	E	t° C.	E
20°	0	310°	50·1	610°	121
60	6·25	360	66	660	130·5
110	15	410	72	710	147
160	20·7	460	85·5	760	168·5
210	29	510	97	810	173
260	39·5	560	108·5		

Die mit den Tabellenwerten gezeichnete Gaugain'sche Kurve gibt Fig. 2.

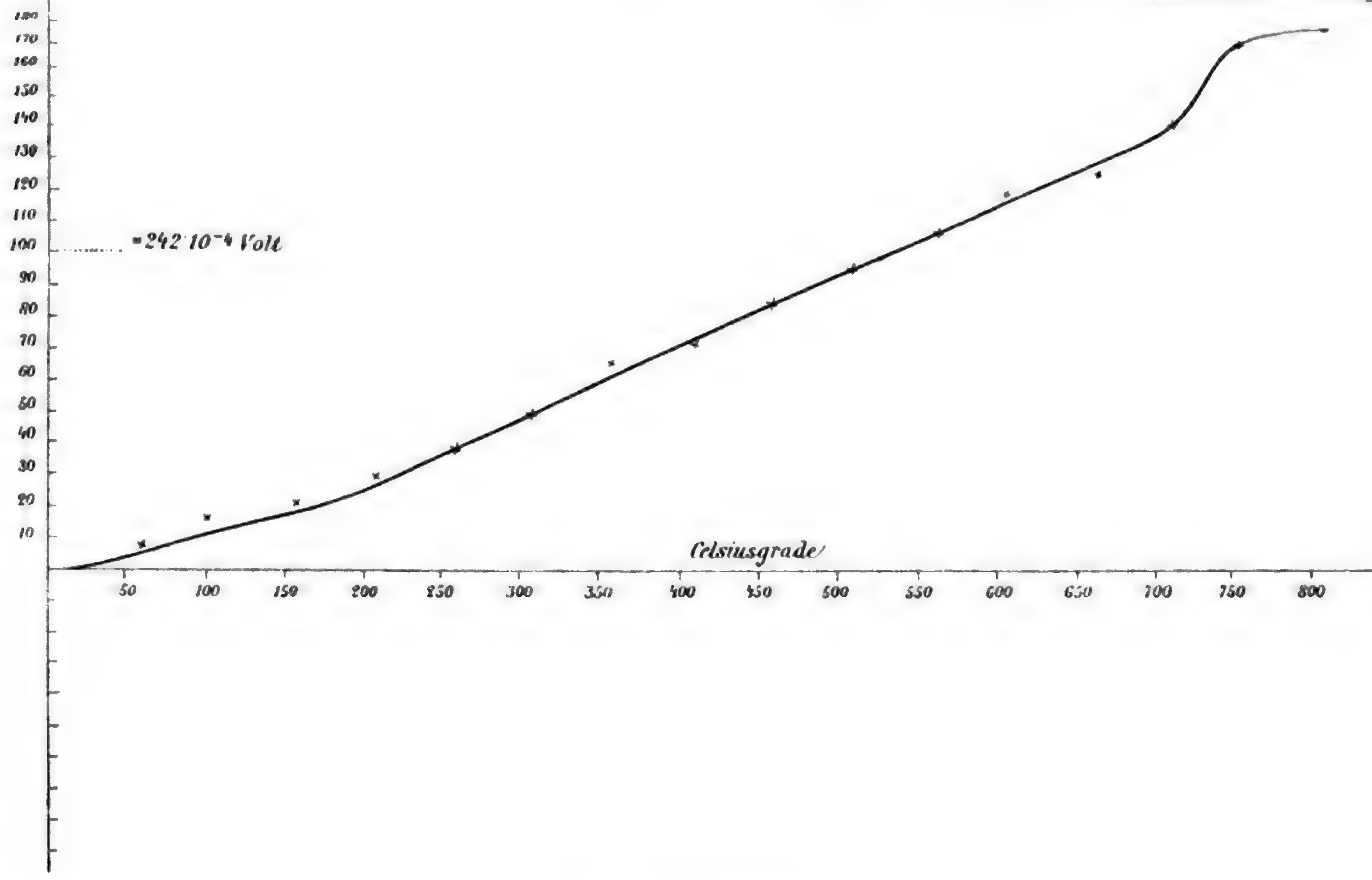


Fig. 2. Fe-Konstantan.

Erhitzung der Metallkombination und Messung der Temperatur.

Die ganze bisher beschriebene Kombination muß jetzt auf genau bestimmbare Temperatur erhitzt werden können.

Zu dem Zwecke wird dieselbe in einen elektrisch zu heizenden Porzellanofen, wie ihn die Firma Heräus in Hanau erzeugt, eingeschlossen. Dieser Ofen ist in Fig. 3 durch schematische Darstellung des zylinderförmigen Porzellanrohres *O O* dargestellt. Die Platinfolie umgibt nur den mittleren Teil der Röhre in einer Länge von ungefähr 30 *cm*; die ganze Länge des Rohres ist 60 *cm* bei zirka 6 *cm* lichtem Durchmesser. Die Heizung geschieht mittels Wechselstrom. Zur Erzielung einer Temperatur von 800° C. benötigte ich im Maximum 9·5 Ampère (125 Volt).

Das Konstanterhalten der gewünschten Temperatur ließ sich mit Hilfe zweier Rheostaten erreichen.

Die Temperatur im Ofen wird gemessen durch ein thermoelektrisches Pyrometer (geliefert von Heräus, geeicht von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin); dasselbe besteht aus einem Platin—Platin-Rhodium-Element, das mit einem zu diesem Zwecke gebauten Präzisionsvoltmeter von Siemens & Halske verbunden ist und direkt die Temperatur in Celsiusgraden angibt.

Die Pt- und Rh-Enden sowie überhaupt alle in Betracht kommenden Drähte wurden entsprechend weit aus der Heizröhre herausgeführt und an ihren weiteren Verbindungen durch passende adiabatische Hüllen so geschützt, daß sie stets genau die Zimmertemperatur beibehielten.

Messung der thermoelektrischen Kräfte.

Man sieht aus Fig. 3, *s*, daß, wenn ich die beiden Enden Konst. und Fe mit dem Siemens'schen Voltmeter (angedeutet durch *s*) in Verbindung brachte, die thermoelektrische Kraft zwischen Konstantan und Eisen bestimmt werden konnte; ganz ebenso durch Einschaltung von Cu—Fe die von Kupfer und Eisen.

Der Kontakt geschah mittels eines dreifachen (in der Figur nicht gezeichneten) Quecksilberkommutators, der entweder

Cu—Fe oder Konst.—Fe mit dem Voltmeter *s* in Verbindung zu bringen gestattete.

Die große thermoelektrische Potentialdifferenz zwischen Eisen und Konstantan machte bei dieser Kombination einen Vorschaltwiderstand von 500 Ω notwendig.

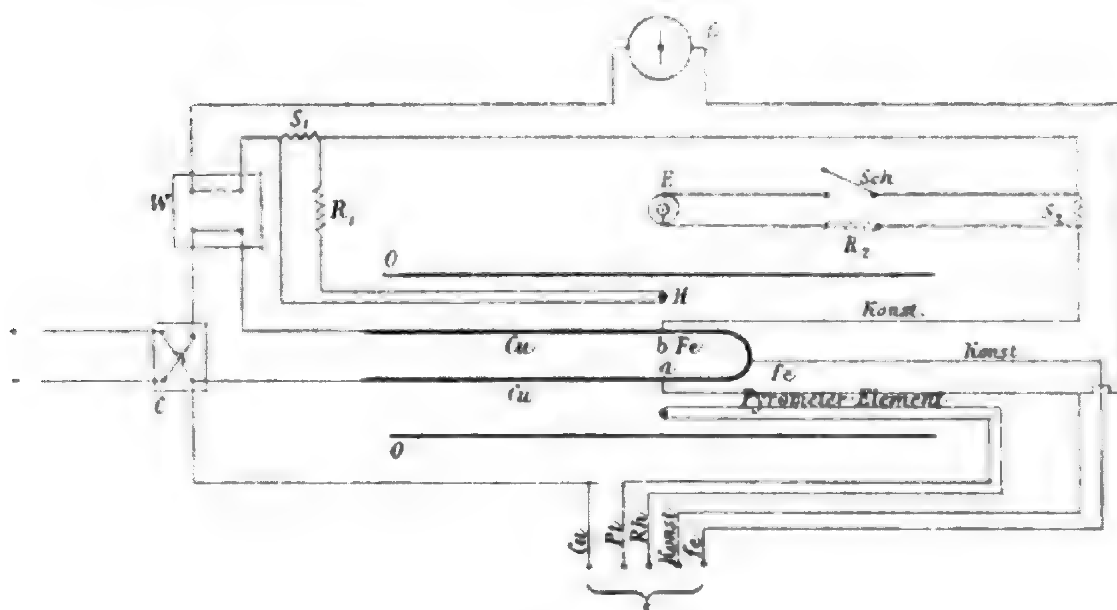


Fig. 3.

Was die Lage des Bügelelementes im Innern der Heizröhre anbelangt, so war Sorge getroffen, daß die beiden Lötstellen *a* und *b* genau in die Mitte und in gleicher Vertikalebene mit der Lötstelle des Pyrometerelementes zu liegen kamen. Alle Drähte waren durch besondere Tonröhrchen vor jedem unerwünschten Kontakt geschützt. Überdies war die Heizröhre selbst mit Asbestwolle derart ausgefüttert, daß keinerlei Luftzug entstehen konnte.

Erhaltung des Nullpunktes am Galvanometer.

Wenn man bei höherer Temperatur, ohne daß zuvor der Gleichstrom geschlossen war, ohne daß also ein Peltiereffekt hervorgebracht wurde, den Galvanometerkreis einschaltet, so dürfte ein Ausschlag nicht erfolgen, wenn bei *a*, *b* die Lötstellen genau die gleiche Temperatur hätten, denn die beiden entstehenden Thermoströme zwischen Eisen—Konstantan und andrerseits Konstantan—Eisen müßten einander kompensieren.

Wiewohl nun *a* und *b* durch die eigentümliche Bügelform der Kombination genau in derselben Vertikalebene, also in einer isothermischen Fläche des Ofens liegen, ist diese Konstanz der Temperatur selbstverständlich nicht vollständig zu erreichen. Da nun aber der Nullpunkt des Galvanometers bei den Messungen möglichst konstant bleiben soll, bei der hohen Empfindlichkeit des Instrumentes aber schon Temperaturdifferenzen einiger Tausendstelgrade genügten, um den Lichtfleck über die Skala hinauszutreiben, brachte ich ein Hilfselement (H) Eisen—Konstantan, geshuntet (S_1) mit in die Heizröhre hinein. Mittels eines Schieberrheostaten (R_1) konnte der nicht vollkommen ausgeglichene Teil der Thermoströme (es war immer nur ein kleiner Betrag) von *a* und *b* durch dieses Hilfselement aufgehoben und damit der Nullpunkt der Skala festgehalten werden.

Die Verwendung dieses Kompensationselementes (H) hat den weiteren Vorteil, daß der einmal eingestellte Nullpunkt es auch für jede Temperatur bleibt, da sich der nicht kompensierte Teil der Thermoströme von *a* und *b* (von der nicht ganz gleichen Temperatur dortselbst herrührend) mit der Temperatur in gleicher Richtung und Stärke verändert wie der ihm bei einer Anfangstemperatur äquivalent gemachte Teilstrom des Hilfselementes (H).

Dadurch ergibt sich eine selbsttätige Regulierung der Kompensation und Ruhe des Lichtfleckes bei allen Temperaturen.

Prüfung der Empfindlichkeitsänderung des Galvanometers.

Überdies mündet in die Galvanometerleitung durch einen zweiten Shunt S_2 (0·1 Ω) ein galvanisches Element (E), das in einem Kreis von hohem Widerstande (5000 Ω) liegt und durch den Schlüssel *Sch* geschlossen werden kann. Durch diese einfache Vorrichtung läßt sich die Empfindlichkeitsänderung des Galvanometers beziehungsweise Widerstandsänderung der Leitung in jedem beliebigen Moment bestimmen.

Beispiel einer Ablesung.

Um die Art der Beobachtung klar zu machen, sei es erlaubt, ein Bruchstück des Beobachtungsjournals in extenso mitzuteilen:

Beob-achtungszeit	Thermostrom			Vergleichs-element	Peltiereffekt					Beobachtungsreihe: III, Blatt 3c
	Tem-peratur	Fe—Cu	Fe-Konst.		I		II		Absolute Summe	
					0-Punkt	Ausschlag	0-Punkt	Ausschlag		
10h 30m	305	11·9	49·5	13·5	52·6	42·8	53·5	42·6	(—11)	Zimmertemperatur: 17·5° C.
				13·5	52·6	42	53·8	42·6	— 0·6	
				13·4	52·5	42	54	42·8	— 0·7	Gleichstrom: 6 Amp.
				13·5	52	41·1	53·8	42·2	— 0·7	
	310			13·5	52·4	41·3	53·5	41·6	— 0·8	
									— 0·7	
11h	400	10·8	70·5	13·5	52	46·1	52·5	37	(— 9·9)	
				14	51·8	44·9	52	36·8	— 8·3	
				12·9	52	44·9	52·4	36·4	— 8·9	
				13·6	52	44·6	52·7	36·5	— 8·8	
				13·8	51·5	44·7	52·8	37	— 9·0	
				13·8	51·8	45·6	52·3	37	— 9·6	
	410			13·6	51·5	45·6	52·3	37	— 9·4	
									— 9·1	

11h 50m	450	8	83	13·8	50·8	45	51·8	32	14·0)
					50·9	46·4	51·9	33·9	—13·5
					50·3	45·8	51·9	34·2	—13·2
					51	45·3	51·6	32·7	—13·2
	460				50·4	45·3	51	32·8	—13·1
									—13·25
12h 30m	500	4·5	94	13·6	50·9	36·8	50·3	18	(—18·2)
				13·8	49·6	34·3	50·6	18·1	—17·2
				14	50	34	51·2	16	—19·2
				14·4	50·3	35·6	51	17	—19·3
				13·6	50	35·3	51	16·3	—20·0
				13·9	50	34·6	50·9	16·3	—19·1
				13·9	50·1	35·5	51	16·9	—19·5
	510				50	35·6	50·8	16·4	—20·0
									—19·4

Die Bedeutung der einzelnen Kolumnen wird durch die Überschriften klar gemacht. Dazu ist noch zu bemerken: Die erste Reihe gibt die Zeit der Beobachtung, die nächsten drei die Ablesungen am Siemens'schen Voltmeter, und zwar stellt die erste davon die Temperatur in Celsiusgraden dar, die zweite die Ausschläge desselben Instrumentes bei Anlegung von Fe—Cu in 10^{-4} Volt und die dritte ebenso bei Anlegung von Fe—Konst. (unter Vorschaltung von 500 Ω). Eine weitere Reihe enthält die Galvanometerausschläge bei Schließung des oben besprochenen Vergleichselementes (*E*). Man sieht, daß die Empfindlichkeit des Galvanometers ziemlich konstant blieb. Die nächsten Kolumnen mit der Überschrift »Peltiereffekt« ergeben unter I Nullpunkt und Ausschläge, wenn der Gleichstrom in der einen Richtung, unter II ebenso, wenn er in entgegengesetzter Richtung durch das Bügelelement fließt. Diese Ausschläge sind als erste Ausschläge zu verstehen, ihre absolute Summe enthält die letzte der Kolumnen. Dieselbe entspricht der Natur der Sache nach dem Vierfachen der Wirkung des Peltiereffektes bei *a* oder *b*. In der für eventuelle Bemerkungen offen gelassenen Spalte wurde die jeweilige Zimmertemperatur und Gleichstromintensität vermerkt.

Erstere wurde zu der Korrektur benötigt, welche vorgenommen werden mußte, da die Temperatur der kalten Lötstelle nicht 0°, sondern Zimmertemperatur hatte. Die Intensität von 6 Ampère sowie die Zeitdauer des Stromschlusses (30 Sekunden) mit darauffolgender Pause (30 Sekunden) wurde gewählt, weil vielfache Versuche ergeben hatten, daß ceteris paribus auf diese Weise die günstigsten Resultate erzielt werden. Die jedesmalige erste Ablesung für den Peltiereffekt wurde nicht mit in Rechnung gezogen.

Aus Kolumne 2 geht hervor, daß die Temperatur während einer Anzahl von Ablesungen nicht konstant blieb. Als merkliche Fehlerquelle ist dies nicht anzusehen, da stets der Mittelwert der Temperatur mit dem Mittelwerte der während derselben Zeit erhaltenen Ablesungen (5—8) verbunden wurde.

Der momentane Nullpunkt wurde gleichzeitig mit dem Auslösen der Wippe jedesmal abgelesen, um die bei der hohen Empfindlichkeit des Galvanometers durch äußere magnetische

Einflüsse (elektrische Straßenbahn u. dgl.) unvermeidlichen Schwankungen eliminieren zu können. Eine kleine Korrektur wurde auch wegen des durch den Schluß des Gleichstromes erzeugten magnetischen Feldes notwendig.

Resultate.

Untersucht wurde bisher die geschilderte Kombination Fe—Cu und ebenso Fe—Ag. In letzterem Falle wurde in der eingehend geschilderten Anordnung an Stelle von Kupfer Silber vom Feingehalte 900 : 1000 genommen.

Es ergaben sich die in nachfolgenden Tabellen zusammengestellten Werte.

Thermoelektrische Kraft Fe—Cu.

Tabelle 2.

$t°$ C.	$E = 10^{-4}$ V.	$t°$ C.	$E = 10^{-4}$ V.
20	0	460	9
60	3	510	5
110	6	560	1
160	8·35	610	— 4·3
210	10·8	660	— 8·3
260	12·25	710	—14
310	13	760	—17
360	12·5	810	—20·7
410	11·25		

Thermoelektrische Kraft Fe—Ag.

Tabelle 3.

$t°$ C.	$E = 10^{-4}$ V.	$t°$ C.	$E = 10^{-4}$ V.
20	0	509	6·5
79	5·5	559	1
129	10	609	— 3·4
159	11·3	619	— 4·2
229	15	659	— 9·5
259	16	734	—16·2
324	16	739	—16·5
359	15·5	779	—19·4
409	14	809	—21·5
464	10		

Peltiereffekt Fe—Cu.

Tabelle 4.

t° C.	e	t° C.	e
20	14	615	—25·7
99	13·3	672	—25·1
159	12·7	727	—23·2
214	8·6	735	—22·7
309	1·9	795	—24·8
374	— 4·4		
484	—14·4		
630	—25·8		

Peltiereffekt Fe—Ag.

Tabelle 5.

t° C.	e	t° C.	e
20	16	509	—23·0
154	13·9	564	—26·5
239	7·9	614	—31·6
279	3·6	659	—34
321	— 2·6	736	—30·5
359	— 4·7	779	—31·6
414	—12·7	809	—34·5
464	—19·6		

Nebenbei sind die Werte durch die entsprechenden Gaugain'schen Kurven graphisch dargestellt (Fig. 4 für Fe—Cu und 5 für Fe—Ag). Die Abszissenachse enthält die Temperaturen in Celsiusgraden. Die Einheit der Ordinatenachse ist für die Thermokurven Zehntelmillivolt, für die Kurven dagegen, die den Gang des Peltiereffektes mit der Temperatur wiedergeben, ist die Einheit selbstverständlich willkürlich.

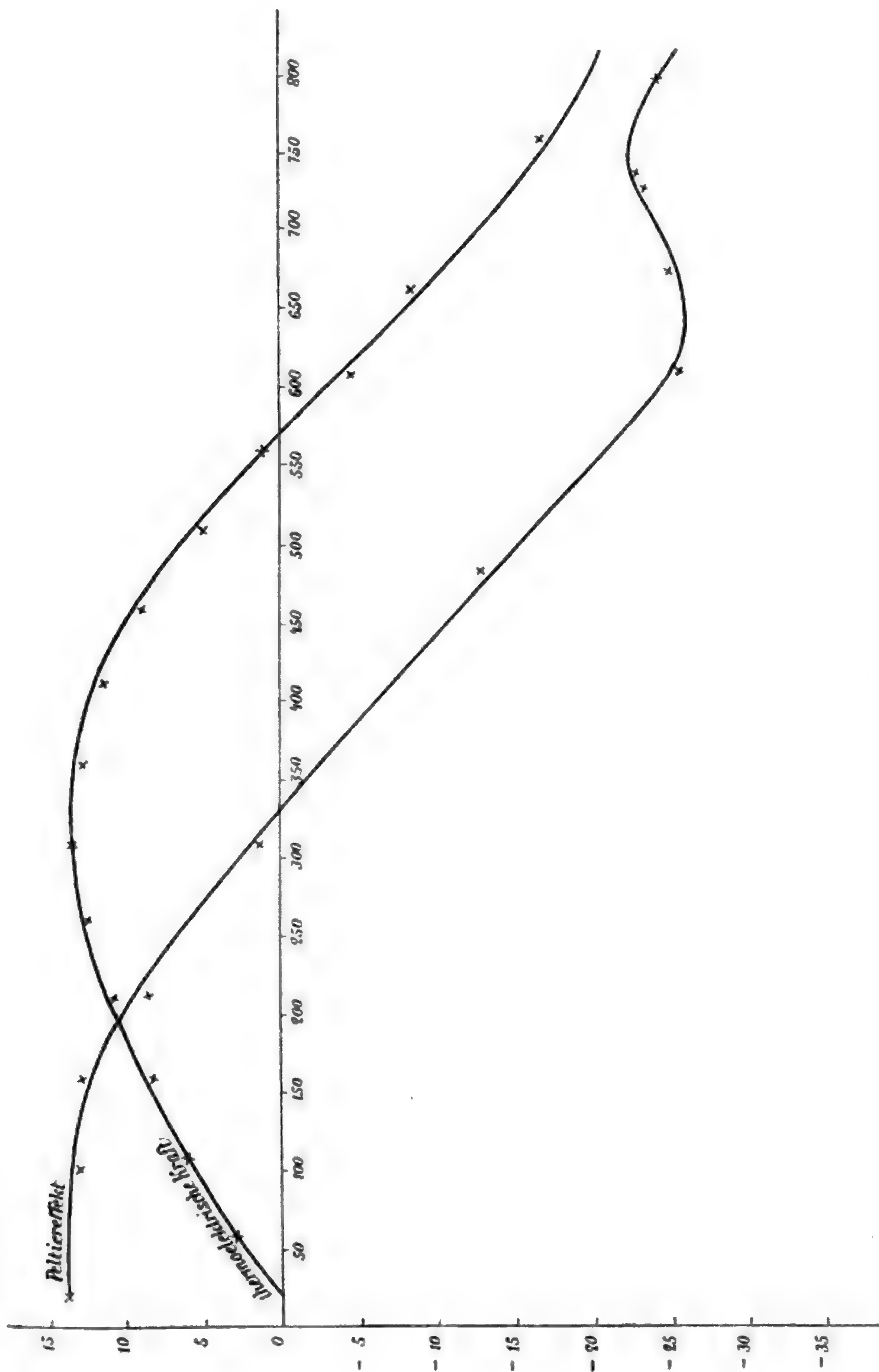

Peltiereffekt
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800
15
10
5
0
− 5
− 10
− 15
− 20
− 25
− 30
− 35

Fig. 4. Fe—Cu.

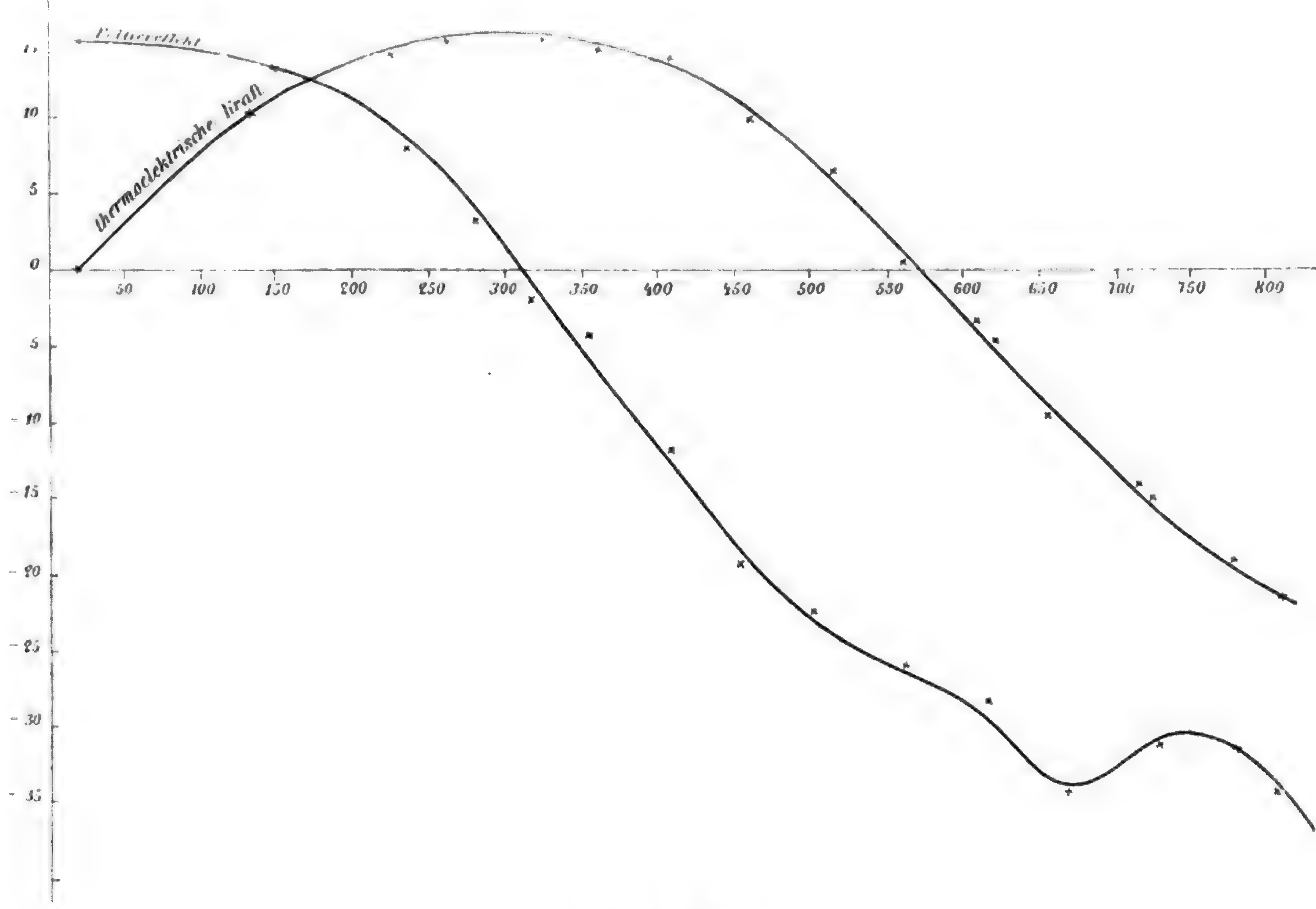

thermoelektrische Kraft
0
5
10
- 5
- 10
- 15
- 20
- 25
- 30
- 35
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800

Fig. 5. **Fe—Ag.**

Was bei Betrachtung der Kurven auffällt, ist zunächst folgendes:

1. Der Inversionspunkt liegt sowohl für Fe—Cu als auch für Fe—Ag bei etwas höherer Temperatur, als er gewöhnlich angegeben ist, was sich vielleicht aus dem Material erklären läßt (kohlenstoffarmes Eisen, nicht chemisch reines Silber). Übrigens zeigen die angegebenen Zahlen bei verschiedenen Beobachtern nicht große Übereinstimmung; so fand für Cu—Fe z. B. Tait[1] den neutralen Punkt mit 260° und 265° C., Hankel[2] 270°, W. Thomson[3] 280°, Becquerel[4] 300° und ähnliche Schwankungen zeigt der Inversionspunkt von Fe—Ag.

2. Der rechte Teil der Thermokurven, sowohl der von Fe—Cu als auch der von Fe—Ag fällt steiler ab als der linke.

3. Interessant ist bei den Thermokurven, daß (was meines Wissens bisher noch nicht beobachtet wurde) bei ungefähr 700° C. (bei Ag—Fe schon bei 670°) abermals eine Inflexion aufzutreten scheint. Darin stimmen nämlich sämtliche Beobachtungsreihen überein, daß in diesem Bereiche $\left|\frac{dE}{dT}\right|$ sichtlich kleinere Werte annimmt.

4. Die Kurven, die den Verlauf des Peltiereffektes wiedergeben, haben in ihrem ersten Teile parabolische Gestalt, wie dies bis 100° C. schon von Battelli für Fe—Cu gefunden wurde.

5. Mit der Theorie ist eine befriedigende Übereinstimmung insofern zu verzeichnen, als der Peltiereffekt dort gleich Null wird, wo $\frac{dE}{dT} = 0$ ist und dann negative Werte annimmt.

6. Unter der Annahme, daß bei 20° und bei 570° C. $\frac{dE}{dT}$ gleichen absoluten Wert hat, wie es den gewonnenen Resultaten entspricht, müßte sich der Theorie nach der Peltiereffekt in den beiden Punkten ungefähr verhalten wie 1 : 3, er verhält sich aber tatsächlich wie $1 : 1\,^1/_2$.

---

[1] Tait, Pogg. Ann., *152*, 427.
[2] Hankel, Pogg. Ann., *62*, 491.
[3] Thomson, Phil. Trans., *3*, 698.
[4] Becquerel, Ann. de Chim. et de Phys., *31*, 371.

7. Schließlich fallen noch die Anomalien im weiteren Verlaufe der Peltierkurven auf, die sich sowohl bei Fe—Cu als auch bei Fe—Ag finden.

Eine Erklärung dieser Unregelmäßigkeiten ist mir nicht möglich, doch möchte ich darauf hinweisen, daß es sich gewiß nicht um einen bloßen Beobachtungsfehler handeln kann, denn ganz das gleiche Ergebnis lieferten alle sieben, vollkommen voneinander unabhängig angestellten Versuchsreihen.

Eher scheinen mir die erwähnten Anomalien mit einem Umwandlungsbereiche des Eisens bei der betreffenden Temperatur (zirka 750° C.) in Verbindung zu stehen, worauf ja auch der plötzliche Sprung der Fe—Konst.-Kurve (Fig. 2) hindeutet.

Und tatsächlich wurde ja ein solcher Umwandlungspunkt des Eisens erst in jüngster Zeit wieder von Guillaume[1] bei 755° beobachtet.

[1] Ch. Ed. Guillaume, Arch. des sc. phys. et nat., 1904, 4, 17, p. 23.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. VI. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über infinitesimale Transformation

von

M. Allé.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

I.

Durch eine gegebene infinitesimale Transformation wird einerseits die Schar der Kurven

$$\alpha = c$$

bestimmt, welche diese Transformation gestatten, andrerseits die Schar der Bahnkurven

$$\alpha_1 = c_1.$$

Die Kurven der ersten Schar mögen, um einen kürzern Wortausdruck zu erzielen, als den Bahnkurven zugeordnet oder als Zugeordnete bezeichnet werden.

Die beiden Scharen sind durch die Gleichungen

$$\xi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \eta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1, \qquad 1)$$

$$\xi \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \qquad 2)$$

definiert, in welchen ξ, η die Bestimmungsstücke der infinitesimalen Transformation bedeuten.

Sollen die beiden Scharen ein orthogonales System bilden, so kommt zu den Gleichungen 1), 2) noch die Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}=0$$

hinzu und gelangt man durch Verbindung der drei Gleichungen zu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{\xi}{\rho^2}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\eta}{\rho^2}, \quad 3)$$

in welchen Gleichungen

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2$$

ist.

Die Größen ξ, η haben daher, wenn die Bahnkurven und Zugeordneten ein orthogonales System bilden sollen, die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\xi}{\rho^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta}{\rho^2} \quad 4)$$

zu erfüllen.

Wenn dies der Fall ist, so steht die Resultierende der infinitesimalen Transformationskomponenten in jedem Punkte der Ebene senkrecht zu der durch ihn gehenden Zugeordneten; daher mag eine solche infinitesimale Transformation als eine normale bezeichnet werden.

Für eine normale infinitesimale Transformation leitet man unter der Benützung der Abkürzung

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2}=h \quad 5)$$

die folgende Gleichung ab:

$$h.\rho=1. \quad 6)$$

Da

$$\rho^4\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\xi}{\rho^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta}{\rho^2}\right)=$$
$$=(\eta^2-\xi^2)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2\xi\eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \quad 7)$$

so nimmt die Bedingung 4) auch die folgende Form an:

$$(\eta^2-\xi^2)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+2\,\xi\eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0. \qquad 8)$$

Aus dem simultanen Systeme

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=d\alpha,$$

welches der partiellen Differentialgleichung 1) äquivalent ist, folgt

$$d\alpha=\frac{\xi dx+\eta dy}{\rho^2},$$

in welcher Gleichung die rechte Seite exakt ist, wenn die Bedingung 4) oder, was dasselbe ist, 8) erfüllt ist, d. h. wenn die infinitesimale Transformation eine normale ist.

Es ist in diesem Falle

$$\frac{1}{\rho^2}=h^2$$

der Multiplikator der Differentialgleichung

$$\xi dx+\eta dy=0 \qquad 9)$$

der zugeordneten Kurven, welche mit den orthogonalen Trajektorien der Bahnkurven zusammenfallen.

Umgekehrt, wenn h^2 Multiplikator der Gleichung 9) der orthogonalen Trajektorien der Bahnkurven ist, so sind erstere den Bahnkurven zugeordnet; denn ist

$$\alpha=c$$

das Integral von 9), so bestehen die Gleichungen 3), aus welchen folgt:

$$\xi\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\eta\frac{\partial\alpha}{\partial y}=1.$$

Soll das orthogonale System der Bahnkurven und ihrer Zugeordneten ein isothermes System bilden, so müssen noch die Gleichungen

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial y},$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = -\frac{\partial\alpha}{\partial x} \qquad 10)$$

oder die aus ihnen durch Vertauschung von α mit α_1 hervorgehenden bestehen.

In beiden Fällen erhält man

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho^2}$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = -\frac{\xi}{\rho^2} \qquad 11)$$

und aus ihnen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\eta}{\rho^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\xi}{\rho^2}. \qquad 12)$$

Wegen

$$\rho^4\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\eta}{\rho^2}\right) =$$
$$= (\eta^2-\xi^2)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - 2\xi\eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \qquad 13)$$

wird dann die Gleichung

$$(\eta^2-\xi^2)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - 2\xi\eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \qquad 14)$$

erfüllt sein müssen.

Wenn also die Bahnkurven und ihre Zugeordneten ein isothermes System bilden sollen, so müssen 8) und 14) zusammenbestehen, was auf die Gleichungen

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

führt.

Bilden also die Bahnkurven und ihre Zugeordneten ein isothermes System, so ist dasselbe mit den Kurven

$$\xi = a,$$
$$\eta = b$$

der Fall, oder, wie man sich auch ausdrücken kann, es bestimmen ξ und η ein isothermes System.

Umgekehrt, bestimmen $\xi\eta$ ein isothermes System, d. h. bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

so sind die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\eta}{\rho^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\xi}{\rho^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\eta}{\rho^2} = 0$$

erfüllt, also gibt es zwei Funktionen $\alpha\alpha_1$, welche aus den Gleichungen

$$\frac{\xi\, dx + \eta\, dy}{\rho^2} = d\alpha,$$

$$\frac{\eta\, dx - \xi\, dy}{\rho^2} = d\alpha_1$$

folgen, deren linke Seiten exakt sind.

Man hat daher:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\xi}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\frac{\xi}{\rho^2}.$$

Aus diesen aber folgt einerseits

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

andrerseits

$$\xi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \eta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1,$$

$$\xi \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0,$$

d. h.: Bestimmen $\xi\eta$ ein isothermes System, so trifft dasselbe für die Bahnkurven und ihre Zugeordneten zu.

Aus 12) schließt man, daß

$$\frac{\eta\, dx - \xi\, dy}{\rho^2}$$

exakt ist, wenn $\xi\eta$ ein isothermes System bestimmen und

$$\frac{1}{\rho^2} = h^2$$

auch Multiplikator der Differentialgleichung der Bahnkurven wird.

Die Gleichungen 7) und 13) zeigen, nebenbei bemerkt, daß, wenn $\xi\eta$ ein isothermes System bestimmen, dies auch mit $\frac{\xi}{\rho^2}$ und $\frac{\eta}{\rho^2}$ der Fall ist.

II.

Die vorhergehenden Resultate können der Hauptsache nach auch auf folgende andre Art gefunden werden.

Sei

$$\delta = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$$

das Symbol einer infinitesimalen Transformation, welche die Kurvenschar

$$\alpha = c \tag{1}$$

gestattet, so muß die Gleichung

$$\partial \alpha = \Omega(\alpha) \tag{2}$$

bestehen, in welcher man $\Omega(\alpha)$ auch durch 1 ersetzen kann.

Nennt man den Winkel zwischen dem Elemente einer Bahnkurve und dem Element einer Kurve der Schar 1) in ihrem Schnittpunkt ε, so geht 2) über in

$$h \rho \sin \varepsilon = \Omega(\alpha) \tag{3}$$

oder einfacher

$$h \rho \sin \varepsilon = 1; \tag{4}$$

für eine normale infinitesimale Transformation ergibt sich daher die früher gefundene Beziehung

$$h \rho = 1. \tag{5}$$

Sind dx, dy die Projektionen des Normalenelementes einer der Kurven 1) auf die Koordinatenachsen, so ist

$$dx = \frac{1}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dn,$$

$$dy = \frac{1}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot dn$$

und wegen

$$dn = \frac{d\alpha}{h}$$

erhält man für eine normale infinitesimale Transformation

$$\xi = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$\eta = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

wo rechts, wenn man will, noch der Faktor $\Omega(\alpha)$ hinzugefügt werden kann.

Aus diesen Gleichungen folgt mit Rücksicht auf 5)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\xi}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho^2} \tag{6}$$

und damit die in Abschnitt I gefundene Bedingung dafür, daß $\xi\eta$ eine normale infinitesimale Transformation darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta}{\rho^2} = 0.$$

Aus 6) folgt ferner:

$$h^2(\xi dx + \eta dy) = d\alpha$$

und daher

$$h^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

als Multiplikator der Differentialgleichung

$$\xi dx + \eta dy = 0.$$

Ein Beispiel für die Anwendung der Entwicklungen in Abschnitt I bieten die Rotation und die konforme Transformation dar, für welch letztere

$$\xi = \alpha + \gamma x + \delta y,$$
$$\eta = \beta - \delta x + \gamma y$$

die Bestimmungsstücke der Transformation sind.

Da $\xi\eta$ ein isothermes System bestimmen, so müssen die Bahnkurven und ihre Zugeordneten ein isothermes System bilden.

Führt man, um die Rechnung etwas abzukürzen, neue Veränderliche durch die Gleichungen $x = \lambda + x'$, $y = \mu + y'$ ein und bestimmt $\lambda\mu$ so, daß $\xi\eta$ in den neuen Veränderlichen homogen werden, so findet man, wenn

$$\omega = \gamma^2 + \delta^2: \qquad \omega\lambda = \beta\delta - \alpha\gamma,$$
$$\omega\mu = -(\beta\gamma + \alpha\delta)$$

und aus

$$\xi = \gamma x' + \delta y', \qquad \rho^2 = \omega(x'^2 + y'^2)$$
$$\eta = \gamma y' - \delta x'.$$

Mit Weglassung der Striche wird die Gleichung der Bahnkurven

$$(\gamma y - \delta x)\,dx - (\gamma x + \delta y)\,dy = 0$$

mit dem Multiplikator

$$\frac{1}{\omega(x^2+y^2)}.$$

Man findet durch Benützung desselben für die linke Seite der Gleichung der Bahnkurven $\alpha_1 = c_1$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\delta}{\omega}\, l \sqrt{x^2+y^2}$$

und ebenso für die linke Seite der Gleichung der Zugeordneten

$$\alpha = \frac{\gamma}{\omega}\, l \sqrt{x^2+y^2} + \frac{\delta}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Bahnkurven und Zugeordnete bestehen also aus einem Orthogonalsystem logarithmischer Spiralen.

Ein weiteres Beispiel liefert die durch

$$\xi = ax^2 + 2bxy - ay^2,$$
$$\eta = -bx^2 + 2axy + by^2$$

definierte Transformation.

Die Größen ξ, η genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

zur Bestimmung von ρ dient die Gleichung

$$\rho^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)^2$$

und der reziproke Wert von ρ^2 ist Multiplikator der Differentialgleichungen der Bahnkurven und ihrer Zugeordneten.

Man findet für die beiden Scharen, welche ein isothermes System bilden müssen, die Gleichungen:

$$\alpha_1 = \frac{ax+by}{x^2+y^2} = c_1,$$

$$\alpha = \frac{bx-ay}{x^2+y^2} = c,$$

welche zwei Kreisscharen darstellen.

III.

Wenn man in Abschnitt I von der Bedeutung der ξ, η als Bestimmungsstücke einer infinitesimalen Transformation absieht und bemerkt, daß die dort nach der Gleichung 6) bewiesenen Sätze aus den identischen Gleichungen 7) und 13) abgeleitet wurden, so stellen sie ebenso viele Resultate für Differentialgleichungen mit Koeffizienten ξ, η dar, vorausgesetzt, daß letztere gewissen Bedingungsgleichungen genügen.

Unter diesen Resultaten kommt auch der Satz vor, daß die beiden Gleichungen

$$X dx + Y dy = 0, \tag{1}$$

$$Y dx + X dy = 0 \tag{2}$$

den Multiplikator

$$\frac{1}{X^2+Y^2}$$

besitzen, wenn X und Y ein isothermes System bestimmen.

Dieser Satz kann noch auf folgende andre Art bewiesen werden.

Wenn die beiden Gleichungen 1) und 2), deren Integrale $\alpha = c$, $\alpha_1 = c_1$ seien, einen gemeinsamen Multiplikator λ haben sollen, so muß er den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} &= -a', \\ Y\frac{\partial u}{\partial x} - X\frac{\partial u}{\partial y} &= b' \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

genügen, in welchen die Bedeutung von $a'b'u$ aus folgenden Gleichungen hervorgeht:

$$a' = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$b' = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$u = l\lambda.$$

Aus 3) findet man, wenn zur Abkürzung

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

gesetzt wird:

$$R^2 . \frac{\partial u}{\partial x} = b'Y - a'X,$$

$$R^2 . \frac{\partial u}{\partial y} = -(b'X + a'Y).$$

Es kann daher $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und folglich auch u gefunden werden, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten X, Y der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{b'X + a'Y}{R^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{b'Y - a'X}{R^2} = 0 \qquad 4)$$

genügen.

Dieser Bedingung kann eine einfachere Form gegeben werden. Es ist nämlich, wie man leicht verifiziert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} + \frac{\partial}{\partial y} l \sqrt{X^2 + Y^2} &= \frac{aX + bY}{R^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} - \frac{\partial}{\partial x} l \sqrt{X^2 + Y^2} &= \frac{bX - aY}{R^2}, \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

in welchen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}, \\ b &= \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Bezeichnet man wie üblich mit Δ den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

so folgt aus 5)

$$\Delta \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{aX+bY}{R^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{bX-aY}{R^2}. \tag{7}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung Y durch $-Y$, so gehen a und b beziehungsweise in b' und $-a'$ über und zeigt die Vergleichung der durch diese Veränderung aus 7) hervorgehenden Gleichung mit 4), daß letztere Bedingung durch die einfachere:

$$\Delta \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}=0 \tag{8}$$

ersetzt werden kann.

Wenn X und Y ein isothermes System bestimmen, so ist, weil die Gleichungen 1) und 2) als inexakt angenommen werden:

$$a=b=0; \tag{9}$$

folglich bestimmen nach 5)

$$\operatorname{arctg}\frac{Y}{X} \quad \text{und} \quad l\sqrt{X^2+Y^2}$$

ein isothermes System, daher die Gleichung 8) erfüllt ist und der gemeinsame Multiplikator λ von 1) und 2) aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\lambda X}{\partial y}-\frac{\partial\lambda Y}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial\lambda X}{\partial x}+\frac{\partial\lambda Y}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

gefunden werden kann.

Aus dem Vorhandensein eines gemeinsamen Multiplikators folgt die Gleichheit der Differentialparameter h, h_1 von α und α_1 und hieraus, daß die Integrale von 1) und 2) ein isothermes System bilden.

Um aus 10) den Multiplikator λ zu finden, bemerke man, daß unter Zuziehung von 9) erstere Gleichungen die Form annehmen:

$$X\frac{\partial\lambda}{\partial y}-Y\frac{\partial\lambda}{\partial x}-2\lambda\frac{\partial Y}{\partial x}=0,$$
$$Y\frac{\partial\lambda}{\partial y}+X\frac{\partial\lambda}{\partial x}+2\lambda\frac{\partial X}{\partial x}=0. \qquad 11)$$

Man leitet hieraus die Gleichung ab:

$$\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}-Y\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0$$

oder wegen 9), wenn

$$X^2+Y^2=v$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

aus welcher

$$\lambda=f(v)$$

folgt.

Setzt man diesen Ausdruck von λ in die erste der Gleichungen 11) ein, so erhält man mit Hilfe von 9) nach einigen Reduktionen

$$vf'(v)+f(v)=0,$$

woraus sich

$$\lambda=\frac{k}{X^2+Y^2}$$

ergibt, wenn k eine Konstante ist.

Die Eigenschaft der Koeffizienten von 1), ein isothermes System zu bestimmen, kann durch Division mit einem Faktor, welcher eine Funktion von xy ist, verloren gehen und es ist von Interesse, wenn diese Koeffizienten diese Eigenschaft nicht mehr besitzen, zu untersuchen, unter welcher Bedingung sie durch Multiplikation der Gleichung 1) mit einem passenden Faktor wiederhergestellt werden kann und diesen Faktor zu bestimmen.

Sei ε der erwähnte Faktor, so dienen zur Bestimmung desselben die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon X}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon Y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon X}{\partial y} &= -\frac{\partial \varepsilon Y}{\partial x} \end{aligned} \qquad 12)$$

oder mit Benützung von 6), wenn zur Abkürzung $l\varepsilon = \omega$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} X\frac{\partial \omega}{\partial x} - Y\frac{\partial \omega}{\partial y} &= b, \\ Y\frac{\partial \omega}{\partial x} + X\frac{\partial \omega}{\partial y} &= -a. \end{aligned} \qquad 13)$$

Aus diesen Gleichungen zieht man

$$R^2\frac{\partial \omega}{\partial x} = bX - aY,$$

$$R^2\frac{\partial \omega}{\partial y} = -(aX + bY),$$

daher als Bedingung für die Existenz eines solchen Faktors:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{aX+bY}{R^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{bX-aY}{R^2} = 0,$$

d. h. nach 7):

$$\Delta . \operatorname{arctg}\frac{Y}{X} = 0.$$

Die Bedingung für die Existenz eines solchen Faktors ist also, wie zu erwarten war, daß die den Gleichungen 1) und 2) entsprechenden Kurvenscharen ein isothermes System bilden.

Genügen die Koeffizienten von 1) der Gleichung 8), so findet man aus 13) $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, dann der Reihe nach ω, ε und die Größen εX und εY bestimmen ein isothermes System.

Den Multiplikator M der Gleichung

$$\varepsilon(Xdx+Ydy)=0 \tag{14}$$

findet man hierauf nach Abschnitt I durch die Formel

$$M=\frac{1}{\varepsilon^2(X^2+Y^2)}.$$

Zwischen dem Multiplikator λ von 1) und dem Faktor ε findet eine bemerkenswerte Beziehung statt.

Wegen der Eigenschaft der Koeffizienten εX und εY in 14), ein isothermes System zu bestimmen, ist nach Abschnitt I

$$M=h^2$$

und daher

$$\lambda=h^2\varepsilon,$$

woraus sich ergibt, daß

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{h^2}$$

sein muß.

IV.

Ein zweiter Satz, der in den Entwicklungen Abschnitt I enthalten ist, ergibt sich als Folge eines allgemeinern Satzes und kann in der nachfolgenden Weise ausgesprochen werden.

Die Gleichung

$$Xdx+Ydy=0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten der Bedingung

$$(Y^2-X^2)\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+2XY\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=0 \tag{2}$$

genügen, hat

$$\frac{1}{R^2}=h^2$$

als Multiplikator, unter h^2 den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2$$

verstanden, wenn $\alpha = c$ das Integral von 1) darstellt und R in derselben Bedeutung genommen wird wie in Abschnitt III.

Seien nämlich ξ, η die Bestimmungsstücke einer normalen infinitesimalen Transformation, welche 1) gestattet, so muß

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} \tag{3}$$

oder man hat, wenn der gemeinsame Wert dieser Quotienten mit μ bezeichnet wird:

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \mu, \tag{4}$$

woraus

$$\rho = \mu R \tag{5}$$

folgt.

Um eine Gleichung zur Bestimmung von μ zu erhalten, bemerke man, daß nach der über $\xi\eta$ gemachten Annahme die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta}{\rho^2} = 0 \tag{6}$$

bestehen muß. Werden in diese die Ausdrücke der $\xi\,\eta\,\rho$ aus 4) und 5) eingesetzt, so findet man:

$$\mu R^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{X}{R^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{Y}{R^2}\right) + Y\frac{\partial\mu}{\partial x} - X\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0,$$

welche durch Benützung der Identität 7) in Abschnitt I, wenn in ihr $\xi\eta$ durch XY ersetzt werden, in

$$Y\frac{\partial\mu}{\partial x} - X\frac{\partial\mu}{\partial y} = -\frac{\mu H}{R^2} \tag{7}$$

übergeht, wenn H die linke Seite der Gleichung 2) abkürzend bezeichnet.

Das äquivalente simultane System von 7) ist

$$\frac{dx}{Y} = -\frac{dy}{X} = -\frac{R^2}{H}\cdot\frac{d\mu}{\mu}. \tag{8}$$

Kann hieraus μ gefunden werden, so erhält man $\xi\,\eta\,\rho$ aus 5).

Wenn

$$H = 0, \tag{8)}$$

also die Gleichung 2) erfüllt ist, so reduziert sich 8) auf

$$X dx + Y dy = 0, \qquad d\mu = 0$$

mit den Integralen

$$\alpha = c, \qquad \mu = c'.$$

Es ist daher

$$\mu = \varphi(\alpha),$$

wo φ willkürlich ist.

Heißt λ der Multiplikator von 1), so kann 4) auch in die Form gebracht werden:

$$\frac{\lambda\xi}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}} = \frac{\lambda\eta}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} = \mu,$$

woraus

$$\mu = \frac{\lambda\rho}{h}$$

oder weil

$$h\rho = 1,$$

auch

$$\mu = \frac{\lambda}{h^2}.$$

Es wird also der Multiplikator von 1)

$$\lambda = h^2\varphi(\alpha)$$

oder wenn $\varphi(\alpha)$ durch 1 ersetzt wird, was gestattet ist:

$$\lambda = h^2 = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\mu^2 R^2}$$

oder kürzer

$$\lambda = \frac{1}{R^2}.$$

Man findet außerdem

$$\xi = X.\varphi(\alpha),$$
$$\eta = Y.\varphi(\alpha).$$

Wenn also die Gleichung 2) erfüllt ist, so können die Koeffizienten von 1) geradezu für die $\xi\eta$ angenommen werden.

Nach einem bekannten Satze wird

$$\frac{1}{\lambda} = X\xi + Y\eta = X^2 + Y^2 = R^2,$$

in Übereinstimmung mit dem Frühern.

V.

Aus dem simultanen Systeme

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = d\alpha, \qquad 1)$$

welches die Zugeordneten der Bahnkurven bestimmt, folgt, unter μ eine noch unbestimmte Funktion von xy verstanden

$$d\alpha = \frac{dy - \mu dx}{\eta - \mu\xi} \qquad 2)$$

Die rechte Seite wird exakt, wenn μ der Gleichung

$$\mu^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \xi\frac{\partial \mu}{\partial x} + \eta\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

genügt.

Setzt man in die linke Seite den Ausdruck

$$\mu = -\frac{\xi}{\eta},$$

so geht sie über in

$$\left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - 2\frac{\xi}{\eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

und ist im allgemeinen von Null verschieden. Wenn aber die Gleichung 8) in Abschnitt I erfüllt ist, so ist es auch 3) und man kommt so auf einen frühern Satz in I. zurück.

Es ergibt sich aber ein neues Resultat, wenn in die linke Seite von 3) $\mu = \frac{\xi}{\eta}$ substituiert wird.

Sie nimmt dann die Form an:

$$\left(\frac{\xi^2}{\eta^2}+1\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2\frac{\xi}{\eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

und die Gleichung 3) wird befriedigt, wenn die Gleichung

$$(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2\xi\eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=0 \qquad 4)$$

besteht. Dann geht 2) über in

$$d\alpha = \frac{\eta dy - \xi dx}{\eta^2-\xi^2},$$

wo die rechte Seite exakt ist. Daraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\eta^2-\xi^2 = \rho^2$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\xi}{\rho^2}, \qquad 5)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho^2}.$$

Diese Resultate werden durch die leicht zu verifizierende nachfolgende Gleichung

$$\rho^4\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\xi}{\rho^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta}{\rho^2}\right)=$$

$$=(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2\xi\eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad 6)$$

bestätigt.

Durch Vertauschung von ξ mit η findet man hieraus

$$\rho^4\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\eta}{\rho^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\xi}{\rho^2}\right)=$$

$$=(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+2\xi\eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \qquad 7)$$

Nun ist aber die Differentialgleichung der Bahnkurven

$$\eta\,dx - \xi\,dy = 0,$$

deren Integral

$$\alpha_1 = c_1$$

sei und in

$$d\alpha_1 = \frac{\eta\,dx - \xi\,dy}{\eta^2 - \xi^2}$$

wird wegen 7) die rechte Seite exakt, wenn die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2\xi\eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0 \qquad 8)$$

erfüllt ist. Dann hat man

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -\frac{\xi}{\rho^2}. \qquad 9)$$

Wenn die Größen $\xi\,\eta$ so beschaffen sind, daß sie den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad 10)$$

so werden die beiden Gleichungen 4) und 8) gleichzeitig befriedigt und haben daher die Differentialgleichungen

$$\eta\,dy - \xi\,dx = 0, \qquad \eta\,dx - \xi\,dy = 0 \qquad 11)$$

einen gemeinsamen Multiplikator

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\eta^2 - \xi^2}.$$

Dann bestehen auch gleichzeitig 5) und 9), woraus

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= \frac{\partial\alpha_1}{\partial y},\\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

folgt.

An diese Gleichungen knüpfen sich weitgehende Analogien. Bezeichnet man mit ∇ den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

so folgt aus 12):

$$\left.\begin{aligned}\nabla\alpha = 0, \qquad \nabla\alpha_1 = 0\\ h^2 = h_1^2,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Bezeichnet man die Winkel, welche zwei zusammenstoßende Elemente der beiden, den Gleichungen 11) entsprechende Kurvenscharen mit der positiven X-Achse einschließen, durch $\varphi\ \varphi_1$, so drückt die letzte Gleichung aus, daß die Summe derselben ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist.

Die Richtungen der beiden Elemente schließen mit den nächstliegenden Achsenrichtungen gleiche Winkel ein.

Im isothermen Systeme trifft dasselbe zu und können die beiden Elemente durch Drehungen von gleicher Größe und gleichem Sinn in diese Achsenrichtungen übergeführt werden. Bei dem jetzt betrachteten Systeme werden zwei solche Elemente in die nächstliegenden Achsenrichtungen durch Drehungen von gleicher Größe, aber mit entgegengesetztem Sinne übergeführt.

Ein Beispiel für die Anwendung der vorhergehenden Sätze bieten die folgenden Ausdrücke von ξ und η dar:

$$\xi = ax^2+2bxy+ay^2,$$
$$\eta = bx^2+2axy+by^2,$$

welche den Gleichungen 10) genügen.

Aus ihnen folgt

$$\rho^2 = \eta^2-\xi^2 = (b^2-a^2)(y^2-x^2)^2$$

und findet man durch Anwendung des gemeinsamen Multiplikators der Gleichungen 11):

$$\alpha = \frac{ax+by}{x^2-y^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{bx+ay}{y^2-x^2}.$$

Zum Schlusse dieses Absatzes sei bemerkt, daß μ in der Form $\frac{Y}{X}$ vorausgesetzt, Gleichung 3) die Bedingung ist, welche erfüllt sein muß, wenn die Differentialgleichung

$$Ydx-Xdy = 0$$

die infinitesimale Transformation $\xi\eta$ gestatten soll und in der Tat ist dann in der aus 1) folgenden Gleichung

$$d\alpha = \frac{Ydx-Xdy}{\xi Y-\eta X}$$

nach einem bekannten Satze die rechte Seite exakt.

VI.

Die Bestimmung einer normalen infinitesimalen Transformation, welche eine Differentialgleichung gestattet, kann auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung für ξ oder η allein zurückgeführt werden.

Ist nämlich das Integral der Gleichung

$$Ydx-Xdy = 0, \qquad 1)$$

$$\alpha = c \qquad 2)$$

und soll 1) die infinitesimale Transformation $\xi\eta$ gestatten, so müssen letztere Größen der Gleichung

$$Z^2\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}+Z\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\xi\frac{\partial Z}{\partial x}+\eta\frac{\partial Z}{\partial y}=0, \qquad 3)$$

wo

$$Z=\frac{Y}{X}$$

genügen. Für eine normale Transformation besteht aber noch außerdem die Gleichung

$$\frac{\eta}{\xi}=-\frac{X}{Y} \qquad 4)$$

und folgt durch Elimination von ξ

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+Z\frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{(Z^2-1)\frac{\partial Z}{\partial y}+2Z\frac{\partial Z}{\partial x}}{1+Z^2}.\eta, \qquad 5)$$

welcher Gleichung das simultane System entspricht:

$$dx=\frac{dy}{Z}=-\frac{1+Z^2}{(Z^2-1)\frac{\partial Z}{\partial y}+2Z\frac{\partial Z}{\partial x}}\cdot\frac{d\eta}{\eta}. \qquad 6)$$

Zur Bestimmung von ξ findet man in ähnlicher Weise:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+Z\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{(Z^2-1)\frac{\partial Z}{\partial x}-2Z\frac{\partial Z}{\partial y}}{Z(1+Z^2)}\cdot\xi.$$

Im allgemeinen ist die Schwierigkeit, Lösungen von 5) oder der letzten Gleichung zu finden, dieselbe, wie den Multiplikator λ der Gleichung 1) aus der partiellen Differentialgleichung zu ermitteln, welcher er genügen muß.

Ein spezieller Fall, in welchem man aus den gefundenen Formeln Nutzen ziehen kann, tritt ein, wenn

$$(Z^2-1)\frac{\partial Z}{\partial y}+2Z\frac{\partial Z}{\partial x}=0. \qquad 7)$$

Dann sind die Integrale von 6):

$$\alpha = c, \qquad \eta = c',$$

also

$$\eta = \varphi(\alpha), \qquad \xi = -Z.\varphi(\alpha),$$

wo $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion von α ist und auch durch 1 ersetzt werden kann, so daß man einfacher erhält:

$$\xi = -Z, \quad \eta = 1$$

und damit den Multiplikator:

$$\lambda = \frac{X}{X^2 + Y^2}.$$

Aus 7) findet man durch Integration dieser Gleichung die folgende Form derjenigen Differentialgleichungen, welche diesen Multiplikator zulassen:

$$y = \frac{y'^2 - 1}{2y'} \cdot x + \psi(y'), \qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

wo ψ willkürlich ist.

Man erhält einfachere Formeln, wenn man eine Gleichung zur Bestimmung der Größe

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{8}$$

aufstellt.

Zunächst ergibt sich durch Benützung von 4)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}} \cdot \rho, \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} \cdot \rho \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

und wenn diese Ausdrücke in die Gleichung 3), welche man auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{X}{X\eta - Y\xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y}{X\eta - Y\xi} = 0$$

bringen kann, eingesetzt werden, so findet man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + Z\frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho \cdot \frac{\dfrac{\partial Z}{\partial y} - Z\dfrac{\partial Z}{\partial x}}{1+Z^2}. \tag{10}$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dfrac{\partial Z}{\partial y} - Z\dfrac{\partial Z}{\partial x}}{1+Z^2} &= U, \\ \frac{d\rho}{\rho} &= du, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

so geht 10) über in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Z\frac{\partial u}{\partial y} = U \tag{12}$$

und wird das zugehörige simultane System

$$dx = \frac{dy}{Z} = \frac{du}{U}. \tag{13}$$

Den Multiplikator von 1) findet man aus der bekannten Formel

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

und zwar weil es sich hier um eine normale Transformation handelt, für welche

$$h\rho = 1 \tag{14}$$

in der Form

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sqrt{X^2+Y^2}}. \tag{15}$$

Ein spezieller Fall ist nicht ohne Interesse, nämlich wenn die Koeffizienten von 1) so beschaffen sind, daß die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - Z\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

erfüllt ist.

Dann wird

$$U = 0$$

und findet man aus 13)

$$\rho = \psi(\alpha),$$

wofür man auch ρ gleich einer Konstanten oder gleich 1 setzen kann.

Ist ρ konstant, so ist es wegen 14) auch h und folglich der Normalabstand zweier aufeinanderfolgenden Kurven der Schar 2), nämlich

$$dn = \frac{d\alpha}{h},$$

ebenfalls konstant. Die Kurven 2) sind also Parallelkurven und findet man aus 9), wenn dort ρ durch 1 ersetzt wird:

$$\xi = -\frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}.$$

Für den Multiplikator von 1) ergibt sich der bekannte Ausdruck:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Sucht man die allgemeine Lösung von 16), so findet man

$$x+yZ = f(Z)$$

und daher als Differentialgleichung der betrachteten Kurven

$$x+y\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

wo f willkürlich ist.

Insbesondere wenn

$$f(Z) = Z^2$$

ist, so handelt es sich um die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} - x = 0$$

oder nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst und auf die Form 1) gebracht, um

$$\frac{y+\sqrt{y^2+4x}}{2}dx-dy=0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{y+\sqrt{y^2+4x}}{2}=p, \qquad 17)$$

so wird die letzte Differentialgleichung

$$p\,dx-dy=0$$

und der Ausdruck

$$\frac{pdx-dy}{\sqrt{1+p^2}}$$

muß exakt sein. In der Tat macht man

$$P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad Q=-1$$

und sucht das Integral aus P nach x bei konstantem y, so findet man, wenn p in 17) als neue Veränderliche statt x eingeführt wird:

$$\int P dx=\int\frac{(2p-y)pdp}{\sqrt{1+p^2}}=J,$$

wo die Integration bei konstantem y auszuführen ist.

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial J}{\partial y}=\frac{p(2p-y)}{\sqrt{1+p^2}}\frac{\partial p}{\partial y}-\int\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da aber

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{p}{2p-y},$$

so findet man

$$\frac{\partial J}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}};$$

ferner

$$\frac{\partial J}{\partial y} - Q = 0$$

und daher das Integral

$$c = \int \frac{(2p-y)pdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

wo rechts bei der Integration y als konstant anzusehen ist und nach Ausführung derselben p durch den ihm gleichen Ausdruck in 17) zu ersetzen ist.

Man kann dieses Resultat verifizieren.

Setzt man nämlich

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so ist die zu integrierende Gleichung

$$x + yp = p^2.$$

Durch Differenzieren findet man:

$$\frac{dy}{dp} + \frac{p}{1+p^2} \cdot y = \frac{2p^2}{1+p^2},$$

hieraus

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ c + \int \frac{2p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} \right\}$$

oder nach c aufgelöst und nach Elimination von p das frühere Resultat.

VII.

Für die Größen ξ, η einer infinitesimalen Transformation, welche eine Kurvenschar gestattet, kann eine Darstellung gefunden werden, welche auf folgenden Betrachtungen beruht.

Sei

$$\alpha = c \qquad 1)$$

diese Schar, dn der Normalabstand zweier aufeinanderfolgenden Kurven derselben in einem Punkte m der ersten, und zwar nach jener Richtung, nach welcher der Wert von α zunimmt

dp der Abstand eines beliebigen Punktes m' der zweiten Kurve von m, wobei die Richtung von dp durch den Winkel φ mit der positiven X-Achse bestimmt wird, so hat man, wenn ω den von dn und dp eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$dn = dp \, . \cos \omega. \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\alpha}{dp} = \frac{d\alpha}{dn} \cos \omega \tag{3}$$

als Ausdruck für den Differentialquotienten der Funktion α nach der Richtung von dp oder für die Steigung von α nach der Richtung von dp. Der erste Faktor rechts in 3) ist die Steigung in der Richtung der Normale (Normalsteigung) und ist der Maximalwert unter allen Steigungen, die um den Punkt m herum stattfinden.

Wendet man 3) auf zwei Richtungen an, welche den positiven Achsenrichtungen parallel sind, und bezeichnet den Winkel zwischen dn und der positiven X-Achse durch λ, so findet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{d\alpha}{dn} \cos \lambda, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{d\alpha}{dn} \sin \lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

aus welchen für die Normalsteigung die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} = h \tag{5}$$

folgt, in welcher h der bekannte Lamé'sche Differentialparameter ist.

Wenn der Punkt m nach m' übergeführt wird, so erhält man für die Koordinatenänderungen

$$\begin{aligned} dx &= dp \cos \varphi, \\ dy &= dp \sin \varphi \end{aligned} \tag{6}$$

und durch Benützung von 3) und 4):

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\sin\varphi},$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\sin\varphi}. \qquad 7)$$

Setzt man

$$\frac{dx}{d\alpha} = \xi,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \eta, \qquad 8)$$

so stellen die Ausdrücke

$$\xi = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial y}}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial y}} \qquad 9)$$

infinitesimale Transformationen dar, welche die Kurvenschar 1) gestattet.

Da man der Gleichung 1) auch die Form

$$\psi(\alpha) = c'$$

geben kann, so ist es gestattet, den Ausdrücken rechts in 9) noch einen Faktor hinzuzufügen, der eine Funktion von α ist. Wenn wie bisher

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$$

gesetzt wird, so folgt aus 8):

$$\rho = \frac{dp}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{dp}}, \qquad 10)$$

d. h. die Größe ρ ist der reziproke Wert der Steigung nach der Richtung von dp.

Speziell für eine normale infinitesimale Transformation erhält man, weil für eine solche dp durch dn zu ersetzen ist:

$$\rho = \frac{1}{h}$$

ein früher gefundenes Resultat.

Die ξ, η hören nicht auf, Bestimmungsstücke einer infinitesimalen Transformation zu sein, welche 1) gestattet, wenn man $\operatorname{tg}\varphi$ durch eine beliebige Funktion des Ortes ersetzt, d. h. wenn ψ eine Funktion von x, y ist und man setzt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \psi. \tag{11}$$

Dadurch gehen die Gleichungen 9) über in:

$$\xi = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \psi\frac{\partial\alpha}{\partial y}},$$

$$\eta = \frac{\psi}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \psi\frac{\partial\alpha}{\partial y}}. \tag{12}$$

Während 9) alle unendlich vielen infinitesimalen Transformationen darstellen, durch welche ein Punkt m einer Kurve von 1) in einen beliebigen Punkt der benachbarten Kurve übergeführt wird, findet bei Anwendung von 12) der Übergang von einem Punkte m zu einem Punkte der Nachbarkurve nur nach einer Richtung statt oder 12) stellt nur eine der unendlich vielen infinitesimalen Transformationen dar, und zwar nach der Richtung der Tangente einer Kurve, deren Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \psi \tag{13}$$

ist.

Da aus 12)

$$\frac{\eta}{\xi} = \psi = \frac{dy}{dx} \tag{14}$$

folgt, so stellen die Gleichungen 12) eine infinitesimale Transformation dar, welche 1) gestattet, während die Bahnkurven durch 14) bestimmt sind.

Sei

$$\alpha_1 = c_1 \tag{15}$$

die Gleichung dieser Bahnkurven.

Dann ist

$$\psi = -\frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}}$$

und findet man, wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} \tag{16}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{A}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \\ \eta &= -\frac{1}{A}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}. \end{aligned} \tag{17}$$

Auf dieselbe Art kann auch eine infinitesimale Transformation gefunden werden, bei welcher die Kurvensysteme 1) und 15) ihre Rolle wechseln, für welche also 1) die Bahnkurven und 15) die Zugeordneten darstellen.

Man setze nämlich

$$\psi = -\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}$$

und findet

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{A}\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ \eta_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial \alpha}{\partial x}. \end{aligned} \tag{18}$$

Für zwei solche infinitesimale Transformationen findet die Beziehung statt, daß die Bahnkurven der einen Zugeordnete der andern sind und umgekehrt. Zwei solche Transformationen mögen als konjugiert bezeichnet werden.

Aus den Gleichungen 17) und 18) folgt:

$$A^2 = \left(\frac{h_1}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{h}{\rho_1}\right)^2 \qquad 19)$$

und wenn ε den Winkel bedeutet, welchen die Tangenten im Schnittpunkt einer Kurve aus 1) und 15) einschließen, so findet man

$$A^2 = h^2 h_1^2 \sin \varepsilon^2 \qquad 19)$$

und daher für konjugierte Transformationen

$$\rho h = \rho_1 h_1 = \frac{1}{\sin \varepsilon}, \qquad 20)$$

für rechtwinklig konjugierte Transformationen geht daraus hervor:

$$\rho h = \rho_1 h_1 = 1,$$

in Übereinstimmung mit den vorangehenden Absätzen.

Aus der Definition konjugierter Transformationen geht hervor, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1 dx - \xi_1 dy &= 0, \\ \eta dx - \xi dy &= 0, \end{aligned} \qquad 21)$$

deren Integrale 1) und 15) sind, beziehungsweise die infinitesimalen Transformationen $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ gestatten und daher einen gemeinsamen Multiplikator

$$\lambda = \frac{1}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1} \qquad 22)$$

besitzen.

In der Tat führen 17) und 18) auf die beiden Gleichungen

$$A(\eta_1 dx - \xi_1 dy) = d\alpha,$$

$$A(\eta dx - \xi dy) = d\alpha_1,$$

so daß der gemeinsame Multiplikator A ist, wie dies auch aus 22) folgt, wenn die Gleichungen 17) und 18) benützt werden.

Die Gleichungen 20) können geometrisch durch Betrachtung des Parallelogramms abgeleitet werden, welches von je zwei benachbarten Kurven aus 1) und 15) gebildet wird.

Bezeichnet man nämlich die bestimmenden Seiten desselben, welche auf einer Kurve aus 1) und einer aus 15) abgeschnitten werden, mit ds, ds_1, mit dn, dn_1 die Normalabstände je zweier benachbarter Kurven, so ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms

$$dn\,ds = dn_1 ds_1 = ds\,ds_1 \sin \varepsilon.$$

Es ist aber

$$dn = \frac{d\alpha}{h}, \qquad dn_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1}$$

und nach 10)

$$ds = \rho_1 d\alpha_1, \qquad ds_1 = \rho\, d\alpha,$$

wodurch obige Doppelgleichung übergeht in

$$\frac{\rho_1}{h} = \frac{\rho}{h_1} = \rho\rho_1 \sin \varepsilon,$$

was nichts andres als die Gleichung 20) ist.

Wenn die Kurvensysteme 1) und 15) ein Orthogonalsystem bilden, so folgt aus 10) für den gemeinsamen Multiplikator der Gleichungen 21):

$$A = hh_1. \qquad 2?)$$

Man muß dasselbe Resultat erhalten, wenn den Gleichungen 17) und 18) die Bedingung der Orthogonalität

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}} \qquad 2?)$$

hinzugefügt wird. In der Tat findet man durch Benützung von 24):

$$A = h^2 \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}} = -h^2 \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}. \qquad 2?)$$

Es ergibt sich außerdem durch Verbindung von 17), 18) und 25):

$$\xi = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \xi_1 = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x},$$
$$\eta = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \tag{26}$$

welche Gleichungen man mit Rücksicht auf die in Abschnitt II gegebene Darstellung einer normalen infinitesimalen Transformation und nach dem Begriffe konjugierter Transformationen sofort hätte aufstellen können.

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der beiden Brüche in 24) mit $\varkappa$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \varkappa \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\varkappa \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und

$$\varkappa = \frac{h}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho}. \tag{28}$$

Da die Richtungen der beiden Transformationen 26) zu einander senkrecht stehen, so ist

$$-\frac{\xi_1}{\eta} = \frac{\eta_1}{\xi} \tag{29}$$

und wenn der gemeinsame Wert dieser beiden Quotienten μ genannt wird:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\mu\eta, \\ \eta_1 &= \mu\xi, \end{aligned} \tag{30}$$

wo

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{h}{h_1},$$

also gleich $\varkappa$ ist.

Die beiden Gleichungen 21) nehmen die Form an:

$$\mu(\xi dx+\eta dy) = 0$$
$$\eta dx-\xi dy = 0$$

und mit Hilfe von 30) ergibt sich wieder der früher gefundene Multiplikator 23), weil

$$\xi\eta_1-\eta\xi_1 = \mu\rho^2 = \rho\rho_1 = \frac{1}{hh_1}.$$

Wenn noch spezieller $\alpha\alpha_1$ ein isothermes System bestimmen, so ist

$$h_1 = h$$

und daher in den vorhergehenden Formeln

$$\varkappa = \mu = 1.$$

Die Gleichungen 27) drücken dann die Isothermität aus und für die beiden konjugierten Transformationen erhält man aus 30) die Gleichungen

$$\xi_1 = -\eta, \qquad 31)$$
$$\eta_1 = \xi,$$

welche sich leicht geometrich verifizieren lassen und auch aus 17) und 18) folgen, wenn die Gleichungen 27) für $\varkappa = 1$ benützt werden.

Die Gleichungen 21) werden jetzt

$$\xi dx+\eta dy = 0,$$
$$\eta dx-\xi dy = 0$$

und aus 30) folgt

$$\xi\eta_1-\eta\xi_1 = \rho^2,$$

daher der gemeinsame Multiplikator

$$\frac{1}{\rho^2} \qquad 32)$$

in Übereinstimmung mit 23), aus welcher Gleichung

$$A = h^2$$

folgt, und in Übereinstimmung mit den Resultaten in Abschnitt I).

Nach den Gleichungen 7) und 13) in Abschnitt I müssen wegen des gemeinsamen Multiplikators 32) ihre rechten Seiten gleichzeitig verschwinden, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

d. h. ξ, η bestimmen ein isothermes System.

Wenn hingegen die beiden Kurvensysteme 1) und 15) von der Art sind, daß die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x},$$

so folgt aus 17) und 18):

$$\xi_1 = \eta,$$
$$\eta_1 = \xi$$

und da

$$\xi\eta_1 - \eta\xi_1 = \xi^2 - \eta^2,$$

so haben die Gleichungen 21) in diesem Fall den gemeinsamen Multiplikator

$$\frac{1}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Aus den Gleichungen 6) und 7) von Abschnitt V, in welchen $\rho = \eta^2 - \xi^2$ bedeutet, folgt dann, daß ihre rechten Seiten gleichzeitig verschwinden müssen, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Es unterordnen sich auf diese Art die isothermen Systeme sowie die in Abschnitt V durch die Gleichung 12) charakterisierten Kurvensysteme den allgemeinern Entwicklungen dieses Absatzes.

Was die letztern betrifft, so ist der Flächeninhalt eines infinitesimalen Parallelogramms des von den beiden Kurvensystemen gebildeten Netzes

$$du\,ds = du_1\,ds_1,$$

woraus

$$d\alpha\,ds = d\alpha_1\,ds_1$$

folgt. Da man $d\alpha_1 = d\alpha$ setzen kann, so findet man $ds_1 = ds$ und besteht das Netz aus lauter Rhomben, was sich auch ableiten läßt, wenn man auf die in Abschnitt V an die dritte Gleichung 13) geknüpften Bemerkungen Rücksicht nimmt.

Die Bestimmungsstücke zweier konjugierter infinitesimaler Transformationen müssen einer partiellen Differentialgleichung genügen, welche auf folgende Art gefunden wird.

Aus den Gleichungen 17) und 18) folgert man:

$$\frac{\partial A\xi}{\partial x} + \frac{\partial A\eta}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial A\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial A\eta_1}{\partial y} = 0 \qquad 33)$$

oder wenn

$$u = lA, \qquad a = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad a_1 = \frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\eta_1}{\partial y} \qquad 34)$$

gesetzt wird:

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + a = 0,$$

$$\xi_1\frac{\partial u}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial u}{\partial y} + a_1 = 0.$$

Löst man diese Gleichungen nach den partiellen Ableitungen auf und dividiert durch A, so erhalten sie die Form:

$$\frac{1}{A}\,\frac{\partial u}{\partial x} = a_1\eta - a\eta_1,$$

$$\frac{1}{A}\,\frac{\partial u}{\partial y} = a\xi_1 - a_1\xi$$

oder in andrer Schreibweise wegen der ersten Gleichung 34):

$$\frac{\partial \frac{1}{A}}{\partial x} = a_1 \eta - a \eta_{11},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{A}}{\partial y} = a \xi_1 - a_1 \xi.$$

Aus diesen folgt

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_1 \eta - a \eta_{11}) - \frac{\partial}{\partial x}(a \xi_1 - a_1 \xi) = 0$$

und durch Entwicklung mit Benützung von 34):

$$\xi_1 \frac{\partial a}{\partial x} + \eta_{11} \frac{\partial a}{\partial y} - \left(\xi \frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) = 0,$$

welches die oben erwähnte partielle Differentialgleichung ist.

Wenn außer dem in Abschnitt II gebrauchten Operator δ noch der analoge

$$\delta_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial y}$$

eingeführt wird, so kann die letzte Gleichung auch auf die einfache Form gebracht werden:

$$\delta_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - \delta \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{11}}{\partial y}\right) = 0.$$

Der tägliche Gang des Luftdruckes in Berlin

von

R. Börnstein (Berlin).

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Mai 1904.)

Der folgenden Darstellung des Luftdruckes liegt eine zwanzigjährige Beobachtungsreihe (1884 bis 1903) zu Grunde, gewonnen aus den Aufzeichnungen des in der Berliner Landwirtschaftlichen Hochschule befindlichen Laufgewichtsbarographen von Sprung-Fueß. Der Gang des Apparates hat während der ganzen Zeit nur sehr kurze Störungen erlitten, und in solchen Fällen wurden die fehlenden Zahlen durch Vergleich mit den an anderen Stellen Berlins tätigen Registrierbarometern, namentlich einem solchen des Königlichen Meteorologischen Institutes ergänzt. Die Korrektionen unseres Barographen wurden durch tägliche Vergleichung mit dem Stationsbarometer der Hochschule (Fueß Nr. 157) ermittelt und außerdem die Zahlen auf Grund entsprechender Vergleichungen an das Normalbarometer des Königlichen Meteorologischen Institutes angeschlossen.

Der Barograph ist mit einer Erschütterungsvorrichtung versehen, welche in Abständen von je 3 Minuten durch Uhrwerk und Stromschluß ein zylindrisches Eisengewicht hebt und in das Quecksilbergefäß fallen läßt, um ein etwaiges Haften des Quecksilbers an der Innenwand der Barometerröhre zu verhindern.

Die Seehöhe des Instrumentes betrug bis zum 1. Juni 1901 51·31 *m*; alsdann wurde der Barograph infolge baulicher Änderungen nach einem anderen Raum gebracht und in 59·85 *m* Seehöhe aufgestellt. Um innerhalb des Jahrganges

vergleichbare Zahlen zu haben, sind demnach für die Monate Jänner bis Mai 1901 diejenigen Korrektionen angebracht worden, welche dem Höhenunterschied und den durchschnittlichen Temperaturen der einzelnen Monate entsprechen, so daß vom Anfange des genannten Jahres ab die Zahlen sich auf die höhere Aufstellung beziehen.

Ein jedes Blatt des Registrierpapiers enthält die Kurven von 10 Tagen, unterschieden durch verschiedenfarbige Tinten. Mittags wird das Uhrwerk aufgezogen, nachdem vorher mittels der an dem Apparat befindlichen Meßvorrichtung die 24 Stundenwerte des vergangenen Tages abgelesen und notiert worden sind. Die hiebei verwendete Skala zeigt die Änderungen des Luftdruckes in fünffacher Vergrößerung und es werden bei den Einzelwerten noch Hundertel Millimeter des Barometerstandes geschätzt.

Die nachfolgende Tabelle 1 enthält als Stundenwerte die Mittel aus je 20 gleichnamigen Monaten, also ist jede einzelne Zahl der Durchschnitt aus etwa 600 Einzelablesungen. Nimmt man bei den letzteren auch nur die Zehntel als frei von Ablesefehlern an, so würden die Zahlen der Tabelle erst in der vierten Stelle hinter dem Komma unsicher sein.

Zu großem Danke bin ich denjenigen Herren verpflichtet, welche als meine Assistenten an der Pflege des Barographen und der Auswertung seiner Angaben beteiligt waren. Es sind die Herren Dr. Leß, Dr. Brennecke, W. Volkmann, Dr. Linke, Dr. Steffens.

Die Zahlen der Tabelle lassen die bereits aus vielen ähnlichen Studien bekannte Natur des täglichen Ganges erkennen, und es erscheint darum unnötig, die einzelnen Monatskurven hier abzudrucken. Sie zeigen glatte Gestalt und gestatten daher die Annahme, daß unser Zahlenmaterial keinen irgend erheblichen Anteil unperiodischer Änderungen mehr enthält.

Eine scheinbare Abweichung von dem regelmäßigen Verlaufe zeigt die Februarkurve, und zwar an zwei Stellen, sofern der Wert für 5^h a. höher, derjenige für 11^h p. niederer erscheint, als einer glatten Kurvenform entspräche. Um etwaige Fehler oder Unregelmäßigkeiten herauszufinden, teilte ich die gesamte

Beobachtungszeit in zwei Hälften von je 10 Jahren und untersuchte getrennt für beide Hälften sowie außerdem für die einzelnen drei Dekaden des Februars den mittleren Verlauf des Luftdruckes von 3 bis 7^h a. und von 9^h p. bis Mitternacht. Der auffällig hohe Betrag für 5^h a. zeigte sich für beide Hälften gleichmäßig in der ersten und dritten Dekade, nicht in der zweiten; der auffällig niedrige Betrag für 11^h p. zeigte sich für beide Hälften in der zweiten Dekade, für die erste Hälfte auch in der dritten Dekade. Danach liegt an jenen beiden Stellen jedenfalls nicht eine einzelne Unregelmäßigkeit der Beobachtung oder Rechnung vor.

Die Luftdruckwerte für Mitternacht finden sich in der Tabelle doppelt, mit verschiedenen Beträgen für Anfang und Schluß des Tages. Hierin spricht sich der Unterschied des Druckes aus, welcher zwischen Anfang und Schluß eines jeden Monats stattfindet und welcher auch im vieljährigen Mittel nicht verschwinden kann, weil er einen Teil des periodischen jährlichen Ganges ausmacht.

Von den beiden Mitternachtswerten, die bei Beginn und am Ende des einzelnen Monats gemessen wurden, ist zur Durchschnittsberechnung der erstere respektive der letztere für die Mittelwerte benützt worden, welche an die Zahlen von 1^h a. respektive 11^h p. sich anschließen, so daß also die in der Tabelle unmittelbar übereinander stehenden Zahlen tatsächlich die Durchschnittswerte von lauter benachbarten Stunden darstellen. Zur Berechnung der in der untersten Zeile stehenden Monatsmittel wurde der Durchschnitt jener beiden Mitternachtswerte verwendet.

Im einzelnen lassen die Zahlen der Tabellen für den täglichen Gang die bekannten zwei Schwankungen verschiedener Größe erkennen, im Jahresmittel ein Hauptmaximum um 10^h a., Hauptminimum um 5^h p., zweites Maximum um 11^h p., zweites Minimum um 4^h a. Mit Eintritt der warmen Jahreszeit entfernen die Extreme sich von der Mittagszeit, um für die kältere Jahreshälfte von beiden Seiten wieder gegen Mittag hinzurücken. Auch das »dritte Maximum«, welches Rykatschew[1]

[1] Rykatschew, Rep. für Meteorologie, *6*, Nr. 10 (1879). Ausführliches Referat von J. Hann, Zeitschrift der österr. meteorolog. Ges., *16*, 41 (1881).

Tabelle

Stundenwerte des Luftdruckes

	750 *mm*+					
	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Mitternacht	7·8241	7·6470	4·5320	4·9310	5·5900	6·2753
1h a.	7·7466	7·6068	4·5171	4·8481	5·5327	6·2357
2	7·7481	7·5800	4·4271	4·7648	5·4870	6·1762
3	7·7000	7·4501	4·3021	4·7174	5·4348	*6·0990*
4	7·5906	7·3666	*4·2508*	*4·6800*	*5·4154*	6·1266
5	7·4993	7·3678	4·2558	4·7113	5·5254	6·2090
6	*7·4670*	*7·3426*	4·3146	4·8439	5·6430	6·2922
7	7·5624	7·4376	4·4571	4·9985	5·7676	6·3952
8	7·7632	7·6374	4·6168	5·1056	5·8500	**6·4752**
9	7·9406	7·7603	4·7292	5·1808	**5·8576**	6·4751
10	8·0700	7·8354	**4·7808**	**5·2154**	5·8480	6·4622
11	**8·0926**	**7·9094**	4·7782	5·1329	5·7668	6·4056
Mittag	7·8935	7·8151	4·7016	4·9940	5·6322	6·2883
1h p.	7·6125	7·5838	4·4683	4·8173	5·4381	6·0866
2	*7·4977*	7·4166	4·2918	4·6624	5·2830	5·9343
3	7·5386	7·3474	4·1692	4·4944	5·1316	5·8175
4	7·6009	*7·3311*	*4·0816*	4·3942	5·0232	5·7034
5	7·6697	7·4090	4·1125	*4·3599*	*4·9290*	[illegible]
6	7·7113	7·5407	4·2360	4·4083	4·9730	5·6260
7	7·7614	7·6366	4·3876	4·5797	5·1118	5·7227
8	7·8082	7·6733	4·4772	4·8247	5·3361	5·8784
9	**7·8366**	7·7198	4·5080	4·9040	5·5290	6·1368
10	7·8255	**7·7396**	**4·5218**	4·9280	5·5984	6·2204
11	7·8041	7·7352	4·5058	**4·9518**	**5·6550**	**6·2822**
Mitternacht	7·7230	7·7404	4·4642	4·9420	5·6508	6·2757
Mittel	7·7298	7·5801	4·4330	4·8166	5·4745	6·1220

1.

in Berlin 1884 bis 1903.

	750 *mm*+						
	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Mitternacht	5·8058	6·0904	7·7903	5·5984	8·4034	6·7678	6·4380
1h a.	5·7664	6·0250	7·7364	5·5811	8·2979	6·6654	6·3799
2	5·6938	5·9714	7·6574	5·4869	8·2578	6·6602	6·3259
3	*5·6192*	5·9046	7·5664	5·3820	8·1445	6·6404	6·2467
4	5·6369	*5·5575*	7·4872	5·3442	8·0584	6·5342	*6·1955*
5	5·6860	5·9002	*7·4490*	*5·3384*	8·0422	6·4532	6·2031
6	5·7628	6·0064	7·5410	5·3556	*8·0265*	*6·4443*	6·2533
7	5·8618	6·1030	7·6916	5·5295	8·1250	6·5169	6·3705
8	5·9437	6·1946	7·8346	5.7546	8·3577	6·6974	6·5192
9	**5·9594**	6·2703	7·9583	5·8658	8·4966	6·9083	6·6169
10	5·9580	**6·2884**	**7·9974**	**5·9267**	**8·6018**	**7·0722**	**6·6714**
11	5·9030	6·2214	7·9148	5·9244	8·5756	7·0142	6·6366
Mittag	5·8024	6·1202	7·8006	5·7857	8·3724	6·8318	6·5032
1h p.	5·5967	5·9433	7·6018	5·5681	8·1734	6·6116	6·2918
2	5·4734	5·8064	7·4340	5·4737	8·0386	*6·5053*	6·1510
3	5·3816	5·6946	7·3017	5·4179	*8·0262*	6·5462	6·0722
4	5·2836	5·6171	7·2364	*5·4046*	8·0634	6·6442	6·0322
5	*5.2018*	5·5593	*7·2345*	5·4688	8·1236	6·6967	*6·0500*
6	5·2022	*5·5522*	7·3061	5.6300	8·2120	6·7364	6·0946
7	5·2730	5·6701	7·4900	5·7216	8·2646	6·7954	6·2012
8	5·4315	5·8986	7·6682	5·7728	8·2877	6·8530	6·3258
9	5·6325	6·0040	7·7346	**5·8272**	**8·3285**	6·9003	6·4218
10	5·7222	6·0728	7·7712	5·8152	8·3092	**6·9098**	6·4528
11	**5·7994**	**6·1286**	**7·7923**	5·7600	8·2710	6·9059	**6·4659**
Mitternacht	5·7958	6·1232	7·7636	5·7228	8·2334	6·8443	6·4399
Mittel	5·6413	5·9549	7·6243	5·6165	8·2406	6·7229	6·3292

an vielen Orten der nördlichen gemäßigten Zone für die ersten Tagesstunden der Wintermonate nachwies, ist für die Monate November bis Februar wenigstens angedeutet und kann auch ohne Zeichnung aus den Differenzen der benachbarten Stundenwerte ersichtlich gemacht werden. Die Größe der Tagesschwankung (Differenz der Hauptextreme) liegt zwischen 0·5756 (November) und 0·9286 *mm* (Mai) und beträgt für den Jahresdurchschnitt 0·6414 *mm*.

Der jährliche Gang des Luftdruckes hat, wie man auch sonst schon weiß, in Berlin recht große Schwankungen. Die Hauptextreme sind ein Maximum im November und ein Minimum im März; daneben finden sich Maxima im Jänner, September und Juni, Minima im Oktober, Juli und Dezember. Die Hauptextreme der Monatsmittel haben einen Unterschied von 3·8076 *mm*.

Zur genaueren Untersuchung des täglichen Ganges wurde das von Lamont und anderen Forschern sowie namentlich von Hann bereits angewendete Verfahren gewählt, welches den Luftdruck als Funktion der Tagesstunden durch eine Sinusreihe von der Form darstellt:

$$y = a_1 \sin(A_1+x)+a_2 \sin(A_2+2x)+a_3 \sin(A_3+3x) + a_4 \sin(A_4+4x).$$

Darin bedeutet y den Luftdruck, welcher dem Stundenwinkel x der Sonne entspricht; y ist ausgedrückt in Millimetern und als Abweichung vom Monatsmittel aller Tagesstunden, x ist von Mitternacht ab gerechnet. Durch die vorstehende Reihe wird also der tägliche Gang als eine Übereinanderlagerung von Schwankungen dargestellt, deren Dauer 24, 12, 8, 6 Stunden beträgt, und deren jede durch eines der vier Glieder ausgedrückt ist. Die Werte a bezeichnen die Amplitude (größte Abweichung vom Mittel); die Werte A ergeben die Eintrittszeit der Schwingungsphasen für die ganz-, halb-, drittel-, vierteltägige Schwingung. In Tabelle 2 finden sich die aus der zwanzigjährigen Beobachtungsreihe für die zwölf Monate und für das Jahr berechneten Konstanten a und A.

Zum Vergleich seien die aus den ersten fünf Jahren (1884 bis 1888) der hier benützten Beobachtungsreihe für den

Jahresdurchschnitt berechneten Konstanten, welche ich bei anderer Gelegenheit veröffentlicht habe,[1] hier mitgeteilt:

$$a_1 = 0\cdot133\ mm \qquad A_1 = 344°\ 50'$$
$$a_2 = 0\cdot231 \qquad A_2 = 140\quad 2$$
$$a_3 = 0\cdot035 \qquad A_3 = 345\quad 14$$
$$a_4 = 0\cdot015 \qquad A_4 = 223\quad 32$$

Die jetzt geschehene Verwendung des vierfachen Beobachtungsmaterials hat, wie man sieht, die Werte nur wenig geändert.

Zur weiteren Kontrolle wurden die gefundenen Konstanten benützt, um für jeden Monat die 24 Stundenwerte zu berechnen und diese mit den entsprechenden Beobachtungswerten zu vergleichen. Mit Rücksicht auf die für jeden Monat vorhandene Zahl der Beobachtungswerte $m = 24$ und die Zahl der berechneten Konstanten $n = 8$ wurden nach der Formel

$$\sqrt{\frac{\Sigma\,(y_{\text{beob.}} - y_{\text{ber.}})^2}{m-n}}$$

die »mittleren Fehler« berechnet und dafür folgende Beträge gefunden:

Jänner	0·02515 mm	Juli	0·02006 mm
Februar	02533	August	02415
März	02559	September	01519
April	02301	Oktober	02395
Mai	02242	November	02421
Juni	01995	Dezember	02261

Jahr: 0·01305.

Im Anschluß an diese Berechnungen wurden entsprechende Zahlen für den Temperaturgang hergeleitet. Leider begannen die Aufzeichnungen des auf dem Dache der Landwirtschaftlichen Hochschule aufgestellten Thermographen erst später als diejenigen des Barographen, und es war daher nicht

[1] Meteorolog. Zeitschrift, 8, 168 (1891). Dort ist auch die Berechnungsweise kurz angegeben; die Werte von A_1 und A_3 mußten durch Vermehrung um 180° der hier gebrauchten Bezeichnung ($x = 0$ für Mitternacht) angepaßt werden.

Tabelle

Harmonische Konstituenten des täglichen Ganges

$x = 0$ für

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
	mm	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
a_1	0·022 52	0·011 75	0·102 55	0·192 52	0·282 67	0·294 74
a_2	182 86	230 84	245 77	275 95	260 24	227 82
a_3	127 15	080 13	059 03	009 72	045 29	044 02
a_4	053 27	019 70	025 53	023 17	010 46	009 49
A_1	247°14'16"	194° 0'38"	331°19'21"	349°46' 0"	357°45'30"	357°51' 4"
A_2	144 3 9	137 17 21	141 44 36	144 33 36	142 58 6	136 22 47
A_3	345 50 18	334 26 16	330 31 37	221 38 32	159 31 35	149 39 32
A_4	207 51 55	115 50 28	4 26 12	315 8 18	241 47 15	214 34 43

Tabelle

Harmonische Konstituenten des täglichen Ganges

$x = 0$ für

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
a_1	1°025	1°586	2°433	3°518	3°963	3°777
a_2	0·2877	0·4607	0·6939	0·5220	0·3310	0·3451
a_3	0·1100	0·1342	0·1276	0·2433	0·3214	0·3016
a_4	0·0300	0·0012	0·1486	0·0688	0·0315	0·0772
A_1	209°11'	210°41'	209°13'	217°19'	223°11'	224°27'
A_2	33 30	31 57	54 53	66 39	104 52	124 23
A_3	200 21	212 57	78 28	4 10	21 49	29 48
A_4	27 15	6 42	118 58	210 34	336 38	24 34

2.

des Luftdruckes in Berlin 1884 bis 1903.

Mitternacht.

Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
mm	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
0·253 93	0·186 92	0·136 29	0·052 60	0·040 79	0·062 92	0·111 66
208 34	234 37	271 00	256 22	192 15	204 43	231 61
035 97	018 63	039 37	063 65	114 42	098 00	037 02
011 86	012 68	025 90	007 64	024 24	069 87	013 54
357°38' 4"	356°20'34"	1°38'22"	213°54'27"	297°29'11"	176°29'38"	351° 0' 7"
133 32 33	137 12 23	140 47 9	152 45 22	147 5 59	146 51 24	142 19 10
128 50 51	135 53 23	341 21 48	351 3 27	351 44 51	352 18 41	349 39 39
203 36 34	259 12 25	310 6 19	207 24 23	223 46 42	197 7 34	224 32 47

3.

der Temperatur in Berlin 1890 bis 1897.

Mitternacht.

Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
3°536	3°483	3°243	2°137	1°256	0°7669	2°560
0·3053	0·4536	0·7168	0·6380	0·5201	0·2760	0·3989
0·2627	0·2834	0·1818	0·1454	0·0884	0·0982	0·0985
0·0650	0·0825	0·1419	0·0803	0·0362	0·0486	0·1629
223°58'	221° 9'	222°44'	219°26'	217°23'	214°44'	219°53'
100 10	65 3	56 21	41 4	49 28	36 28	57 28
20 46	17 15	344 34	308 2	193 46	206 50	1 48
4 25	113 56	206 30	236 8	3 58	5 25	354 26

möglich, die am gleichen Orte gewonnenen Beobachtungsreihen des Luftdruckes und der Temperatur auch für die gleiche Zeitdauer zu benützen. Ich verwendete eine schon früher[1] veröffentlichte achtjährige (1890 bis 1897) Reihe stündlicher Temperaturwerte, die von einem Fueß'schen Thermographen geliefert waren, und berechnete danach die harmonischen Konstituenten des täglichen Temperaturganges, wie sie in Tabelle 3 wiedergegeben sind. Hier wie auch in den Zahlen der Tabelle 2 ist der Unterschied zwischen Anfang und Ende des Tages (respektive Monats) nicht berücksichtigt worden, sondern gemäß der Natur der verwendeten Sinusreihen in jedem Monat nur ein Wert für Mitternacht (derjenige vom Ende des Tages) benützt und auf eine Ausgleichung verzichtet worden.

Von besonderem Interesse dürfte der jährliche Gang dieser Konstanten und die Vergleichung der für Druck und für Temperatur gefundenen Einzelnheiten sein. In Fig. 1 bis 4 sind die Werte je zweier Konstanten im Jahreslauf für beide meteorologische Elemente vereinigt. Deutlicher vielleicht, als es in den Beobachtungsergebnissen einzelner Stationen bisher hervortrat, jedoch in voller Übereinstimmung mit den klassischen Arbeiten von Hann sehen wir von den Konstanten des Luftdruckes die Amplitude a_1 der ganztägigen Schwankung sehr ähnlich wie die Lufttemperatur verlaufen, während die halbtägige Amplitude a_2 zweimal im Jahre schwankt und ihre Maxima zur Zeit der Nachtgleichen hat. Dabei ist a_1 nur in den Monaten Mai bis Juni größer, sonst erheblich kleiner als a_2. Die dritteltägige Schwankung hat eine Amplitude a_3 von durchschnittlich 0·037 *mm* (nach Hann[2] zwischen 0·02 und 0·05 *mm*); ihr Hauptmaximum liegt im Winter, das zweite Maximum im Sommer, die Minima etwa zur Zeit der Nachtgleichen, und ungefähr mit dem Eintritt dieser Minima kehrt die Phasenzeit (A_3) sich um. Die Werte des halbtägigen Phasenwinkels A_2 schwanken nur wenig um einen im zweiten Quadranten liegenden Mittelwert.

---

[1] R. Börnstein und E. Leß, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 321 (1898).
[2] Hann, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 385 (1898).

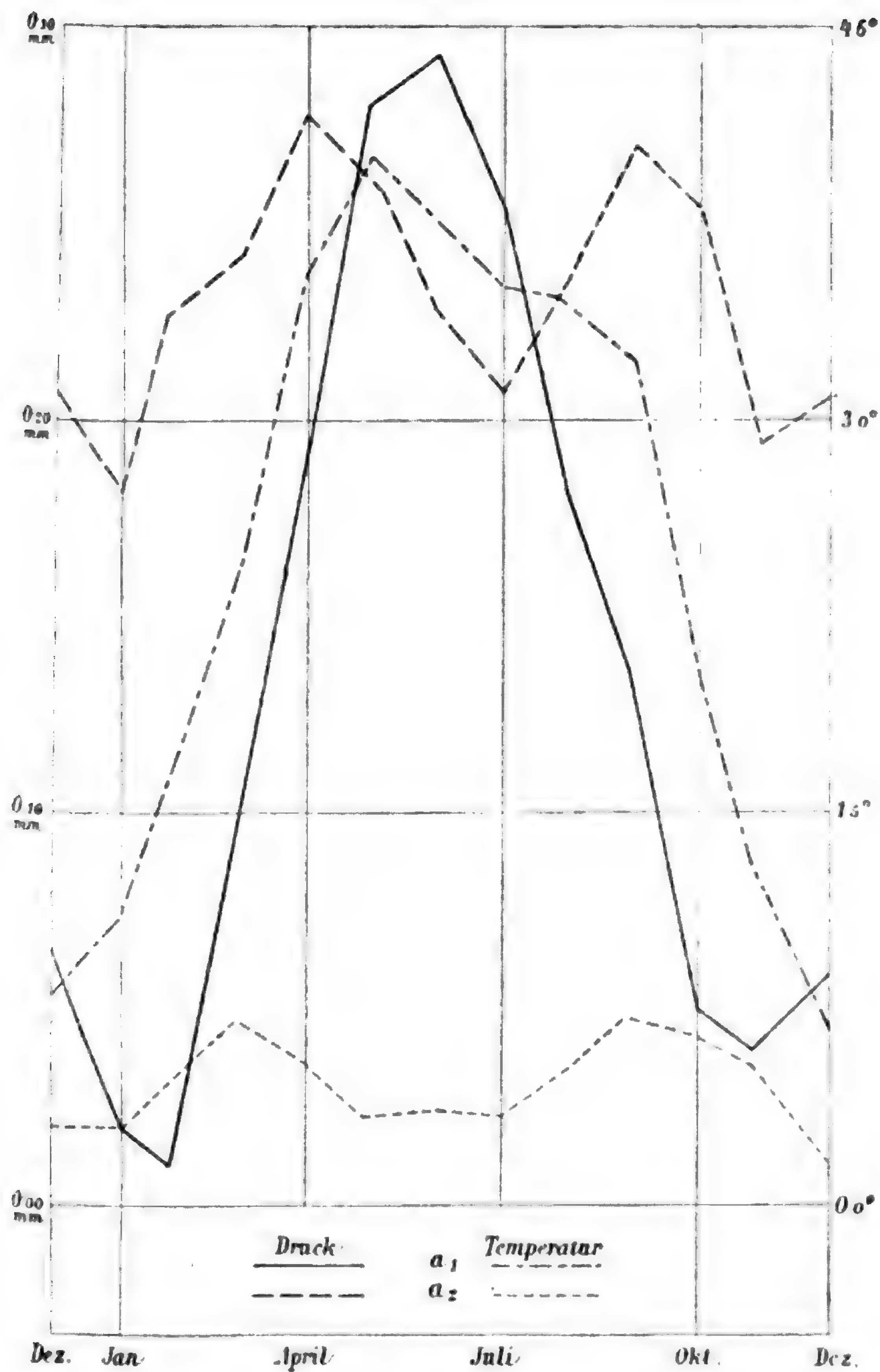


Fig. 1.

Amplituden der ganz- und halbtägigen Schwankung.

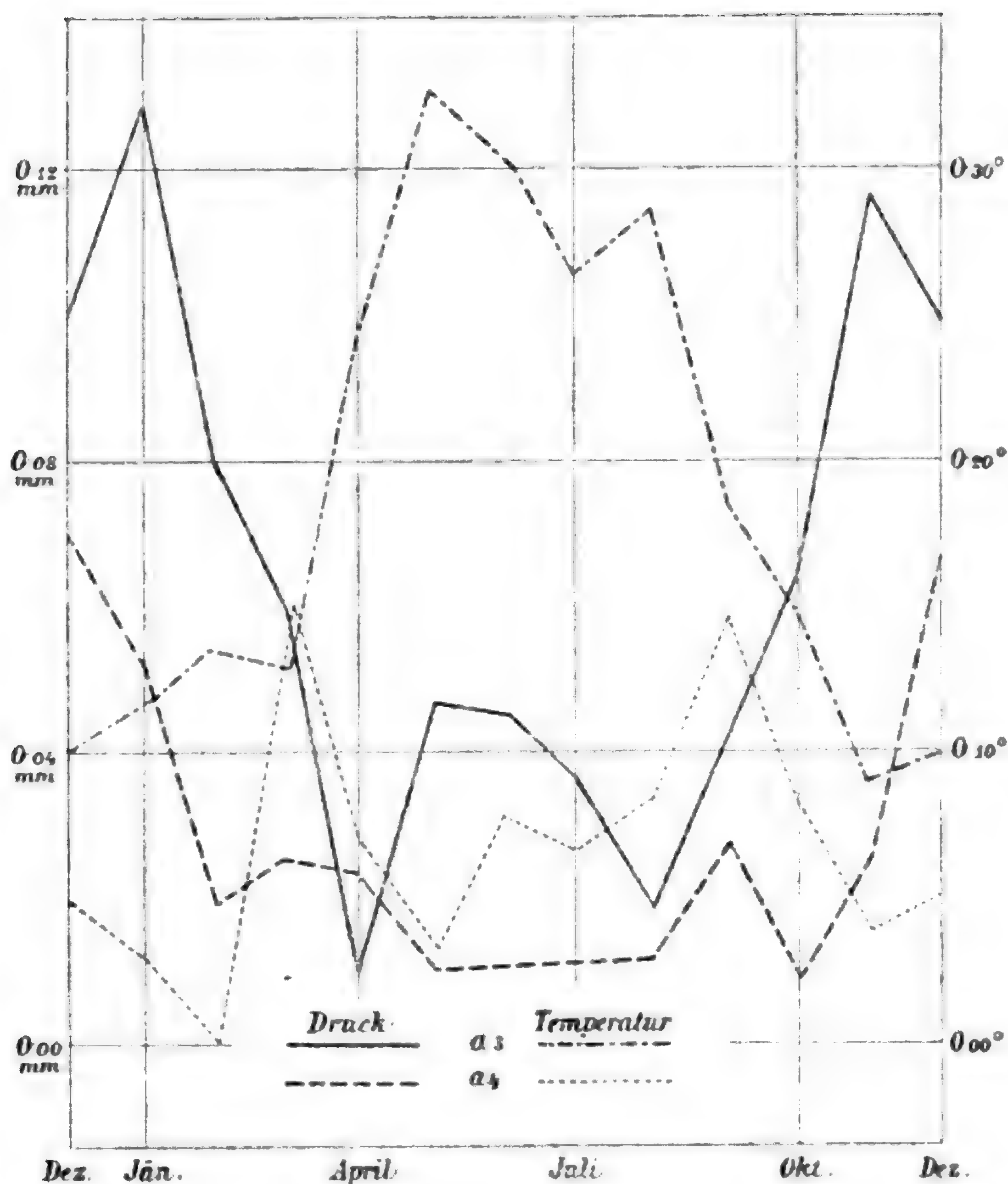


Fig. 2.

Amplituden der drittel- und vierteltägigen Schwankung.

Vergleicht man hiemit die harmonischen Konstituenten des täglichen Temperaturganges und ihre jährlichen Änderungen, so finden sich folgende Tatsachen:

Die Amplituden a_1 zeigen bei beiden Elementen sehr ähnlichen Gang, Maximum (respektive Hauptmaximum) im Sommer, Minimum im Winter.

Auch die Amplituden a_2 haben nahezu gleichzeitige Extreme, nämlich Maxima zur Zeit der Nachtgleichen und das

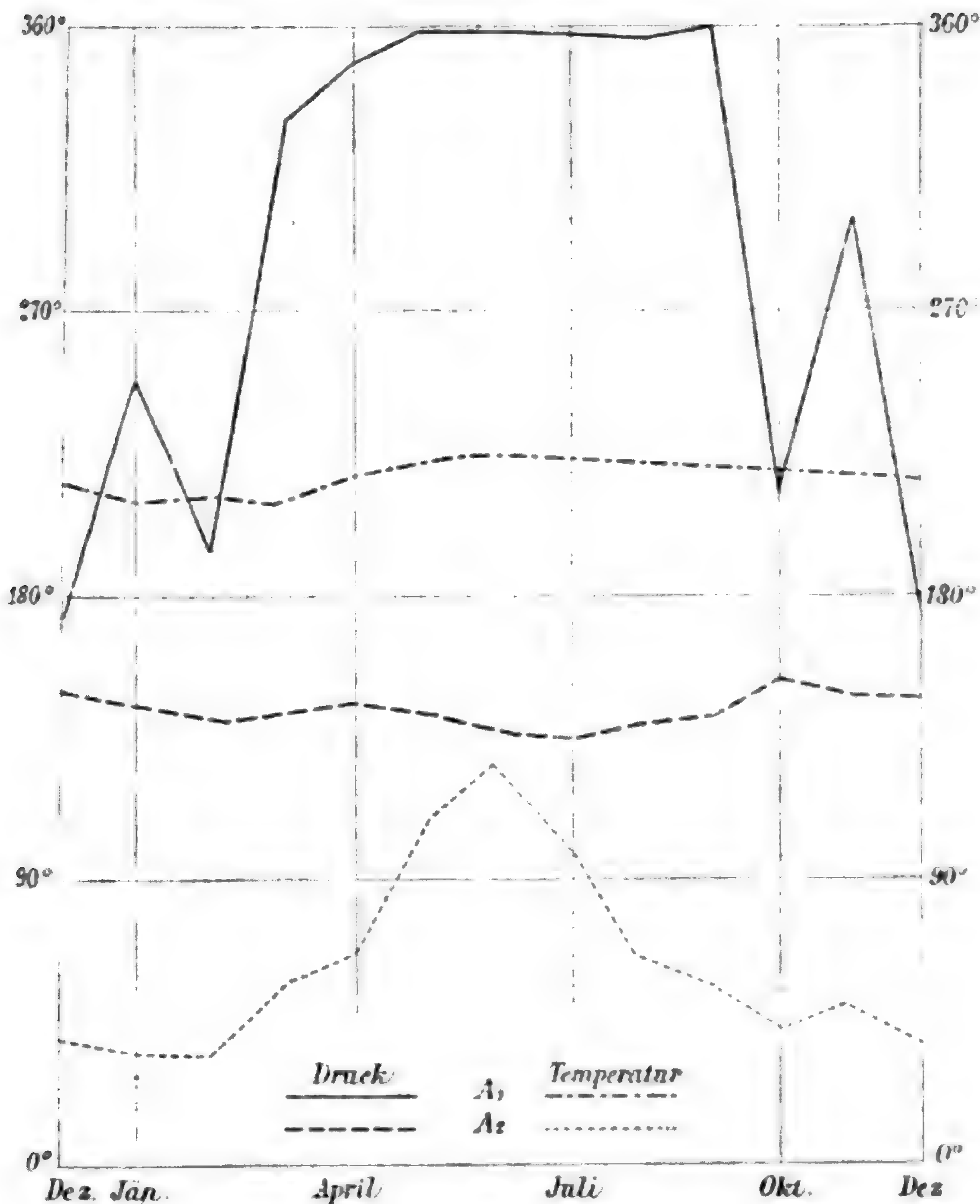


Fig. 3.

Phasenwinkel der ganz- und halbtägigen Schwankung.

Hauptminimum im Winter. Während aber beim Luftdruck der Wert von a_2 nur von Mai bis Juli kleiner, sonst erheblich größer und im Jahresmittel sogar doppelt so groß ist wie a_1, ist bei der Temperatur durchgängig a_2 viel kleiner und beträgt im Jahresmittel nur etwa ein Sechstel von a_1.

Bei a_3 ist bemerkenswert, daß in der warmen Jahreszeit das Hauptmaximum für Temperatur mit dem sekundären

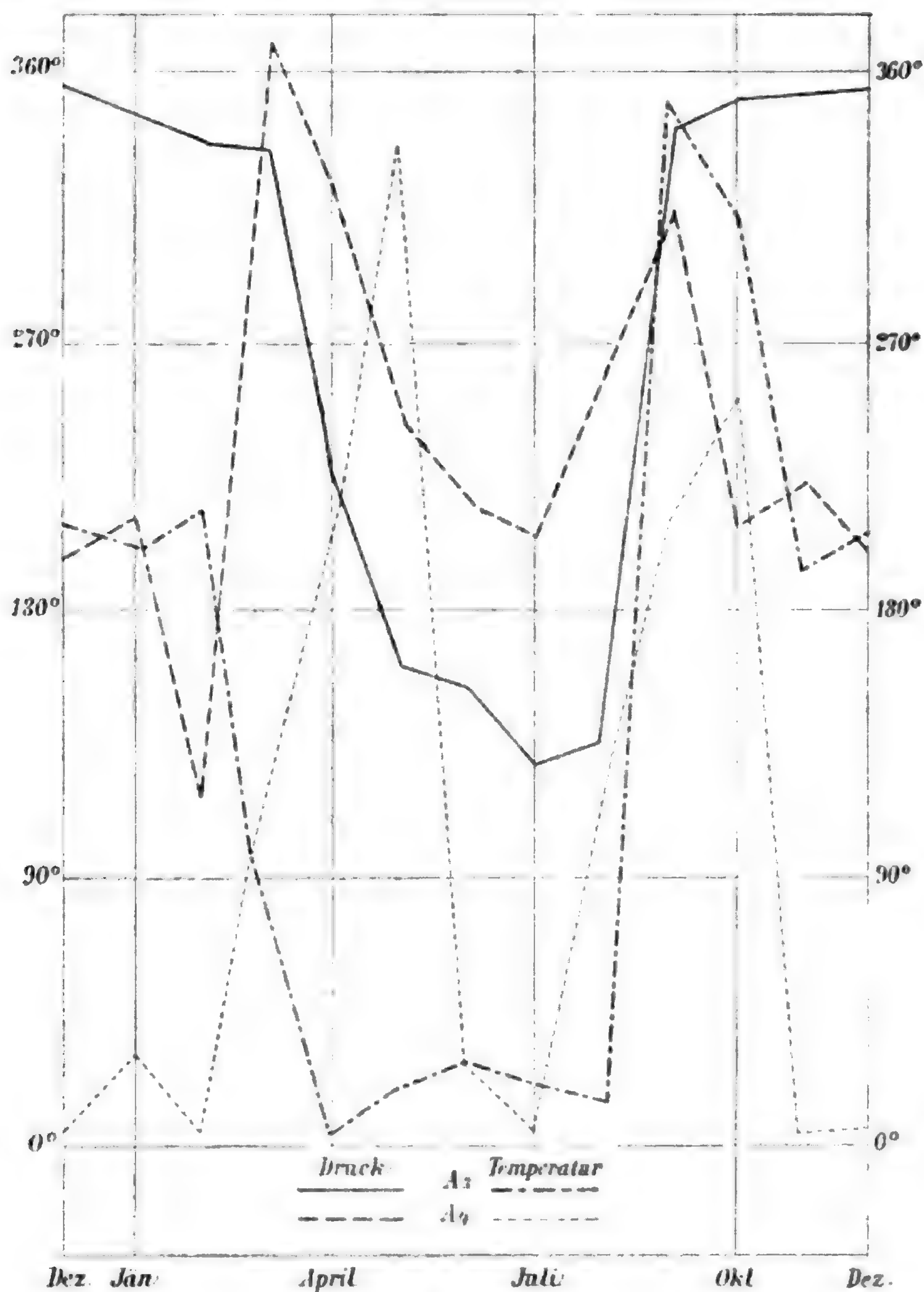


Fig. 4.
Phasenwinkel der drittel- und vierteltägigen Schwankung.

Maximum für Druck zusammenfällt, und auch bei a_4 ist Ähnliches zu finden.

Von den Phasenzeiten zeigt A_1 für Temperatur und A_2 für Druck sehr geringe Jahresschwankungen, wie bereits bekannt, während die ganztägige Druckschwankung und die

halbtägige Temperaturschwankung im Sommer früher als im Winter auftreten. Die beiden Kurven für A_3 verlaufen recht gleichartig, die dritteltägige Schwankung tritt nämlich in den meisten Monaten für Temperatur etwa drei Stunden später als für Druck auf. Mehrfache gleichsinnige Änderungen erkennt man auch im Verlauf der beiden Kurven für A_4.

Eine physikalische Deutung aller dieser Einzelnheiten zu suchen, dürfte verfrüht sein, so lange wir noch gar nicht zu beurteilen vermögen, welche der genannten Besonderheiten örtlicher Natur sind und welchen ein allgemeiner Charakter zukommt. Erst die Feststellung der entsprechenden Beobachtungstatsachen aus anderen, durch Lage und Klima recht verschiedenen Orten wird hierüber Aufschluß gewähren können, und namentlich in Betreff der drittel- und vierteltägigen Schwankungen muß die Beibringung weiteren Erfahrungsmaterials abgewartet werden. Dagegen ist es vielleicht nicht zu kühn, einige Erwägungen über die ganz- und die halbtägige Schwankung des Druckes an die Vorführung der Berliner Beobachtungsreihe zu knüpfen. Von der ganztägigen Druckschwankung weiß man längst, daß sie große örtliche Verschiedenheiten aufweist. Während aber die Messungsergebnisse zahlreicher Orte und auch die unsrigen recht wohl mit der Annahme vereinbar erscheinen, daß der tägliche Temperaturgang es sei, dessen Einwirkung in der ganztägigen Luftdruckschwankung zu erblicken ist, fand man es bisher bedenklich, auf den gleichen Ursprung auch die halbtägige Druckwelle zurückzuführen. Denn diese zeigt in Amplitude und Phase so wenig Zusammenhang mit örtlichen Temperaturverhältnissen, daß man ihr kosmischen Ursprung zuzuschreiben versuchte. In der Tat legt die Gleichmäßigkeit, mit welcher im Barometergange zahlreicher Orte diese halbtägige Schwankung auftritt, die Annahme einer außerirdischen Ursache nahe genug. Durch solche Erwägungen und die Erkenntnis, daß die Größe der halbtägigen Druckschwankung ganz allgemein vom Äquator an gegen Nord und Süd abnimmt, sah sich Lamont[1] zu der Annahme geführt, »eine der Gravitation analoge Kraft der

[1] Lamont, Pogg. Annalen, *109*, 90 (1860).

Sonne« erzeuge die doppelte tägliche Barometerschwankung, und zwar »eine elektrische Anziehung der Atmosphäre durch die Sonne«. Später gelangte Hann[1] zu der Hypothese, daß die Wärmewirkung der Sonne auf die oberen Schichten der irdischen Atmosphäre die Doppelschwankung erzeuge.

Bei diesen Erklärungsversuchen besteht aber die Schwierigkeit, daß nicht nur die einzelnen Glieder der Sinusreihe, durch welche man den täglichen Gang des Luftdruckes darstellt, auf verschiedene physikalische Ursachen zurückgeführt werden, sondern daß jede dieser Ursachen auch eine Wirkung haben muß, deren Verlauf einer Sinuswelle sehr nahe entspricht. Trotz dieser Bedenken erschien jene Auffassung geboten, solange man nicht auf andere Art den Gegensatz der ganz- und der halbtägigen Schwankung zu deuten und namentlich der Tatsache gerecht zu werden vermochte, daß die Amplitude a_2 für Druck erheblich größer als a_1 und ebenso wie der Phasenwinkel A_2 von örtlichen Verhältnissen kaum abhängig ist, während vom täglichen Temperaturgange Ähnliches durchaus nicht bekannt ist. Eine einfachere Anschauung wurde eingeleitet durch eine von Sir William Thomson[2] (Lord Kelvin) herrührende Bemerkung, welche im Anschluß an Laplace'sche Betrachtungen ausspricht, daß man für Untersuchungen der vorliegenden Art die Atmosphäre als ein Ganzes betrachten und die freien Schwingungen, deren sie fähig ist, herleiten müsse. Dann würde wahrscheinlich gefunden werden, daß die Dauer solcher freier Schwingungen viel näher bei 12 als bei 24 Stunden liege und daß also durch verhältnismäßig geringe Temperaturschwankung eine halbtägige Druckschwankung von größerem Betrage als die ganztägige erzeugt werden könne.

Dieser fruchtbaren Anregung folgend, hat Margules[3] es unternommen, rechnungsmäßig die Schwingungsdauer der

---

[1] Hann, Zeitschrift der österr. Ges. für Meteorologie, *16*, 50 (1881) (Besprechung von Rykatschew's Arbeit).

[2] Sir William Thomson, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, *11*, 396 (1882), Sitzung vom 16. Jänner 1882. Die betreffende Stelle ist wörtlich angeführt bei Hann, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 364 (1898).

[3] M. Margules, diese Sitzungsber., *99* (IIa), 204 (1890); *101* (IIa), 597 (1892); *102* (IIa), 11, 1369 (1893). Einen ausführlichen Bericht über diese Arbeiten lieferte Trabert, Meteorolog. Zeitschrift, *20*, 481, 544 (1903).

Atmosphäre zu bestimmen und gelangt zu dem Ergebnis, daß mit Berücksichtigung der Erddrehung und der Luftreibung die Dauer einer freien atmosphärischen Schwingung sehr nahe bei 12 Stunden liegt, während die sonst noch möglichen Schwingungen Perioden haben, die von 24stündiger Dauer weit entfernt sind. Finden nun regelmäßige Erschütterungen der Atmosphäre statt, so wird diejenige von ihnen, deren Zeitfolge mit der Dauer einer möglichen freien Schwingung übereinstimmt, sehr viel stärker auftreten und fortgepflanzt werden als alle anderen, für welche jene Bedingung nicht zutrifft. Während Erschütterungen der letzteren Art nur erzwungene Schwingungen erzeugen, fällt in jenem Falle die erzwungene mit der freien Schwingung zusammen.

Wendet man diese Betrachtungen auf die vorstehend mitgeteilten Berliner Beobachtungen an und versucht insbesondere zwischen den ganz- und halbtägigen Schwankungen der Temperatur und denjenigen des Druckes einen ursächlichen Zusammenhang zu ergründen, so ergibt sich folgendes:

Die ganztägige Schwankung der Temperatur tritt im Sommer viel stärker als im Winter auf. Eine hiedurch erzeugte Druckschwankung müßte im Sommer gleichfalls größer sein als im Winter und ihr Betrag müßte demjenigen der örtlichen Temperaturamplitude ungefähr entsprechen. Da dies in Wirklichkeit durch vielfache Erfahrung sich ergeben hat, sieht man in der ganztägigen Druckwelle eine Äußerung des täglichen Temperaturganges der unteren Luftschichten.

Die gleiche Meinung in Betreff der halbtägigen Druckschwankung auszusprechen, hat man bisher Anstand genommen, weil diese so viel größer als die ganztägige Welle und überdies unabhängig von örtlichen Verhältnissen auftritt. Aber die vorerwähnten Rechnungsergebnisse von Margules berechtigen uns zu der Meinung, welche Hann[1] in die Worte kleidet: »Es würde demnach eine ganz geringe halbtägige Temperaturwelle genügen, um eine sehr große Druckwelle derselben Periode zu erzeugen.« Denn, wie ein Pendel durch Erschütterungen im Takte der eigenen Schwingungsdauer viel

---

[1] Hann, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 368 (1898).

stärker bewegt wird als durch solche von irgend einer andern Zeitfolge, so müssen auch diejenigen atmosphärischen Erschütterungen die stärksten Schwankungen hervorrufen, welche im Takt einer möglichen freien Schwingung der Atmosphäre erfolgen. Hienach ist der Gegensatz der kleinen thermischen und der großen Druckschwankung von halbtägiger Dauer kein Hindernis mehr für die Annahme eines ursächlichen Zusammenhanges beider Vorgänge, und auch die Unabhängigkeit von örtlichen Zuständen, welche in der Größe und Eintrittszeit der halbtägigen Druckschwankung so deutlich erscheint, kann als eine Bestätigung der Auffassung dienen, welche jene Schwankung als eine von der ganzen Atmosphäre ausgeführte und den Erdball regelmäßig umkreisende Schwingungsbewegung ansieht. Eine weitere Bestätigung würde man als gegeben erachten können, falls die zeitlichen, vom Jahreslauf bedingten Änderungen im Betrage jener beiden halbtägigen Schwankungen gleichartigen Verlauf zeigten, und dies trifft bei den vorstehend mitgeteilten Berliner Beobachtungsergebnissen tatsächlich zu. Wie in Fig. 1 ersichtlich, hat die halbtägige Amplitude a_2 für Druck wie für Temperatur zwei Maxima etwa zur Zeit der Nachtgleichen, dazwischen zwei Minima. Aus den Erscheinungen eines einzigen Ortes darf man natürlich noch keine allgemeinen Schlüsse ziehen. Wenn aber von anderen Stationen gleichfalls nachgewiesen würde, daß die halbtägige Amplitude a_2 für Druck und für Temperatur parallelen Jahreslauf hat, so darf man vielleicht daran denken, auch den halbtägigen Teil der täglichen Druckschwankung auf die Temperaturverhältnisse der unteren Luftschichten zurückzuführen.

Über die Verwendung der Erdbebenbeobachtungen zur Erforschung des Erdinnern

von

Prof. Dr. **W. Láska,**

Referent der Erdbeben-Kommission.

(Mit 2 Textfiguren.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1904.**)

Unsere Kenntnis des Erdinnern ist derzeit noch sehr mangelhaft. Kaum auf einem anderen Gebiete findet man so viele und so sich widersprechende Theorien wie hier. Ein nicht unbeträchtlicher Teil dieser Ansichten verdankt sein Entstehen dem Bedürfnis, das Erdinnere gewissen geologischen, kosmogonischen oder endlich physikalischen Anschauungen anzupassen. Alle diese Theorien, vom kleinen ins große schließend, sind natürlicherweise ebenso leicht aufstellbar, als schwer zu widerlegen. Wesentlich anderer Art ist der Versuch Wiechert's,[1] möglichst frei von allen Hypothesen ein Erdinneres zu konstruieren. Das Resultat seiner Untersuchungen ist kurz folgendes: Wenn wir mit den einfachsten Mitteln arbeiten, dann genügt es, anzunehmen, daß die Erde aus einem Kern von konstanter Dichte bestehe, welcher von einem Mantel von ebenfalls konstanter Dichte umgeben ist. Es ergibt sich dann, daß der Mantel dem Volumen nach etwa gleich dem Kern ist. Die Dicke des Gesteinsmantels ergibt sich rund zu ein Fünftel des Erdradius. Die Dichte des Kernes liegt sehr nahe an 7·8, d. h. der Dichte des Eisens. Eine solche Erdinnernhypothese entspricht noch am besten den heutigen Forderungen der Astronomie und der Geodäsie.

---

[1] Göttinger Nachr., 1897, p. 221.

Bei seinen Untersuchungen konnte Wiechert noch nicht die neueren Ergebnisse der Erdbebenbeobachtungen benützen. In dieser Richtung hat nun Milne[1] Wiechert's Untersuchungen ergänzt. Milne findet unter gleicher Annahme eine viel kleinere Schalendicke, nämlich etwa ein Zwanzigstel des Erdradius. Die Grundlagen seiner Rechnungen waren aber, wie er selbst gesteht, sehr unsicher. Wir werden in der Folge die Untersuchungen Milne's bestätigen können. Die Ergebnisse der Seismologie scheinen also gegen die Wiechert'sche Ansicht zu sprechen. Nachdem aber die Grundlagen der Milne'schen Arbeit, wie in der Folge gezeigt wird, so sicher sind, daß ein Kompromiß unmöglich ist, so dürfte der Grund dieses Widerspruches in der Unmöglichkeit der Zweiteilung des Erdinnern liegen. Ein dreiteiliges Erdinnere dürfte wahrscheinlich die beiden Gegenansichten einander viel näher bringen. Theoretisch bieten sich da keine Schwierigkeiten dar, aber die Durchrechnung eines dreiteiligen Erdinnern ist, wenigstens was die Seismen anbetrifft, praktisch fast unmöglich. Es empfiehlt sich daher, das Problem schon im voraus möglichst allgemein zu fassen. Wir werden demnach vorerst das zweiteilige Erdinnere vom Standpunkte der Seismologie untersuchen, um die obige Behauptung zu beweisen und gehen dann zur allgemeinen Behandlung des Thema über.

Zu diesem Zweck erscheint es wünschenswert, die hier in Betracht kommenden Wellenformen kurz zu besprechen.

Betrachten wir das Bild eines Seismogramms, so finden wir drei sich vorzugsweise abhebende Wellenformen, welche die Anfangsphase V_1, die zweite Vorphase V_2 und endlich die Hauptbewegung B einleiten. Die neueren Beobachtungen haben dargetan, daß sich die Anfangswellen V_1 entschieden durch das Erdinnere fortpflanzen. Die Hauptphase B besteht dagegen erwiesenermaßen hauptsächlich aus Wellen, welche sich mit einer Geschwindigkeit von rund 3·3 *km*/sec längs der Erdoberfläche ausbreiten. Über die Natur der V_2-Wellen ist man noch nicht genügend im klaren.

[1] Milne, Earthquakes and other E. Mow. (1903), p. 95.

So lange keine bessere vorliegen wird, wollen wir an nachstehender Erklärung festhalten. Wenn von einem Punkt einer starren homogenen Kugel, welcher nahe ihrer Oberfläche liegt, Wellen ausgehen, so werden diejenigen Strahlen, welche unter einem Winkel θ gegen die Tangentenebene der zentralen Projektion des Erregungspunktes geneigt sind, immer innerhalb einer Kugelschale bleiben, welche durch die beiden Radien

$$R \quad \text{und} \quad (R-\delta)\cos\theta$$

bestimmt ist, wobei δ die Tiefe des Erregungspunktes und R den Erdradius bezeichnet. Diese Wellen sind es, welche sich vorzugsweise in der Phase V_2 der Fernbeben bemerkbar machen und bei den Nahebeben den Hauptteil der sogenannten Vorphase bilden.

Ihre Verbreitungsgeschwindigkeit beträgt nahezu 6 *km*/sec. Als Belege für diese in der Folge auf theoretischem Wege wiederzufindende Geschwindigkeit von zirka 6 *km*/sec führen wir die Arbeiten von Omori, Credner u. a. an.[1]

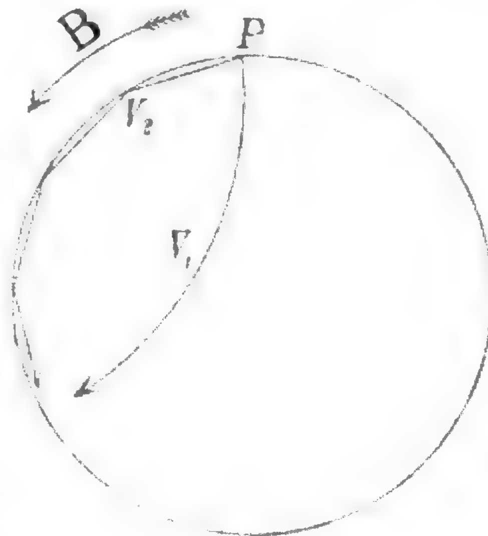


Fig. 1.

Diejenigen Wellen, welche die Hauptphase B einleiten, dürften wesentlich der Erdoberfläche angehören. Es sprechen dafür zwei wichtige Umstände: einerseits die fast konstante sphärische Verbreitungsgeschwindigkeit und zweitens die Tatsache, daß ihnen analoge Wellen bei der sogenannten seismischen Unruhe auftreten, welche nachgewiesenermaßen atmosphärischen Ursprungs ist. Die übrigen in den Seismogrammen auftretenden Unterphasen spielen in den folgenden Untersuchungen keine Rolle. Die oben genannten drei Wellenwege sind einer homogenen Kugel eigentümlich,

---

[1] Omori, Publ. of the E. J. C. in foreign languages No. 13. Tokyo, 1903, p. 140. — Credner, Der Vogtländ. Erdbebenschwarm etc. Abh. der k. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., XXVIII. Bd., VI (1904).

sie treten jedoch auch auf, sobald die Dichte nach irgend einem stetigen Gesetz gegen das Erdinnere zu- oder abnimmt. Nur in dem Falle, wenn Unstetigkeiten besonders in der Nähe der Oberfläche vorhanden sind, erleiden sie eine wesentliche Umgestaltung.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir zu einer Überprüfung der Milne'schen Arbeit übergehen. Wir erfüllen damit einen doppelten Zweck: einerseits erhalten wir eine Bestätigung der Milne'schen Angaben und zweitens einen

Fig. 2.

Näherungswert für die Verbreitungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche, welche, wie schon bemerkt, in der Folge eine sehr wichtige Rolle spielt.

Es sei P der Erregungsort des Bebens, welchen wir der Einfachheit halber als punktförmig und an der Erdoberfläche liegend annehmen. Die Erde wird als eine Kugel mit dem Radius R gedacht. Das Erdinnere möge aus zwei Teilen bestehen. Im inneren Teil einer Kugel mit dem Radius r mögen die Erdbebenwellen eine konstante Verbreitungsgeschwindigkeit v' haben. In der übrigbleibenden Kugelschale sei dieselbe

ebenfalls konstant und gleich v. Ein Erdbebenstrahl, von P ausgehend, möge die innere Kugel treffen unter dem Winkel i in Q. Hier wird er unter dem Winkel ε gebrochen und gelangt nach R, wo eine zweite Brechung erfolgt, welche den Strahl an den Oberflächenpunkt S führt.

Man hat demnach nachstehende, aus der Fig. 2 leicht zu entnehmende Gleichung

$$\frac{R}{v}\,\frac{\sin\sigma}{\sin i}+\frac{r}{v'}\cos\varepsilon-\frac{1}{2}T=0, \qquad 1)$$

dabei bezeichnet T die Eintrittszeit des Bebens im Punkte S.

Aus der Figur folgt weiter

$$\vartheta = 180°-2\varepsilon+2\sigma, \qquad 2)$$

wobei

$$\sin(i-\sigma)=\frac{r}{R}\sin i. \qquad 3)$$

Endlich ist nach der Analogie der Lehre von der Refraktion

$$\frac{\sin i}{\sin\varepsilon}=\frac{v}{v'} \qquad 4)$$

zu setzen. Im Antipodenpunkte des Bebens haben wir

$$\frac{R-r}{v}+\frac{r}{v'}-\frac{1}{2}T_0=0, \qquad 5)$$

wo T_0 die Eintrittszeit des Bebens im Antipodenpunkte bezeichnet.

Würden wir für ein Erdbeben die Eintrittszeiten an zwei Punkten sowie im Antipodenpunkte kennen, so hätten wir insgesamt neun Gleichungen, aus welchen die Größen

$$\begin{matrix} i_1 & \sigma_1 & \varepsilon_1 \\ i_2 & \sigma_2 & \varepsilon_2 \\ v & v' & r \end{matrix}$$

bestimmt werden könnten. Die Berechnung ist sehr mühsam, weil die Gleichungen nicht linear sind. Auch müssen die Eintrittszeiten sehr scharf bekannt sein, wenn man ein halbwegs sicheres Resultat erhalten soll.

Für den Wert $r : R$ kann leicht eine obere Grenze gefunden werden. Nimmt man an, daß die Dichte in der Nähe der Erdoberfläche etwa 3·2 beträgt sowie daß die mittlere Erddichte gleich 5·6 ist und berücksichtigt, daß nach den Untersuchungen von Stieltjes die Dichte im Erdmittelpunkte nicht viel größer als 11·8 sein kann, so ergibt sich

$$\frac{R}{r} < \sqrt[3]{\frac{11\cdot 8-3\cdot 2}{5\cdot 6-3\cdot 2}},$$

also rund

$$\frac{r}{R} < \frac{2}{3}.$$

Wenn also die Erde zweiteilig gebaut ist, so kann die Dichte der äußeren Schale maximal ein Drittel des Erdradius betragen.

Zur Durchrechnung eines Beispiels nehmen wir das Erdbeben von Caracas vom 29. Oktober 1900. Die Daten entnehmen wir der Publikation von Omori (l. c.). Die Eintrittszeit E des Bebens am Epizentrum wurde unter Annahme der von Omori (l. c.) angegebenen Geschwindigkeiten 13·6 *km*/sec, 7·2 *km*/sec und 3·4 *km*/sec berechnet. Es ergab sich aus den Stationen

	in Europa	Tokyo
aus $V_1 \ldots$	$E = 10^h\,12^m 2$	$E = 10^h\,12^m 1$
$V_2 \ldots$	$E = 10\ \ 13\cdot 0$	$E = 10\ \ 13\cdot 6$
$B \ldots$	$E = 10\ \ \ 7\cdot 6$	$E = 10\ \ \ 7\cdot 4$
Mittel	$E = 10^h\,10^m 6$	$10^h\,11^m 0$

Wir können demnach rund

$$10^h\,11^m$$

als Eintrittszeit des Bebens am Epizentrum annehmen. Damit ergibt sich

$$T_1 = 12^m 2$$
$$T_2 = 17\cdot 4$$

Die betreffenden Winkel sind

$$\text{Europa—Caracas} = \vartheta_1 = 74°\,32'$$
$$\text{Tokyo—Caracas} = \vartheta_2 = 127°\,25'$$

Die sphärischen Entfernungen sind rund

8.000 und 14.000 *km*.

Das Epizentrum befand sich wahrscheinlich nicht in Caracas selbst, die sphärischen Entfernungen dürften nach meinen Berechnungen etwas zu klein sein.

Zur Bestimmung der Zeit T_0 müssen wir jene Zeit kennen, welche der erste Erdbebenstrahl braucht, um die Erde diametral zu durchqueren. Dafür wollen wir den Wert 20^m annehmen, welcher sich den Untersuchungen von Rudolph[1] noch am besten anschließt und auch entsprechend genau die Angaben Milne's[2] darstellt. Als Resultat ergibt sich, mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Daten:

$R-r$	nahe an 500 *km*	wahrscheinlich	kleiner,
v	» » 6 *km*/sec	»	»
v'	» » 11 *km*/sec	»	größer.

Für v finden wir also genau denselben Wert, welchen die direkten Beobachtungen aus den Nahebeben liefern. Das ist das erste wichtige Resultat dieser Untersuchung, welche die Milne'schen Angaben bestätigt. Nebenbei mag bemerkt werden, daß man mit dem Wiechert-schen Radiusverhältnis

$$v > v'$$

findet, was a priori unannehmbar ist, weil die Geschwindigkeiten gegen das Erdinnere hin wachsen und nicht abnehmen. Als zweite wichtige Folgerung heben wir hervor das schnelle Anwachsen der Verbreitungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche und die langsame Zunahme gegen die Erdmitte zu, welche eine Folge der kleinen Radiusdifferenz

$$R-r = 500\ km$$

---

[1] Rudolph, Über das Erdbeben von Ceram am 30. September 1899. Gerland's Beiträge, IV, Heft 1 (1903).

[2] Milne, Eighth Report of the Committee on Seismological Inw. Southport, 1903.

ist.[1] Dabei ist zu bemerken, daß die hier erhaltenen Resultate infolge der Milne'schen Voruntersuchung ein doppeltes Gewicht erhalten, weil sie auf der Untersuchung eines Erdbebens fußen, welches Milne nicht verwendet hat und weil die hier verwendeten Apparate verschieden von jenen waren, auf welchen Milne seine Untersuchungen aufgebaut hat.

Ein drittes und vielleicht wichtigstes Ergebnis unserer Betrachtungen ist, daß die Erde unmöglich zweiteilig gebaut sein kann, d. h. daß sie nicht aus einem nahezu homogenen Kern und einer ebensolchen Schale bestehen kann. Die Wiechert'sche Erdkugel führt, wie oben gezeigt wurde — seismologisch diskutiert — zu unmöglichen Geschwindigkeiten. Die Milne'sche Erdkugel hingegen entspricht — wie aus den Grundlagen hervorgeht, welche Wiechert's Untersuchungen zu Grunde liegen — gar nicht den Erfahrungszahlen der Astronomie und Geophysik. Diese Widersprüche lassen sich durch keinen Kompromißwert von r/R heben, wie

[1] Um dieses einzusehen, nehmen wir an, wir würden das wahre Gesetz kennen, nach welchem die Geschwindigkeiten gegen die Erdmitte variieren. Das Gesetz sei

$$v = f(\rho),$$

wobei an der Erdoberfläche $\rho = 0$ anzunehmen ist. ρ stellt dann die Tiefe unter der Erdoberfläche dar, welcher die Geschwindigkeit v zukommt. Denken wir uns ferner die dieser Gleichung entsprechende Kurve gezeichnet. Unsere Untersuchungen zeigen dann, daß innerhalb des Intervalls $\rho = 0$ und $\rho = 500$ *km* der Mittelwert von v gleich rund 6 *km*/sec ist, jener des Intervalls von $\rho = 500$ *km* bis $\rho = R$, d. h. bis rund 6370 *km*, dagegen 11 *km*/sec beträgt, während er beim linearen Anwachsen von gleicher Art wie im letzten Intervall offenbar x sein müßte, wobei x aus der Proportion

$$x : 6 = R : R - r$$

zu berechnen ist. Es ergibt sich hieraus rund

$$x = 76\ km/sec,$$

also ein fast siebenmal so großer Wert. Demnach muß gegen die Erdmitte die Geschwindigkeit viel langsamer sich ändern als nahe der Erdoberfläche. Sehr schön bringt dieses Verhalten zur Darstellung die Fig. 3 in Milne's Eighth Report of the C. on S. J., welche rein empirisch auf Grund der bisherigen Beobachtungsergebnisse konstruiert wurde.

schon aus dem bloßen Anblick der Wiechert'schen Zahlentabellen hervorgeht.

Das Erdinnere stellt demnach höchst wahrscheinlich eine Kontinuität dar. In welchem Sinne, ob in Günther-Arrheniusschem oder einem andern, das wird wohl die Seismologie nie allein entscheiden können. Nehmen wir aber das Erdinnere als Kontinuum an, so ändert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen nach einem aus den Beobachtungen zu bestimmenden Gesetz. Wir haben also auf Grund der Beobachtungsdaten v als eine Funktion von r darzustellen. Man hat zu diesem Zweck entsprechende Hypothesen über das Gesetz zu machen und diese mit der Wirklichkeit zu vergleichen.

Da erwiesenermaßen v eine mit der Tiefe zunehmende Größe ist, so empfiehlt es sich, Potenzreihen anzunehmen.

Eine einfache lineare Abhängigkeit ist nach den obigen Untersuchungen nicht möglich. Man hat es also zunächst mit der quadratischen Form zu versuchen. Für diese sollen in der Folge die nötigen Formeln in aller Kürze mitgeteilt werden.

Wenn angenommen wird, daß die Erdbeben sich so verbreiten wie die Schwingungen in einer aus konzentrischen Schichten zusammengesetzten Kugel, dann lautet die Differentialgleichung der Strahlen in Polarkoordinaten wie folgt:[1]

$$d\vartheta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{n^2r^2-c^2}}. \qquad 6)$$

Dabei ist c eine Konstante und n der Brechungsindex, welcher konstant ist, wenn die Kugel aus homogenem Material besteht. Die Größe n ist als eine Funktion von r aufzufassen. Die neueren Untersuchungen über die Verbreitung der Erdbeben zeigen, daß sehr nahe

$$\frac{1}{n} = a^2-b^2r^2 \qquad 7)$$

[1] Vergl. die Arbeiten von Kummer (Berl. B., 1860), Rudzki (Beitr. zur Geoph., III, 14, 1898), Kövesligethy (Nat. Ber. aus Ungarn, XIII, 1895) und anderen.

gesetzt werden kann. Wird dieses angenommen, so geht die Gleichung 6) über in

$$d\vartheta = \frac{c(a^2 - b^2 r^2)\, dr}{r\sqrt{r^2 - c^2(a^2 - b^2 r^2)^2}}. \qquad 8)$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$d\vartheta = c\frac{dr}{r}\,\frac{\left(\frac{a^2}{r} - b^2 r\right)}{\sqrt{1 - c^2\left(\frac{a^2}{r} - b^2 r\right)^2}},$$

so ergibt sich nach einigen nunmehr leichten Transformationen das Integral dieser Gleichung zu

$$\frac{a^2}{r} + b^2 r = \frac{1}{c}\sqrt{1 + 4a^2 b^2}\cos\vartheta. \qquad 9)$$

Die Strahlenkurve ist also ein Kreisbogen, wie es eben die Theorie von Schmidt erfordert.

Um ferner die Zeit zu berechnen, welche zum Durchlaufen einer Strahlkurve erforderlich ist, haben wir das Integral

$$t = \int n\, ds \qquad 10)$$

auszuwerten. Man findet leicht, daß

$$dt = n^2 r^2 d\vartheta, \qquad 11)$$

woraus

$$dt = \frac{d\vartheta}{\frac{1 + 4a^2 b^2}{c^2}\cos^2\vartheta - 4a^2 b^2}. \qquad 12)$$

Diese Differentialgleichung ist in jedem speziellen Falle leicht auszuwerten. Die Form des Integrals hängt von den Konstanten ab. Man hat hier drei Fälle zu unterscheiden, nämlich

$$\frac{1 + 4a^2 b^2}{c^2} \gtreqless 4a^2 b^2,$$

welche den Integralformen

$$\int \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta - \cos^2\lambda_1}, \quad \int \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta - 1}, \quad \int \frac{d\vartheta}{\cos^2\lambda_2 \cos^2\vartheta - 1}$$

entsprechen. Dabei ist

$$\cos^2\lambda_1 = \frac{4a^2b^2c^2}{1+4a^2b^2} = \frac{1}{\cos^2\lambda_2}.$$

Welche von diesen drei Formen zur Anwendung kommt, wird am passendsten erst bei wirklicher Anwendung dieser Formeln entschieden werden können.

Irgend welche theoretische Schwierigkeiten existieren demnach nicht und man wird ohneweiters im stande sein, sobald nur genügendes Beobachtungsmaterial vorliegen wird, diese Theorie an der Praxis zu erproben.

Als Ausgangswerte wären nach den früheren Untersuchungen

$$a = 11 \qquad b = \sqrt{11^2 - 6^2}$$

anzunehmen. Hat man hinreichend genäherte Werte a_0, b_0 gefunden, so könnte folgender Weg eingeschlagen werden.

Man rechne zwei Hypothesen mit entsprechend angenommenen Variationen Δa, Δb, und zwar:

I. Hypothese	II. Hypothese
$a_0 + \Delta a$	a_0
b_0	$b_0 + \Delta b$

Sind dann

$$t_0 - t' \qquad t_0 - t''$$

die Abweichungen der berechneten Zeiten von der aus der Hypothese $a_0 b_0$ abgeleiteten Zeit t_0, so hat man:

$$t_0 = f(a_0 b_0)$$

$$t' = f(a_0 + \Delta a, b_0) = f(a_0, b_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)\Delta a + \ldots$$

$$t'' = f(a_0, b_0 + \Delta b) = f(a_0, b_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)\Delta b + \ldots$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) = \frac{t'-t_0}{\Delta a} + \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) = \frac{t''-t_0}{\Delta b} + \ldots$$

Sei nun t die Beobachtungszeit sowie $\partial a, \partial b$ die ihr genügenden Variationen von a und b, so hat man

$$t = f(a_0 + \partial a, b_0 + \partial b) = f(a_0 b_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)\partial b + \ldots,$$

woraus

$$t - t_0 = \frac{t'-t_0}{\Delta a}\partial a + \frac{t''-t_0}{\Delta b}\partial b + \ldots$$

folgt. Diese Gleichungen für möglichst viele Beobachtungsorte berechnet und nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, liefern die Verbesserungen

$$\partial a \quad \text{und} \quad \partial b.$$

Es möge hier noch die Bedeutung derartiger Arbeiten für das Erdinnere kurz berührt werden. Würden die Untersuchungen, welche hier angeführt wurden, zu einem positiven Resultat führen, dann hätten sie für die Erdphysik diejenige Bedeutung, welche die Entdeckung der Spektralanalyse für die Astronomie hatte. Alle bisher versuchten Wege, in das Erdinnere einzudringen, führten nämlich zu keinem Resultat. Die Hoffnungen, welche man seinerzeit auf die Untersuchung der Präzessions- und Nutationserscheinungen setzte, schlugen fehl. Auch die Gezeitenerscheinungen ergaben keine besseren Resultate. So bleibt die Seismologie als letzte Zuflucht. Soweit nach menschlicher Berechnung zu erwarten ist, werden wir auf Grund des immer zuverläßlicher werdenden Materials in absehbarer Zeit zu einer befriedigenden Kenntnis der Funktion

$$\frac{1}{n} = v = f(r)$$

gelangen. Das Problem des Erdinnern wird damit nicht gelöst sein. Wir erhalten nur ein Schema für die Art und Weise der Bewegung der Erdbebenwellen im Erdinnern. Dieses Resultat darf nicht überschätzt, aber auch nicht gering geachtet werden.

Nach einem bekannten physikalischen Gesetz besteht eine Beziehung zwischen der Verbreitungsgeschwindigkeit v im Erdinnern und der Dichte D sowie der Elastizität E. Das erste Glied dieser Beziehung kann wie folgt geschrieben werden:

$$v = c_0 \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Sollte es einmal gelingen, auf irgend einem derzeit noch unbekannten Wege D als Funktion von r darzustellen, so wäre es leicht, wenigstens in erster Annäherung ein physikalisches Schema für das Erdinnere zu konstruieren. Wir würden dadurch freilich nur ein Näherungsbild des Erdinnern gewinnen, dasselbe wird aber genau denselben Wert haben wie die Auffassung der Erdform als ein Ellipsoid. Die höchste Philosophie der Naturforschung ist eben, um ein Wort Mach's zu gebrauchen, zu wissen, daß wir genäherte Naturanschauungen ertragen müssen.

Indirekter Nachweis von Radium in den Karlsbader Thermen

von

J. Knett.

(Mit 3 Tafeln und 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Das Thermalwasser von Karlsbad enthält so geringe Mengen an Baryumverbindungen beziehungsweise an Baryt (BaO), daß selbst der chemisch-analytische Nachweis einer Spur Baryum nicht gelingt. Dennoch haben sich, wie in den beiden letzten Jahren nachgewiesen werden konnte, als Summarium dieses äußerst spurenweisen Gehaltes im Laufe der Zeit verhältnismäßig beträchtliche Mengen von kristallisiertem Baryt ($BaSO_4$) in den Quellspalten und natürlichen Wasserwegen der Thermen abgesetzt: so namentlich an der Hinteren Mühlbrunnquelle und der Unteren Orchesterquelle, auch an der Felsenquelle, im Schloßbrunnen, beim Kaiserbrunn [1] u. s. w.

Eine ausführliche Bearbeitung dieser Funde wird zu gelegener Zeit an anderer Stelle erfolgen. Es soll hier bloß über die von mir bezüglich der Radioaktivität dieser Gebilde unternommenen Versuche berichtet werden, über welche Ergebnisse bereits am 18. März d. J. ein Schreiben zur Wahrung der Priorität unter obigem Titel an die kaiserl. Akademie gesandt

[1] An dieser Quelle wurden bereits 1852 die ersten — wenige, aber große — Schwerspatkristalle aufgefunden, doch späterhin an keiner anderen Stelle mehr. Es war dies bisher der einzige Fund dieser Art in Karlsbad und demgemäß auch die einzige Angabe in der Literatur.

wurde. Die Einleitung vorliegender Druckschrift sowie die nachfolgenden Ausführungen sind im Wesen eine Wiedergabe aus diesem Schreiben.

Die Barytkriställchen der Karlsbader Thermen sind vorzugsweise nach den Brachypinakoiden, als schmale Tafeln entwickelt; Seitenlänge 2 bis 6 *mm*, Dicke $^1/_4$ bis 1 *mm*. Ihre Farbe ist einer geringen Eisenbeimengung wegen gelb. Sie lassen sich sowohl in den ältesten Absätzen der Thermen, wie auch in jüngeren Quellensedimenten nachweisen; es gelang mir sogar eines Kristalles habhaft zu werden, der sich erst in der Zeitspanne 1875 bis 1902 gebildet haben konnte. Die meisten Kristalle, viele Hunderte im Gesamtgewicht von 500 *g*, konnte ich an den beiden erstgenannten Quellen gelegentlich der jüngsten Neufassungsarbeiten (1902 bis 1904) aufsammeln.

Alle Karlsbader Baryte sind nun mehr oder weniger radioaktiv.[1] Damit ist die Existenz einer radioaktiven Substanz in den Quellabsätzen und zugleich auch indirekt in den Karlsbader Thermen nachgewiesen. Einzelne Kristalle lassen schon nach mehrstündigem Auflegen auf lichtempfindliche Trockenplatten eine deutliche Einwirkung erkennen. In ein bis zwei Tagen erfolgt die Durchstrahlung von Papier und dünnen Glimmerscheiben. In derselben Minimalzeit lassen sich auch undurchlässige Gegenstände abbilden; je länger die Exponierung, desto deutlicher natürlich das Ergebnis. Nach wenigen Tagen durchdringen die Strahlen dünne Metallblättchen (Cu, Sn, Zn, Cd, Pd etc.), nach einer Woche Porzellan und Glas von 1 *mm* Dicke. Bedeckt man die obere von zwei aufeinander gelegten photographischen Platten mit den Kriställchen, so läßt sich das Bild derselben nach 1 bis 2 Wochen in der unteren Platte hervorrufen.

Nicht alle Kristalle weisen eine gleichstarke Radioaktivität auf; manche bewirken schneller und stärker die Zersetzung der betreffenden Stelle, als andere Individuen auf derselben Platte.

Man wird hieraus schließen dürfen, daß in ihnen keine isomorphe Mischung von (Ba, Ra) SO_4 vorliegt oder wenigstens

[1] Auch gewisse rote und braune Quellocker und manche Sprudelsteine sind radioaktiv, was stets auf einen Barytgehalt zurückzuführen ist.

keine bestimmte solche, die ganze Kristallmasse zusammensetzende, vielleicht nur mechanische Einschlüsse von $RaSO_4$ an einzelnen Stellen, wiewohl sich im Dunkeln keine Spur von Selbstleuchten mit dem Auge erkennen läßt.

Auch die von den einzelnen Flächen ausgehende Wirkung ist augenscheinlich eine verschiedene; von den schmalen Makrodomenflächen findet meist eine intensivere Ausstrahlung statt, als von den Brachpinakoiden. Die direkt oder indirekt auf die Schichtseite einer lichtempfindlichen Platte flach aufgelegten Kristalle geben daher kein gleichmäßig schwarzes Abbild ihrer Gestalt, etwa wie ein Stückchen Pechblende, bei der es eine solche »Orientierung« nicht gibt, die Barytkriställchen photographieren sich vielmehr in dem Sinne quasi von selbst, als die heller bleibenden Stellen der Tafelflächen von einem dunklen Saum umgeben werden, den die Kanten beziehungsweise die schmalen Kristallflächen bewirkt haben.

Röntgenstrahlen bleiben ohne Einwirkung auf die Quellbaryte; hält man dieselben hinter den fluoreszierenden Schirm, erscheinen sie undurchlässig (dunkelbraun bis schwarz). Stundenlange Besonnung der Kristalle bewirkt keine erkennbare Phosphoreszenz.

Auf den beigegebenen Tafeln sind einige Versuchsergebnisse zur Darstellung gebracht; bevor sie des Näheren besprochen werden sollen, möge eine kurze Erörterung der photographischen Methode vorausgeschickt werden dürfen. Sie kann im allgemeinen auf zwei Arten in Anwendung kommen:

A. Belichtung, respektive Zersetzung der Stelle auf oder über welche der betreffende feste radioaktive Körper zu liegen kam und zwar durch direktes Auflegen auf die Platte oder auf ein mehr oder weniger durchlässiges Zwischenmittel (Papier, Karton, Glimmer etc.). Die betreffende Stelle erscheint nach dem Entwickeln ganz oder teilweise geschwärzt.

B. Direktes oder indirektes Auflegen eines flachen, undurchlässigen Gegenstandes auf die Platte, z. B. eines Zinn- oder Bleiplättchens beliebiger Figur oder einer Münze und Belichtung durch Belegen dieses Gegenstandes mit dem radioaktiven Körper. Es findet eine Verschleierung der übrigen

Plattenstellen durch die emittierten Becquerelstrahlen — am stärksten dem Gegenstand zunächst — statt, während dieser nach dem Entwickeln der Platte als lichtere Stelle hervortritt.

In beiden Fällen ist bei Verwendung eines und desselben radioaktiven Körpers einerseits die Schärfe der Konturen — sei es also die Gestalt des betreffenden Körpers selbst oder die des undurchlässigen Gegenstandes — anderseits die Stärke der Strahlenwirkung, abhängig von der Nähe des radioaktiven Körpers gegen die lichtempfindliche Platte sowie von der Art und Dicke des Zwischenmittels, das die Strahlen zu durchdringen haben. Die schärfsten beziehungsweise stärksten Bilder erlangt man demnach durch direktes Auflegen des radioaktiven Körpers auf die Platte.

Hier muß man aber der Einwürfe gewärtig sein, daß eine direkte chemische Reaktion zwischen der Substanz des Körpers und dem Bromsilber stattfinden könnte und dann, daß der radioaktive Körper bei dieser Versuchsanordnung schon durch sein Gewicht eine Einwirkung verursachen könnte. Beide Einwände wären, namentlich für den vorliegenden Fall, nicht stichhaltig. Die meisten im Wasser unlöslichen und gesättigte chemische Verbindungen darstellende Minerale verhalten sich in dieser Beziehung vollständig indifferent, auch wäre in dem speziellen Falle durch bloße Berührung von $BaSO_4$ und $AgBr$ keine Umsetzung denkbar, welche eine Reduktion der Silberverbindung beziehungsweise eine Schwärzung der Platte im Gefolge haben könnte. Tatsächlich ist auch beim direkten Auflegen anderer Baryte nicht die geringste Einwirkung zu erkennen, auch nicht mit solchen von weit größerem absoluten Gewicht (50 bis 150 *g*), so daß der zweite Einwand wohl ebenfalls hinfällig wird. Dieser Gegenprobe hätte es übrigens im vorliegenden Falle gar nicht bedurft, da gerade die Tafelflächen der Versuchskristalle, wie früher auseinandergesetzt, heller bleiben und der ausgeübte Druck als solcher sowie im Zusammenhalte mit der relativ kurzen Zeit (wenige Tage) gar nicht in Betracht kommen kann. Dagegen sind Körper, welche längere Zeit auf die Schichtseite der Platte vermöge ihres eigenen oder eines anderen Gewichtes drücken, im stande, eine Einwirkung hervorzubringen, die sich

aber gerade umgekehrt, in einer Schwärzung der betreffenden Druckstelle äußert.[1]

Dessenungeachtet erscheint es aus andern Gründen stets zweckdienlicher den radioaktiven Körper nicht direkt auf die Plattenschichte sondern eine Papierlage dazwischen zu geben respektive die Platte ein- oder mehrfach in lichtdichtes Papier zu wickeln und erst darauf den betreffenden Körper oder den abzubildenden Gegenstand zu legen. Freilich erfordert diese Anordnung eine merklich längere Belichtungsdauer, wodurch wohl die Schwärze, seltener aber die Schärfe des Bildes eingebracht werden kann. Je dicker das Zwischenmittel, desto länger wird die Expositionszeit zu wählen sein, da es sich nach der Methode *B* eben um eine Verschleierung der Platte, sonach auf eine gewisse Weite hin handelt und zwischen der Platte und dem radioaktiven Körper — abgesehen von dem mehr weniger durchlässigen Zwischenmittel — sich noch der abzubildende Gegenstand befindet. Soll ein nur schwach radioaktiver, fester Körper auf photographischem Wege untersucht werden, so erscheint es rätlich, die Platte mittels einer oder zweier Papierlagen zu versichern und dann nach Methode *A* zu verfahren, weil sie schneller und sicherer zum Ziele führt, während alle mit schwach radioaktiven Körpern nach dem Verfahren *B* erst nach Wochen erzielten Resultate in jüngster Zeit angezweifelt werden, insbesondre seit der Entdeckung, daß auch Ozon radioaktiv ist und hiemit die eigentliche Erklärung der Tatsache gefunden wurde, warum nach Methode *B* ähnliche Resultate in mehreren Wochen selbst mit gewöhnlicher Luft erlangt werden können.

Je dünner und scharfkantiger der abzubildende Gegenstand ist, desto mehr findet wegen der Nähe des radioaktiven Körpers eine Belichtung der nächsten Umgebung statt und desto schärfer erscheinen die Konturen des Gegenstandes, weil der »negative Schatten« entfällt; hingegen werden letztere durch die Zahl der

---

[1] So erscheinen häufig jene Stellen, wo während der Verpackung photographischer Platten Papierreiter dazwischen gesetzt wurden, nach dem Entwickeln dunkler, als die übrigen Stellen. Dies ist wohl eine lang andauernde Druckwirkung.

Papierlagen etc., die sich über der lichtempfindlichen Schichte befinden, nicht besonders beeinträchtigt, sofern sich diese Zwischenmittel glatt und ohne Falten an die Platte schmiegen. Je größer die angewandte Menge an radioaktivem Körper, desto rascher und deutlicher das Resultat.

Alle Versuche sind endlich in lichtdicht verschlossenen Behältnissen — z. B. mehrere Schachteln ineinander — in der Dunkelkammer zu belassen. Es empfiehlt sich ferner bei allen radiographischen Versuchen zur Sicherheit stets Kontrollversuche daneben vorzunehmen und zwar genau in derselben Versuchsanordnung aber ohne Verwendung einer radioaktiven Substanz.

Erläuterung der Radiographien.[1]

Tafel I. Platte *a*. Mit der lichtempfindlichen Schichtseite nach oben, darauf eine dünne Papierlage, dann die radioaktiven Körper gelegt. 2 Tage (Methode *A*). Links oben ein Häufchen Barytkriställchen vom »Ursprung« der unteren Orchesterquelle, daneben (rechts oben) größere Kristalle aus der Quellspalte der hinteren Mühlbrunnquelle. Links unten vier einzelne Kristalle von derselben Quelle, der erste und vierte sind stärker radioaktiv, als die beiden mittleren; Mitte unten: kleiner dicker Kristall mit der Makrodomenfläche nach unten, in Kork gefaßt und dieser auf ein Deckgläschen geklebt (Fig. 1). Letzteres sodann auf die Platte gelegt. Dieser Kristall ist einer der stärkst radioaktiven Karlsbader Baryte; hier ist die Wirkung infolge Durchdringens des zwar sehr dünnen Glases etwas abgeschwächt. Darunter ein Kristall vom selben Ort, aufgeklebt auf ein Glimmerplättchen und samt diesem auf die Platte gelegt; starke Ausstrahlung, besonders von einer Pyramiden- und Makrodomenfläche. Rechts unten: drei sehr schwach wirkende Mühlbrunnkristalle, in Kork gefaßt und mit den schmalen Flächen nach unten auf die



Fig. 1.

[1] Die Tafeln geben das Bild der Originalnegative wieder; es mußten daher von denselben erst Diapositive hergestellt werden, welche zur Anfertigung der Clichés dienten.

Platte gesetzt; nur stellenweise punktförmige Andeutungen einer Einwirkung.

Platte *b*. Zweimal in lichtdichtes Papier gewickelt beziehungsweise über der Schichtseite zwei schwarze Papierlagen. 10 Tage exponiert (Methode *A*). Bei α wurden *g* Barytkriställchen von der Orchesterquelle auf die Papierpackung gelegt, bei β einzelne Mühlbrunnbaryte flach aufgelegt und hochkantig aufgeklebt (Fig. 2). Alle nicht angeklebten Kristalle haben sich infolge Anstoßens in der Dunkelkammer am fünften Tage verschoben. Die Durchstrahlung einer Doppellage von lichtdichtem Papier in dieser Zeit ist keinem Zweifel unterworfen.

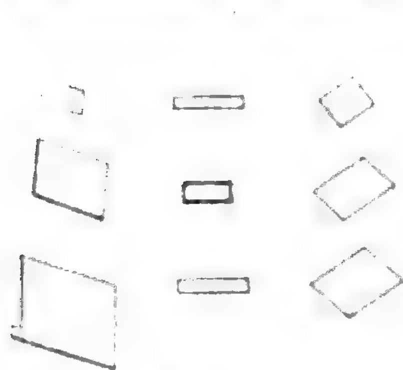


Fig. 2.

Tafel II. Platte *c*. In schwarzes Papier gewickelt beziehungsweise über der Schichtseite eine Papierlage. Darauf zwei Häufchen von Barytpulver (Mühlbrunn) im Gewichte von je 5 *g*. Expositionsdauer: 4 Tage. (Methode *A*). Die eine Probe (β) wurde vorher in einem Porzellantigel durch zehn Minuten über der Bunsenflamme geglüht. Es läßt sich keine Verschiedenheit der Wirkung erkennen.

Platte *d*. Die Versuchsanordnung entspricht einem Mittelweg zwischen Methode *A* und *B*. Exposition: eine Woche. Die Platte wurde mit der Schichtseite nach oben mit einem 1 *mm* starken, glatten, grauen Karton bedeckt und darauf an der Stelle α ein Zwanzigkronenstück gelegt; neben und über dasselbe 25 *g* Barytkristalle vom Mühlbrunnen, die durch einen darüber gestülpten Deckel einer kreisrunden Schachtel (Durchmesser 4 *cm*, Höhe 1 *cm*) gegen seitliches Verstreuen gehalten wurden.

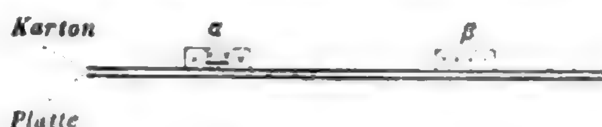


Fig. 3.

(Fig. 3). An der Stelle β die gleiche Anordnung mit 20 *g* desselben Baryts jedoch ohne Goldstück. Die Strahlen haben in dieser Zeit den Karton durchdrungen; die wirksamsten Kristalle haben sich durch schwarze Flecke markiert, in mitten der Stelle α ein hell-

gebliebener Kreis. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn der Karton durch eine 1 *mm* starke Glasscheibe ersetzt wird.

Tafel III. Platte *e*. In doppeltem schwarzen Papier verpackt, darauf ein Zwanzighellerstück und ein Achteck aus



Fig. 4.

dünnem Zinnblech. Auf diese beiden Gegenstände kamen je 5 *g* gepulverte Barytkristalle vom Mühlbrunnen, eingehüllt in Säckchen aus Zigarettenpapier (Fig. 4). 5 Tage (Methode *B*). Die Verschleierung der Platte durch die zweifache Lage von lichtdichtem Papier hindurch ist zwar nur schwach, doch deutlich merkbar.

Platte *f*. Mit der Schichtseite nach oben, darauf ein sechs- und ein achtzackiger Stern aus Cu und Sn-Blech gelegt. Methode *B* jedoch »diffuse Belichtung« durch Ankleben von je

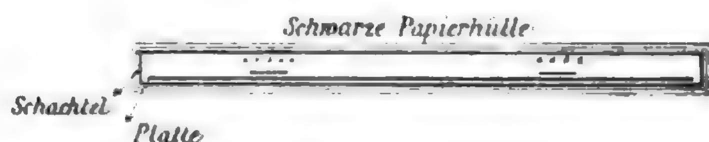


Fig. 5.

15 bis 20 *g* Mühlbrunnbaryte an den Deckel der Schachtel über den Gegenständen während acht Tagen (Fig. 5). Dasselbe Resultat.

Weitere Versuche mit Barytkristallen anderer Herkunft führten zu keinem rechten Ergebnis. Ich untersuchte die fast zentnerweise zum Absatz gelangten fingerdicken Baryttafeln aus der Riesenquelle bei Dux, die barytischen Kluftausfüllungen im Teplitzer Porphyr, im Quadersandstein von Bodenbach-Tetschen, dann mehrere ungarische und englische Vorkommnisse, konnte aber selbst bei direktem Auflegen nach zwei Tagen noch keine radioaktive Spur feststellen; erst nach vier bis fünf Tagen läßt sich eine solche, aber etwas zweifelhaft bleibende, mit Kristallsplitter von den drei erstgenannten Orten erkennen. Es gibt somit ganz oder nahezu radiumfreie, in-

aktive und anderseits radiumhältige Baryte. Letztere stellen eigentlich ein neues Mineral dar: ich bezeichne dasselbe der Kürze wegen als Radiobaryt.

Die bemerkenswerte Radiumführung der Karlsbader Baryte scheint eine Eigenheit einer bestimmten Fundstelle zu sein; immerhin ist die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß sich in der Folge nicht doch noch andere Vorkommnisse dieser Art auffinden lassen könnten.

Die Karlsbader Radiobaryte, welche allen Beobachtungen nach unzweifelhaft ein natürliches Produkt aus großen Wasserquantitäten darstellen, vermitteln uns die Kenntnis von dem freilich wieder nur minimalen Vorhandensein einer radioaktiven Substanz im Karlsbader Thermalwasser. Es ist naheliegend, daran zu denken, daß das künstliche Verfahren, Radium mit Baryumsalzen zu fällen, hier in den von den Thermen durchwanderten Gesteinsklüften auf natürliche Weise stattfindet. Wären die Karlsbader Thermen absolut radiumfrei, dann könnte es nicht zur Bildung radioaktiver Quellbaryte kommen. Aus radiumfreien Thermen kann auch kristallisierender schwefelsaurer Baryt keine Radiumspuren ausfällen beziehungsweise einschließen. Ob die Karlsbader Thermen, welche ungefähr in der Mitte der beiden Uranvorkommnisse Joachimstal und Schlaggenwald gelegen sind, zu diesen beiden Punkten in einer genetischen Beziehung stehen, läßt sich heute kaum andeuten.

Frau Curie erwähnt in ihrer zusammenfassenden Schrift, daß »alle Mineralien, die sich radioaktiv zeigen, Uran oder Thor enthalten«. Wenn nun Radium sozusagen natürliches radioaktives Baryum ist, dann muß die Unabhängigkeit des Radiums vom Uran oder Thorium auch bezüglich eines natürlichen Vorkommens (radiumhältigen Minerals) von vornherein möglich erscheinen. Mit den vorgeführten Baryten ist nicht bloß der erste Nachweis von Radium in den Karlsbader Thermen erbracht, es liegt damit zugleich das erste radioaktive Mineral vor, das kein Uran oder Thor enthält und das auch nicht an deren Lagerstätte gebunden ist.

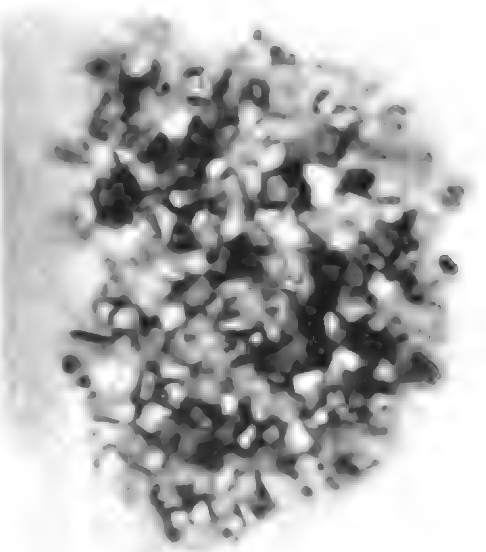
Baryum läßt sich bekanntlich radioaktivieren, wenn es mit Uran, Thor oder Aktin in Lösung gehalten und von denselben

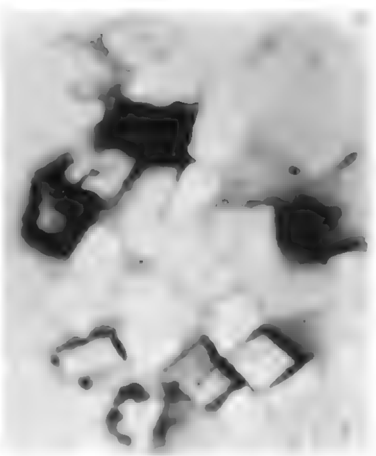
dann sorgfältig getrennt wird (induzierte Radioaktivität). Nach wiederholtem Fällen einer Uranbaryumlösung mittels Schwefelsäure bleibt das Uran in nichtaktiver Form im Filtrat, während der schwefelsaure Baryt die ganze Radioaktivität mitgerissen hat. Er weist aber keine Uran- oder Radiumlinie im Spektrum auf, verliert seine Radioaktivität nach mehreren Wochen, während das Uran dieselbe nach einigen Monaten wiedergewinnt. Wiewohl nun die Karlsbader Baryte noch nicht spektralanalytisch untersucht sind, deutet schon die ungleiche Aktivität der einzelnen Kristalle darauf, daß es sich in diesem Falle um keine derartige (induzierte) Radioaktivität handeln kann, ferner mangelt hiefür jeder Uran- oder Thorgehalt in den Karlsbader Thermen. Auch verlieren die Kristalle ihre natürliche Radioaktivität nicht.

In den Radiobaryten von Karlsbad kann aber auch kein »Radium-X« vorliegen, etwa dem Thorium-X entsprechend, denn auch dieses verliert, wie das künstlich aktivierte Baryum, nach kurzer Zeit seine angenommene Radioaktivität. Die auf Platte *a* verwendeten Kristalle von der Orchesterquelle waren gerade vor einem Jahr (März 1903) der genannten Therme entnommen worden. Ich untersuchte ferner einige Barytkristalle von der Granitwand hinter der Mühlbrunnkolonnade, die seit dem Bau dieses Objektes (1871 und 1879), also mindestens 25 Jahre allen Witterungseinflüssen ausgesetzt an dem Fels hafteten und konnte nach viertägiger Belassung auf der Platte zwar keine besonders starke, immerhin aber eine recht deutliche Einwirkung (Selbstbild, namentlich durch die Kanten beziehungsweise schmalen Flächen hervorgebracht) erkennen, welche intensiver ist, als die manch frisch gesammelter Exemplare. Es steht zu erwarten, daß auch die vor 52 Jahren beim Kaiserbrunnen aufgefundenen Kristalle ihre Radioaktivität bewahrt haben; ich konnte dieselben bisher nicht erlangen, um sie daraufhin zu untersuchen.

Karlsbad, 2. April 1904.

Taf. I a.





1 Papierlage. 2 Tage.

a.

Taf. I b.





α.

2 Papierlagen. 10 Tage.

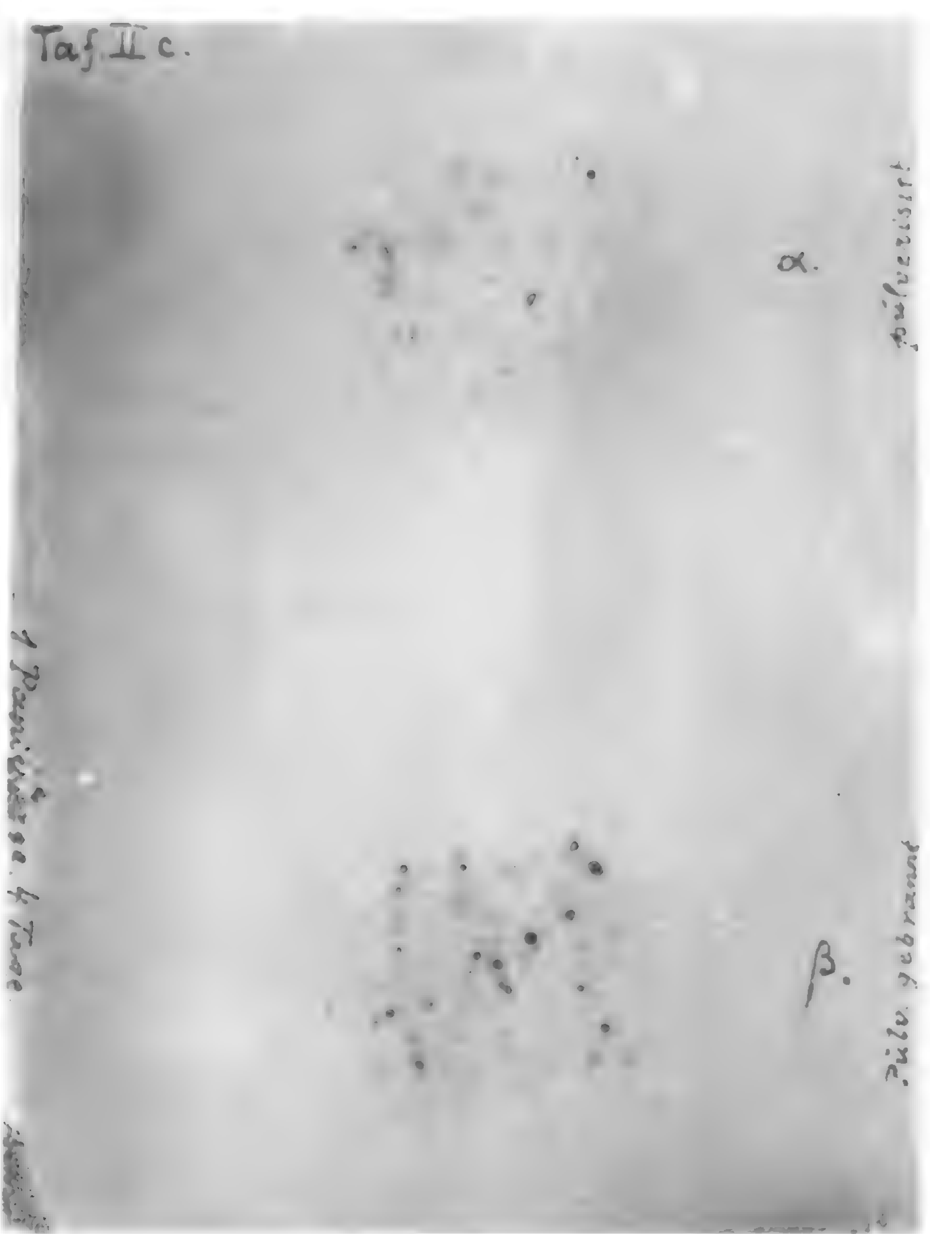


β.

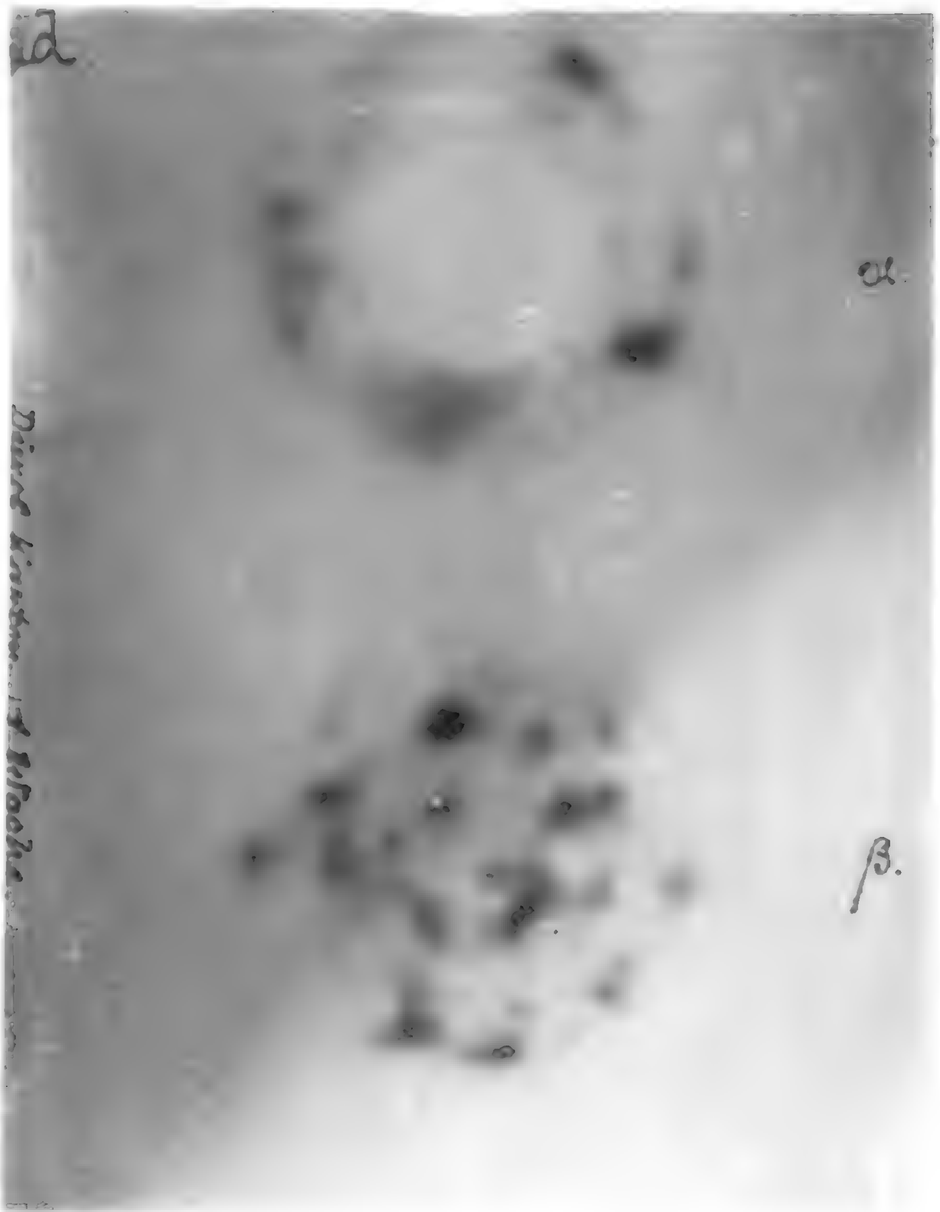
5. Tag verschoben

b.

Kunstanstalt Max Jaffé, Wien.

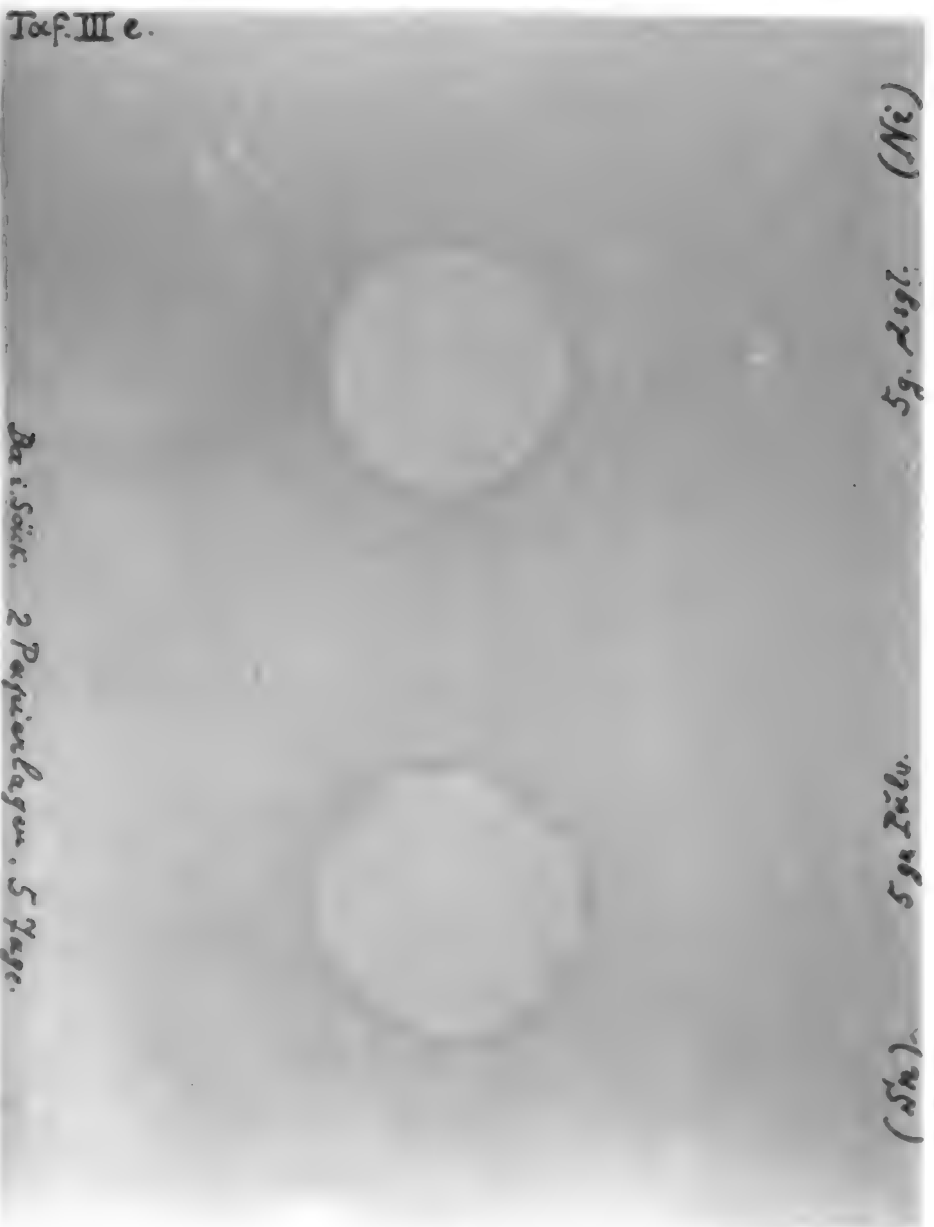


c.



d.

Kunstanstalt Max Jaffé, Wien.



e.



f.

Kunstanstalt Max Jaffé, Wien.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen I.

Über den Einfluß von Temperaturänderungen und über die durch Pechblende induzierte Aktivität

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler**.

Aus dem Institute für theoretische Physik und dem II. physikalischen Institute.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Unter den Einwirkungen, welche die Aktivität der radioaktiven Körper beeinflussen, nehmen Temperaturänderungen eine hervorragende Stellung ein. Insbesondere wurde von Frau Curie[1] bereits gezeigt, daß nach starken und dauernden Erhitzungen von Radiumsalzen dieselben in geschwächtem Zustande zurückbleiben; Rutherford und Soddy[2] haben gefunden, daß die Emanationsabgabe von Thoroxyd durch Erwärmen bis zur Rotglut gesteigert wird und der ursprüngliche Zustand sich bei Abkühlung wiederherstellt; Fanny C. Gates[3] hat dargelegt, daß das scheinbare Verschwinden von Aktivität bei durch Thor aktivierten Körpern als eine Art Verflüchtigung aufgefaßt werden kann und P. Curie und J. Danne[4] haben das Verhalten von durch Radium induzierten Metallen im Anschlusse hieran bei Erhitzung auf hohe Temperaturen beobachtet.

---

[1] M. Curie, Recherches sur les substances radioactives, 1903, p. 129.

[2] Vergl. J. J. Thomson, Conduction of elektricity through gases, 1903, p. 288.

[3] Vergl. Beibl. zu den Ann. d. Phys., *28*, p. 145, 1904.

[4] P. Curie und J. Danne, C. R., *138*, p. 748, 1904.

Gelegentlich einer anderweitigen Untersuchung von Urannitratlösung haben wir nun die Erfahrung gemacht, daß relativ geringe Temperaturschwankungen unter Umständen schon erhebliche Veränderungen hervorzurufen im stande sind und wir stellten uns daher zunächst die Aufgabe, zur Klarstellung dieser unseres Wissens bisher noch nicht behandelten Frage beizutragen.

Die Versuchsanordnung war im wesentlichen die folgende (vergl. Fig. 1). Auf den Hals eines Elster-Geitel'schen Elektroskopes mit Bernsteinisolierung (B) im Innern wurde eine

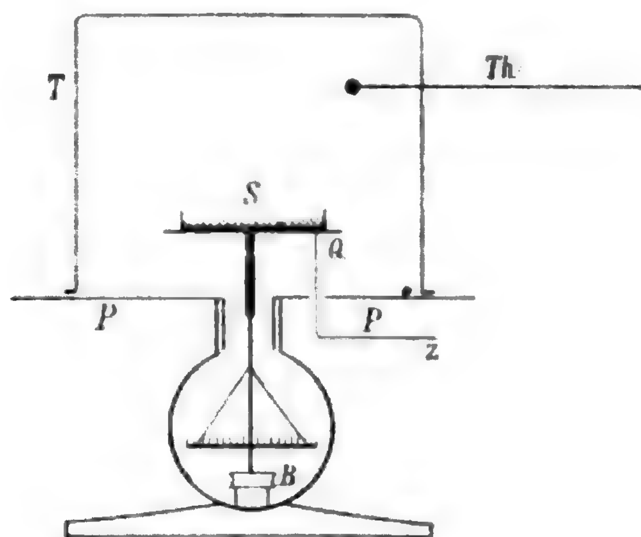


Fig. 1.

Platte (P) vom Durchmesser 14 *cm* beziehungsweise 20 *cm* aufgesetzt, während ein Tischchen (Q) ($d = 6 \cdot 5$ *cm* beziehungsweise 6 *cm*) mittels eines Stiftes an dem Blättchenträger angebracht war. Darüber wurde ein größerer Topf (T) aus Kupfer oder verzinntem Eisenblech gestülpt. Ein Schälchen enthielt die radioaktive Substanz S und stand auf dem Tischchen. Die Ladung des Elektroskopes geschah mittels eines an Q gelöteten Drahtes (Z), der durch ein kleines Loch in der Platte P herausragte. Th ist ein durch ein kleines seitliches Loch in den Topf eingeführtes Thermometer. Hiebei war die einzige Isolation der Bernstein im Elektroskope. In manchen Fällen mußte eine abgeänderte Anordnung (II) zur Verwendung kommen, wobei die Substanz am Boden eines Topfes

lag, während die mit dem Elektroskop verbundene Entladungsplatte gleichfalls durch eine Bernsteinisolation durch ein Loch des Topfdeckels eingeführt war.

Wird der Topf durch einen Bunsenbrenner erhitzt, so verändert sich im allgemeinen die Entladungsgeschwindigkeit und zwar in dem Sinne, daß sie kleiner wird.

Da sich im Verlaufe der Untersuchungen einige Mängel dieser ersten Anordnungen (I und II) herausstellten, bedienten wir uns bei späteren Messungen der abgeänderten, in Fig. 2 dargestellten Form, bei welcher das Tischchen (Q) mit seinem

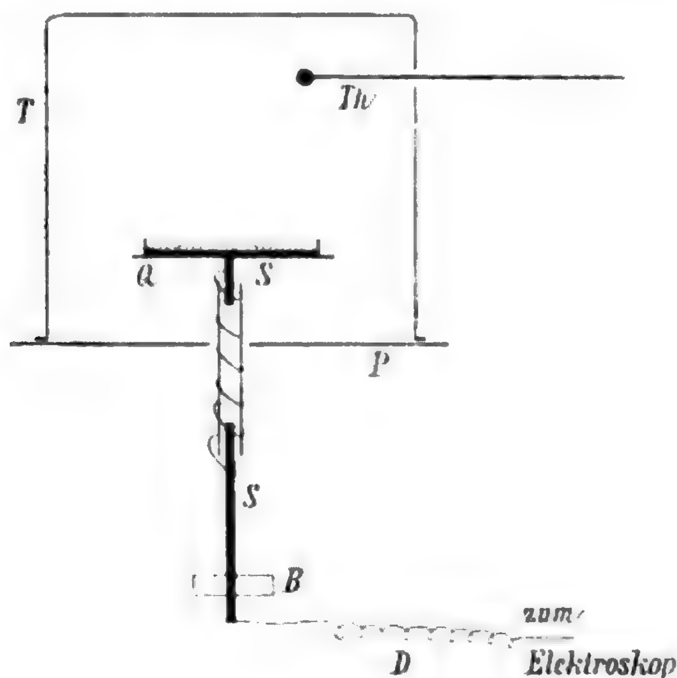


Fig. 2.

Stiel (S) durch das Loch einer auf hohem Dreifuß aufliegenden Platte (P) eingeführt war.

Um Wärmeleitung zur Bernsteinisolierung zu vermeiden, war der metallische Stiel (S) in der Mitte durch ein Glasrohrstück unterbrochen, um welches zur elektrischen Verbindung ein dünner Draht geführt war. Das Elektroskop stand tiefer als der übrige Apparat, so daß, wenn der Topf mit einem Bunsenbrenner angeheizt wurde, die Flammengase nicht auf den Verbindungsdraht D entladend wirkten und so auch während der Erhitzung am Elektroskop abgelesen werden konnte.

Wir möchten uns vorläufig damit begnügen, nur andeutungsweise zu erwähnen, daß diese Abänderungen dadurch

bedingt wurden, daß erstens bei höheren Temperaturen die Gefahr bestand, daß die Isolierfähigkeit des Bernsteins leide, zweitens, daß die unmittelbare Umgebung heißer Luft und heißer Metallbestandteile das Elektroskop beeinflusse, indem es sich herausstellte, daß die Blättchen dann bei Erdleitung nicht immer ganz zusammenfielen. Bei Temperaturen über 180° wurde die Verwendung eines verzinnten Eisentopfes untunlich, da es sich zeigte, daß bei Anheizung auf höhere Temperaturen plötzliche Entladungen des Elektroskopes eintreten. Ob dieselben darauf zurückzuführen sind, daß die Flammengase bei höheren Temperaturen durch das Blech hindurch diffundieren oder andere Umstände auftreten, soll gelegentlich weiter erörtert werden. Wir haben im folgenden immer Töpfe aus dickerem Kupferblech verwendet, welche solche Störungen nicht aufweisen.

Wir führen zunächst einige Detailresultate an. Zur Untersuchung gelangten Uran, Uranoxyd, Urannitratkristalle, Urannitrat in wässeriger Lösung, Pechblende, ferner auch Polonium (Radiotellur), Thor, durch Thor aktiviertes Messing sowie Radium.

A. Verhalten des Uran.

a) Metallisches Uran.

Es gelangten 2·8 *g* Uran in Pulverform, von H. Moissan stammend, vielleicht ein wenig mit Oxyd gemengt, zur Verwendung. Sämtliche Versuche sind mit der gleichen Probe vorgenommen.

Hier und später bedeutet τ die Entladungszeit für ein bestimmtes Intervall (228 bis 185 Volt) in Sekunden gemessen. Durch Kontrollversuche bei geringerer Spannung überzeugten wir uns davon, daß der Sättigungsstrom erreicht ist.

Versuch 1. Anordnung I. Bei Zimmertemperatur war $\tau = 85$ Sekunden (Mittel aus acht Werten mit den Extremen 83 und 86·5).

Zeit t	τ	Vorzeichen der Ladung	
0 bis 3 Minuten....			Kupfertopf erhitzt
$4^1/_2$ »	107 Sek.	+	
7 »	103	—	
$9^1/_2$ »	104	+	
14 »	96	+	
16 »	96	—	
85 »	86	+	
102 »	87	—	
			Lüftung des Topfes:
105 Minuten	86	+	
107 »	84	—	

Angaben des Vorzeichens der Ladung sind im folgenden weggelassen, da dasselbe sich als ohne Einfluß erwies.

Versuch 2. Ein zweites Beispiel mit Erhitzung des Topfes (Anordnung II) durch eine darunterstehende Bunsenflamme, wobei aber die Messung mit Rücksicht auf die Flammengase immer erst nach Ablöschen vorgenommen wurde, liefert die folgenden Ergebnisse. Dabei bedeutet θ die Temperatur der Luft im Innern des Topfes.

t	τ	θ
0 Minuten....	123 Sek	zirka 20° C.
7 »	245	90 — 103 — 98
10 bis 18 »	480	145 — 115
19 » 23 »	230	kleiner als 100
24 »	175	sich auf Zimmertemperatur abkühlend
29 »	175	
Lüftung des Topfes		
36 Minuten....	124	

Dieses Beispiel zeigt den Effekt in besonderer Stärke, die folgenden in bedeutend geringerm Grade. So ergab:

Versuch 3. Dasselbe Präparat 10 Tage später (Anordnung I), nur eine schwache Verzögerung von $\tau = 80$ Sek. auf 93 Sek. und bei Abkühlung Erholung auf 79 Sek.

In den bisher geschilderten Versuchen war die Anheizung immer rasch erfolgt. Im Gegensatze dazu folgt nunmehr eine Versuchsreihe (Anordnung II), bei welcher die Anwärmung intermittierend in kleinen Schritten vorgenommen wurde.

Versuch 4. Bei 18° war $\tau = 87$ Sek.

Bei Erwärmung bis 148° innerhalb 1 Stunde und 25 Minuten fanden sich nur wenig abweichende Werte (83 bis 86).

Hierauf wurde in 7 Minuten rasch bis 166° erhitzt; nach Ablöschen der Flamme ergaben sich folgende Resultate.

t	τ	ϑ
1 Minute.....	73 Sek.	166—153°
3 Minuten....	84	142—128
5 »	91	117—100
8 »	96	95— 83
$10^1/_2$ »	98	76— 68
13 »	101	62— 55
$16^1/_2$ »	102	48— 45
25 »	101	36— 34
34 »	103	29— 28
46 »	101	
50 »	98	
$51^1/_2$ »	98	
54 »	97	
56 »	102	
59 »	101	
62 »	99	24— 22
64 »	98	
Lüftung des Topfes		
68 Minuten....	109	
71 »	89	
73 »	91	
Lüftung des Topfes		
75 Minuten....	118	
81 »	115	21°

Dieser auffallende Gang soll später näher diskutiert werden.

Wir schließen zunächst die Beschreibung eines Versuches (5) an, wobei die Substanz selbst außerhalb des Apparates in einem Trockenkasten auf 220° erhitzt und unmittelbar darnach heiß in die Anordnung I gestellt wurde.

Der Normalwert bei Zimmertemperatur betrug $\tau = 82$ Sek. Eine Minute nach Einbringung in den Apparat war $\tau = 88$, 3 Stunden später 81 Sek.

Wir können also zusammenfassend die folgenden Effekte charakterisieren.

Wird metallisches Uran oder die umgebende Metallhülle rasch erwärmt, so tritt zunächst Verringerung des Entladungsstromes ein, der aber bei oder nach der Abkühlung allmählich wieder seinen Normalwert erreicht. Quantitativ sind die Resultate der verschiedenen Versuchsreihen außerordentlich wechselnd. So haben wir einen besonders starken Effekt in Versuch 2, in den zeitlich folgenden beträchtlich geringere Wirkungen.

Bei der Abkühlung scheint die Schwächung länger nachzuhalten als die Temperaturdifferenz gegen die Umgebung. Wie Beispiel 4 lehrt, ist eine allmähliche Erhitzung nicht von merklichem Einflusse. Zugleich ist dieser Versuch 4 der einzige, bei welchem eine Verstärkung des Entladungsstromes vor der dann auftretenden, gewöhnlich beobachteten Verlangsamung zu bemerken und zugleich ein deutlicher Einfluß der Lüftung des Topfes vorhanden war.

In Bezug auf die Frage, ob hiebei die Temperaturänderungen die Aktivität der Substanz oder den Leitungsvorgang in der Luft beeinflussen, glauben wir uns zu Gunsten der ersteren Annahme entscheiden zu müssen. Im letzteren Falle könnten nämlich bloß durch die Abnahme der Dichte bei höherer Temperatur der Betrag der absorbierten Strahlung und damit zugleich der von ihr erzeugte Sättigungsstrom verringert werden. Kontrollversuche durch Auspumpen der Luft, Ersetzen der Luft durch Leuchtgas und endlich Vergrößerung des Entladungsraumes zeigten aber, daß dabei entsprechende Änderungen nicht auftraten, also angenähert der Gesamtbetrag der Strahlung immer ausgenutzt wurde. Es erübrigt demnach die Annahme, daß vorübergehend die Aktivität geändert werde.

Gegenüber den negativen Resultaten Becquerel's[1] bei Uran ist erstens zu bemerken, daß Becquerel nur bis zu der mäßigen Temperatur von 83° erwärmt hat, zweitens, daß auch unsere Resultate nicht dafür sprechen, daß die Aktivität direkt eine Funktion der Temperatur sei, sondern daß Temperaturänderungen vorübergehende Änderungen der Aktivität bedingen.

Eine naheliegende Annahme wäre es, daß durch Temperatursteigerung eine Abgabe von Emanation herbeigeführt werde, so daß die Substanz geschwächt zurückbleibt, aber im Laufe der Zeit durch Neubildung der Emanation ihren normalen Zustand wieder erreicht — ein Vorgang, der ja von Curie[2] und Rutherford[3] an Radium und Thoriumpräparaten beobachtet wurde.

Freilich müßte man die Annahme hinzufügen, daß diese Emanation sehr rasch verschwindet und dadurch sich die negativen Resultate erklären, die bisher alle Beobachter bezüglich der Feststellung einer solchen bei Uran erhalten haben.[4]

Ein einziges Beispiel (Nr. 4) zeigt eine Reihe von Eigentümlichkeiten, die mit dieser Annahme speziell in Übereinstimmung stehen, nämlich erstens die im Anfang auftretende Verstärkung des Entladungsstromes und zweitens den beträchtlichen Einfluß des Lüftens des Topfes im Sinn einer Verminderung.

Übrigens ist die Hypothese nicht nötig, daß es sich hier um eine Emanation im gewöhnlichen Sinne des Wortes (radioaktives Gas) handle, es kann auch der von einigen Forschern vorausgesetzte Bestandteil Uran-X in seiner Bildung oder Zersetzung gefördert oder gehemmt werden.

---

[1] H. Becquerel, Recherches sur une propriété nouvelle de la matière 1903, p. 67.

[2] M. Curie, Recherches sur les substances radioactives. Paris 1903, p. 129.

[3] Vergl. E. Rutherford, Phys. Zeitsch. 2, p. 429.

[4] Vergl. hiezu M. Curie, l. c. p. 115, und die Angaben über Thorium und Aktinium, J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases, 1903, p. 553.

b) Uranoxyd.

Das Präparat wurde durch Glühen von Urannitrat im Porzellantiegel gewonnen, die dunkelgrünen Körner dürften größtenteils aus U_3O_8 bestehen, doch sind möglicherweise auch andre Oxydationsstufen beigemengt. Es befand sich zur Messung auf einem flachen Eisenblechteller von 9 *cm* Durchmesser, die Schichtdicke betrug nur etwa 1 bis 2 *mm.*

Die ersten Untersuchungen wurden nach Anordnung II gemacht, abgelesen immer erst nach Ablöschen der Flamme.

Versuch 6:

t	τ	ϑ
0 bis 5 Minuten....	23·2 Sek.	18°
9 » 14 »	27·6	47—50
	26	50—55
	25	57
	25	57
20 » 23 »	22	74
	22	75
	21	73
	22	72
25 » 85 »	21—22	zwischen 74—120;

nach Abkühlung eine halbe Stunde später $\tau = 24$ bei 23°, 3 Stunden später wieder der Anfangswert $\tau = 23·2$ bei 18°. Abermalige Erhitzung lieferte:

t	τ	ϑ
10 bis 25 Minuten....	21—20 Sek.	40— 92°
30 »	34	121
31 »	33·4	118
32 »	23·6	112
33 »	23	104
42 »	22·4	50
63 »	23·6	24
71 »	24	22

Der folgende Versuch 7 unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß der Teller mit dem Präparat nicht direkt auf dem Boden des Topfes über der Anheizstelle lag, sondern in etwa 1 *cm* Höhe darüber auf einem Drahtnetze.

t	τ	ϑ
0 bis 4 Minuten....	23·5 Sek.	22°
7 » 10 »	34	53
	23	56
	21·6	60
	21	59
16 » 19 »	27	105
	23	107
	22	105
	22	101
27 » 31 »	31	139
	27	135
	23	130
	23	100

Dieser auffallende Gang zeigte sich bei zahlreichen analogen Versuchsreihen immer wieder, besonders stark bei seitlicher Anheizung des Topfes im folgenden Beispiele.

Versuch 8:

t	τ	ϑ
0 bis 6 Minuten....	23·4 Sek.	18°
24 »	80	75— 73
25 »	48	68— 63
	35	56
26 »	32	52
29 »	27	43
32 »	25	38
40 »	28	107—104
41 »	25	100— 92
42 »	23	88— 82
43 »	22	78— 73
44 »	22·2	69— 66

Hingegen zeigte dieselbe Substanz nach mehrfacher Wiederholung dieser Operation den Effekt nur mehr in geschwächtem Maße. So zeigt

Versuch 9 bei Anordnung III und seitlicher Anheizung des Topfes:

t		ϑ
0 bis 15 Minuten....	20·5 Sek.	20°
16 » 20 »	24·2	54
	21·4	72
	20	74
	20·4	70

und bei weiterem Erwärmen bis 160° nur mehr Werte zwischen 20 und 21. Auch eine Woche später ergaben sich am selben Präparate nur mehr Andeutungen der obigen Effekte, trotzdem die Temperaturerhöhung bis auf 250° gesteigert wurde.

Versuch 10. Bedeckt man obiges Präparat, das seit der letzten Erwärmung mehrere Tage unberührt gestanden war, mit einer einfachen Lage Stanniol, so wird die Entladungsgeschwindigkeit (unter Berücksichtigung der Korrektur für die normale Zerstreuung) von 1·6 Volt/Sek. auf 0·16 Volt/Sek. herabgedrückt.

Bei Erwärmung des Topfes ergab sich für das bedeckte Präparat

t	Entladungsgeschwindigkeit $\frac{dV}{dt}$	ϑ
0 bis 8 Minuten....	0·16 Volt/Sek.	20°
9 »	0·13	30— 90
11 »	0·10	120—170
13 »	0·09	190—210

nach Abkühlung 1 Stunde später:

	0·14	25

nach $1^1/_2$ Stunden:

	0·16	20

Zwischenmessungen zeigten, daß dabei die Wirkung auf die Gesamtstrahlung (unbedecktes Präparat) nur sehr gering war, d. h. fast ausschließlich die durchdringlicheren Strahlen beeinflußt wurden.

Ein gelbgefärbtes, altes Uranoxyd der Firma Trommsdorff in Erfurt zeigte ganz analoges Verhalten, nur verdient es vielleicht hervorgehoben zu werden, daß die Gesamtstrahlung bei genau der gleichen Anordnung wie oben, derselben strahlenden Oberfläche und angenähert derselben Schichtdicke nur 0·94 Volt/Sek., die mit einfacher Stanniolschichte bedeckte Substanz hingegen wie oben 0·16 Volt/Sek. Entladungsgeschwindigkeit lieferte.

Als charakteristisch möchten wir bei diesen Substanzen den wiederholten Gang hervorheben (Versuch 6 bis 8), daß bei Anheizung zunächst immer der Verlangsamungseffekt erscheint, aber immer wieder in wenigen Minuten verschwindet, um einer schwachen Verstärkung Platz zu machen. Durch Wiederholung der Operation scheint die Intensität der Wirkungen abzunehmen.

Wie aus dem Versuche 10 und analogen hervorgeht, wird der durchdringende Teil der Strahlung (β) viel stärker von der Einwirkung betroffen als der leicht absorbierbare (α). Bezüglich der β-Strahlung ist bei diesen Versuchen auch eine deutliche Nachwirkung des Verlangsamungseffektes gegenüber dem Temperaturausgleich gegen die Umgebung zu bemerken.[1]

c) Urannitratkristalle.

Eine aus Urannitratkristallen gebildete Platte gelangte in einer flachen Glasschale vom Durchmesser 5 *cm* zur Verwendung. Das Präparat war dabei durch einen Platindraht mit dem Tischchen *Q* leitend verbunden.

Versuch 11.

	τ
Die normale Entladungszeit war....	127 Sek.
Nach Erhitzung des Kupfertopfes...	179 »

[1] M. Curie hat bei starken Erhitzungen an Radiumpräparaten eine analoge Tatsache gefunden. Vergl. Recherches sur les substances radioactives, 1903, p. 129.

	τ
8 Minuten später	175 Sek.
Nach Lüftung	128 »
Eine halbe Stunde später	122 »

Es zeigte sich hier also der Verlangsamungseffekt in ausgesprochener Weise. Spätere Versuche ergaben jedoch nur mehr viel geringere Wirkungen, so daß es scheint, daß auch hier Wiederholungen des Verfahrens den Effekt schwächen.

d) **Urannitrat in wässriger Lösung.**

Versuch 12. Eine ziemlich konzentrierte Lösung befand sich in einer Platinschale in Anordnung I.

	τ
Der Normalwert war	192 Sek.
Nach Anheizung des Kupfertopfes	298 »
Nach 25 Minuten (Topf ganz kühl)	218 »
Nach $1^1/_2$ Stunden	195 »

Versuch 13.

t	τ	ϑ
0 bis 10 Minuten	156 Sek.	18°
rasch angeheizt und Flamme abgelöscht:		
14 bis 17 Minuten	196	100—78
18 » 21 »	189	74—53
22 » 25 »	181	51—40
27 » 30 »	179	37—32
31 » 34 »	181	31—28
Topf gelüftet:		
40 »	153	25

Derartige, den Heizeffekt stark beeinflussende Wirkungen des Lüftens wurden mehrfach beobachtet, vergl. auch Versuch 2 bei metallischem Uran und Versuch 11 bei den Kristallen.

Versuch 14.

	τ	θ	θ_1 (Temperatur der Lösung)
Normalwert	58 Sek.	18°	
Nach Anheizung	81	105—94	
Innerhalb 10 Minuten	64	40	34°
Nach weitern 10 Minuten	63	26	31

Eine 3 Monate alte Lösung, die die ganze Zeit ruhig gestanden war, zeigte hingegen nur geringe Wirkungen.

Versuch 15.

	τ	
Normalwert	170 Sek.	
Erwärmung auf 70°	201	
Langsame Erwärmung und Warmhalten zwischen 70°—100°—33° innerhalb einer halben Stunde	183	konstant.

Lüftungen und wiederholte Anheizungen bringen nur geringe Änderungen hervor, doch wird allmählich der Ausgangswert wieder erreicht.

Im Gegensatze hiezu wurde eine Lösung untersucht, die unmittelbar aus Kristallen frisch hergestellt war.

Versuch 16. Es zeigten sich bei wiederholten Anwärmungen immer wieder die geschilderten Verlangsamungseffekte, z. B.:

	τ
20°	47 Sek.
30—52°	54

steigend bis 100° und abfallend bis 30° keine wesentlichen Abweichungen von 54.

Nach vielmaliger Wiederholung solcher Vorgänge zeigten sich bei ähnlichen Temperaturänderungen immer noch Vermehrungen von τ um 3 bis 4 Sekunden.

Diese Lösung wurde auch untersucht, nachdem sie mit einem Aluminiumblech von der Dicke 0·22 *mm* bedeckt war:

Versuch 17. Bei 20° ergab sich eine Entladungsgeschwindigkeit von 1·98 Volt/Min. gegenüber 13·8 Volt/Min. in unbedecktem Zustande. Der Topf war angeheizt worden, so daß $\theta = 60°$ erreicht wurde und hatte sich bis $\theta = 30°$ abgekühlt, die Lösung hatte dabei die Temperatur $\theta_1 = 27°$ angenommen.

	$\frac{dV}{dt}$
Dann zeigte sich unbedeckt	12·0 Volt/Min.
Mit Aluminiumblech bedeckt	0·00
Eine halbe Stunde später, $\theta = \theta_1 = 23°$	0·48
Noch 1 Stunde später, 23°	1·02

Mehrmalige Wiederholungen dieses Versuches zeigten immer wieder, daß die durchdringliche Strahlung, wenn die Lösung auch nur Temperaturen zwischen 25 und 40° angenommen hatte, so gut wie völlig vernichtet war.

Statt den Topf zu erhitzen, wurde auch mehrfach die Lösung außerhalb der Anordnung erwärmt und in den kalten Apparat gestellt. Wir führen hiefür nur ein Beispiel an.

Versuch 18.

t	Temperatur der Lösung θ_1	τ
0 Minuten	63°	(?) 171 Sek.
4 »	55	196
8 »	50	189
42 »	30	172
120 »	20	163
Nach 24 Stunden . .	20	140

Bei einem ähnlichen Versuche, wobei die Lösung nur etwa 30° warm war, zeigte sich, wie in Versuch 17, bei Anwendung eines Aluminiumbleches als Strahlenfilter, daß schon für diese geringe Temperaturerhöhung die β-Strahlung enorm geschwächt war.

Die untersuchten Uranverbindungen zeigen nach den angeführten Resultaten qualitativ dasselbe Verhalten wie metallisches Uran.

Es erscheint uns wesentlich, zu betonen, daß, wie speziell Versuch 17 und ähnliche es lehren, hier schon Temperaturänderungen um ganz geringe Beträge die durchdringlicheren (β) Strahlen außerordentlich stark beeinflussen.

B. Pechblende.

Die verwendeten Substanzen stammten aus Joachimsthal.

Versuch 19. Sogenannter Uranschlich, mit 47·1% Gehalt an U_3O_8, gelangte in Anordnung I zur Beobachtung.

	τ
Bei Zimmertemperatur war................	39·5 Sek.
1 Minute nach Erhitzung des Kupfertopfes...	50
3 Minuten nach Erhitzung des Kupfertopfes..	48
Nach Lüftung und Kühlung des Topfes	39

Sowie bei Uran, lieferten auch hier zeitlich folgende Messungen schwächere Effekte.

Versuch 20. Wir führen im folgenden ein Beispiel an, wobei solcher pulverförmiger Uranschlich in einer flachen Schale (Durchmesser 7·5 *cm*) von einem Aluminiumblech bedeckt war.

Der Normalwert war $\tau = 69$ Sek. Es wurde der Topf auf etwa 160° erhitzt und während der Abkühlung beobachtet.

	ϑ	τ
	158—127°....	130
	123—104	84
	98— 86	63
	81— 71	56
	68— 62	51
	60— 56	49
	53— 50	48
Nach einer Pause	40— 38	45
	37	43
	36	42
Nach einer halben Stunde	23	43
Nach weiteren 4 Stunden	....	60

Der Anfangswert war dann noch nicht ganz erreicht. Man erkennt aus diesem Gange leicht, daß zunächst der Verlangsamungseffekt auftrat, der dann allmählich einer weit über den Anfangswert hinausgehenden Aktivierung Platz macht. Hier hat man es unzweifelhaft mit dem Austritt einer Emanation zu tun, die nach 4 Stunden von selbst noch nicht ganz verschwunden war.

Außer diesem Materiale gelangte auch sogenanntes Uranscheiderz ($63^0/_0$ U_3O_8) zur Verwendung.

Versuch 21.

	τ
Die Gesamtentladungszeit war	27 Sek.
Mit einer Lage Stanniol bedeckt	122
Nach zweistündigem Stehen	90

Danach erwies sich der Topf als aktiv.

Versuch 22.

	t	τ
Dasselbe Präparat unter Stanniol ergab .		120 Sek.
Nach 15 Minuten		113
Nach Erhitzung.....................	19 Min.	160
	22	136
Nach Lüftung	26	120
	41	107
	46	100
Nach Lüftung des Topfes.............	49	115
5 Stunden später....................		83
Nach Lüftung, 4 Minuten später		104

Aus dieser Zusammenstellung berechnet sich mit Berücksichtigung der Zerstreuungskorrektion:

Ladungsverlust	durch Zerstreuung	0·7 Volt/Min.
»	durch Strahlung der Substanz bei Zimmertemperatur.......	20·3
»	durch die aktivierte Gefäßwand	3·0
»	durch die Emanation	6·6
»	nach der Erhitzung..........	16·1

Durch Pechblende hervorgerufene induzierte Aktivität.

Im Anschluß an die Beobachtungen mit Pechblende seien hier einige Versuche mitgeteilt, die in keiner unmittelbaren Beziehung zu den durch Temperaturänderung hervorgerufenen Effekten stehen, sondern die Erregung induzierter Aktivität durch Pechblende und das Gesetz des zeitlichen Abklingens derselben betreffen.

Messingstifte von 5 *mm* Durchmesser und 50 *mm* Länge wurden in einem verschlossenen Gefäße von zirka 200 cm^3 Inhalt zusammen mit zirka 150 *g* Pechblende in gepulvertem Zustande (sogenanntes Uranscheiderz mit 63% U_3O_8) durch eine bestimmte Zeit aufbewahrt, dann direkt in die Bohrung des Blättchenträgers des Zerstreuungselektroskopes eingesetzt. Einige dieser Messungsreihen sind in den folgenden Tabellen wiedergegeben und in zwei Tafeln graphisch dargestellt. *t* bedeutet hiebei die Zeit, von der Herausnahme des Stiftes aus dem Aktivierungsgefäß an gerechnet, in Minuten, *J* die Intensität der induzierten Aktivität, gemessen durch die Entladungsgeschwindigkeit in Volt pro Minute. Der Betrag der gewöhnlichen Zerstreuung ist dabei schon in Abzug gebracht.

Versuch 23. Aktivierungsdauer 145 Stunden:

t	*J*
1 Minute	130 Volt/Min.
3 Minuten . . .	112
5 » . . .	104
10 » . . .	86
15 » . . .	78
20 » . . .	68
30 » . . .	60
91 » . . .	22

Versuch 24. Aktivierungsdauer 70 Stunden:

t	*J*
1·25 Minuten . . .	92 Volt/Min.
2·5 » . . .	80
4 » . . .	74

t		J
6·5	Minuten ...	68 Volt/Min.
10	» ...	61
15	» ...	57
20	» ...	53
30	» ...	47
52	» ...	34·5
70	» ...	24
90	» ...	14·7
110	» ...	10·2
195	» ...	1·5

Versuch 25. Aktivierungsdauer 30 Minuten:

t		J
1	Minute	14·5 Volt/Min.
2	Minuten ...	13·5
3	» ...	10·5
5	» ...	8·5
10	» ...	6·2
15	» ...	5·4
20	» ...	5·0
25	» ...	5·7
30	» ...	5·4
35	» ...	5·3
45	» ...	4·9
60	» ...	3·8
90	» ...	2·3
130	» ...	1·1

Versuch 26. Aktivierungsdauer 15 Minuten:

	J		
t	*a)*	*b)*	*c)*
1 Minute	—	—	11 Volt/Min.
2 Minuten ...	7·7	7·2	10
4 » ...	—	—	7·7
8 » ...	3·6	3·5	4·7
15 » ...	2·4	1·5	2·9

t		J	
	$a)$	$b)$	$c)$
20 Minuten . . .	2·6	2·7	3·3
25 » . . .	—	1·7	3·2
30 » . . .	2·2	1·5	2·8
35 » . . .	—	—	2·5
40 » . . .	2·5	2·0	3·0
45 » . . .	2·3	1·4	3·1

Eine graphische Darstellung dieser Tabellen ist in den Tafeln am Schlusse gegeben.

Auch nach einer Aktivierungsdauer von nur 5 Minuten und 1 Minute war eine induzierte Aktivität des Stiftes nachweisbar, aber doch zu schwach, um eine verläßliche Bestimmung der zeitlichen Abnahme zu ermöglichen.

Wie diese Resultate zeigen, ist das Gesetz, nach dem die erregte Aktivität abnimmt, ein ziemlich kompliziertes. Der nach P. Curie und J. Danne[1] bei Aktivierung durch Radium erst nach etwa 2 bis 3 Stunden beginnende Teil der Kurve, in dem sie durch die einfache Funktion $J = J_0 e^{-t/T}$ dargestellt werden kann, ist hier infolge der geringen Größe der Werte nicht mehr hinreichend genau darstellbar. Immerhin ergibt sich, daß die Konstante T, berechnet nach der Formel:

$$T = \frac{(t_2 - t_1)\log e}{\log J_1 - \log J_2}$$

mit wachsender Zeit sich dem von P. Curie und J. Danne angegebenen Werte (40 Minuten) nähert, nämlich 44 Minuten für das Intervall $t = 110$ bis 195 Minuten in Versuch 24 beträgt.

Die Annahme, daß das in der Pechblende enthaltene Radium die induzierte Aktivität bedingt, ist dadurch wahrscheinlich gemacht, da bekanntlich diese Zeitkonstante für die verschiedenen radioaktiven Substanzen charakteristisch ist. Auch der Gang im Anfangsstadium der Entaktivierung, besonders nach kurzer Expositionsdauer, ist mit den von

[1] P. Curie und J. Danne, C. R. *136*, p. 364, 1903, und *138*, p. 683, 1904.

Rutherford[1] und P. Curie und J. Danne[2] beobachteten Erscheinungen in qualitativer Übereinstimmung.

Abweichungen treten insofern auf, als auch bei sechstägiger Expositionsdauer (Versuch 23) jenes Gesetz nicht erfüllt ist, das nach Curie und Danne bei Aktivierung durch Radium bereits nach 24 Stunden erhalten wird und ferner, daß nach 15 Minuten Aktivierungsdauer sich zwei Maxima der induzierten Aktivität ergeben.

C. Polonium, Thor, Radium.

a) **Polonium.**

Ein Wismutstäbchen mit Poloniumüberzug (Radiotellur Marckwald's) zeigte den Effekt zwar noch merklich, aber schwach, bei Messung in der geschilderten Anordnung I.

Auch eine galvanometrische Beobachtung des Sättigungsstromes ergab bei Topferhitzung eine kleine Verringerung desselben.

b) **Thor.**

Reines Thoroxyd befand sich in einer Platinschale in Anordnung I oder III. Bei diesem Präparat ist die Auffindung des Verlangsamungseffektes durch die starken spontanen Emanationsabgaben etwas erschwert. Das folgende Beispiel läßt gleichwohl die Wirkung deutlich erkennen.

Versuch 27.

	t	τ	ϑ
	0 Minuten...	34	18°
	2 » ...	27	
	8 » ...	24	
	20 » ...	24	
Topf angeheizt:	23 » ...	22·5	21
	24 » ...	23	22— 26
	25 » ...	23	32— 36
	26 » ...	23	43— 51

---

[1] Rutherford, Phys. Zeitsch. *3*, p. 254, 1902.

[2] P. Curie und J. Danne, l. c.

	t	τ	ϑ
	27 Minuten...	23·8	57— 67°
	28½ » ...	26	78— 86
	29½ » ...	36	94—103
	31 » ...	43	108—117
	32 » ...	45	120—127
	33 » ...	47	132—137
	35 » ...	46	145—148
	38 » ...	40	153
	39 » ...	35	152
	45 » ...	32	152
Sich abkühlend:	47 » ...	32	145—138
	63 » ...	30	75— 70
	80 » ...	27	21
3 Stunden später	....	24	15
Nach Lüftung des Topfes	.....	33	
10 Minuten später	....	25	

Die letzten Werte zeigen wieder das Verhalten der Emanation an, das eingangs des Versuches gekennzeichnet ist. Etwa 10 Minuten nach Einbringung des Präparates ist ein angenähert konstanter Wert erreicht. Anwärmung scheint dann zunächst die Emanationsabgabe noch etwas zu fördern, dann tritt aber allmählich der bei den übrigen aktiven Körpern beobachtete Verlangsamungseffekt auf, der bei Abkühlung wieder verschwindet. Von Nachwirkung ist hier nichts zu bemerken, im Gegenteile nimmt der Effekt bereits ab, wenn die Temperatur eine Zeit lang konstant (bei zirka 150°) gehalten wird.

c) Radium.

Das uns zur Verfügung stehende Präparat, Radiumbaryumcarbonat, war uns im Jahre 1899 freundlichst vom Ehepaare Curie überlassen worden. Es gelangte zunächst in metallischer, aus Aluminiumblech gebildeter Umhüllung, die wieder in zirka 1 *mm* dickes Bleiblech gewickelt war, zur Verwendung. Das so erhaltene Bleikuvert war allseitig verlötet.

Versuch 28. Anordnung I:

	t	τ	θ
Normalwert	0—10 Min.	30	17°
Topf rasch angeheizt	12	40	117—136
	13	15	140—150
Sich abkühlend	14	7	133
Topf gelüftet		26	58
Nach Kühlung des Bleikuverts im Wasserstrahle........	25	30	21

Wiederholung des Versuches ergab den gleichen Gang Es zeigt sich also hier zunächst der Verlangsamungseffekt, dann Aktivierung durch Emanation, wie durch die Lüftungen festgestellt ist.

Eine kleine Probe der Substanz wurde in ein Glasrohr gut eingeschmolzen. Man erhielt dann beispielsweise den folgenden Verlauf.

Versuch 29. Das Glasrohr war in ein Drahtnetz gewickelt und lag auf dem Tischchen in Anordnung III.

	t	τ	θ
	0—10 Minuten...	30	26°
Topf angeheizt:			
	15 » ...	42	120—140
	20 » ...	51	250
	25 » ...	49	265
Nach Ablöschen der Bunsenflamme:			
	26 Minuten ...	46	255—225
	27 » ...	41	200—185
	28 » ...	39	165—145
	29 » ...	36	135—120
	30 » ...	36	115—105
	31 » ...	35·5	100— 95
	35 » ...	34	70
	40 » ...	33	53
	45 » ...	32	45
	64 » ...	30	28

Bei diesem eingeschmolzenen Präparate scheint keine Nachwirkung vorhanden zu sein, vielmehr der Verlangsamungseffekt der Temperatur proportional zu verlaufen, auch war hier keine Emanationsabgabe zu konstatieren.

Radium zeigt demnach den gleichartigen Effekt wie die andern Körper. Nach unsern Versuchsanordnungen waren dabei nur die von demselben ausgehenden durchdringlichern Strahlen der Beobachtung zugänglich.

D. Aktivierte Körper.

Durch Thorstrahlung aktiviertes Messing.

Ein Messingstab von 8 *cm* Länge und 4 *mm* Durchmesser wurde 17 Stunden lang in der Luft oberhalb flach ausgebreitetem Thoroxyd in einem Becherglase gehalten und sodann untersucht. Die Anordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich. In Anordnung I (Fig. 1) ist dabei das Tischchen ersetzt durch einen Stab *S*, der in einem Glasrohrstücke steckt, um welches der Draht *D* so gewickelt ist, daß zwischen dem zu untersuchenden aktivierten Messingstift *M* und *S* Kontakt hergestellt ist, wenn *M* oben in das Glasrohr eingeschoben wird. Zur Vermeidung von Wärmeleitung steckt im Glasrohre zwischen *S* und *M* ein kurzes Stück eines engeren Glasstabes. Der oben geschlossene Zylinder (*C*) hatte einen Durchmesser von 10 *cm* und eine Länge von 21 *cm*.

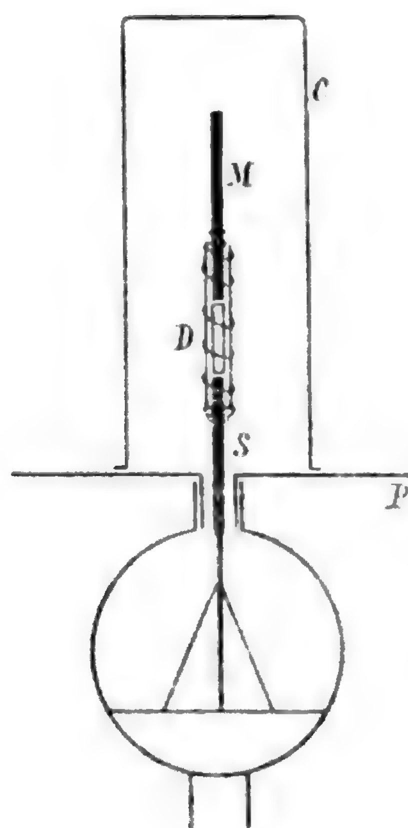


Fig. 3.

Versuch 30. In den ersten 10 Minuten war die Entladungsgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Zerstreuung, die bei dieser Anordnung ein gleich großer, inaktiver Messingstift zeigte (nämlich 0·4 Volt/Min.):

$$\frac{dV}{dt} = 1 \cdot 47 \text{ Volt/Min.}$$

Nach mäßiger Erwärmung des Stiftes durch eine Bunsenflamme außerhalb der Anordnung und Einfügung in warmem Zustande ergab sich in den ersten 5 Minuten:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \cdot 9 \text{ Volt/Min.},$$

in den folgenden 5 Minuten, während der Stift sich naturgemäß abkühlte:

0·96 Volt/Min.

im Mittel dieser 10 Minuten:

0·93 Volt/Min.

Nunmehr wurde das Messingstück herausgenommen, im Wasserstrahl gekühlt und abgetrocknet. Danach lieferte das Mittel:

	t		
	0— 5	Minuten ...	1·1 Volt/Min.
	5—10	» ...	1·3
Mittel	0—10	» ...	1·2

Dann wurde der Stift nochmals, wie oben, aber ziemlich stark erhitzt. Es ergab sich:

	t		
	0— 5	Minuten ...	0·4 Volt/Min.
	5—10	» ...	0·54
Mittel	0—10	» ...	0·47

Abermalige Kühlung, wie oben, verstärkte die Aktivität wieder und zwar:

	t		
	0— 5	Minuten ...	1·2 Volt/Min.
	5—10	» ...	1·4
Mittel	0—10	» ...	1·3

Versuch 31. Ein anderer Stift wurde in gleicher Weise $72^1/_2$ Stunden lang aktiviert. Er zeigte dann eine Entladungsgeschwindigkeit:

$$\frac{dV}{dt} = 2\cdot 9 \text{ Volt/Min.}$$

Nach mäßiger Erwärmung in der Bunsenflamme, so daß noch keine Anlauffarben auftraten, ergab sich:

	t	$\frac{dV}{dt}$
	0— 5 Minuten ...	1·8 Volt/Min.
	5—10 » ...	1·88
Mittel	0—10 » ...	1·84

Nach Kühlung im Wasserstrahle — der Stab fühlte sich nach obigen 10 Minuten noch lau an — und Abtrocknung zeigte sich:

	t	
	0— 5 Minuten ...	2·6 Volt/Min.
	5—10 » ...	2·56
Mittel	0—10 » ...	2·58

Nach abermaliger Erhitzung und zwar diesmal bis zur dunklen Rotglut an einem Ende des Stabes, war das Resultat:

	t	
	0— 1 Minute	0·2 Volt/Min.
	0— 5 Minuten ...	1·04
	5—10 » ...	1·16
Mittel	0—10 » ...	1·1

Im Wasserstrahle gekühlt und getrocknet, lieferte dann der Stab:

t	
0— 5 Minuten ...	2·18 Volt/Min.
0—10 » ...	1·88

Nachdem der Stift abgeschmirgelt und gewaschen war, zeigte er noch im 10 Minuten-Mittel:

$$\frac{dV}{dt} = 0\cdot 84 \text{ Volt/Min.}$$

Im Gegensatze zu den Ergebnissen Fanny C. Gates und Curie's kann es sich in diesem Falle nicht allein um eine Art von Destillation handeln, da die Erhitzung außerhalb des Apparates vorgenommen wurde. Das Wiederansteigen der Aktivität muß also auf einer Regeneration beruhen.

Durch Pechblende aktivierte Messingstäbe ergaben in dieser Hinsicht noch keine sichern Resultate, ebenso ein durch Radium aktivierter Stift.

Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

Es wurde bei Uran, Uranoxyd, Urannitrat in Kristallen und in wässriger Lösung, bei Pechblende, Polonium, Thoroxyd, Radium und bei durch Thor aktivierten Stäben konstatiert, daß mäßige (bis 200° C.), bisweilen sogar geringe Erwärmungen (um 20 bis 40°) der Substanz oder ihrer Umgebung zunächst eine Verringerung des Entladungsstromes herbeiführen. Bei allmählicher Abkühlung wird der Normalwert der Entladungsgeschwindigkeit wieder erreicht, manchmal sogar etwas überschritten, doch hält die Herabminderung im allgemeinen länger an als die Temperaturerhöhung.

Es scheint also nicht die Aktivität einfach eine Funktion der Temperatur zu sein, sondern die Temperaturänderungen, eventuell die Geschwindigkeit der Temperaturänderungen maßgebend zu sein.

Quantitativ sind die Erscheinungen sehr unregelmäßig, doch scheint es, daß insbesondere bei Uranverbindungen und Pechblende mehrmalige Wiederholungen von Erwärmung und Abkühlung diesen Effekt schwächen.

Komplizierter sind die Ergebnisse bei Substanzen wie Thor und Radium, bei denen an und für sich durch Emanationsentwicklung und Aktivierung der umgebenden festen Körper eine Änderung der Entladungsgeschwindigkeit auftritt und die Temperatursteigerung wenigstens bei etwas höherer Temperatur die Emanationsabgabe verstärkt. Trotzdem ist der in entgegengesetztem Sinne gehende Effekt der Verlangsamung auch bei diesen Substanzen deutlich nachweisbar.

Die Wirkung auf den durchdringlichern Teil der Strahlung (β) ist wesentlich stärker als auf den leicht absorbierbaren (α).

Was eine theoretische Deutung anbelangt, so wollen wir von einer solchen derzeit noch absehen. Wir möchten bloß betonen, daß es sich hier nicht um Beeinflussung des Leitungsvorganges, sondern um wirkliche Änderung der Intensität der Strahlung handelt.

Anschließend wurden auch die Erregungen induzierter Aktivität durch Pechblende und das Gesetz ihres zeitlichen Abklingens untersucht. Wahrscheinlich spielt dabei das darin enthaltene Radium die Hauptrolle, doch zeigen sich einige Abweichungen von den gewöhnlich beobachteten Formen des Verlaufes.

Über die Abhängigkeit des täglichen Ganges der erdmagnetischen Elemente in Batavia vom Sonnenfleckenstande

von

J. Liznar.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1904.)

Vor ungefähr 50 Jahren haben bekanntlich Sabine, Wolf und Gautier fast gleichzeitig die Entdeckung gemacht, daß die erdmagnetischen Variationen eine mit dem Sonnenfleckenstand in innigem Zusammenhange stehende Beziehung zeigen. Seit jener Zeit wurden öfter Untersuchungen über die Abhängigkeit der Variationen vom Fleckenstand ausgeführt, die zwar alle die angeführte Entdeckung im allgemeinen bestätigen, ohne jedoch wesentlich Neues gebracht zu haben. Nur Ad. Schmidt[1] hat in einer im Jahre 1888 veröffentlichten Abhandlung einen neuen Weg eingeschlagen, indem er den täglichen Gang der drei Komponenten von Wien und Batavia durch periodische Reihen darstellte und die Koeffizienten der einzelnen Glieder dieser Reihen nach dem Vorgange Wolf's als lineare Funktionen der Sonnenflecken-Relativzahl ausdrückte. Er ist hiebei trotz der Kürze der Beobachtungsreihen, die ihm damals zur Verfügung standen (er konnte nur sieben Jahrgänge von Wien und $4^1/_2$ Jahrgänge von Batavia verwenden), zu wichtigen Schlußfolgerungen in Hinsicht auf die Ursachen, welche die Variationen hervorbringen, gelangt; es ist aber begreiflich, daß er

[1] Der tägliche Gang der erdmagnetischen Kraft in Wien und Batavia in seiner Beziehung zum Fleckenstande der Sonne. Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVII, 1888.

bei dem unzureichenden Beobachtungsmaterial über die Art und Weise, wie die Variationen vom Fleckenstand abhängen, keine weiteren Untersuchungen angestellt hat.

Mielberg[1] hat meines Wissens zuerst auf eine Änderung der täglichen Periode der Deklination in den aufeinanderfolgenden Jahren aufmerksam gemacht und sie als säkulare Änderung bezeichnet, indem ihm neben der Änderung der Amplitude, die parallel den Sonnenflecken-Relativzahlen verlief, auch eine Gestaltsänderung der Kurve des täglichen Ganges aufgefallen ist, die er jedoch nicht ganz richtig zu deuten gewußt und sie als ganz unabhängig vom Fleckenstand angesehen hat.

Vor kurzer Zeit hat Lüdeling[2] in einer Bearbeitung der magnetischen Beobachtungen von Potsdam auf eine Formänderung der Vektordiagramme, welche den täglichen Gang der in der Horizontalebene wirkenden erdmagnetischen Kraft darstellen, hingewiesen, denn er sagt, nachdem er betont hat, daß die Größe der Vektordiagramme in völliger Übereinstimmung mit den Sonnenflecken-Relativzahlen steht, folgendes: »Allein es findet sich noch eine weitere und wohl interessantere Beziehung. Auch die geometrische Gestalt der Jahresvektordiagramme scheint innerhalb einer Sonnenfleckenperiode regelmäßigen Änderungen unterworfen zu sein, wie dies übrigens schon aus den von Airy gezeichneten Diagrammen für die Jahre 1848 bis 1863 hervorgeht.« Lüdeling hat also wohl erkannt, daß eine Änderung des täglichen Ganges (von der Änderung der Amplitude abgesehen) im Verlauf einer Fleckenperiode vorhanden sein dürfte; er hat aber nicht angegeben, worin dieselbe besteht.

Die letzte magnetische Publikation des magnetisch-meteorologischen Observatoriums in Batavia[3] hat mich

[1] Die magnetische Deklination in St. Petersburg. Repert. für Meteorologie, T. IV, No. 2, 1874.

[2] Ergebnisse zehnjähriger magnetischer Beobachtungen in Potsdam. Abhandl. des königl. preuß. meteor. Institutes, Bd. I, Nr. 8.

[3] Observations made at the Royal magnetical and meteorological Observatory at Batavia, Vol. XXII, Part II.

nun veranlaßt, die vorliegende kleine Untersuchung auszuführen, um die Gesetzmäßigkeit für die Änderung des täglichen Ganges im Verlaufe der Sonnenfleckenperiode festzustellen und dadurch möglicherweise Anhaltspunkte für die Ursachen zu gewinnen, welche hiebei den täglichen Gang beeinflussen. Sie bildet eigentlich eine Fortsetzung und Ergänzung der Arbeit Ad. Schmidt's, wenn ich auch nicht dieselben Koeffizienten auf ihre Abhängigkeit vom Sonnenfleckenstand untersucht habe und das Abhängigkeitsverhältnis in anderer Form annehme, als es Schmidt getan hat.

Ich teile zunächst die Untersuchung des täglichen Ganges im Jahresmittel mit, da dieser von den Störungen weniger entstellt ist als der Gang einzelner Monate und da auch die Sonnentätigkeit (Zustandsänderung der Sonne) in den verschiedenen Jahren durch die Jahresmittel der Sonnenflecken-Relativzahlen besser zum Ausdrucke gelangt, als in den einzelnen Monaten durch die Monatsmittel. Der verschiedene Fleckenstand ist ja für uns nur das sichtbare Zeichen des geänderten Sonnenzustandes, für welche Änderung die Sonnenflecken-Relativzahlen aber kein genaues Maß abgeben. Es kann der Zustand der Sonne bei derselben Sonnenflecken-Relativzahl ein bedeutend verschiedener sein, so daß auch die erdmagnetischen Variationen bei derselben Fleckenrelativzahl verschieden ausfallen können. Erst im Jahresmittel gleichen sich diese Unregelmäßigkeiten zum größten Teil aus.

Nach der Darstellung der Abhängigkeit des mittleren täglichen Ganges in den einzelnen Jahren vom Sonnenfleckenstande wird diese Abhängigkeit auch für die einzelnen Monate untersucht, wenn ich auch der Meinung bin, daß hiezu ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial notwendig wäre und es daher nicht unterlassen kann, zu betonen, daß die vorliegende Untersuchung als ein erster derartiger Versuch zu betrachten ist. Ich habe hiebei nur die Komponenten X (Nordkomponente), Y (Ostkomponente) und Z (Vertikalkomponente) verwendet, weil die Variationen der übrigen Elemente auch von den absoluten Werten der Deklination, Inklination und Intensität abhängen, denn es ist:

$$\Delta D = \frac{\cos D\Delta Y - \sin D\Delta X}{H}$$

$$\Delta H = \cos D\Delta X + \sin D\Delta Y$$

$$\Delta J = \frac{\cos^2 J}{H}(\Delta V - \text{tang}\, J\Delta H)$$

$$\Delta T = \frac{H}{T}\Delta H + \frac{V}{T}\Delta V = \cos J\Delta H + \sin J\Delta V,$$

wobei ΔD, ΔH, ΔJ, ΔT, ΔX, ΔY, ΔV die Abweichungen vom Tagesmittel vorstellen.

Die Variationen der übrigen Elemente lassen sich aus den bekannten Variationen der genannten drei Komponenten ermitteln.[1]

Die vorerwähnte Publikation des Observatoriums in Batavia enthält unter anderm auch die Konstanten der ersten zwei Glieder der Bessel'schen Formel, die für jedes erdmagnetische Element für die einzelnen Monate: Juli bis Dezember 1882 und vom April 1883 bis März 1899 und für die Jahresmittel aus allen Beobachtungen, also ohne Ausscheidung von Störungen, berechnet wurden. Für den täglichen Gang im Jahresmittel sind demnach 15 (1884 bis 1898), für jenen der einzelnen Monate 16 Jahrgänge vorhanden.

Bezeichnet y die Differenz irgend eines erdmagnetischen Elementes zur beliebigen Tagesstunde x gegen das Tagesmittel, so läßt sich bekanntlich y durch den Ausdruck darstellen:

$$y = A_1 \sin(C_1 + 15x) + A_2 \sin(C_2 + 30x) + \ldots \qquad 1)$$

Die folgenden Tabellen I, II, III enthalten die Konstanten A_1, C_1, A_2, C_2 für den täglichen Gang im Jahresmittel, wie sie der erwähnten Publikation entnommen werden konnten, und unter r die Wolf'schen Sonnenflecken-Relativzahlen. Die letzte mit »Mittel« bezeichnete Horizontalreihe stellt die Werte dar,

[1] Die für diese Arbeit notwendigen Rechnungen wurden schon im Vorjahr abgeschlossen; anderweitige Arbeiten und meine Erkrankung im vergangenen Winter sowie ihre Folgen haben aber die Vollendung der Untersuchung hinausgeschoben.

die dem aus allen Jahren abgeleiteten täglichen Gang entsprechen. Der Anfangspunkt der Zeitzählung ist die Mitternacht. Die Amplituden A_1 und A_2 sind in Einheiten der fünften Dezimale des C. G. S.-Systems ausgedrückt.

I. Nordkomponente = X.

Jahr	$A_{1,r}$	$C_{1,r}$	$A_{2,r}$	$C_{2,r}$	r
1884	25·42	293°10	11·66	117°48	63·5
1885	23·22	295·23	9·75	118·70	52·2
1886	19·70	301·18	8·50	120·45	25·4
1887	18·05	303·80	7·97	127·57	13·1
1888	17·43	301·25	7·61	120·42	6·8
1889	16·79	299·53	7·75	122·03	6·3
1890	17·40	296·60	8·09	124·98	7·1
1891	21·63	295·72	9·34	117·33	35·6
1892	25·92	294·50	11·48	114·33	73·0
1893	27·12	287·80	11·86	109·92	84·9
1894	25·29	293·22	10·97	116·63	78·0
1895	24·26	294·70	10·52	113·55	64·0
1896	19·81	297·32	8·42	114·40	41·8
1897	19·21	295·58	7·95	117·67	26·2
1898	19·06	296·87	8·59	120·95	26·7
Mittel	21·47	295·78	9·42	117·57	40·3

II. Ostkomponente = Y.

Jahr	$A_{1,r}$	$C_{1,r}$	$A_{2,r}$	$C_{2,r}$	r
1884	7·33	173°50	8·91	352°52	63·5
1885	7·37	182·10	7·74	347·68	52·2
1886	6·96	182·72	7·35	346·70	25·4
1887	6·12	183·47	6·25	350·05	13·1
1888	5·73	181·40	6·64	348·72	6·8
1889	5·96	177·12	6·97	344·78	6·3
1890	6·33	174·47	6·72	348·85	7·1
1891	7·20	179·28	7·18	342·00	35·6
1892	9·82	179·42	9·72	347·70	73·0
1893	10·33	173·67	9·92	346·12	84·9
1894	9·94	177·23	9·71	348·12	78·0
1895	8·90	174·52	9·29	345·47	64·0
1896	8·05	174·58	8·80	342·07	41·8
1897	7·44	174·83	8·34	347·75	26·2
1898	7·15	172·68	8·21	342·20	26·7
Mittel	7·57	177·50	8·20	346·88	40·3

III. Vertikalkomponente $= Z$.

Jahr	$A_{1,r}$	$C_{1,r}$	$A_{2,r}$	$C_{2,r}$	r
1884	22·58	114°23	10·28	272°65	63·5
1885	18·41	110·67	8·90	267·25	52·2
1886	13·91	113·72	7·28	261·15	25·4
1887	10·94	120·68	5·53	270·73	13·1
1888	11·50	116·43	6·63	263·53	6·8
1889	12·19	115·35	7·08	264·96	6·3
1890	12·72	115·97	6·20	268·34	7·1
1891	15·92	112·33	8·00	263·80	35·6
1892	16·67	107·52	9·53	265·40	73·0
1893	16·80	102·12	9·00	260·67	84·9
1894	15·66	103·65	8·09	260·50	78·0
1895	15·30	108·40	8·22	258·85	64·0
1896	11·85	109·17	6·25	251·13	41·8
1897	11·37	109·77	6·23	254·97	26·2
1898	12·50	106·73	6·43	255·50	26·7
Mittel	14·83	111·18	7·66	263·33	40·3

Betrachtet man die Zahlen dieser Tabellen mit einiger Aufmerksamkeit, so wird man wahrnehmen, daß sowohl die Amplituden A als auch die Phasenwinkel C eine deutlich ausgesprochene Abhängigkeit von den Sonnenflecken-Relativzahlen r zeigen, die ich zunächst nach dem Vorgange Wolf's und Schmidt's durch die Ausdrücke:

$$A = A_0 + br, \qquad C = C_0 + \beta r \tag{2}$$

dargestellt habe, wobei A_0, C_0, b, β konstante Größen bedeuten, die aus den vorstehenden Daten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können. Auf diese Weise ergaben sich die Formeln:

für X

$$A_1 = 16·238 + 0·12693\,r \qquad A_2 = 7·208 + 0·05362\,r$$
$$C_1 = 301·174 - 0·11779\,r \qquad C_2 = 123·486 - 0·12552\,r$$

für Y

$$A_1 = 5·890 + 0·04347\,r \qquad A_2 = 6·453 + 0·04128\,r$$
$$C_1 = 178·914 - 0·03758\,r \qquad C_2 = 346·429 + 0·00711\,r$$

für Z

$$A_1 = 11·190 + 0·08344\,r \qquad A_2 = 5·802 + 0·04402\,r$$
$$C_1 = 117·087 - 0·16024\,r \qquad C_2 = 263·394 - 0·01883\,r$$

Um ersichtlich zu machen, wie die nach diesen Formeln für die einzelnen Jahre berechneten Werte von A und C mit den in den Tabellen I, II, III stehenden übereinstimmen, habe ich die Differenzen (Wert der Tabelle — berechneter Wert) in den nachfolgenden Tabellen zusammengestellt. In der letzten Vertikalkolumne der Tabelle IV sind die Werte der Amplitude A_1 der X-Komponente nach der Formel:

$$A_1 = 16\cdot370 + 0\cdot11713\,r + 0\cdot000113\,r^2$$

gerechnet worden, weil ich sehen wollte, ob durch Hinzufügung eines quadratischen Gliedes eine bessere Übereinstimmung zwischen den Werten der Tabelle I und den berechneten Werten erzielt werden kann. Nun sind aber die Unterschiede zwischen den Zahlen der ersten und letzten Kolumne der Tabelle IV so gering, daß sich dadurch keine beachtenswerte Änderung in den Differenzen ergeben hat.

IV. Differenzen der Amplituden.

	X		Y		Z		X
Jahr	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_1
1884	1·12	1·05	—1·32	—0·16	6·09	1·68	1·16
1885	0·36	—0·25	—0·79	—0·87	2·86	0·80	0·43
1886	0·24	—0·06	—0·03	—0·15	0·60	0·36	0·28
1887	0·15	0·06	—0·34	—0·74	—1·34	—0·83	0·13
1888	0·33	0·04	—0·46	—0·09	—0·26	0·53	0·36
1889	—0·25	0·21	—0·20	0·26	0·47	1·00	—0·32
1890	0·26	0·51	0·13	—0·03	0·94	0·09	0·19
1891	0·87	0·23	—0·24	—0·74	1·76	0·63	1·09
1892	0·42	0·36	0·76	0·25	—0·61	0·52	0·40
1893	0·11	0·11	0·75	—0·04	—1·47	—0·70	—0·01
1894	—0·85	—0·41	0·66	0·04	—2·04	—1·14	—0·90
1895	—0·10	—0·11	0·23	0·19	—1·23	—0·40	—0·07
1896	—1·73	—1·02	0·34	0·62	—2·83	—1·39	—1·65
1897	—0·35	—0·66	0·41	0·81	—2·01	—0·72	—0·31
1898	—0·56	—0·04	0·10	0·65	—0·92	—0·58	—0·52
Mittel	0·12	0·05	—0·19	0·08	0·28	0·08	0·20

Die Differenzen sind bei X und Y klein, bei Z werden sie aber ungebührlich groß. Auch die Differenzen ΔC der Tabelle V sind mit Ausnahme von ΔC_2 bei Z nicht besonders groß; sie

zeigen aber sowie auch jene der Tabelle IV eine systematische Anordnung, so daß sie nicht als zufällige Abweichungen angesehen werden können. Während die ΔA bei X und Z in den ersten Jahren vorwiegend positiv sind, werden sie in den letzten Jahren negativ. Bei Y sehen wir das Umgekehrte eintreten.

V. Differenzen der Phasenwinkel.

	X		Y		Z	
Jahr	ΔC_1	ΔC_2	ΔC_1	ΔC_2	ΔC_1	ΔC_2
1884	−0°87	1°96	3°03	5°64	7°32	10°45
1885	0·20	1·77	5·15	0·88	1·95	4·84
1886	3·00	0·15	4·76	0·09	0·70	− 1·77
1887	4·17	5·47	5·05	3·53	5·69	7·58
1888	0·88	−2·21	2·74	2·24	0·43	0·28
1889	−0·90	−0·67	−1·56	−1·69	−0·73	1·68
1890	−3·74	2·38	−4·18	2·37	0·02	5·17
1891	−1·26	−1·69	1·70	−4·68	0·95	1·08
1892	1·92	0·01	2·97	0·75	2·13	3·38
1893	−3·37	−2·91	−2·05	−0·91	−1·36	− 1·13
1894	1·23	2·93	1·25	1·14	−0·94	− 1·43
1895	1·06	−1·90	−1·99	−1·41	1·57	− 3·34
1896	1·07	−3·84	−2·76	−4·66	−1·22	−11·48
1897	−2·51	−2·53	−3·10	1·14	−3·12	− 7·93
1898	−1·16	0·81	−5·23	−4·42	−6·08	− 7·39
Mittel	−0·6	−0·9	0·1	0·7	0·5	0·7

Eine ähnliche Anordnung läßt sich auch bei den Differenzen ΔC beobachten. Es ist dies ein Beweis, daß sich die Größen A und C durch die vorangehenden Formeln nicht richtig darstellen lassen und es entsteht die Frage, wie man zu einer die bezeichneten Größen besser darstellenden Formel gelangen könnte. Ich glaube auf Grund folgender Betrachtung eine solche gefunden zu haben. Die Sonnenflecken zeigen nicht nur eine 11jährige, sondern auch eine nahezu dreimal so lange Periode, wie ich in einer kleinen Mitteilung in der Meteor. Zeitschrift, 1902, p. 237, nachgewiesen zu haben glaube, und außerdem noch eine längere, deren Dauer uns vorläufig unbekannt ist. Wenn nun die Sonne in einer gewissen Zeitperiode eine größere Tätigkeit entfaltet, die sich uns durch einen größeren Fleckenreichtum offenbart, so wird auch eine vermehrte Wirkung auf

die erdmagnetischen Elemente ausgeübt werden, die aber nicht einfach der Sonnenflecken-Relativzahl, die wir als Maß der Sonnentätigkeit betrachten, proportional, sondern abhängig ist von der Steigerung derselben von einem gewissen Wert an. Bezeichnet nun r die einem bestimmten Jahre zukommende Relativzahl, r' und r'' jene Werte, welche demselben Jahr in der etwas mehr als 30jährigen, beziehungsweise der noch längeren Periode entsprechen, so habe ich gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} A &= A'_0+a(r-r')+c(r'-r'') \\ C &= C'_0+\alpha(r-r')+\gamma(r'-r'') \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Um die Werte r' und r'' für die aufeinanderfolgenden Jahre zu ermitteln, habe ich denselben Weg gewählt, den man zur Bestimmung des jährlichen Ganges eines meteorologischen Elementes einschlägt. Jede 11jährige Sonnenfleckenperiode entspricht dann einem Tag und man kann, indem man das Mittel aller Werte von einem Fleckenminimum bis zum nächsten bildet, einen mittleren Fleckenstand dieser Periode ableiten. Trägt man die so erhaltenen Mittelwerte als Ordinaten, die Zeit als Abszisse in ein quadrilliertes Papier ein und verbindet die Endpunkte der Ordinaten durch eine Kurve, so kann man der letzteren den mittleren Fleckenstand für jedes Jahr entnehmen. Auf diese Weise fand ich:[1]

Jahr . .	1838·0	1849·5	1861·5	1872·5	1883·5	1894·5
r'	65·2	53·6	49·6	56·6	34·6	41·6

Die nach diesen Daten gezeichnete Kurve zeigt, daß die Maxima und Minima seit 1840 immer tiefer ausfallen, so daß man auf eine noch längere Periode schließen muß. Von der diese Periode darstellenden Kurve konnte ich nur annähernd ein Stück ziehen, an dem die Werte r'' abgelesen wurden. Eine Zusammenstellung der Werte r, r', r'' sowie der Differenzen $r-r', r'-r''$ enthält folgende Tabelle.

---

[1] Den Relativzahlen r besser entsprechende Werte r' könnte man erhalten, wenn man die r durch eine Kurve darstellen und für jede 11jährige Periode den Flächeninhalt des Kurvenstückes bestimmen würde. Ich glaubte, mich bei dieser Untersuchung mit den oben angeführten Zahlen begnügen zu können.

Jahr	r	r'	r''	$r-r'$	$r'-r''$
1884	63·5	34·0	40·3	29·5	— 6·3
1885	52·2	34·0	40·0	18·2	— 6·0
1886	25·4	34·1	39·2	— 8·7	— 5·1
1887	13·1	34·7	38·8	—21·6	— 4·1
1888	6·8	35·6	38·1	—28·8	— 2·5
1889	6·3	36·3	37·6	—30·0	— 1·3
1890	7·1	37·0	37·0	—29·9	0·0
1891	35·6	38·0	36·6	— 2·4	1·4
1892	73·0	39·2	35·9	33·8	3·3
1893	84·9	40·5	35·1	44·4	5·4
1894	78·0	41·6	34·7	36·4	6·9
1895	64·0	42·5	34·2	21·5	8·3
1896	41·8	43·4	33·8	— 1·6	9·6
1897	26·2	44·5	33·2	—18·3	11·2
1898	26·7	45·5	32·8	—18·8	12·7
Mittel	40·3	38·7	36·5	1·6	2·2

Werden die Werte von $r-r'$ und $r'-r''$ in die Formeln 3) eingesetzt und die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt, so ergeben sich zur Berechnung der Amplituden A und der Phasenwinkel C folgende Ausdrücke:

für X

$$A_1 = 21\cdot136+0\cdot13167(r-r')+0\cdot00438(r'-r'')$$
$$A_2 = 9\cdot335+0\cdot05670(r-r')-0\cdot02709(r'-r'')$$
$$C_1 = 296\cdot66 -0\cdot11226(r-r')-0\cdot17539(r'-r'')$$
$$C_2 = 119\cdot20 -0\cdot12711(r-r')-0\cdot26394(r'-r'')$$

für Y

$$A_1 = 7\cdot367+0\cdot04705(r-r')+0\cdot08994(r'-r'')$$
$$A_2 = 7\cdot873+0\cdot02778(r-r')+0\cdot08955(r'-r'')$$
$$C_1 = 178\cdot24 -0\cdot01820(r-r')-0\cdot36201(r'-r'')$$
$$C_2 = 347\cdot28 +0\cdot02319(r-r')-0\cdot27286(r'-r'')$$

für Z

$$A_1 = 14\cdot850+0\cdot09801(r-r')-0\cdot20166(r'-r'')$$
$$A_2 = 7\cdot658+0\cdot04622(r-r')-0\cdot06916(r'-r'')$$
$$C_1 = 112\cdot41 -0\cdot12189(r-r')-0\cdot49774(r'-r'')$$
$$C_2 = 264\cdot31 +0\cdot02571(r-r')-0\cdot77848(r'-r'')$$

Die nach diesen Formeln berechneten Werte der A und C geben gegen jene der Tabellen I, II, III nachfolgende Differenzen.

VI. Differenzen der Amplituden.

	X		Y		Z	
Jahr	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_1	ΔA_2	ΔA_1	ΔA_2
1884	0·43	0·58	—0·86	0·78	3·66	0·82
1885	—0·29	—0·78	—0·31	—0·10	0·57	—0·01
1886	—0·27	—0·48	0·46	0·17	—1·11	—0·33
1887	—0·21	—0·25	0·14	—0·66	—1·62	—1·41
1888	0·10	—0·16	—0·05	—0·21	—1·03	0·13
1889	—0·39	0·08	0·12	0·05	0·02	0·72
1890	0·20	0·45	0·37	—0·32	0·80	—0·08
1891	0·80	0·18	—0·18	—0·75	1·59	0·55
1892	0·32	0·32	0·57	0·61	—0·83	0·54
1893	0·12	0·16	0·39	0·33	—1·31	—0·34
1894	—0·67	—0·24	0·24	0·21	—1·37	—0·77
1895	0·26	0·19	—0·22	0·08	0·02	0·14
1896	—1·16	—0·56	—0·10	0·11	1·09	—0·67
1897	0·43	—0·09	—0·07	—0·03	0·57	0·19
1898	0·34	0·66	—0·47	—0·28	2·05	0·46
Mittel	0·11	0·05	—0·07	0·00	0·27	0·08

Die Anordnung der Differenzen ΔA und ΔC, mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen, ist nicht mehr systematisch wie nach der früheren Darstellung (Tabelle IV und V); sie sind aber auch kleiner geworden, denn die Summe ihrer Quadrate beträgt:

	X		Y		Z	
	$\Sigma\Delta A_1^2$	$\Sigma\Delta A_2^2$	$\Sigma\Delta A_1^2$	$\Sigma\Delta A_2^2$	$\Sigma\Delta A_1^2$	$\Sigma\Delta A_2^2$
nach Tabelle IV ...	6·79	3·32	4·73	3·54	72·80	10·97
» » VI ...	3·50	2·48	2·07	2·42	32·10	5·33
	$\Sigma\Delta C_1^2$	$\Sigma\Delta C_2^2$	$\Sigma\Delta C_1^2$	$\Sigma\Delta C_2^2$	$\Sigma\Delta C_1^2$	$\Sigma\Delta C_2^2$
nach Tabelle V	70·87	92·35	177·28	127·69	149·78	499·20
» » VII...	63·59	72·02	111·38	77·59	51·44	146·36

VII. Differenz der Phasenwinkel.

	X		Y		Z	
Jahr	ΔC_1	ΔC_2	ΔC_1	ΔC_2	ΔC_1	ΔC_2
1884	—1°7	0°6	—6°5	2°5	2°3	2°6
1885	—0·8	0·2	2·0	—1·6	—2·5	—2·2
1886	2·3	—1·3	2·5	—1·8	—2·3	—7·0
1887	3·7	4·6	3·4	2·1	3·6	3·8
1888	0·5	—3·1	1·8	1·4	—0·7	—2·0
1889	—1·1	—1·4	—2·2	—2·1	—1·4	0·5
1890	—3·7	2·0	—4·3	2·2	0·0	4·8
1891	—1·3	—1·8	1·5	—4·8	0·3	0·6
1892	1·9	0·3	3·0	0·5	0·8	2·8
1893	—2·9	—2·2	—1·8	—0·7	—2·2	—0·5
1894	1·5	3·8	2·1	1·8	—1·0	0·6
1895	1·6	—0·8	—0·3	0·0	2·7	0·3
1896	1·8	—2·5	—0·2	—2·5	1·4	—5·7
1897	—1·3	—0·9	0·3	3·9	0·7	—0·1
1898	0·0	1·7	—1·3	—1·2	—1·7	1·6
Mittel	—0·3	—0·8	0·1	0·2	0·1	0·7

Durch die Formeln 3) werden demnach die Amplituden und Phasenwinkel viel besser dargestellt als durch die Formeln 2), bei welchen A und C einfach proportional den Sonnenflecken-Relativzahlen r angenommen worden ist. Aus den letzteren Formeln folgt, daß die Werte von A und C bei demselben Werte r verschieden ausfallen werden, wenn r' und r'' andere Werte annehmen. Als Beispiel hiefür mögen die Jahre 1886 und 1897 angeführt werden, in welchen r nur wenig verschieden war. Die Rechnung ergab folgende Amplituden:

	X		Y		Z		
Jahr	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	r
1886	19·97	8·98	6·50	7·18	15·02	7·61	25·4
1897	18·78	8·04	7·51	8·37	10·80	6·04	26·2

Nachdem nun die Amplituden und Phasenwinkel als Funktionen der Sonnenflecken-Relativzahlen dargestellt worden sind,

läßt sich der mittlere tägliche Gang eines beliebigen Jahres nach folgenden Formeln berechnen:

Für X

$$y = [21\cdot136+0\cdot13167(r-r')+0\cdot00438(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[296\cdot66-0\cdot11226(r-r')-0\cdot17539(r'-r'')+15x]+$$
$$+[9\cdot335+0\cdot05670(r-r')-0\cdot02709(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[119\cdot20-0\cdot12711(r-r')-0\cdot26394(r'-r'')+30x]$$

für Y

$$y = [7\cdot367+0\cdot04705(r-r')+0\cdot08994(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[178\cdot24-0\cdot01820(r-r')-0\cdot36201(r'-r'')+15x]+$$
$$+[7\cdot873+0\cdot02778(r-r')+0\cdot08955(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[347\cdot28+0\cdot02319(r-r')-0\cdot27286(r'-r'')+30x]$$

für Z

$$y = [14\cdot850+0\cdot09801(r-r')-0\cdot20166(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[112\cdot41-0\cdot12189(r-r')-0\cdot49774(r'-r'')+15x]+$$
$$+[7\cdot658+0\cdot04622(r-r')-0\cdot06916(r'-r'')]\times$$
$$\times\sin[264\cdot31+0\cdot02571(r-r')-0\cdot77848(r'-r'')+30x]$$

Hierin sind die Werte $r-r'$ und $r'-r''$ für das betreffende Jahr einzusetzen. Es genügen somit zur Darstellung des mittleren täglichen Ganges der ganzen Beobachtungsreihe die vorstehenden drei Ausdrücke.[1] Ja man könnte nach ihnen auch den mittleren täglichen Gang der vorhergehenden oder nachfolgenden Jahre berechnen, wenn die Werte r, r', r'' ermittelt worden sind, was in keiner andern Weise möglich wäre. Dies letztere gilt selbstverständlich nur unter der Voraussetzung, daß die von mir hier aufgestellte Relation zwischen den Amplituden und Phasenwinkeln einerseits und den Sonnenflecken-Relativzahlen anderseits wirklich zutrifft, was ich mit Rücksicht

[1] Soweit sich derselbe selbstverständlich durch die zwei ersten Glieder wiedergeben läßt.

auf die verhältnismäßig kurze Beobachtungsreihe noch nicht als sicher erwiesen hinstellen möchte.

Aus den vorhergehenden Formeln ist die interessante Tatsache zu entnehmen, daß eine Änderung im Fleckenstande der Sonne, oder richtiger gesagt im Zustande derselben, nicht nur eine Änderung der Amplituden, sondern auch der Phasen zur Folge hat. Die Amplitudenänderung und Phasenverschiebung ist aber bei demselben Werte von r nicht immer gleich, da beide auch von den Werten von r' und r'' abhängen.

Die Formeln 3) für A und C können auch geschrieben werden:

$$A_{r,r',r''} = A'_0 + ar + (c-a)r' - cr''$$
$$C_{r,r',r''} = C'_0 + \alpha r + (\gamma - \alpha) r' - \gamma r''$$

oder wenn $c-a = b$, $\gamma - \alpha = \beta$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} A_{r,r',r''} &= A'_0 + ar + br' - cr'' \\ C_{r,r',r''} &= C'_0 + \alpha r + \beta r' - \gamma r'' \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

wobei der Index r, r', r'' andeuten soll, daß die Werte von A und C den Sonnenflecken-Relativzahlen r, r', r'' entsprechen.

Diese Formeln kann man dazu benützen, um den bei den Werten r, r', r'' beobachteten täglichen Gang auf den Fleckenstand r_0, r'_0, r''_0 zu reduzieren und dadurch den zu verschiedenen Zeiten an einem bestimmten Ort oder auch an verschiedenen Punkten auftretenden Gang vergleichbar zu machen. Denn es ist immer

$$A_{r_0,r'_0,r''_0} = A_{r,r',r''} - a(r-r_0) - b(r'-r'_0) + c(r''-r''_0)$$
$$C_{r_0,r'_0,r''_0} = C_{r,r',r''} - \alpha(r-r_0) - \beta(r'-r'_0) + \gamma(r''-r''_0)$$

Hieraus ersieht man neuerdings die Wichtigkeit der Darstellung der erdmagnetischen Variation durch periodische Reihen, die von Ad. Schmidt so oft und nachdrücklich betont worden ist.

Nach diesen kurzen Ausführungen über die Abhängigkeit des mittleren täglichen Ganges von den Sonnenflecken soll nun im folgenden der tägliche Gang der einzelnen Monate

erörtert werden. Ich will mich hiebei sehr kurz fassen und mich hauptsächlich auf die Wiedergabe der Rechnungsresultate beschränken, da ich bei einer eingehenderen Diskussion derselben vieles wiederholen müßte, was bereits Ad. Schmidt gesagt hat.

Das bei dieser Untersuchung verwendete Zahlenmaterial, welches der früher erwähnten Publikation des Observatoriums in Batavia entnommen wurde, habe ich im Anhang in den Tabellen XXVI bis XXXI wiedergegeben, da diese Publikation nicht jedermann leicht zugänglich ist. In den weiteren Tabellen XXXII bis XXXVI sind die Sonnenflecken-Relativzahlen r und die aus ihnen abgeleiteten Werte r' und r'' sowie die Differenzen $r-r'$ und $r'-r''$ zusammengestellt. Mit Zugrundelegung dieser Daten habe ich die Konstanten der Formeln 3) für die einzelnen Monate berechnet und erhielt als Ausdrücke, welche die Abhängigkeit der Amplituden und Phasenwinkel vom Sonnenfleckenstande darstellen, folgende Formeln:

VIII. Für X.

$A^{I}_{r,r',r''}$

Jänner	$19\cdot664+0\cdot11833(r-r')+0\cdot09950(r'-r'')$
Februar	$19\cdot271+0\cdot11307(r-r')+0\cdot04939(r'-r'')$
März	$23\cdot067+0\cdot15138(r-r')+0\cdot04025(r'-r'')$
April	$24\cdot018+0\cdot11972(r-r')-0\cdot07704(r'-r'')$
Mai	$21\cdot639+0\cdot12005(r-r')+0\cdot08109(r'-r'')$
Juni	$20\cdot018+0\cdot12588(r-r')-0\cdot01844(r'-r'')$
Juli	$20\cdot926+0\cdot11312(r-r')+0\cdot07040(r'-r'')$
August	$23\cdot328+0\cdot10552(r-r')-0\cdot01825(r'-r'')$
September	$35\cdot097+0\cdot17383(r-r')-0\cdot16824(r'-r'')$
Oktober	$22\cdot483+0\cdot14828(r-r')-0\cdot05840(r'-r'')$
November.....	$19\cdot206+0\cdot14541(r-r')-0\cdot01797(r'-r'')$
Dezember.....	$16\cdot917+0\cdot10589(r-r')-0\cdot01715(r'-r'')$
Jahr..........	$21\cdot136+0\cdot13167(r-r')+0\cdot00438(r'-r'')$

$A^{II}_{r,r',r''}$

Jänner........	$9\cdot328+0\cdot07221(r-r')+0\cdot02105(r'-r'')$
Februar.......	$9\cdot053+0\cdot03998(r-r')-0\cdot03323(r'-r'')$
März.........	$10\cdot590+0\cdot07935(r-r')+0\cdot01554(r'-r'')$
April.........	$10\cdot677+0\cdot04636(r-r')-0\cdot05702(r'-r'')$
Mai..........	$8\cdot951+0\cdot04626(r-r')+0\cdot00043(r'-r'')$
Juni..........	$8\cdot455+0\cdot05533(r-r')-0\cdot01229(r'-r'')$
Juli..........	$9\cdot264+0\cdot02882(r-r')+0\cdot02382(r'-r'')$
August.......	$10\cdot398+0\cdot05108(r-r')+0\cdot01009(r'-r'')$
September....	$11\cdot088+0\cdot05747(r-r')-0\cdot11971(r'-r'')$
Oktober......	$10\cdot316+0\cdot06958(r-r')+0\cdot01777(r'-r'')$
November.....	$8\cdot013+0\cdot05812(r-r')+0\cdot02375(r'-r'')$
Dezember.....	$7\cdot377+0\cdot06224(r-r')-0\cdot04649(r'-r'')$
Jahr.........	$9\cdot335+0\cdot05699(r-r')-0\cdot02709(r'-r'')$

IX. Für X.

$C^{I}_{r,r',r''}$

Jänner........	$291^\circ41-0\cdot11643(r-r')-0\cdot19054(r'-r'')$
Februar......	$290\cdot12-0\cdot08653(r-r')+0\cdot12030(r'-r'')$
März.........	$291\cdot05-0\cdot13385(r-r')-0\cdot20021(r'-r'')$
April.........	$297\cdot02-0\cdot14546(r-r')-0\cdot07412(r'-r'')$
Mai..........	$301\cdot69-0\cdot07501(r-r')-0.09564(r'-r'')$
Juni..........	$299\cdot71-0\cdot03076(r-r')-0\cdot20632(r'-r')$
Juli..........	$298\cdot09-0\cdot03242(r-r')-0\cdot14793(r'-r'')$
August.......	$300\cdot52-0\cdot09259(r-r')-0\cdot19724(r'-r'')$
September....	$300\cdot08-0\cdot13058(r-r')-0\cdot10668(r'-r'')$
Oktober......	$296\cdot03-0\cdot10724(r-r')-0\cdot16972(r'-r'')$
November.....	$297\cdot75-0\cdot26766(r-r')-0\cdot31394(r'-r'')$
Dezember.....	$296\cdot42-0\cdot15166(r-r')-0\cdot17870(r'-r'')$
Jahr.........	$296\cdot99-0\cdot11226(r-r')-0\cdot17539(r'-r'')$

$C^{II}_{r,r',r''}$

Jänner	$109\cdot88-0\cdot16767(r-r')-0\cdot22181(r'-r'')$
Februar	$109\cdot57-0\cdot10508(r-r')-0\cdot59828(r'-r'')$
März	$110\cdot74-0\cdot13497(r-r')-0\cdot04148(r'-r'')$
April	$117\cdot72-0\cdot15938(r-r')-0\cdot22870(r'-r'')$
Mai	$124\cdot07-0\cdot07949(r-r')-0\cdot27496(r'-r'')$
Juni	$122\cdot64-0\cdot13816(r-r')-0\cdot01677(r'-r'')$
Juli	$123\cdot67-0\cdot05831(r-r')-0\cdot40429(r'-r'')$
August	$126\cdot69-0\cdot06198(r-r')-0\cdot36167(r'-r'')$
September	$123\cdot00-0\cdot10384(r-r')-0\cdot16323(r'-r'')$
Oktober	$116\cdot41-0\cdot09022(r-r')-0\cdot36095(r'-r'')$
November	$119\cdot56-0\cdot30223(r-r')+0\cdot21888(r'-r'')$
Dezember	$123\cdot56-0\cdot24083(r-r')-0\cdot54802(r'-r'')$
Jahr	$119\cdot20-0\cdot12711(r-r')-0\cdot26394(r'-r'')$

X. Für Y.

$A^{I}_{r,r',r''}$

Jänner	$13\cdot436+0\cdot04104(r-r')+0\cdot17163(r'-r'')$
Februar	$13\cdot402+0\cdot02818(r-r')+0\cdot11565(r'-r'')$
März	$10\cdot182+0\cdot04776(r-r')+0\cdot07737(r'-r'')$
April	$5\cdot845+0\cdot04424(r-r')+0\cdot06198(r'-r'')$
Mai	$2\cdot197+0\cdot04899(r-r')+0\cdot06223(r'-r'')$
Juni	$1\cdot840-0\cdot00361(r-r')-0\cdot01739(r'-r'')$
Juli	$1\cdot658+0\cdot01433(r-r')+0\cdot01337(r'-r'')$
August	$3\cdot814+0\cdot03449(r-r')+0\cdot05876(r'-r'')$
September	$7\cdot161+0\cdot04655(r-r')+0\cdot19042(r'-r'')$
Oktober	$10\cdot933+0\cdot03051(r-r')+0\cdot12919(r'-r'')$
November	$13\cdot440+0\cdot03094(r-r')+0\cdot01673(r'-r'')$
Dezember	$13\cdot542+0\cdot04535(r-r')+0\cdot08070(r'-r'')$
Jahr	$7\cdot367+0\cdot04705(r-r')+0\cdot08994(r'-r'')$

$A^{II}_{r,\,r',\,r''}$

Jänner	$9\cdot002+0\cdot06251(r-r')+0\cdot19489(r'-r'')$
Februar	$11\cdot078+0\cdot03769(r-r')+0\cdot12089(r'-r'')$
März	$8\cdot517+0\cdot03126(r-r')+0\cdot02293(r'-r'')$
April	$7\cdot443+0\cdot02071(r-r')+0\cdot00597(r'-r'')$
Mai	$7\cdot674+0\cdot04495(r-r')+0\cdot02533(r'-r'')$
Juni	$6\cdot054+0\cdot02634(r-r')+0\cdot00041(r'-r'')$
Juli	$7\cdot293+0\cdot03524(r-r')+0\cdot06306(r'-r'')$
August	$10\cdot177+0\cdot03469(r-r')-0\cdot01906(r'-r'')$
September	$10\cdot566+0\cdot03754(r-r')+0\cdot12567(r'-r'')$
Oktober	$11\cdot477+0\cdot04509(r-r')+0\cdot09996(r'-r'')$
November	$11\cdot450+0\cdot04488(r-r')+0\cdot04076(r'-r'')$
Dezember	$9\cdot706+0\cdot06174(r-r')+0\cdot05539(r'-r'')$
Jahr	$7\cdot873+0\cdot02778(r-r')+0\cdot08955(r'-r'')$

XI. Für *Y*.

$C^{I}_{r,\,r',\,r''}$

Jänner	$180^\circ74-0\cdot05466(r-r')-0\cdot37871(r'-r'')$
Februar	$181\cdot50+0\cdot08324(r-r')-0\cdot56238(r'-r'')$
März	$189\cdot25-0\cdot07117(r-r')-0\cdot48820(r'-r'')$
April	$173\cdot70+0\cdot12021(r-r')-0\cdot45373(r'-r'')$
Mai	$130\cdot17+0\cdot68315(r-r')+0\cdot40384(r'-r'')$
Juni	$158\cdot31+0\cdot41541(r-r')+9\cdot57377(r'-r'')$
Juli[1]	....
August[1]	....
September	$145\cdot99+0\cdot14751(r-r')-0\cdot05253(r'-r'')$
Oktober	$177\cdot39+0\cdot06817(r-r')-0\cdot55607(r'-r'')$
November	$195\cdot51+0\cdot08113(r-r')-0\cdot30064(r'-r'')$
Dezember	$187\cdot20-0\cdot00541(r-r')+0\cdot12115(r'-r'')$
Jahr	$178\cdot24-0\cdot01820(r-r')-0\cdot36201(r'-r'')$

[1] Da die Unsicherheit der Phasenwinkel in den Monaten Mai, Jani, Juli und August sehr groß ist (wegen der Kleinheit der täglichen Änderung), habe ich es unterlassen, die Phasenwinkel der Monate Juli und August als Funktionen der Sonnenflecken-Relativzahlen darzustellen.

$C^{II}_{r,r',r''}$

Jänner........	$17^\circ87+0\cdot00794(r-r')-0\cdot78746(r'-r'')$
Februar.......	$11\cdot24+0\cdot14745(r-r')-1\cdot16811(r'-r'')$
März	$12\cdot04-0\cdot13863(r-r')-1\cdot10700(r'-r'')$
April	$347\cdot86-0\cdot02819(r-r')-0\cdot67157(r'-r'')$
Mai	$313\cdot40+0\cdot05432(r-r')-0\cdot09956(r'-r'')$
Juni..........	$308\cdot43-0\cdot01015(r-r')-0\cdot22254(r'-r'')$
Juli	$308\cdot43-0\cdot00928(r-r')+0\cdot19836(r'-r'')$
August	$302\cdot84+0\cdot08028(r-r')+0\cdot21414(r'-r'')$
September	$321\cdot38+0\cdot16174(r-r')-0\cdot27417(r'-r'')$
Oktober	$358\cdot96+0\cdot00689(r-r')-0\cdot53947(r'-r'')$
November.....	$18\cdot48+0\cdot12029(r-r')-0\cdot50206(r'-r'')$
Dezember.....	$16\cdot31+0\cdot02565(r-r')-0\cdot32910(r'-r'')$
Jahr..........	$347\cdot28+0\cdot02319(r-r')-0\cdot27286(r'-r'')$

XII. Für Z.

$A^{I}_{r,r',r''}$

Jänner	$16\cdot311+0\cdot09172(r-r')-0\cdot07534(r'-r'')$
Februar	$17\cdot635+0\cdot08006(r-r')-0\cdot15246(r'-r'')$
März	$18\cdot272+0\cdot10215(r-r')-0\cdot18611(r'-r'')$
April	$16\cdot319+0\cdot10177(r-r')-0\cdot30863(r'-r'')$
Mai	$13\cdot121+0\cdot08273(r-r')-0\cdot19584(r'-r'')$
Juni..........	$12\cdot870+0\cdot08495(r-r')-0\cdot21941(r'-r'')$
Juli	$13\cdot948+0\cdot06444(r-r')-0\cdot23878(r'-r'')$
August	$13\cdot311+0\cdot04722(r-r')-0\cdot24933(r'-r'')$
September	$15\cdot917+0\cdot18591(r-r')-0\cdot51987(r'-r'')$
Oktober	$17\cdot319+0\cdot12611(r-r')-0\cdot44721(r'-r'')$
November.....	$16\cdot285+0\cdot06961(r-r')-0\cdot40931(r'-r'')$
Dezember.....	$13\cdot216+0\cdot08003(r-r')-0\cdot19716(r'-r'')$
Jahr..........	$14\cdot850+0\cdot09801(r-r')-0\cdot20166(r'-r'')$

$A^{\mathrm{II}}_{r,\,r',\,r''}$

Jänner	$9\cdot825+0\cdot07135(r-r')-0\cdot00978(r'-r'')$
Februar	$10\cdot578+0\cdot04457(r-r')-0\cdot10808(r'-r'')$
März	$10\cdot734+0\cdot03757(r-r')-0\cdot19285(r'-r'')$
April	$8\cdot802+0\cdot04995(r-r')-0\cdot17238(r'-r'')$
Mai	$5\cdot458+0\cdot03581(r-r')-0\cdot03451(r'-r'')$
Juni	$4\cdot874+0\cdot02958(r-r')-0\cdot03397(r'-r'')$
Juli	$4\cdot836+0\cdot01045(r-r')-0\cdot02498(r'-r'')$
August	$4\cdot316+0\cdot02735(r-r')-0\cdot01797(r'-r'')$
September	$7\cdot655+0\cdot05746(r-r')-0\cdot10283(r'-r'')$
Oktober	$11\cdot186+0\cdot07308(r-r')-0\cdot16924(r'-r'')$
November	$9\cdot580+0\cdot07302(r-r')-0\cdot18772(r'-r'')$
Dezember	$7\cdot311+0\cdot05719(r-r')-0\cdot09483(r'-r'')$
Jahr	$7\cdot658+0\cdot04622(r-r')-0\cdot06916(r'-r'')$

XIII. Für *Z*.

$C^{\mathrm{I}}_{r,\,r',\,r''}$

Jänner	$104^\circ94-0\cdot07240(r-r')-0\cdot66432(r'-r'')$
Februar	$100\cdot02-0\cdot05279(r-r')-0\cdot22917(r'-r'')$
März	$106\cdot44-0\cdot08991(r-r')-0\cdot34511(r'-r'')$
April	$115\cdot18-0\cdot13135(r-r')-0\cdot48779(r'-r'')$
Mai	$122\cdot32-0\cdot22042(r-r')-0\cdot31796(r'-r'')$
Juni	$126\cdot37-0\cdot18644(r-r')-0\cdot70001(r'-r'')$
Juli	$123\cdot52-0\cdot12316(r-r')-0\cdot57634(r'-r'')$
August	$124\cdot28-0\cdot20196(r-r')-0\cdot28857(r'-r'')$
September	$116\cdot36-0\cdot05404(r-r')-1\cdot01368(r'-r'')$
Oktober	$107\cdot09-0\cdot02613(r-r')-0\cdot62136(r'-r'')$
November	$108\cdot81-0\cdot02684(r-r')-0\cdot47130(r'-r'')$
Dezember	$104\cdot20-0\cdot00659(r-r')-0\cdot31636(r'-r'')$
Jahr	$112\cdot41-0\cdot12189(r-r')-0\cdot49774(r'-r'')$

$C^{II}_{r, r', r''}$

Jänner	$271^\circ 30 - 0 \cdot 02549 (r - r') - 0 \cdot 61740 (r' - r'')$
Februar	$261 \cdot 74 - 0 \cdot 01047 (r - r') - 1 \cdot 15419 (r' - r'')$
März	$269 \cdot 70 - 0 \cdot 13887 (r - r') - 0 \cdot 77961 (r' - r'')$
April	$270 \cdot 01 + 0 \cdot 01110 (r - r') - 1 \cdot 08133 (r' - r'')$
Mai	$255 \cdot 27 + 0 \cdot 31691 (r - r') - 0 \cdot 71850 (r' - r'')$
Juni	$266 \cdot 01 + 0 \cdot 04494 (r - r') - 0 \cdot 50959 (r' - r'')$
Juli	$267 \cdot 80 + 0 \cdot 01437 (r - r') - 1 \cdot 05600 (r' - r'')$
August	$254 \cdot 02 + 0 \cdot 10477 (r - r') - 0 \cdot 59050 (r' - r'')$
September	$256 \cdot 87 + 0 \cdot 11267 (r - r') - 1 \cdot 19129 (r' - r'')$
Oktober	$261 \cdot 45 + 0 \cdot 07505 (r - r') - 0 \cdot 63700 (r' - r'')$
November	$263 \cdot 39 + 0 \cdot 11994 (r - r') - 0 \cdot 36917 (r' - r'')$
Dezember	$263 \cdot 90 - 0 \cdot 05525 (r - r') - 0 \cdot 69975 (r' - r'')$
Jahr	$264 \cdot 31 + 0 \cdot 02571 (r - r') - 0 \cdot 77848 (r' - r'')$

Die nach diesen Formeln für die einzelnen Monate berechneten Werte geben gegen die in den Tabellen XXVI bis XXXI stehenden Amplituden beziehungsweise Phasenwinkel nachfolgende Differenzen.

XIV. Für X.

$\Delta A^{1}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	−1·50	1·35	−1·38	−1·22	0·18	0·95	−0·46	0·95	2·82
1884	1·16	−1·07	−0·28	1·70	0·78	4·02	0·79	−0·47	−2·85	0·32	1·73	−0·21
1885	−1·87	0·80	−0·60	2·18	−0·68	−3·38	−1·29	1·09	0·46	0·94	−0·19	1·05
1886	2·16	−0·64	−2·34	−3·40	−0·35	1·33	1·92	0·77	−0·47	0·10	0·11	−3·74
1887	−0·29	−0·40	1·94	−1·59	−2·05	−0·64	−0·91	−1·03	0·63	1·27	0·42	−1·00
1888	1·19	3·63	−0·23	0·78	−1·15	−0·21	−0·13	−1·24	0·44	−1·48	−1·22	−1·36
1889	0·02	−2·44	−2·13	−0·72	0·28	0·65	1·45	−0·31	−0·68	−1·90	−0·87	−0·19
1890	−0·92	−0·50	−0·39	0·48	−0·09	0·22	−1·48	0·60	0·12	0·26	−0·26	1·38
1891	0·68	−0·62	3·06	0·34	2·38	−1·98	−0·76	0·42	0·66	−0·58	−0·52	4·72
1892	1·03	1·35	0·39	0·18	1·64	2·75	1·84	−0·14	1·99	1·25	−1·79	−3·36
1893	−1·63	1·17	2·91	1·98	−0·79	0·74	−0·90	−0·89	0·91	2·38	−1·18	0·02
1894	−1·93	−0·08	0·13	−1·58	−1·75	−2·13	0·10	3·29	0·45	−1·78	0·20	1·45
1895	0·54	1·84	3·67	−0·45	0·46	0·07	3·42	−1·79	−0·78	−2·52	1·35	−1·25
1896	0·25	−4·60	−3·80	−0·92	0·04	−3·05	−0·63	−0·99	−0·98	1·51	0·01	−1·99
1897	3·48	0·53	−1·58	0·24	−0·03	1·76	−1·89	0·49	−1·26	1·36	0·34	0·94
1898	−1·98	0·00	−0·86	2·31	−0·05	1·23	−0·30	0·02	0·39	−0·66	0·91	0·74
1899	−1·88	1·02	0·12	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XV. Für X.

$\Delta A^{II}_{r, r', r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	—2·02	1·44	—0·83	—0·26	—0·59	0·47	0·55	1·02	2·41
1884	1·28	0·40	—1·34	1·58	1·32	1·64	0·28	1·06	—0·01	—0·13	0·29	0·12
1885	—0·33	0·55	—0·70	0·93	—0·76	—1·59	—0·65	—0·08	—0·98	—0·98	—1·46	—0·52
1886	—1·41	—1·01	—2·25	—0·87	0·22	1·18	0·70	—0·93	0·16	0·36	—0·02	—1·00
1887	0·11	—0·70	1·52	—1·70	—0·92	—1·13	—0·75	—0·11	—0·12	1·18	0·99	—0·64
1888	—0·27	2·23	0·56	0·53	—0·66	—0·62	—0·61	—0·34	—0·50	—1·28	0·04	—1·18
1889	0·60	—1·33	—0·02	0·12	0·39	0·75	0·48	—0·33	0·56	—0·34	—1·58	0·35
1890	—0·01	—0·89	0·48	0·20	—0·15	1·38	—0·66	1·16	0·29	0·30	1·12	1·17
1891	0·92	0·32	2·35	0·42	—1·12	—1·80	—0·06	—0·30	0·57	0·05	0·31	0·77
1892	—0·14	0·04	1·20	0·96	—0·62	2·21	3·19	1·81	—0·04	0·87	—1·09	—2·62
1893	—1·03	2·94	1·09	0·18	—0·33	—0·11	0·63	—2·27	0·38	—0·33	0·17	0·73
1894	—0·53	—0·97	—0·32	—1·22	0·35	—0·79	—2·51	3·25	—0·47	0·30	—0·49	1·26
1895	0·91	—0·85	0·93	0·31	0·19	0·49	1·49	—1·40	0·39	—1·02	—0·08	—0·84
1896	—0·49	—2·51	—2·26	0·46	—0·14	—1·42	0·03	—1·44	—0·39	0·25	0·35	—1·34
1897	0·56	0·72	—1·46	—0·30	—0·11	0·22	—2·17	0·11	—0·86	0·99	0·10	—0·74
1898	—0·19	—0·53	—0·87	0·45	0·95	0·45	0·90	0·32	0·57	—0·87	0·34	2·08
1899	—0·01	1·60	1·10	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XVI. Für X.

$\Delta C^{I}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	1°5	—1°6	1°6	0°1	—10°9	0°5	—5°7	7°0	—4°6
1884	—2·1	0·4	1·5	—1·6	5·2	—2·1	1·9	— 3·7	—1·7	0·9	—2·7	2·1
1885	2·5	—7·9	—4·5	1·1	—1·8	1·6	—2·3	8·2	0·7	0·8	—5·8	—9·3
1886	2·0	2·2	4·6	4·8	5·0	1·6	0·6	0·6	—2·1	5·1	0·1	14·5
1887	1·9	8·0	1·0	6·4	8·5	—0·8	5·2	7·2	5·6	0·3	—1·5	2·1
1888	2·9	—2·7	0·2	2·7	3·0	0·4	—2·0	0·2	—1·9	0·8	9·1	3·4
1889	—4·7	—1·8	7·1	—6·7	—1·9	1·9	—1·8	1·4	—1·2	—2·8	—1·0	—0·2
1890	0·3	—0·9	—5·3	—5·8	—9·5	—2·0	—0·9	— 3·6	—2·8	—2·4	—0·8	—9·2
1891	—7·6	1·0	—3·9	—4·5	1·2	—4·7	—3·2	— 1·1	5·8	1·8	—0·7	—4·7
1892	4·6	1·7	4·2	6·2	5·4	1·9	1·3	— 3·4	—2·9	1·1	—6·5	6·5
1893	—6·3	—3·8	—5·3	—5·2	—7·0	—4·2	—7·0	— 1·4	0·1	—3·3	1·0	2·2
1894	2·5	4·3	—7·7	—5·2	4·1	3·6	5·2	8·6	—3·7	1·1	—3·2	—4·4
1895	—0·8	1·7	1·7	0·7	—2·1	0·0	2·2	3·2	2·6	7·2	6·3	—3·1
1896	7·8	7·2	2·4	2·0	2·9	—2·1	—0·9	3·9	1·7	—1·4	—3·8	2·3
1897	—4·1	—6·6	—2·9	2·4	—2·6	1·9	1·4	— 4·5	—0·4	—3·0	1·6	3·2
1898	—0·6	—5·1	5·7	1·4	1·6	1·1	0·3	— 4·3	—0·4	—0·6	1·4	—0·8
1899	1·6	2·2	1·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XVII. Für *X*.

$\Delta C^{II}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	— 2°2	— 5°1	0°4	—0°7	—10°6	—0°1	— 1°4	— 1°1	— 5°9
1884	4·0	5·3	4·9	— 1·8	— 3·2	3·4	—0·1	— 1·7	2·9	1·8	— 0·4	— 0·5
1885	9·0	— 9·1	— 4·1	5·0	2·5	1·0	2·3	4·8	0·2	0·6	2·3	—13·2
1886	—12·8	7·1	— 5·1	1·4	1·3	—3·2	—4·8	— 5·4	0·4	2·2	0·8	12·4
1887	0·6	— 4·2	10·7	2·2	11·1	—0·6	5·3	15·1	1·6	2·9	2·5	4·9
1888	— 3·6	—14·5	— 4·4	— 2·2	1·8	—8·4	—0·6	— 2·9	—0·1	1·5	6·3	6·5
1889	2·2	— 2·6	4·5	7·1	— 3·0	—1·4	—6·3	— 3·0	—7·2	— 0·1	— 5·0	— 3·8
1890	7·6	6·2	— 3·7	0·1	2·1	6·9	4·3	2·1	3·2	— 7·7	— 4·2	6·1
1891	0·1	22·4	— 4·6	—11·6	—12·3	2·4	—1·5	1·8	—0·7	1·5	— 8·3	—12·2
1892	— 8·8	— 3·8	2·7	5·1	3·9	0·0	5·8	3·7	3·5	—14·2	— 2·1	7·2
1893	— 2·3	—10·5	— 5·6	— 3·3	— 2·2	—0·9	0·0	— 4·6	—3·3	4·8	— 1·8	9·7
1894	9·0	5·9	5·2	— 0·4	3·2	2·9	—2·6	1·4	—6·2	7·3	21·4	— 2·8
1895	— 3·9	1·0	— 1·5	3·3	— 0·5	—2·0	0·1	6·0	—1·1	1·9	— 8·2	— 1·6
1896	— 8·5	1·9	— 1·6	0·1	— 3·8	1·7	—6·1	— 4·9	2·9	1·2	— 4·8	—12·0
1897	— 4·7	1·0	— 2·8	— 9·4	0·5	3·0	4·9	1·5	2·1	— 3·2	5·0	3·4
1898	10·8	3·4	10·6	6·6	3·8	— 5·1	0·0	— 3·3	2·0	1·1	— 2·3	1·9
1899	1·4	— 9·5	— 5·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XVIII. Für Y.

$\Delta A^{I}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	—2·24	—0·62	1·88	0·02	1·99	0·92	—0·02	—2·27	—1·82
1884	—1·61	—2·12	—0·45	0·93	1·43	—0·44	0·08	1·84	—1·28	—1·90	1·03	—1·31
1885	—0·74	0·71	0·19	1·41	—1·48	1·56	—0·85	—1·22	—2·46	—0·02	0·87	0·57
1886	1·69	1·29	0·11	—0·62	—1·44	1·01	—0·47	1·14	1·33	0·02	0·45	1·04
1887	—0·42	0·08	1·68	0·12	0·35	0·14	0·61	—2·45	—0·98	1·69	0·30	0·95
1888	0·39	1·51	—0·96	—0·56	0·25	0·33	1·12	—1·20	—0·84	0·14	—1·15	0·51
1889	0·61	—0·06	—0·53	0·72	1·14	—1·07	—0·74	—1·64	1·49	—0·84	—0·67	—1·48
1890	—0·21	—1·68	—0·86	0·89	0·21	—0·06	0·33	1·67	1·69	1·17	—0·10	0·19
1891	—1·15	—0·94	—0·14	—0·71	—0·04	—1·04	—0·51	—0·70	—1·41	—0·88	0·83	0·47
1892	0·57	0·30	1·18	—0·10	0·21	0·29	—0·01	—0·29	2·92	0·01	0·45	2·67
1893	0·85	0·29	—0·38	1·94	2·02	—0·45	1·43	—0·90	1·62	1·06	—0·26	0·22
1894	0·48	1·14	0·64	0·05	—0·52	0·79	—0·24	0·82	—0·22	—0·19	1·82	0·11
1895	0·03	1·26	0·01	—1·49	—0·51	0·45	—0·70	0·20	0·38	0·22	0·09	—0·93
1896	1·18	—2·28	—0·80	0·87	—0·56	—1·09	0·68	0·69	—1·62	—0·30	0·47	—1·08
1897	0·35	0·46	—0·01	0·25	—0·03	1·22	—0·55	0·18	—1·07	—0·09	—0·98	0·94
1898	—1·04	0·06	0·10	—0·05	—0·40	—0·43	—0·19	—0·21	—0·46	—0·96	—0·85	—1·02
1899	—1·01	—0·02	0·23	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XIX. Für Y.

$\Delta A^{II}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	—1·67	—0·63	—0·56	—1·49	0·84	2·51	1·03	—0·44	0·74
1884	0·76	—1·15	1·17	2·27	1·58	1·93	2·19	1·75	—2·03	—0·46	—0·39	—1·52
1885	—0·21	2·15	0·27	0·63	—2·08	—0·54	1·04	1·44	—1·94	—0·05	—0·19	0·29
1886	0·01	—1·45	—0·55	—0·44	0·18	—0·55	0·17	0·64	0·58	—0·58	1·34	0·44
1887	—1·12	—0·48	1·60	—0·15	0·28	—0·77	—1·18	—1·22	0·41	1·12	0·83	0·27
1888	0·97	3·51	—1·28	0·27	0·42	—0·33	—1·02	—2·63	—1·60	—0·74	—0·66	0·81
1889	0·69	0·58	0·59	—1·04	—0·12	1·26	0·07	—1·68	0·54	0·08	—0·92	—1·92
1890	0·31	—2·37	—1·57	0·11	—0·38	—0·61	—0·25	0·90	1·03	0·93	0·33	0·36
1891	—1·74	—1·99	—0·30	—1·04	0·67	—0·85	—0·34	—1·17	—0·65	—1·95	0·75	0·35
1892	—0·02	0·91	0·03	0·55	1·22	0·96	0·35	—0·14	2·02	—0·43	—0·53	0·88
1893	—0·01	1·18	—1·45	0·53	—0·19	0·09	—0·69	—2·08	1·97	0·91	—1·59	0·28
1894	—0·47	—0·59	0·66	—0·54	—0·22	—0·60	—0·63	1·68	—1·05	0·76	0·34	0·71
1895	—0·55	0·96	—0·69	—1·83	—0·46	0·96	1·63	0·24	0·35	—1·03	0·85	—1·93
1896	1·82	—3·81	0·95	1·18	0·40	0·35	1·78	1·20	—1·88	—0·68	0·90	—1·31
1897	0·41	0·19	0·08	0·64	—0·29	—0·26	—1·50	0·57	—0·24	1·15	0·13	1·33
1898	—1·49	1·01	—1·00	0·55	—0·17	—0·46	—0·11	—0·32	—0·01	—0·05	—0·74	0·25
1899	0·64	1·31	1·50	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XX. Für Y.

$$\Delta C^{I}_{r, r', r''}$$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	21°0	—	—	—	—	— 7°9	— 2°2	—1°4	— 8°8
1884	—4·1	4·7	0·5	—22·7	—	—	—	—	—22·5	— 3·8	8·4	— 4·8
1885	8·8	—14·8	— 6·9	— 0·5	—	—	—	—	28·6	— 0·9	—3·5	11·4
1886	0·3	12·3	6·5	5·9	—	—	—	—	— 3·4	— 5·9	—7·7	— 0·7
1887	—6·4	5·1	4·6	14·0	—	—	—	—	— 4·2	— 1·3	—0·9	5·7
1888	—1·9	0·1	— 3·2	— 9·3	—	—	—	—	1·3	8·0	—5·5	1·6
1889	8·2	— 7·0	— 0·8	7·8	—	—	—	—	0·6	—11·5	6·0	— 3·2
1890	—6·5	0·5	— 5·7	—15·3	—	—	—	—	— 1·9	5·0	8·2	— 0·6
1891	—0·5	— 2·7	0·1	— 8·8	—	—	—	—	9·8	2·8	—1·6	2·3
1892	—0·6	— 0·3	19·1	10·0	—	—	—	—	— 1·3	2·8	—2·4	— 3·9
1893	—0·4	— 4·3	—15·9	—10·3	—	—	—	—	0·8	—4·0	1·9	4·6
1894	2·2	1·0	— 4·8	— 6·1	—	—	—	—	10·4	—1·7	—0·1	— 3·6
1895	2·6	7·2	1·4	4·6	—	—	—	—	6·5	5·6	3·5	0·4
1896	—3·3	4·4	— 3·3	— 2·8	—	—	—	—	— 2·9	9·0	—3·3	— 4·4
1897	4·2	1·8	10·0	7·9	—	—	—	—	— 9·9	—2·3	0·3	1·3
1898	1·8	— 3·0	6·9	4·6	—	—	—	—	— 3·9	0·4	—1·8	2·9
1899	—4·3	— 4·3	— 8·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XXI. Für *Y*.

$\Delta C^{II}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	— 0°6	—6°4	9°4	4°3	10°7	9°1	5°8	— 5°3	—10°7
1884	—13·7	—14·9	— 7·3	4·8	—6·8	— 3·8	7·9	8·7	— 7·6	2·1	13·7	4·0
1885	35·7	19·3	14·7	— 7·3	3·6	— 5·3	0·3	—10·0	—14·3	— 4·0	— 2·2	9·1
1886	— 3·3	— 9·2	— 3·0	— 1·8	5·9	— 7·7	2·0	5·6	2·4	— 9·2	—11·3	— 8·7
1887	—24·7	— 6·2	—16·1	—10·3	—3·1	14·4	—12·9	—15·9	—15·7	1·1	7·3	10·3
1888	6·2	5·2	10·0	18·3	—5·7	5·0	— 1·5	— 1·4	— 0·7	9·4	— 5·3	— 2·6
1889	4·6	10·1	7·2	— 3·8	7·2	—15·7	—10·7	— 0·2	5·3	— 6·7	— 3·5	—12·3
1890	0·5	— 2·4	9·5	7·3	3·4	1·5	4·1	6·8	7·9	4·3	9·5	17·8
1891	— 5·5	— 4·8	0·7	4·5	7·1	2·2	13·5	— 6·6	— 6·3	0·7	— 2·9	—11·1
1892	— 7·1	3·2	—28·3	—11·3	4·0	— 5·1	— 3·8	— 4·4	— 0·2	— 5·5	— 3·9	— 0·7
1893	0·5	12·2	26·9	— 1·5	—8·8	4·6	2·0	— 3·8	3·4	0·9	4·4	9·7
1894	4·6	6·0	— 3·2	0·4	4·0	— 2·6	0·2	7·0	1·0	— 2·2	2·7	1·8
1895	0·4	—11·8	— 0·1	4·7	2·6	7·6	0·9	8·1	3·2	— 0·3	— 2·2	0·0
1896	— 4·1	8·2	2·6	— 2·0	—4·4	— 8·3	0·6	— 4·0	1·2	4·8	— 0·1	—11·4
1897	3·1	— 7·7	—10·0	— 8·8	—3·6	11·8	— 7·3	2·9	2·6	1·5	1·8	4·3
1898	8·0	3·1	— 2·6	7·5	0·9	— 7·9	0·4	— 3·4	8·7	—2·7	— 2·4	0·4
1899	— 5·2	1·6	— 1·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XXII. Für *Z*.

$\Delta A^{\mathrm{I}}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	0·48	5·72	1·49	3·32	4·00	4·45	1·29	3·96	5·91
1884	2·57	—0·08	0·58	2·88	1·06	3·34	0·66	1·73	4·92	7·43	13·26	—2·05
1885	—4·74	1·06	—2·99	2·15	0·27	—1·46	—0·17	1·67	0·15	0·30	1·43	5·01
1886	0·14	—0·54	—0·03	—2·72	—1·17	—0·11	—0·36	—0·18	—1·97	—2·53	—5·94	—5·97
1887	—2·74	—2·65	0·48	—1·13	—3·61	—2·10	—3·26	—5·23	—3·93	—2·35	—6·40	—4·06
1888	1·25	2·44	—1·76	—1·19	—2·15	—0·65	—1·89	—3·34	—2·03	—2·21	—7·03	—0·45
1889	—0·84	—2·71	—1·51	—1·49	—2·16	—0·97	3·52	—0·02	2·12	0·02	—2·44	2·43
1890	1·53	1·23	0·39	0·32	0·44	0·83	—1·33	1·02	0·23	—0·06	—0·70	—0·56
1891	3·27	0·92	5·09	1·82	1·71	1·23	0·04	1·09	—2·28	—0·45	—0·81	2·77
1892	—0·27	3·61	2·54	—2·68	—0·08	—0·30	0·36	—0·43	—2·07	—2·63	—0·60	—4·08
1893	1·21	—0·37	0·60	—0·62	0·12	—1·02	—0·70	—2·74	—2·92	—2·03	—1·29	—1·73
1894	—2·91	—3·83	0·67	—2·71	—2·31	—2·37	—1·32	0·95	—1·49	—0·76	3·47	1·39
1895	0·52	3·58	0·41	0·28	—0·68	—0·33	0·22	0·23	—0·50	—2·17	1·75	—0·70
1896	0·65	—4·78	—2·95	0·38	1·43	—1·23	—1·60	—1·11	—0·98	1·52	0·28	—1·72
1897	1·12	0·24	—2·80	1·75	1·15	1·05	—0·01	0·32	—1·12	2·70	0·17	3·93
1898	2·38	1·90	2·53	2·78	0·27	2·59	2·53	2·13	7·43	1·96	0·87	—0·10
1899	—3·13	—0·01	—1·23	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XXIII. Für Z.

$\Delta A^{II}_{r, r', r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	0·69	1·71	—0·30	0·34	2·94	1·48	—0·32	0·29	1·64
1884	1·31	—1·65	—1·05	0·14	0·83	—0·60	—0·43	1·92	0·68	0·59	3·50	0·10
1885	—2·14	2·39	—1·66	1·52	—0·01	—0·10	—0·65	—0·93	—1·83	1·15	—0·40	2·85
1886	—0·59	—1·93	0·35	—0·31	—0·67	0·93	0·38	0·75	0·20	—0·77	—1·70	—2·97
1887	—2·28	—1·67	0·35	—0·58	—1·19	—1·09	—1·41	—3·44	—2·81	—0·76	—1·40	—1·95
1888	1·45	4·44	—1·96	—0·77	—0·41	0·29	—0·65	—1·29	—1·14	—0·18	—0·86	—0·38
1889	0·58	—0·99	—0·33	—0·87	—0·62	1·05	3·42	0·08	3·12	1·30	—0·60	1·33
1890	0·71	—0·56	—0·60	—0·70	—0·56	—0·32	—1·35	0·29	—0·21	0·39	1·09	—0·93
1891	1·42	—2·29	2·03	0·82	1·42	0·41	0·13	—0·77	—0·36	0·56	1·58	0·94
1892	1·09	3·56	3·01	—0·17	—1·08	1·08	1·40	0·29	—0·01	—0·06	—0·77	—1·50
1893	0·37	2·89	0·05	—0·70	0·66	—0·21	0·09	—1·63	0·38	—2·10	—2·72	—1·29
1894	—2·48	—3·86	0·06	—2·00	—0·94	—1·20	—0·30	1·14	—0·37	—0·54	0·05	2·31
1895	1·39	1·55	1·34	—0·64	—0·29	0·44	—0·24	—0·51	0·36	—1·99	0·85	—0·57
1896	0·66	—3·58	—0·90	1·10	1·14	—0·59	—0·55	—0·59	—1·57	—0·84	0·12	—1·01
1897	—0·30	0·11	—1·09	1·95	—0·24	—0·68	—0·51	0·56	—0·38	2·29	0·75	1·20
1898	0·05	0·02	—0·03	0·57	0·26	0·91	0·33	1·21	2·47	1·28	0·22	0·21
1899	—1·37	1·59	0·46	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XXIV. Für Z.

$\Delta C^{I}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	1°4	—8°5	7°4	5°0	—17°9	0°1	0°3	10°7	13°3
1884	1·4	4·7	4·1	—2·8	—3·9	—1·1	2·1	—16·5	5·2	0·5	9·3	— 9·2
1885	2·3	— 6·4	—6·5	—1·9	—0·4	2·1	—8·9	5·2	1·7	— 3·5	—10·2	— 3·4
1886	—2·4	— 3·9	—0·9	—2·4	4·0	0·2	—1·9	— 2·2	—10·6	— 1·8	— 2·6	— 1·9
1887	0·2	7·6	4·1	4·1	1·0	—2·2	9·8	16·0	13·3	— 2·7	0·7	4·6
1888	1·1	3·7	1·0	1·0	2·5	—1·9	2·6	11·3	0·8	— 3·8	— 6·3	— 7·3
1889	2·7	—10·5	—0·1	0·5	6·6	—2·9	—6·7	10·9	— 8·0	— 1·9	— 0·1	4·0
1890	—7·8	2·4	—2·4	—0·3	—5·0	—0·3	1·0	— 1·5	— 1·4	6·5	8·8	6·8
1891	2·4	3·2	3·1	1·5	3·8	—4·4	—4·1	— 6·5	4·0	2·7	— 6·4	— 0·9
1892	3·5	0·3	1·2	8·0	7·3	—0·2	—0·9	0·5	— 5·1	2·0	—10·9	— 7·2
1893	—4·5	—4·9	—6·4	—4·5	—3·1	—2·7	—7·0	7·5	— 7·1	— 2·9	— 0·4	1·8
1894	—6·2	3·1	—6·3	—1·6	0·8	4·8	7·5	5·5	— 4·2	— 6·4	— 6·5	— 4·4
1895	2·7	5·6	6·0	5·7	—0·7	—2·4	—0·2	1·3	1·0	2·4	6·6	— 2·7
1896	—1·7	—1·9	4·8	—7·0	—3·1	—1·3	—0·7	— 1·2	9·9	10·1	1·2	4·8
1897	6·8	—2·4	—0·9	—2·0	1·0	7·3	5·7	— 3·9	4·3	— 2·0	3·4	2·8
1898	6·9	—2·8	4·2	0·4	—2·4	—2·5	—3·5	— 8·5	— 3·8	— 4·8	2·4	— 1·0
1899	—7·3	2·2	—5·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XXV. Für Z.

$\Delta C^{II}_{r,r',r''}$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	— 0°1	19°0	0°7	13°6	— 2°8	— 6°1	2°0	— 3°3	3°6
1884	— 2·4	8·7	4·6	—11·8	— 6·2	5·1	— 1·1	11·4	7·1	2·2	19·3	3·0
1885	22·0	—18·0	— 9·2	6·2	— 3·4	3·9	—13·7	2·3	4·9	—6·6	—10·3	7·0
1886	—19·3	2·6	— 4·3	— 5·6	2·4	— 0·8	—12·8	— 7·9	— 2·8	—3·1	—16·7	—13·3
1887	—14·0	5·6	14·5	4·5	— 7·4	— 8·3	12·1	—46·9	— 0·1	1·6	10·3	— 0·9
1888	2·3	— 2·2	— 6·7	— 3·1	— 3·8	—13·7	8·3	29·2	1·1	—0·2	— 8·0	—11·4
1889	12·5	—10·2	— 4·0	5·8	16·8	2·4	0·9	8·6	— 5·3	1·3	— 0·9	— 3·0
1890	1·3	4·5	— 3·9	— 1·3	7·9	16·4	0·9	4·0	1·1	1·7	16·3	26·0
1891	4·0	8·6	1·5	2·0	—15·6	— 5·7	—11·7	6·5	5·3	3·8	— 1·9	— 5·8
1892	— 5·8	3·9	15·9	12·2	— 3·4	3·6	17·1	8·0	— 4·1	—3·4	— 9·6	— 7·0
1893	3·0	— 2·9	— 5·7	— 0·6	—13·4	— 1·7	— 2·3	— 9·8	— 2·7	—0·7	5·6	14·6
1894	— 0·6	4·4	5·4	— 4·3	—15·9	5·7	— 8·7	16·4	— 0·9	2·7	1·6	— 7·9
1895	3·0	12·7	4·4	2·9	0·4	—13·8	— 5·2	— 5·0	— 4·8	—2·0	— 2·6	— 3·2
1896	—15·2	—19·2	—11·5	— 3·8	3·6	— 0·5	—12·1	—13·1	6·2	8·8	4·3	—11·5
1897	5·6	7·1	— 6·0	— 0·1	18·4	6·6	0·4	— 3·5	—10·8	1·7	— 2·9	— 2·7
1898	7·1	— 2·4	1·8	— 2·9	0·7	0·0	14·3	2·6	11·6	—6·3	— 1·3	12·5
1899	— 3·7	— 3·1	3·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Es wird kaum überraschen, daß die Differenzen in einzelnen Monaten recht große Werte erreichen, da, wie schon anfangs betont wurde, die Sonnenflecken-Relativzahlen kein richtiges Maß für den jeweiligen Zustand der Sonne abgeben und auch die zur Berechnung der Konstanten der Formeln verwendeten Werte der Amplituden und Phasenwinkel mit beträchtlichen Fehlern behaftet sein werden, weil sie nur aus den Mittelwerten je eines Monates abgeleitet worden sind. Daß die Formeln für den mittleren Zustand der 12 Monate des Jahres Werte der Amplituden und Phasenwinkel ergeben, die sich von jenen aus der 16jährigen Beobachtungsreihe berechneten nur sehr wenig unterscheiden, beweist die nachfolgende Zusammenstellung.

Differenz der Amplituden und Phasenwinkel von X.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
ΔA_1	—0·08	—0·09	—0·10	—0·14	—0·09	—0·02	—0·03	—0·14	—0·08	—0·05	—0·18	—0·12
ΔA_2	—0·10	—0·13	—0·06	—0·07	—0·04	—0·03	—0·03	—0·07	—0·04	—0·07	—0·14	—0·12
ΔC_1 ...	—0·6	—0·8	—0·7	—0·7	—0·4	—0·1	—0·1	—0·4	—0·4	—0·5	—1·3	—1·3
ΔC_2	—0·9	—0·9	—0·5	—0·6	—0·4	—0·7	—0·2	—0·2	—0·2	—0·5	—1·6	—1·8

Differenzen der Amplituden und Phasenwinkel von Y.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
ΔA_1	0·24	−0·02	−0·13	−0·13	−0·32	−0·98	−0·93	−0·36	−0·10	−0·04	−0·05	0·03
ΔA_2	−0·19	−0·19	−0·19	−0·08	−0·04	−0·06	−0·05	−0·09	−0·07	−0·07	−0·09	−0·11
ΔC_1	−1·1	0·0	0·0	−0·5	—	—	—	—	0·0	0·0	0·1	0·0
ΔC_2	−0·9	−0·4	0·3	0·2	0·3	0·4	0·2	0·7	0·9	0·1	0·1	0·2

Differenzen der Amplituden und Phasenwinkel von Z.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
ΔA_1	−0·09	−0·15	−0·06	−0·07	−0·13	−0·09	−0·10	−0·24	−0·24	−0·06	−0·19	−0·08
ΔA_2	−0·17	−0·18	−0·14	−0·09	−0·09	−0·05	−0·10	−0·08	−0·11	−0·05	−0·16	−0·02
ΔC_1	0·0	0·0	0·0	−0·5	−1·6	−0·4	−0·4	−1·7	0·6	0·8	1·2	0·7
ΔC_2 ...	−0·2	0·6	0·9	0·9	0·8	0·1	0·4	3·2	0·4	0·7	1·6	0·3

Die hier angeführten Differenzen ergeben sich, wenn man von den in den Tabellen XXVI bis XXXI unter »Mittel« stehenden Amplituden beziehungsweise Phasenwinkeln die nach den Formeln berechneten abzieht. Selbstverständlich müssen bei dieser Rechnung die Mittelwerte von $r-r'$ und $r'-r''$ in die Formeln eingesetzt werden.

Setzt man in den Formeln $r-r' = r'-r'' = 0$, so ergeben sich die Amplituden A'_0 und Phasenwinkel C'_0, die bei allen drei Komponenten einen ausgesprochenen jährlichen Gang zeigen. Bei der Nordkomponente (X) zeigen die Amplituden des ersten und zweiten Gliedes zwei Maxima und zwei Minima. Die letzteren treten ein, wenn sich die Sonne am weitesten nach Nord oder Süd vom Zenith entfernt hat, während die Maxima auf die Zeit des Zenithstandes fallen. Die Phasenwinkel beider Glieder sind am größten, wenn sich die Sonne nördlich, und am kleinsten, wenn sie sich südlich vom Äquator befindet. Der jährliche Gang der Amplituden der Ostkomponente (Y), und zwar sowohl des ersten als auch des zweiten Gliedes, weist nur eine einfache Periode auf mit einem Maximum zur Zeit der größten südlichen und einem Minimum zur Zeit der größten nördlichen Deklination der Sonne; es muß aber bemerkt werden, daß der jährliche Gang der Amplituden des zweiten Gliedes nicht so schön ausgesprochen ist als bei jenen des ersten. Die Phasenwinkel besitzen ebenfalls eine einfache Periode, die jener der Amplituden entspricht. Die Amplituden der Vertikalkomponente zeigen wie jene der Nordkomponente zwei Maxima und zwei Minima, welche wahrscheinlich bei beiden Komponenten auch auf dieselbe Zeit fallen würden, wenn die Werte der Amplituden mit einer größeren Genauigkeit hätten bestimmt werden können. Besonders deutlich ausgesprochen ist der jährliche Gang von C'_0 des ersten Gliedes, der ein Maximum im Juni und ein Minimum im Februar (wohl wegen der anhaftenden Unsicherheit) aufweist.

Wenngleich die Konstanten der für die Monate berechneten Formeln noch bei weitem nicht jene Genauigkeit besitzen, die notwendig wäre, um aus ihnen sichere Schlüsse ableiten zu können, so ist die Veränderung des vor $r-r'$ stehenden Koeffizienten im Laufe des Jahres doch so augenfällig, daß man mit

Berechtigung den Satz aussprechen kann: Der Einfluß der Sonnenflecken (richtiger des geänderten Zustandes der Sonne) ist im Laufe des Jahres sowohl auf die Amplituden als auch auf die Phasenwinkel verschieden.

Bei einer genaueren Verfolgung des jährlichen Ganges der Amplituden A_0' und der Phasenwinkel C_0' und der vor $r-r'$ stehenden Koeffizienten findet man, daß dieser Gang eine große Ähnlichkeit zeigt. Eine Ausnahme hievon macht nur der Phasenwinkel des ersten Gliedes bei der Ost- und Vertikalkomponente, denn hier ist der jährliche Gang des Koeffizienten vor $r-r'$ gerade der umgekehrte von jenem von C_0'. Da der jährliche Gang dieser beiden Größen ein sehr ausgesprochener ist, so läßt sich diese Verschiedenheit auf die Unsicherheit, welche ihnen noch anhaftet, nicht zurückführen. Es ist dies vielmehr ein Beweis, daß die Wirkung bei verschiedenem Fleckenstande nicht einfach in einer Verstärkung beziehungsweise Schwächung der die Variationen hervorbringenden Ursache bestehen kann, wie man aus den Daten der Nordkomponente allein schließen könnte.

Dieses Resultat bildet eine vollständige Bestätigung eines Satzes, den schon Schmidt aus den viel kürzeren Beobachtungsreihen von Wien und Batavia abgeleitet und in folgenden Worten ausgedrückt hat: »Hiernach läßt sich mit Sicherheit behaupten, daß die tägliche Variation der erdmagnetischen Kraft nicht einer einzigen Ursache zuzuschreiben ist, die gemäß dem wechselnden Zustande der Sonnenoberfläche mit bald geringerer, bald größerer Intensität wirkt, sondern daß dieselbe auf zwei wesentlich verschiedene Ursachen zurückgeführt werden muß, deren eine konstant bleibt, während die andere in enger Beziehung zur periodisch veränderlichen Entwicklung der Sonnenflecken steht.«

In den Formeln 4) zeigen die Koeffizienten b, c beziehungsweise β, γ im Laufe des Jahres keine gesetzmäßige Änderung wie die Koeffizienten a und α, so daß in einem bestimmten Jahre

$$A'_0+br'-cr'' = A_{0,\,r',\,r''}$$
$$C'_0+\beta r'-\gamma r'' = C_{0,\,r',\,r''}$$

als der konstante Teil angesehen werden kann, der freilich von Jahr zu Jahr eine kleine Änderung erfährt, als ob die Ursache, welche den allgemeinen Gang hervorruft, eine etwas andere geworden wäre. Bezeichnet man die Ordinaten dieses täglichen Ganges mit y', jene aber, die bei verschiedenen Werten von r hinzukommen, mit y'', so ist der beobachtete Gang gegeben durch:

$$y = y'+y'',$$

woraus folgt:

$$y'' = y-y'.$$

Da nun

$$y = (A^{I}_{0,\,r',\,r''}+a_1 r)\sin(C^{I}_{0,\,r',\,r''}+\alpha_1 r+15x)+$$
$$+(A^{II}_{0,\,r',\,r''}+a_2 r)\sin(C^{II}_{0,\,r',\,r''}+\alpha_2 r+30x)+\ldots$$

und

$$y' = A^{I}_{0,\,r',\,r''}\sin(C^{I}_{0,\,r',\,r''}+15x)+A^{II}_{0,\,r',\,r''}\sin(C^{II}_{0,\,r',\,r''}+30x)+\ldots$$

ist, so läßt sich durch Subtraktion dieser Ausdrücke für y'' leicht eine Formel ermitteln. Man findet

$$y'' = \pi_1 \sin(v_1+15x)+\pi_2 \sin(v_2+30x)+\ldots,$$

wobei

$$\operatorname{tang} v = \frac{(A_{0,\,r',\,r''}+ar)\sin(C_{0,\,r',\,r''}+\alpha r)-A_{0,\,r',\,r''}\sin C_{0,\,r',\,r''}}{(A_{0,\,r',\,r''}+ar)\cos(C_{0,\,r',\,r''}+\alpha r)-A_{0,\,r',\,r''}\cos C_{0,\,r',\,r''}}$$

oder $\operatorname{tang} v = \frac{m}{n}$, und wenn gesetzt wird: $m = \pi \sin v$, $n = \pi \cos v$, so folgt

$$\pi = \frac{m}{\sin v} = \frac{n}{\cos v}.$$

Auf diese Weise kann man den täglichen Gang y'' bei verschiedenen Werten von r darstellen. Ich habe dies für 1893 getan, weil in diesem Jahre r den größten Wert ($r = 84\cdot9$) während der ganzen Beobachtungsreihe besaß.

Die zu dieser Rechnung nötigen Daten sind:

$$r = 84\cdot9,\quad r' = 40\cdot5,\quad r'' = 35\cdot1$$

	X	Y	Z
$A^{I}_{0,r',r''}$	15·827	5·947	9·792
$a_1 r$	11·179	3·994	8·321
$C_{0,r',r''}$	300°26	177°02	114°66
$\alpha_1 r$	−9°53	−1°55	−10°35
$A^{II}_{0,r',r''}$	6·892	7·232	5·413
$a_2 r$	4·814	2·358	3·924
$C^{II}_{0,r',r''}$	122°92	346°75	259°06
$\alpha_2 r$	−10°79	1°97	2°18

Damit wird

für X:

$$y'' = 11\cdot70 \sin(277°8+15x)+5\cdot10 \sin(\;97°5+30x)+\ldots$$

für Y:

$$y'' = \;\;4\cdot00 \sin(173\cdot2+15x)+2\cdot38 \sin(354\cdot7+30x)+\ldots$$

für Z:

$$y'' = \;\;8\cdot66 \sin(\;92\cdot6+15x)+3\cdot93 \sin(264\cdot2+30x)+\ldots$$

Setzt man in den Formeln 4) $r = 0$, so ergeben sich aus denselben jene Werte von $A_{0,r',r''}$, $C_{0,r',r''}$, die der fleckenlosen Sonne entsprechen würden [nach 2) werden für $r = 0$ die Werte A_0 und C_0 von den bezeichneten nur wenig verschieden sein]. Der tägliche Gang, der beim Auftreten der Sonnenflecken zu jenem der fleckenlosen Sonne hinzukommt und für 1893 durch die vorstehenden Formeln dargestellt wird, zeigt bei der ganztägigen Variation bei allen drei Komponenten eine Verspätung der Eintrittszeiten der Extreme, bei der halbtägigen tritt aber bei der Ost- und Vertikalkomponente eine kleine Verfrühung derselben ein. Die Extreme des täglichen Ganges y'' für 1893 ergeben sich zu folgenden Zeiten:

		Ganztägige Variation	Halbtägige Variation	
X	Maximum ...	$11^h 29^m$ a. m.	$11^h 45^m$ a. m.	$11^h 45^m$ p. m.
	Minimum ...	11 29 p. m.	5 45 a. m.	5 45 p. m.
Y	Maximum ...	6 27 p. m.	3 13 a. m.	3 13 p. m.
	Minimum ...	6 27 a. m.	9 13 a. m.	9 13 p. m.
Z	Maximum ...	11 50 p. m.	6 11 a. m.	6 11 p. m.
	Minimum ...	11 50 a. m.	0 11 a. m.	0 11 p. m.

Ich halte es nicht für angezeigt, an die hier gewonnenen Resultate noch weitere Betrachtungen, insbesondere solche über die möglichen Ursachen der täglichen Variationen, zu knüpfen, so lange nicht ähnliche Untersuchungen auch für andere Orte und für längere Beobachtungsreihen vorliegen. Um sie aber zu ermöglichen, beziehungsweise zu erleichtern, sollten die erdmagnetischen Observatorien die Resultate ihrer Beobachtungen durch periodische Reihen ausdrücken, weil sonst die von einem einzelnen zu bewältigende Arbeit zu mühsam und langwierig wird und so manchen abschreckt, sie auszuführen.

Anhang.

XXVI. Amplituden von X.

A_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	28·56	22·13	23·95	24·43	24·76	30·08	29·62	27·49	24·20
1884	26·97	23·84	30·48	31·21	25·80	26·32	23·43	25·27	28·16	25·21	21·42	18·21
1885	18·22	24·04	24·61	29·18	25·15	23·00	22·89	26·21	27·52	24·46	19·02	16·76
1886	20·78	17·45	24·03	22·17	20·46	20·56	22·05	22·36	23·23	19·05	14·46	10·92
1887	16·06	16·24	20·27	19·44	17·49	17·06	18·44	20·96	21·62	19·77	15·60	14·45
1888	17·86	19·57	18·55	21·39	16·85	16·27	16·94	18·66	21·25	16·13	14·39	12·50
1889	15·34	13·63	16·47	19·61	17·75	16·94	19·28	21·38	19·40	15·54	13·07	13·57
1890	14·97	14·66	17·86	20·31	17·68	15·75	16·57	20·90	21·69	18·85	14·90	15·14
1891	17·57	16·94	22·02	22·20	24·50	19·34	22·62	23·20	28·18	23·75	19·16	20·93
1892	24·53	24·91	25·24	27·66	28·40	27·39	27·25	29·68	30·55	28·11	21·09	17·60
1893	22·63	24·40	30·05	31·37	26·60	26·68	25·87	31·69	31·54	30·31	22·91	22·43
1894	23·33	21·40	25·12	26·74	27·60	24·97	28·79	29·51	28·58	25·28	21·41	20·14
1895	23·47	24·32	29·89	27·09	25·77	23·60	25·53	24·17	25·51	23·20	21·04	18·46
1896	19·15	16·74	20·98	22·45	20·57	17·51	21·15	20·44	25·53	21·14	18·19	14·61
1897	23·79	18·66	19·63	21·83	19·57	17·39	17·91	21·21	22·49	18·66	14·04	16·43
1898	17·13	18·88	21·65	21·71	20·25	18·11	17·39	21·63	21·41	19·40	17·74	13·93
1899	16·01	16·82	19·54	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	19·77	19·63	22·80	24·41	22·20	20·90	21·87	23·73	25·36	22·34	18·32	16·77

A_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	11·16	10·24	9·98	10·17	10·31	13·26	14·16	11·78	12·62
1884	14·60	11·75	13·32	14·55	11·77	11·12	9·94	12·51	13·43	11·04	8·31	8·60
1885	9·51	11·31	11·05	12·93	10·03	9·69	9·41	11·08	11·13	9·56	6·38	6·36
1886	7·51	7·90	10·10	10·55	9·01	9·31	9·73	8·53	11·10	8·80	5·90	5·22
1887	7·60	7·65	9·64	7·94	7·35	6·32	8·09	9·56	9·86	9·46	7·29	6·00
1888	7·37	10·27	8·92	9·97	6·98	6·29	7·66	8·35	9·32	6·65	6·55	4·47
1889	7·36	6·69	8·24	9·41	7·78	7·57	8·96	9·35	10·6	7·57	4·30	5·90
1890	7·05	6·74	8·55	9·26	7·32	7·86	7·87	10·09	10·19	8·81	7·53	6·67
1891	8·53	8·73	10·78	10·23	7·89	7·21	9·83	9·86	12·35	11·32	8·57	7·65
1892	11·44	10·49	12·71	12·90	10·21	12·68	13·62	15·41	11·96	13·41	8·52	6·99
1893	10·93	13·17	13·79	12·81	10·68	10·93	11·40	12·71	12·92	12·80	10·31	11·12
1894	11·97	9·62	11·24	10·94	12·06	10·75	8·77	15·18	11·17	13·09	8·55	9·41
1895	11·93	8·94	13·13	12·13	10·31	10·45	11·10	10·43	11·33	11·20	8·39	7·85
1896	8·02	6·82	9·18	10·63	8·10	7·23	9·57	8·22	10·53	9·68	8·27	5·48
1897	9·86	8·84	8·10	9·14	7·72	6·70	6·87	9·46	9·05	9·39	6·27	5·37
1898	8·32	7·78	9·36	9·00	9·00	7·47	9·41	10·13	9·49	8·90	7·81	6·78
1899	7·71	8·75	9·70	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	9·26	8·96	10·43	10·77	9·11	8·81	9·49	10·63	11·04	10·30	7·66	7·16

XXVII. Phasenwinkel von *X*.

C_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	292°2	300°8	301°2	297°6	289°8	298°9	286°1	293°3	286°6
1884	283·8	285·2	286·8	289·8	294·7	298·4	300·3	296·0	295·4	296·5	296·3	297·6
1885	294·5	278·2	285·7	295·5	297·5	301·5	295·6	308·4	300·7	297·3	293·9	290·0
1886	294·9	292·4	293·6	300·8	307·4	302·6	299·6	303·7	300·2	304·7	308·5	315·1
1887	297·0	299·4	297·0	307·8	311·7	300·3	304·3	309·7	309·7	300·0	304·9	301·3
1888	297·5	289·5	295·5	304·3	307·1	301·5	297·5	304·2	301·9	300·8	314·2	304·6
1889	291·1	290·5	302·4	295·1	302·5	302·8	297·3	303·6	302·9	297·1	306·7	300·9
1890	295·5	292·3	290·1	296·4	294·6	298·8	298·0	299·5	299·9	296·4	304·2	291·6
1891	286·4	292·6	290·6	295·0	302·5	294·4	294·0	299·3	303·7	296·1	295·5	292·3
1892	292·2	288·9	293·2	298·6	303·8	299·8	297·7	290·7	293·7	293·2	283·1	296·3
1893	280·2	284·0	281·4	284·5	290·9	293·0	288·7	289·8	294·7	287·6	287·8	289·5
1894	287·8	291·4	280·6	285·5	300·7	300·1	300·2	305·1	292·5	292·3	287·9	287·9
1895	286·7	290·6	288·7	291·8	296·9	297·1	298·9	299·6	299·8	299·1	300·1	287·5
1896	299·1	297·1	290·4	298·2	304·9	295·5	295·7	304·0	298·4	294·6	292·3	297·1
1897	285·7	286·1	288·0	300·5	299·9	300·3	298·4	295·9	298·0	294·3	305·4	299·3
1898	290·2	287·2	295·2	302·0	303·6	298·9	297·6	295·0	299·7	294·4	299·0	298·3
1899	293·5	297·1	293·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	290·4	289·5	290·1	295·4	300·8	299·0	297·5	299·2	299·0	295·1	297·0	294·7

C_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	109°4	120°8	117°4	122°7	117°5	122°0	112°7	102°1	111°0
1884	105·7	113·0	108·8	110·7	120·0	123·8	125·0	125·9	124·0	119·2	117·0	123·3
1885	118·8	100·1	104·8	120·8	125·1	116·9	126·5	132·6	123·6	118·7	120·8	116·4
1886	99·0	120·8	102·7	118·8	127·1	120·5	121·2	124·2	125·5	122·7	129·6	143·8
1887	115·5	110·4	125·7	125·3	137·5	124·7	131·3	144·0	128·1	123·2	129·8	133·8
1888	110·8	99·9	110·1	121·0	128·9	118·2	126·0	126·7	126·1	121·7	133·0	138·2
1889	118·4	111·0	119·1	130·2	121·1	125·4	119·5	125·1	119·1	119·7	125·3	127·3
1890	122·9	119·9	111·3	123·5	128·8	134·5	129·4	130·5	128·2	110·9	123·9	136·4
1891	113·8	133·1	109·7	108·6	111·2	123·6	120·4	128·2	120·4	116·0	110·6	111·7
1892	95·5	100·5	111·8	117·3	123·9	117·4	125·9	125·3	123·5	98·0	110·5	119·1
1893	100·7	93·0	101·5	105·7	117·0	115·0	118·7	114·6	114·9	115·6	108·7	117·2
1894	110·5	107·3	114·2	109·4	120·7	117·5	114·5	123·8	113·1	118·1	138·1	112·3
1895	100·7	103·4	106·4	113·7	119·4	116·5	120·1	128·1	118·9	112·9	112·4	110·4
1896	101·7	104·6	107·6	115·6	118·9	123·4	113·6	119·3	122·4	115·4	118·2	106·2
1897	103·4	105·8	109·5	107·9	123·5	130·0	125·0	125·5	122·9	111·8	138·1	123·3
1898	120·5	106·7	121·8	126·4	126·0	120·5	120·7	119·6	124·0	113·8	124·6	126·2
1899	112·7	96·0	108·9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	108·5	106·9	110·4	115·9	122·9	120·9	122·3	125·5	122·1	115·1	119·8	120·5

XXVIII. Amplituden von Y.

A_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	5·31	1·05	3·67	2·25	5·84	7·79	11·64	12·61	13·11
1884	13·13	12·06	11·76	8·25	4·82	1·48	1·93	6·04	5·98	8·65	14·44	12·33
1885	11·99	14·47	10·65	7·81	2·25	0·21	1·19	2·80	3·84	10·31	14·19	13·10
1886	14·00	13·83	10·98	5·32	0·27	2·96	1·06	4·06	6·96	9·55	12·75	13·21
1887	11·24	12·35	10·07	4·47	1·56	2·12	2·05	0·67	4·16	11·28	12·81	13·57
1888	12·34	13·75	7·68	3·77	0·88	2·32	2·29	1·34	4·63	9·76	11·48	12·57
1889	12·28	12·35	8·14	3·62	1·59	0·90	0·52	1·56	7·05	8·93	11·63	10·65
1890	11·82	10·64	7·78	5·16	0·82	1·91	1·62	4·51	7·98	11·36	12·49	12·43
1891	11·46	12·12	8·82	4·44	2·39	0·74	1·46	3·04	6·80	10·70	14·41	13·90
1892	15·65	15·02	12·10	7·28	4·58	1·94	2·23	5·95	11·85	12·38	14·75	18·30
1893	16·47	15·13	11·38	10·21	6·71	1·13	3·85	6·29	11·60	14·82	14·34	16·64
1894	16·69	16·47	11·85	8·08	5·02	2·30	2·43	6·03	9·40	12·70	15·84	15·07
1895	15·63	16·25	11·69	6·38	3·42	2·04	1·14	5·41	9·86	13·03	13·81	14·59
1896	15·57	12·55	10·52	7·32	1·46	0·57	2·49	4·51	8·25	11·46	13·90	13·23
1897	15·45	14·66	10·28	6·18	1·66	2·99	1·02	3·87	8·44	11·40	11·53	14·91
1898	13·85	14·60	10·99	5·20	1·61	1·27	1·11	3·87	8·65	11·31	12·35	12·09
1899	13·64	13·89	10·13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	14·06	13·75	10·17	6·05	2·18	0·86	0·86	3·75	7·60	11·17	13·28	13·68

A_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	6·71	6·75	6·58	7·04	11·50	13·01	14·12	13·00	12·66
1884	12·15	11·17	11·19	10·54	10·55	8·43	9·76	12·80	8·79	11·00	10·92	8·66
1885	8·12	13·91	9·14	8·47	7·19	6·82	9·10	12·28	8·09	11·06	11·00	8·92
1886	7·67	8·66	8·57	7·17	7·57	5·32	7·00	10·31	10·05	9·26	11·07	8·53
1887	5·48	9·24	9·07	6·69	7·19	4·78	5·45	8·57	9·46	10·95	10·87	8·90
1888	7·92	13·20	6·31	7·07	6·75	4·97	4·97	6·45	7·67	9·00	9·58	8·60
1889	7·13	10·39	8·16	5·74	6·00	6·53	6·34	7·98	9·85	9·92	8·87	5·90
1890	7·22	7·27	5·95	6·82	5·65	4·50	6·15	10·08	10·88	11·27	10·55	8·27
1891	5·91	8·60	7·39	6·05	8·52	5·47	7·77	8·81	10·71	10·31	12·44	9·79
1892	11·34	13·67	8·95	8·64	10·79	7·99	9·17	12·12	13·92	12·82	12·24	13·21
1893	12·03	14·04	7·97	8·99	9·61	7·40	8·64	11·06	14·65	14·71	11·63	13·58
1894	12·36	12·86	9·67	7·77	10·30	6·96	9·37	12·71	11·30	14·48	12·75	11·94
1895	11·24	13·90	8·59	6·38	8·55	7·79	9·63	11·17	12·55	12·44	12·85	9·98
1896	11·69	8·88	9·95	8·69	7·61	6·56	9·73	10·63	10·59	11·12	12·51	8·89
1897	11·25	11·98	8·37	7·87	6·56	4·92	5·91	9·74	11·90	12·40	10·42	10·97
1898	8·93	13·21	7·58	7·43	6·94	4·99	6·70	9·13	11·77	12·22	10·58	8·64
1899	10·60	12·62	9·46	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	9·24	11·20	8·33	7·48	7·87	6·19	7·62	10·24	10·87	11·63	11·24	9·73

XXIX. Phasenwinkel von Y.

C_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	203°0	211°0	352°5	322°2	116°6	141°0	178°9	199°9	177°3
1884	175·8	194·0	189·0	158·8	140·5	86·1	68·1	110·2	127·9	177·2	206·0	181·5
1885	191·4	173·3	184·2	178·5	157·3	31·4	73·8	114·9	175·7	179·8	193·7	198·0
1886	183·4	196·2	196·8	183·2	153·4	306·2	18·8	124·2	141·0	174·0	186·5	186·2
1887	177·4	186·6	198·2	186·3	104·1	7·6	4·5	80·5	137·9	177·9	193·4	192·6
1888	181·3	181·1	189·5	162·1	14·5	7·9	359·0	265·7	143·4	186·3	188·6	188·8
1889	191·6	173·3	191·3	178·4	83·1	71·8	58·5	137·1	142·2	166·1	198·8	184·2
1890	176·2	179·3	186·0	154·3	121·0	16·7	36·4	112·5	141·1	182·0	201·3	186·9
1891	181·3	177·1	190·8	162·3	124·1	317·7	113·8	151·3	158·0	179·2	193·6	189·8
1892	177·6	182·9	206·2	186·1	155·2	164·5	186·2	146·3	147·9	178·3	194·0	183·4
1893	176·8	177·5	169·3	167·0	165·3	169·3	138·4	150·9	152·0	170·5	198·4	192·0
1894	178·3	182·7	180·5	169·4	141·3	208·2	172·2	154·6	159·6	172·0	194·4	184·3
1895	179·3	186·5	185·5	178·8	152·5	53·0	132·5	148·8	154·3	178·4	196·7	188·4
1896	174·8	182·1	180·8	166·8	191·8	331·6	140·5	111·4	145·2	180·7	188·7	184·1
1897	181·1	176·2	195·1	175·1	120·7	359·6	44·2	114·6	136·0	168·4	189·3	190·0
1898	178·8	171·0	190·7	169·0	104·4	354·1	21·7	104·7	139·8	170·5	188·6	192·0
1899	172·8	166·7	176·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	179·6	180·3	188·1	173·2	144·1	4·6	86·6	129·8	146·4	176·2	194·6	187·5

C_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	351°1	320°2	299°9	311°2	313°2	334°9	8°3	22°1	8°6
1884	9·3	41·0	19·0	346·0	322·6	313·5	314·9	311·9	320·0	4·5	35·6	22·7
1885	58·5	4·6	2·9	358·8	312·5	314·6	307·2	292·2	309·6	358·1	19·1	27·0
1886	18·9	25·7	17·4	352·9	307·8	317·4	309·4	306·0	323·1	352·2	5·2	8·6
1887	356·6	19·7	37·3	361·8	316·1	295·1	294·8	285·0	302·3	1·9	24·2	27·4
1888	26·5	5·6	9·2	332·4	317·8	304·3	306·7	298·3	317·0	9·3	11·2	13·6
1889	23·7	359·3	10·7	353·6	304·5	324·7	319·1	301·1	322·1	352·5	11·1	3·5
1890	18·7	9·0	7·4	341·8	308·3	307·3	304·6	307·4	326·0	2·9	24·4	33·1
1891	11·6	12·8	14·0	343·1	306·4	305·8	295·0	296·2	317·1	358·7	15·0	4·3
1892	9·2	10·7	35·9	356·4	311·3	312·5	312·5	301·2	324·0	351·6	15·7	15·3
1893	15·3	358·8	336·5	344·8	324·1	302·2	307·0	307·3	329·2	357·0	24·1	25·4
1894	18·0	16·5	6·6	341·9	312·0	308·9	309·0	313·6	324·4	353·1	19·3	16·1
1895	12·5	17·9	359·9	336·8	311·4	298·7	309·1	314·8	324·7	354·2	12·4	14·1
1896	6·7	354·8	358·1	343·6	316·0	314·6	309·7	299·6	322·7	358·3	12·6	1·5
1897	12·7	4·5	12·3	349·7	314·6	294·5	318·1	306·3	321·4	354·0	10·0	16·4
1898	16·3	352·8	2·1	333·0	310·2	313·8	310·9	301·0	324·8	349·2	7·7	11·5
1899	2·0	348·7	2·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	15·2	8·3	9·7	346·9	313·8	308·4	308·9	304·4	322·4	357·7	17·0	15·8

XXX. Amplituden von Z.

A_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	23·37	19·71	19·14	21·58	19·27	26·65	27·41	26·12	23·58
1884	24·56	22·69	25·37	25·38	18·09	19·05	17·34	17·64	29·30	29·26	32·26	13·44
1885	12·84	22·65	18·03	22·49	17·81	16·95	17·30	17·21	20·18	20·80	20·00	18·36
1886	16·50	17·28	21·64	16·21	12·69	13·32	14·58	13·56	14·11	13·69	9·94	6·39
1887	11·71	13·99	16·47	13·40	9·14	10·06	10·93	8·42	8·92	13·05	9·40	8·67
1888	15·75	18·31	14·26	12·94	9·17	10·37	10·56	9·02	10·08	11·84	8·37	10·82
1889	12·40	13·01	14·09	12·09	8·44	9·68	16·06	12·75	13·05	13·40	11·69	13·39
1890	15·02	16·07	15·50	13·15	10·94	10·67	10·95	12·93	12·27	13·79	13·45	10·14
1891	17·31	17·19	20·36	16·04	14·86	14·67	14·99	13·77	15·65	17·68	14·90	15·05
1892	18·66	23·83	21·44	15·90	15·81	15·05	15·94	14·94	16·33	16·90	15·84	11·44
1893	20·42	19·24	20·64	19·10	15·94	14·77	15·07	13·38	16·95	17·66	15·01	14·54
1894	16·80	16·35	18·85	15·66	14·44	13·85	15·13	13·87	15·29	17·59	17·79	14·57
1895	18·22	22·07	19·15	17·65	12·96	13·21	12·53	12·72	13·81	14·48	14·78	12·99
1896	15·02	12·65	14·52	13·89	11·45	10·04	10·19	9·01	13·08	12·44	11·99	9·36
1897	16·33	15·10	11·94	13·35	10·10	8·64	10·17	9·74	9·45	11·04	9·15	13·89
1898	16·43	17·01	17·83	12·18	9·35	10·73	11·09	11·58	14·63	12·05	10·77	7·86
1899	9·78	12·67	11·70	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	16·02	17·44	17·54	16·33	13·06	13·04	13·93	12·86	15·40	16·34	14·92	12·69

A_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	12·84	7·25	5·99	5·79	7·66	10·74	15·44	14·60	11·87
1884	15·26	11·93	12·85	12·05	7·66	4·99	4·76	6·94	10·58	13·83	14·43	8·75
1885	8·37	15·31	10·84	12·42	7·05	6·44	4·67	3·93	6·75	13·66	10·20	10·00
1886	9·00	8·88	13·02	9·89	4·85	5·77	5·31	4·68	7·62	9·35	6·30	3·52
1887	5·87	8·46	10·79	7·58	3·89	3·36	3·41	0·58	3·67	8·98	6·80	4·86
1888	9·70	14·11	8·32	7·02	4·13	4·41	3·91	2·17	5·21	8·92	7·28	5·45
1889	7·92	8·57	9·62	6·62	3·68	5·09	8·01	3·99	9·17	10·12	6·50	7·00
1890	8·31	8·47	9·02	6·40	3·76	3·51	3·22	3·82	6·26	9·60	8·55	4·62
1891	9·52	7·51	11·52	8·57	6·95	5·54	5·15	3·38	8·02	12·39	11·04	7·68
1892	13·07	15·52	13·64	9·68	5·73	6·95	6·55	6·23	8·61	12·75	9·94	7·55
1893	12·66	14·47	10·86	9·67	7·54	5·90	5·30	5·01	9·60	10·97	8·28	8·48
1894	10·30	7·99	9·95	7·67	6·42	5·13	5·04	6·11	7·95	11·89	9·33	9·94
1895	12·66	12·42	11·28	8·51	5·79	5·90	4·44	4·38	8·01	9·58	9·12	7·49
1896	9·55	6·68	8·39	8·33	5·72	4·13	4·06	3·11	6·08	7·54	7·36	5·25
1897	9·18	8·90	7·01	8·21	3·97	2·83	3·87	4·05	6·29	9·31	5·48	6·73
1898	8·70	8·91	8·09	5·72	4·59	4·67	4·47	4·91	8·18	9·45	6·27	4·38
1899	6·45	9·10	7·55	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	9·61	10·26	10·03	8·72	5·47	4·98	4·77	4·35	7·56	10·80	8·69	6·98

XXXI. Phasenwinkel von *Z*.

C_1

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	113°3	116°7	130°1	126°3	105°9	121°4	109°2	121°0	119°6
1884	106·2	103·4	108·0	109·9	113·6	126·5	126·9	105·2	126·4	117·1	121·0	97·0
1885	110·7	93·0	100·6	113·5	115·6	123·4	114·1	128·0	123·7	107·1	101·3	102·5
1886	106·6	97·8	105·3	114·1	129·0	131·5	125·1	127·0	111·4	108·9	109·4	103·6
1887	109·9	109·8	114·8	125·0	128·1	130·6	137·1	144·1	135·1	107·4	112·0	109·8
1888	109·9	105·9	111·0	121·6	132·1	131·6	131·6	142·9	120·9	105·5	104·2	97·3
1889	111·4	91·4	109·5	120·6	136·9	130·0	120·8	138·7	111·1	106·6	110·1	108·2
1890	100·0	104·5	107·0	119·7	124·5	132·7	127·6	128·5	115·7	114·0	118·1	110·6
1891	108·6	103·9	111·6	118·4	125·0	119·1	116·1	118·3	117 8	108·3	101·4	102·6
1892	104·7	97·8	105·8	117·8	119·6	117·1	116·1	111·2	106·3	105·9	95·3	96·0
1893	95·0	92·4	96·1	102·0	107·6	111·1	107·5	112·3	101·5	99·6	104·8	104·5
1894	91·6	99·4	97·0	105·1	107·5	115·7	119·1	122·0	103·8	95·3	98·5	97·5
1895	101·1	102·6	108·1	112·4	113·1	112·8	117·9	117·9	107·9	103·5	111·2	98·9
1896	98·3	95·3	107·3	103·6	119·2	117·4	117·1	123·6	115·3	111·4	105·4	105·7
1897	105·0	96·0	103·2	109·6	124·6	132·0	124·9	121·7	108·8	98·7	107·7	103·2
1898	104·9	94·9	107·1	113·6	119·6	119·4	117·2	114·9	100·1	94·5	105·4	98·8
1899	90·7	101·1	99·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	103·4	99·3	105·7	113·2	119·3	123·4	121·2	120·9	114·8	106·6	109·1	104·2

C_2

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	276°8	277°4	271°5	288°2	255°8	259°7	270°9	268°2	269°4
1884	271·2	276·9	271·8	265·4	263·9	275·1	273·6	271·4	274·6	268·6	285·3	270·5
1885	296·9	250·4	263·1	283·0	268·6	275·2	260·9	261·5	269·4	258·9	255·1	275·6
1886	255·6	270·8	266·5	270·3	260·3	267·6	260·4	247·3	258·5	259·5	244·4	255·0
1887	260·8	272·9	291·8	278·9	246·3	259·0	284·1	208·0	258·3	263·3	271·6	266·2
1888	276·2	263·5	269·2	269·7	244·5	252·4	278·3	281·2	257·7	260·1	253·2	255·5
1889	285·9	254·0	271·0	277·2	262·4	267·8	269·7	261·7	249·5	260·7	258·5	263·0
1890	273·8	267·3	270·5	268·6	253·1	280·8	268·2	254·9	255·4	260·9	276·2	291·1
1891	275·4	269·6	274·1	270·6	239·8	260·1	254·9	258·8	261·9	265·0	261·2	256·9
1892	263·3	262·5	282·0	279·5	262·5	269·7	282·0	266·5	251·2	258·0	255·4	251·9
1893	270·8	253·4	256·8	264·8	252·4	263·8	260·5	250·3	251·6	260·0	271·0	271·4
1894	265·9	258·6	268·5	259·0	253·5	270·8	252·7	269·3	250·4	262·1	264·1	249·8
1895	269·1	265·4	265·4	264·6	257·9	249·3	253·9	246·9	243·7	255·9	258·1	252·9
1896	251·0	232·1	249·8	256·2	247·3	260·9	245·6	233·5	253·3	262·7	263·2	245·3
1897	270·5	256·9	257·5	258·0	258·0	265·4	256·1	241·5	232·8	250·1	251·8	253·5
1898	271·4	245·5	263·1	253·5	240·9	258·6	268·2	247·6	251·9	246·0	255·5	269·0
1899	260·1	243·7	266·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	269·8	259·4	268·8	269·3	256·4	265·6	266·5	256·7	255·4	260·8	263·7	262·5

XXXII. Sonnenflecken-Relativzahlen *r*.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	82·1	32·1	76·5	80·6	46·0	52·6	83·8	84·5	75·9
1884	91·5	86·9	86·8	76·1	66·5	51·2	53·1	55·8	61·9	47·8	36·6	47·2
1885	42·8	71·8	49·8	55·0	73·0	83·7	66·5	50·0	39·6	38·6	33·3	21·7
1886	29·9	25·9	57·3	43·7	30·7	27·1	30·3	16·9	21·4	8·6	0·3	12·4
1887	10·3	13·2	4·2	6·9	20·0	15·7	23·3	21·4	7·4	6·6	6·9	20·7
1888	12·7	7·1	7·8	5·1	7·0	7·1	3·1	2·8	8·8	2·1	10·7	6·7
1889	0·8	8·5	7·0	4·3	2·4	6·4	9·7	20·6	6·5	2·1	0·2	6·7
1890	5·3	0·6	5·1	1·6	4·8	1·3	11·6	8·5	17·2	11·2	9·6	7·8
1891	13·5	22·2	10·4	20·5	41·1	48·3	58·8	33·2	53·8	51·5	41·9	32·2
1892	69·1	75·6	49·9	69·6	79·6	76·3	76·8	101·4	62·8	70·5	65·4	78·6
1893	75·0	73·0	65·7	88·1	84·7	88·2	88·8	129·2	77·9	79·7	75·1	93·8
1894	83·2	84·6	52·3	81·6	101·2	98·8	106·0	70·3	65·9	75·5	56·6	60·0
1895	63·3	67·2	61·0	76·9	67·5	71·5	47·8	68·9	57·7	67·9	47·2	70·0
1896	29·0	57·4	52·0	43·8	27·7	49·0	45·0	27·2	61·3	28·4	38·0	42·6
1897	40·6	29·4	29·1	31·0	20·0	11·3	27·6	21·8	48·1	14·3	8·4	33·3
1898	30·2	36·4	38·3	14·5	25·8	22·3	9·0	31·4	34·8	34·4	30·9	12·6
1899	19·5	9·2	18·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	38·5	41·8	37·2	43·8	42·8	45·9	46·1	44·1	42·4	38·9	34·1	38·9

XXXIII. Sonnenflecken-Relativzahlen r'.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	35·4	35·3	35·2	35·2	35·1	35·0	34·9	34·8	34·7
1884	34·5	34·4	34·3	34·2	34·1	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0
1885	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0	34·0
1886	34·0	34·0	34·0	34·1	34·1	34·1	34·1	34·2	34·2	34·3	34·3	34·4
1887	34·4	34·5	34·5	34·6	34·6	34·7	34·7	34·8	34·8	34·9	35·0	35·1
1888	35·2	35·2	35·3	35·4	35·4	35·6	35·6	35·7	35·7	35·8	35·8	35·9
1889	35·9	36·0	36·1	36·1	36·2	36·2	36·3	36·3	36·4	36·5	36·5	36·6
1890	36·6	36·7	36·8	36·8	36·9	37·0	37·1	37·2	37·2	37·3	37·4	37·5
1891	37·6	37·7	37·8	37·8	37·9	38·0	38·0	38·1	38·2	38·3	38·4	38·5
1892	38·6	38·7	38·8	38·9	39·0	39·1	39·2	39·3	39·4	39·5	39·6	39·7
1893	39·8	39·9	40·0	40·1	40·2	40·4	40·5	40·6	40·7	40·7	40·8	40·9
1894	41·0	41·2	41·3	41·4	41·5	41·6	41·6	41·7	41·7	41·8	41·9	42·0
1895	42·0	42·1	42·2	42·3	42·3	42·4	42·5	42·5	42·6	42·7	42·8	42·9
1896	42·9	43·0	43·1	43·2	43·2	43·3	43·4	43·5	43·6	43·7	43·8	43·9
1897	44·0	44·1	44·2	44·3	44·4	44·5	44·5	44·6	44·7	44·7	44·8	44·9
1898	45·0	45·1	45·2	45·2	45·3	45·4	45·5	45·5	45·6	45·6	45·6	45·7
1899	45·7	45·7	45·8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	38·8	38·9	39·0	38·4	38·4	38·5	38·5	38·6	38·6	38·7	38·7	38·8

XXXIV. Sonnenflecken-Relativzahlen r''.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	41·3	41·1	41·0	41·0	40·9	40·8	40·8	40·7	40·6
1884	40·5	40·5	40·5	40·4	40·4	40·3	40·3	40·3	40·3	40·2	40·2	40·2
1885	40·2	40·1	40·1	40·1	40·1	40·0	40·0	39·9	39·9	39·8	39·7	39·7
1886	39·6	39·5	39·5	39·4	39·3	39·3	39·2	39·2	39·1	39·1	39·1	39·0
1887	39·0	39·0	38·9	38·9	38·9	38·8	38·8	38·7	38·7	38·6	38·6	38·5
1888	38·5	38·4	38·3	38·3	38·2	38·2	38·1	38·1	38·0	38·0	37·9	37·9
1889	37·8	37·8	37·7	37·7	37·6	37·6	37·6	37·5	37·5	37·4	37·4	37·3
1890	37·3	37·2	37·2	37·1	37·1	37·0	37·0	37·0	36·9	36·9	36·9	36·8
1891	36·8	36·8	36·7	36·7	36·7	36·6	36·6	36·5	36·5	36·4	36·4	36·3
1892	36·3	36·2	36·1	36·1	36·0	36·0	35·9	35·8	35·8	35·7	35·6	35·6
1893	35·5	35·4	35·4	35·3	35·2	35·2	35·1	35·1	35·0	35·0	35·0	34·9
1894	34·9	34·9	34·8	34·8	34·8	34·7	34·7	34·7	34·7	34·6	34·6	34·5
1895	34·5	34·4	34·4	34·3	34·3	34·2	34·2	34·2	34·1	34·1	34·1	34·0
1896	34·0	34·0	33·9	33·9	33·9	33·8	33·8	33·8	33·7	33·7	33·6	33·6
1897	33·5	33·5	33·5	33·4	33·4	33·3	33·3	33·3	33·2	33·2	33·1	33·1
1898	33·0	33·0	33·0	32·9	32·9	32·8	32·8	32·7	32·7	32·6	32·5	32·5
1899	32·4	32·3	32·3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	36·5	36·4	36·4	36·9	36·9	36·8	36·8	36·7	36·7	36·6	36·6	36·5

XXXV. Differenzen $r-r'$.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	46·7	— 3·2	41·3	45·4	10·9	17·6	48·9	49·7	41·2
1884	57·0	52·5	52·5	41·9	32·4	17·2	19·1	21·8	27·9	13·8	2·6	13·2
1885	8·8	37·8	15·8	21·0	39·0	49·7	32·5	16·0	5·6	4·7	— 0·7	—12·3
1886	— 4·1	— 8·1	23·3	9·6	— 3·4	— 7·0	— 3·3	—17·3	—12·8	—25·7	—34·0	—22·0
1887	—24·1	—21·3	—30·3	—27·7	—14·6	—10·0	—11·4	—13·4	—27·4	—28·3	—28·1	—14·4
1888	—22·5	—28·1	—27·5	—30·3	—28·4	—28·5	—32·5	—32·9	—26·9	—33·7	—25·1	—29·2
1889	—35·1	—27·5	—29·1	—31·8	—33·8	—29·8	—26·6	—15·7	—29·9	—34·4	—36·3	—29·9
1890	—31·3	—36·1	—31·7	—35·2	—32·1	—35·7	—25·5	—28·7	—20·0	—26·1	—27·8	—28·7
1891	—24·1	—15·5	—27·4	—17·3	3·2	10·3	20·8	— 4·9	15·6	13·2	3·5	— 6·3
1892	30·5	36·9	11·1	30·7	40·6	37·2	37·6	62·1	23·4	31·0	25·8	38·9
1893	35·2	33·1	25·7	48·0	44·5	47·8	48·3	88·6	37·2	39·0	34·3	52·9
1894	42·2	43·4	11·0	40·2	59·7	57·3	64·4	28·6	24·2	33·7	14·7	18·0
1895	21·3	25·1	18·8	34·6	25·2	29·1	5·3	26·4	15·1	25·2	4·4	27·8
1896	—13·9	14·4	8·9	0·6	—15·5	5·7	1·6	—16·3	17·7	—15·3	— 5·8	— 1·3
1897	— 3·4	—14·7	—15·1	—13·3	—24·4	—33·2	—16·9	—22·8	3·4	—30·4	—36·4	—11·6
1898	—14·8	— 8·7	— 6·9	—30·7	—19·5	—23·1	—36·5	—14·1	—10·8	—11·2	—14·7	—33·1
1899	—26·2	—36·5	—27·7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	— 0·3	2·9	— 1·8	5·4	4·4	7·4	7·6	5·5	3·8	0·2	— 4·6	0·1

XXXVI. Differenzen $r'-r''$.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oktober	Nov.	Dez.
1883	—	—	—	— 5·9	— 5·8	— 5·8	— 5·8	— 5·8	— 5·8	— 5·9	— 5·9	— 5·9
1884	— 6·0	— 6·1	— 6·2	— 6·2	— 6·3	— 6·3	— 6·3	— 6·3	— 6·3	— 6·2	— 6·2	— 6·2
1885	— 6·2	— 6·1	— 6·1	— 6·1	— 6·1	— 6·0	— 6·0	— 5·9	— 5·9	— 5·8	— 5·7	— 5·7
1886	— 5·6	— 5·5	— 5·5	— 5·3	— 5·2	— 5·2	— 5·2	— 5·0	— 4·9	— 4·8	— 4·8	— 4·6
1887	— 4·6	— 4·6	— 4·4	— 4·3	— 4·3	— 4·1	— 4·1	— 3·9	— 3·9	— 3·7	— 3·6	— 3·4
1888	— 3·3	— 3·2	— 3·0	— 2·9	— 2·8	— 2·6	— 2·5	— 2·4	— 2·3	— 2·2	— 2·1	— 2·0
1889	— 1·9	— 1·9	— 1·6	— 1·6	— 1·4	— 1·4	— 1·3	— 1·2	— 1·1	— 0·9	— 0·9	— 0·7
1890	— 0·7	— 0·6	— 0·4	— 0·3	— 0·2	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·7
1891	0·8	0·8	1·1	1·1	1·2	1·4	1·4	1·6	1·7	1·9	2·0	2·2
1892	2·3	2·4	2·7	2·8	3·0	3·1	3·3	3·5	3·6	3·8	4·0	4·1
1893	4·3	4·4	4·6	4·8	5·0	5·2	5·4	5·5	5·7	5·7	5·8	6·0
1894	6·1	6·1	6·5	6·6	6·7	6·9	6·9	7·0	7·0	7·2	7·3	7·5
1895	7·5	7·6	7·8	8·0	8·0	8·2	8·2	8·3	8·5	8·6	8·7	8·9
1896	8·9	8·9	9·2	9·3	9·3	9·5	9·6	9·7	9·9	10·0	10·2	10·3
1897	10·5	10·5	10·7	10·9	11·0	11·2	11·2	11·3	11·5	11·5	11·7	11·8
1898	12·0	12·0	12·2	12·3	12·4	12·6	12·7	12·8	12·9	13·0	13·1	13·2
1899	13·3	13·3	13·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	2·3	2·5	2·6	1·5	1·5	1·7	1·7	1·9	1·9	2·1	2·1	2·3

Nachdem das Manuskript dieser Arbeit ganz fertiggestellt war, wurde ich durch Herrn Hofrat Prof. Dr. J. Hann auf eine Abhandlung des Herrn A. Angot aufmerksam gemacht, die in den Annales du bureau central Météorologique de France, Année 1899, erschienen ist und den Titel führt: »Sur la Variation diurne de la Déclinaison Magnétique au Parc Saint Maur.« In derselben stellt Herr Angot zunächst die täglichen Variationen der Deklination der Jahre 1883 bis 1899 für jeden einzelnen Monat durch Reihen dar und behandelt dann auch den Zusammenhang dieser Variationen mit den Sonnenflecken, und zwar nicht nur für Parc St. Maur, wie man nach dem Titel glauben sollte, sondern auch für Greenwich und Batavia. Bedauerlicherweise ist ihm die Abhandlung Ad. Schmidt's unbekannt gewesen (er erhielt von ihr Kenntnis, als seine Arbeit bereits dem Druck übergeben war), sonst hätte er gewiß nicht die Deklinationsvariationen, sondern, wie es Schmidt zuerst getan hat und wie es auch hier geschehen ist, die Variationen der Komponenten X, Y, Z seiner Untersuchung zu Grunde gelegt.

Die Deklinationsvariationen eines längeren Zeitabschnittes lassen sich nämlich nicht als Funktionen der Sonnenflecken-Relativzahlen darstellen, da sie auch von den absoluten Werten der Deklination und Horizontalintensität abhängen, die mit der Zeit Änderungen erleiden. Unabhängig von den absoluten Werten sind nur die Variationen der Komponenten X, Y, Z, daher nur die Variationen dieser Elemente als Funktionen der Relativzahlen ausgedrückt werden können, was bereits anfangs betont worden ist.

Herr Angot teilt am Schlusse seiner Abhandlung mit, daß er auch die Intensität in ähnlicher Weise bearbeiten werde. Mit Rücksicht auf meine vorliegende Untersuchung wäre es sehr erwünscht, wenn sich Herr Angot entschließen würde, die Daten von Parc St. Maur in derselben Weise als Funktionen der Relativzahlen darzustellen, wie ich es hier getan habe, weil dann die Rechnungsergebnisse für St. Maur und Batavia untereinander streng vergleichbar wären.

Über den Zusammenhang der spezifischen Volumina einer Flüssigkeit und ihres gesättigten Dampfes

von

Dr. **Johann Pitsch.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Juni 1904.)

Während die Van der Waals'sche Formel sowohl das Verhalten von Gasen als auch von Dämpfen und Flüssigkeiten unter den verschiedensten Umständen qualitativ überraschend getreu darstellt, weicht sie nicht unbeträchtlich von den Beobachtungsresultaten ab, wenn man sie zu quantitativen Bestimmungen bei gesättigten Dämpfen und bei Flüssigkeiten verwenden will. Ein Beispiel möge dies erläutern.

Die genannte Formel:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=r.T \qquad 1)$$

läßt sich bekanntlich auf die Form:

$$\left(\varepsilon+\frac{3}{n^2}\right)(3n-1)=8m \qquad 2)$$

bringen, wenn man den Druck ε in Teilen des kritischen Druckes, das Volumen n in Teilen des kritischen Volumens und die absolute Temperatur m in Teilen der kritischen absoluten Temperatur ausdrückt, kurz, wenn man die sogenannten Van der Waals'schen Einheiten anwendet.[1]

[1] Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. II. Auflage, I. Teil, p. 137.

Für Wasser sind die kritischen Daten (im Durchschnitte der bisher gefundenen Werte[1]):

$$T_0 = 639 \cdot 4°, \quad p_0 = 196 \cdot 9 \text{ Atmosphären}$$

und sonach für die Temperatur von 100° C. oder 373° der absoluten Skala

$$\varepsilon = 0 \cdot 0050795 \quad \text{und} \quad m = 0 \cdot 58334.$$

Die Auflösung der Gleichung 2) liefert nunmehr die drei Werte:

$$\frac{1}{n_1} = 2 \cdot 333617,$$

$$\frac{1}{n_2} = 0 \cdot 663100,$$

$$\frac{1}{n_3} = 0 \cdot 003283,$$

von welchen der erste den reziproken Wert des spezifischen Volumens (Volumens der Masseneinheit) des Wassers, der letzte jenen des gesättigten Wasserdampfes bei 100° angibt. Der Quotient $\frac{n_3}{n_1} = 710 \cdot 82$ bestimmt, unabhängig von der gewählten Volumeinheit, das Verhältnis dieser spezifischen Volumina.

Bei 100° besitzt aber 1 *g* Wasser das Volumen

$$v_1 = 1 \cdot 04315 \, cm^3,$$ [2]

1 *g* gesättigter Wasserdampf das Volumen

$$v_3 = 1650 \cdot 6 \, cm^3$$ [3]

und das Verhältnis dieser Größen wird

$$\frac{v_3}{v_1} = 1582 \cdot 3,$$

mithin mehr als doppelt so groß als es die Theorie verlangt.

---

[1] Landolt und Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 2. Auflage, p. 90.

[2] L. und B., p. 39.

[3] L. und B., p. 63.

Dennoch deuten viele Umstände darauf hin, daß die Van der Waals'sche Gleichung tatsächlich, wie ihr geistvoller Urheber annimmt, wenigstens der Form nach auch für gesättigte Dämpfe und für Flüssigkeiten gültig bleibt. Mannigfache Versuche zur Ergänzung dieser Gleichung hatten bisher nicht den gewünschten Erfolg.[1] Am nächsten liegt wohl die Annahme, daß in der ursprünglichen Gleichung die drei als konstant gedachten Größen a, b und r nicht konstant, sondern mit der Temperatur veränderlich seien, eine Annahme, die umso mehr Aussicht auf Erfolg zu bieten scheint, als sie keine der schönen Beziehungen beeinträchtigt, die sich aus der Van der Waals'schen Formel ergeben.

Die Werte, welche die Größen a, b und r für die kritische Temperatur T_0 bei dem kritischen Volumen v_0 annehmen, seien a_0, b_0 und r_0.

Dann gelten die Beziehungen:

$$v = v_0 n, \qquad p = p_0 \varepsilon, \qquad T = T_0 m$$

$$v_0 = 3b_0, \qquad p_0 = \frac{a_0}{27 b_0}, \qquad T_0 r_0 = \frac{8 a_0}{27 b_0}\,{}^{2}$$

und die Gleichung 1) geht nach einigen selbstverständlichen Umformungen in folgende über:

$$\left(\varepsilon + \frac{3\alpha}{n^2}\right)(3n - \beta) = 8\rho m, \tag{3}$$

wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{a}{a_0} = \alpha, \quad \frac{b}{b_0} = \beta \quad \text{und} \quad \frac{r}{r_0} = \rho$$

setzt. Die einfachste Form der Gleichung gewinnt man aber, wenn man beide Seiten durch ρm dividiert und die Bezeichnungen:

[1] Clausius, Wied. Ann. 1880, p. 337 u. a. — Theoretische Erörterungen über diese Ergänzung gibt Boltzmann in seinen Vorlesungen über Gastheorie, II., p. 153.

[2] Van der Waals, I., p. 136 und 137.

$$\frac{\varepsilon\beta}{pm} = e, \quad \frac{n}{\beta} = w, \quad \frac{\alpha}{\beta pm} = x$$

einführt.

In dieser Form lautet sie dann:

$$\left(e + \frac{3x}{w^2}\right)(3w-1) = 8. \tag{4}$$

Der Zusammenhang zwischen dem spezifischen Volumen v_1 einer Flüssigkeit und dem zugehörigen spezifischen Volumen v_3 ihres gesättigten Dampfes wird durch das Gesetz von Maxwell-Clausius bestimmt:

$$p(v_3 - v_1) = \int_{v_1}^{v_3} p.dv,$$

das nach Durchführung der angezeigten Integration und Einführung der Van der Waals'schen Einheiten die Form

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{n_1 n_3}\right)(n_3 - n_1) = \frac{8m}{3} l \frac{3n_3 - 1}{3n_1 - 1}$$

gewinnt.[1] Der ergänzten Gleichung 3) entspricht dann der Ausdruck:

$$\left(\varepsilon + \frac{3\alpha}{n_1 n_3}\right)(n_3 - n_1) = \frac{8pm}{3} l \frac{3n_3 - \beta}{3n_1 - \beta},$$

aus welchem durch die früher angegebenen Substitutionen der neue:

$$\left(e + \frac{3x}{w_1 w_3}\right)(w_3 - w_1) = \frac{8}{3} l \frac{3w_3 - 1}{3w_1 - 1} \tag{5}$$

hervorgeht. Die Beziehung zwischen w_1 und w_3 wäre gefunden, wenn auch e und x durch diese Größen ausgedrückt werden könnten.

Aus der Gleichung 4) folgen die beiden neuen Gleichungen:

$$e + \frac{3x}{w_1^2} = \frac{8}{3w_1 - 1},$$

$$e + \frac{3x}{w_3^2} = \frac{8}{3w_3 - 1},$$

[1] Van der Waals, I., p. 137.

mit den Auflösungen:

$$\frac{x}{8} = \frac{w_1^2 w_3^2}{(3w_1-1)(3w_3-1)(w_1+w_3)},$$

$$\frac{e}{8} = \frac{3w_1w_3-(w_1+w_3)}{(3w_1-1)(3w_3-1)(w_1+w_3)}.$$

Die Einführung dieser Werte für x und e in die Gleichung 5) liefert nun nach einigen leichten Reduktionen die gesuchte Beziehung zwischen w_1 und w_3:

$$\frac{6w_1w_3-(w_1+w_3)}{(3w_1-1)(3w_3-1)(w_1+w_3)} = \frac{l(3w_3-1)-l(3w_1-1)}{3(w_3-w_1)}.$$

Sie erhält eine wesentlich einfachere Form durch die Substitution:

$$\frac{1}{3w-1} = y \quad \left[3w = \frac{y+1}{y}\right],$$

nämlich:

$$\frac{ly_1-ly_3}{y_1-y_3} = \frac{y_1+y_3+2}{y_1+y_3+2y_1y_3}. \qquad 6)$$

Zur Bestimmung von x und e dienen dann die Formeln:

$$\frac{27x}{8} = \frac{(1+y_1+y_3+y_1y_3)^2}{y_1+y_3+2y_1y_3},$$

$$\frac{e}{8} = \frac{(1-y_1y_3)y_1y_3}{y_1+y_3+2y_1y_3}.$$

Der Form nach gleiche, inhaltlich aber wesentlich verschiedene Relationen hat Clausius in seiner Abhandlung: »Über die theoretische Bestimmung des Dampfdruckes und der Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit«[1] aus einer abgeänderten Form der Van der Waals'schen Gleichung abgeleitet. Eine praktische Verwertung war aber durch die Zahl der eingeführten konstanten Größen und durch die Art ihres Vorkommens ziemlich ausgeschlossen.

---

[1] Wied. Ann. *14*, 1881. — Mechanische Wärmetheorie, II. Auflage, 3. Bd., p. 220.

Die Auswertung der Formeln 7) und 8) soll für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und zunächst nur die Forderung der Gleichung 6) mit den Ergebnissen der Beobachtung verglichen werden. Für einen solchen Vergleich liegen die Verhältnisse trotz der Komplikation der bezüglichen mathematischen Ausdrücke außerordentlich günstig. y hängt mit v durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{\frac{3v}{v_0\beta} - 1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{3cv - 1}$$

zusammen, wenn man für $\frac{1}{v_0\beta} = c$ setzt. Nach der Van der Waals'schen Annahme wäre c konstant $\left(\beta = 1,\ c = \frac{1}{v_0}\right)$ und gleich der auf Wasser von 4° bezogenen Dichte der Substanz im kritischen Zustande. Die Beobachtung eines zusammengehörigen Wertepaares v_1 und v_3 würde somit genügen, um für jedes beliebige Flüssigkeitsvolumen das entsprechende Dampfvolumen berechnen zu können. Nach unsrer Annahme hingegen ist c mit der Temperatur veränderlich und erst die Kenntnis dieser Temperaturfunktion würde die Berechnung des spezifischen Dampfvolumens gestatten.

Mit ziemlicher Genauigkeit sind die Daten, die eine numerische Auswertung der Gleichung 6) ermöglichen, für Wasser bekannt. Die verwendeten Angaben für das spezifische Volumen v_1 des Wassers wurden für Temperaturen zwischen 0° und 100° C. der Tabelle 15 des Sammelwerkes von Landolt und Börnstein[1] entnommen, während für Temperaturen zwischen 100° und 200° C. die sorgfältigen Beobachtungen von Hirn[2] zur Verwendung kamen. Die Werte für v_3 folgen unmittelbar aus der Größe $u = v_3 - v_1$, die Zeuner in den Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie (Tabelle 1 *b*) anführt; es ist

$$v_3 = u + v_1.$$

[1] L. und B., p. 39.

[2] M. G. A. Hirn, Memoire sur la thermodynamique. Ann. de chim. et de phys. IV série, tome X (1867), p. 32.

Die Berechnung der zu einem Wertepaare v_1 und v_3 gehörigen Größe c gelingt dann ohne nennenswerte Schwierigkeit, wenn auch in etwas umständlicher Weise, durch Anwendung der Regula falsi. Die in der Nähe des Dichtemaximums des Wassers liegenden Volumina wurden nicht zur Berechnung herangezogen, da die Kräfte, die sich bei dieser Eigentümlichkeit des Wassers merkbar machen, bei der Ableitung der Formel außer Betracht blieben. In gleicher Weise wurde dann noch das Verhalten des Äthers und des Schwefelkohlenstoffs untersucht, nur daß die Volumina v_1 für diese Körper ausschließlich nach den von Hirn gegebenen Formeln berechnet werden mußten.

Die nachstehenden Tabellen enthalten in der zweiten und dritten Kolonne die für v_1 und v_3 benützten Werte, in der vierten den daraus folgenden Wert für c.

Wasser.

t	v_1	v_3	c	c berechnet	Differenz
20	1·00175	58721	0·36166	0·36169	— 3
40	1·00773	19645	0·36289	0·36283	+ 6
60	1·01697	7654·1	0·36318	0·36318	0
80	1·02899	3379·9	0·36285	0·36287	— 2
100	1·04315	1650·6	0·36203	0·36205	— 2
120	1·05992	876·3	0·36081	0·36079	+ 2
140	1·07949	498·8	0·35915	0·35917	— 2
160	1·10149	301·2	0·35727	0·35727	0
180	1·12678	191·2	0·35511	0·35513	— 2

Äther

(Dichte bei 0° 0·73658).

t	v_1	v_3	c	c berechnet	Differenz
0	1·35763	1273·4	0·28096	0·28089	+ 7
20	1·39751	572·0	0·27831	0·27836	— 5
40	1·44329	286·7	0·27562	0·27565	— 3
60	1·49536	157·6	0·27287	0·27286	+ 1
80	1·55588	93·2	0·27013	0·27007	+ 6
100	1·62876	57·8	0·26731	0·26735	— 4
120	1·71967	36·7	0·26470	0·26473	— 3

Schwefelkohlenstoff

(Dichte bei 0° 1·29312).

t	v_1	v_3	c	c berechnet	Differenz
0	0·773324	1759·3	0·48542	0·48527	+15
20	0·791962	803·9	0·48088	0·48095	— 7
40	0·811576	408·2	0·47667	0·47679	—12
60	0·832587	225·5	0·47280	0·47282	— 2
80	0·855357	133·4	0·46920	0·46910	+10
100	0·880490	83·5	0·46574	0·46563	+11
120	0·908769	54·8	0·46230	0·46244	—14

Eine weitere Ausdehnung der Rechnung verbietet der Umstand, daß die für höhere Temperaturen geltenden Werte von v_3 nur mehr mit einem geringen Grade von Genauigkeit bekannt sind.

Diese Tabellen lehren, daß sich die Größe c tatsächlich, wenn auch in geringem Maße, mit der Temperatur ändert. Der regelmäßige Gang dieser Änderungen tritt besonders deutlich hervor, wenn man c in seiner Abhängigkeit von T graphisch darstellt. Während die Kurve für Wasser ein Maximum in der Nähe der Temperatur $t = 60°$ aufweist, nehmen die Kurven für Äther und Schwefelkohlenstoff in dem dargestellten Bereich einen nahezu geradlinigen Verlauf, der aber deutlich auf das Vorhandensein eines Wendepunktes schließen läßt.

Man kann nun empirisch die Gleichung einer Kurve aufstellen, welche die in Betracht kommenden Eigentümlichkeiten besitzt und mit großer Genauigkeit den Verlauf der Größe c wiedergibt. Die Gleichung dieser Kurve lautet:

$$\lg\left(c - \alpha . T^{\frac{1}{4}}\right) = -\left(\frac{\beta}{T^{\frac{1}{4}}} + \gamma . T^{\frac{1}{4}}\right). \qquad 9)$$

Die wahrscheinlichen Werte der Konstanten α, β und γ für die betreffenden Substanzen sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen, die außerdem die kritische Temperatur, ferner die für das Maximum und Minimum von c berechneten Temperaturen und die auf Wasser von 4° C. bezogene, auch aus 9) berechnete kritische Dichte c_0 enthält.

	Wasser	Äther	Schwefelkohlenstoff
$\lg \alpha$	6·73039—10	7·07827—10	7·32460—10
$\lg \beta$	1·23084	1·15886	0·79160
$\lg \gamma$	7·54726—10	7·85711—10	7·74341—10
T_0	637·7	466·9	547·4
$T_{max.}$	333·1	207·1	152·3
$T_{min.}$	2122·9	703·4	635·1
C_0	0·33032	0·25631	0·44717

Mittels der angegebenen Konstanten wurden aus 9) jene Zahlen berechnet, welche in den mit »*c* berechnet« bezeichneten Kolonnen enthalten sind und deren geringe Abweichungen von der darzustellenden Größe die Nebenkolonne angibt. Bezüglich der Größe c_0 liegen nur für Äther ziemlich übereinstimmende Beobachtungen vor.[1] Ramsay und Young bestimmten diese Dichte zu 0·246, Jonk zu 0·267. Das Mittel 0·2565 beider Werte stimmt fast genau mit dem aus 9) berechneten Werte überein.

Die naheliegende Vermutung, daß sich das Verhalten der Größe c für alle Substanzen durch eine einzige Gleichung ausdrücken ließe, wenn man c in Teilen von c_0 und T in Teilen von T_0 bestimmt, findet keine Bestätigung. Sollte sich diese Vermutung bewahrheiten, so müßte das Verhältnis der Größen c für zwei verschiedene Körper bei korrespondierenden Temperaturen $\left(\frac{T}{T_0} = \frac{T'}{T'_0}\right)$ konstant sein.

Die folgenden Tabellen zeigen, daß dies nur näherungsweise zutrifft.

	Korrespondierende Temperaturen		
Wasser	400·2	427·5	454·8
Äther	293	313	333
$\frac{c_1}{c_2}$	1·2944	1·2978	1·3007

	Korrespondierende Temperaturen		
Wasser	318·0	341·3	364·6
Schwefelkohlenstoff	273	293	313
$\frac{c_1}{c_2}$	0·74776	0·75513	0·76038

[1] Landolt und Börnstein, p. 84, Tabelle 42, Kolonne δ.

Theoretisch läßt sich über c nur sehr wenig aussagen. Diese Größe wurde durch die Gleichung

$$c = \frac{1}{v_0 \beta}$$

definiert und da

$$v_0 = 3 b_0$$

und

$$\beta = \frac{b}{b_0}$$

ist, wird

$$c = \frac{1}{3b}.$$

Die mechanische Wärmetheorie führt zu dem Ergebnisse, daß b der dritten Potenz jener Distanz (σ) proportional ist, bis auf welche sich zwei Moleküle nähern könnten, wenn das eine festgehalten würde, das andre aber mit einer Geschwindigkeit darauf zuflöge, deren Quadrat dem mittlern Geschwindigkeitsquadrate der Moleküle gleichkommt.[1]

Nach der Maxwell'schen Hypothese, daß sich die Moleküle mit einer der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstoßen,[2] ist σ der vierten Wurzel der absoluten Temperatur verkehrt proportional, also c selbst der Größe $T^{\frac{3}{4}}$ proportional.

Daß aber die Funktion

$$c = k . T^{\frac{3}{4}}$$

die für c gewonnenen Werte nicht darstellen kann, ist leicht ersichtlich, da sie von $T = 0$ bis $T = \infty$ ununterbrochen wächst, also keinen Maximalwert annimmt. Bemerkenswert ist

---

[1] Boltzmann, II., p. 156.

[2] Boltzmann, I., p. 161.

der Umstand, daß sich die empirische Gleichung 9) sowohl für große als auch für kleine Werte von T auf die Form

$$c = \alpha T^{\frac{3}{4}}$$

reduziert.

Freilich muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß bis jetzt kein Grund für die Annahme spricht, daß die Gleichung 9) ihre Gültigkeit auch noch über die kritische Temperatur hinaus beibehalte.

Über den Ursprung der Elektrizitätserregung bei der Berührung.

Kontaktelektrische Studien

(III. Mitteilung)

von

Dr. **Jean Billitzer.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1904.)

Daß die Frage nach der Entstehungsweise freier Elektrizitäten bei der Trennung zweier in Berührung befindlicher Körper trotz wiederholter Inangriffnahme keine abschließende Beantwortung erfahren hat, rührt wohl in erster Linie davon her, daß die Methoden, welche bei diesen Untersuchungen in Anwendung kamen, keine sichere Gewähr dafür leisteten, daß die Trennung wirklich an der Berührungsfläche erfolgt sei. Auch war der Einfluß der zufälligen Oberflächenbeschaffenheit kaum zu eliminieren und verursachte oft große, fast immer aber unkontrollierbare Abweichungen, die jede Zuverläßlichkeit der Versuchsresultate untergraben.[1]

Als ich daher vor einiger Zeit eine Methode ausarbeitete,[2] den Sinn der Potentialdifferenz an der Trennungsfläche zweier

---

[1] Grotthus (Gilb. Ann., 61, p. 60 [1818]) hebt schon mit Recht hervor, daß solche Versuche nur mit größter Vorsicht aufzunehmen seien. Wie leicht man einer Täuschung unterliege, zeigt ihm eine Reihe von Versuchen, bei denen er beobachtete, daß zwei gleiche Glastafeln, die man nach vorgenommener Berührung voneinander trennt, in deutlichem elektrischen Gegensatze zueinander stehen, daß aber beim Abheben einer glatten von einer rauhen Glastafel die Elektrizitätserregung schon bedeutend größer ist wie etwa bei der Trennung einer Blei- von einer Schwefelplatte.

[2] Drude's Ann., 11, p. 903 und 937 (1903).

Phasen zu erkennen, schien es mir nicht ohne Belang zu sein, dieselbe auch zu einer neuerlichen Inangriffnahme gewisser Probleme der Berührungselektrizität zu verwerten. War es mir dabei zwar in erster Linie um die Prüfung und Ausarbeitung der Methode zu tun, so scheinen die dabei erhaltenen Resultate auch etwas zur Entscheidung gewisser Fragen der Berührungselektrizität beitragen zu können und dies mag eine etwas ausführlichere Beschreibung derselben motivieren.

Versuchsmethode und Vorversuche.

Ein festes Teilchen, das im elektrischen Gegensatze zu einer Flüssigkeit steht, erzeugt bei einer Bewegung durch dieselbe einen Strom, dessen Ursprung v. Helmholtz in einer Verschiebung der elektrischen Doppelschicht sucht, die sich um das Teilchen herstellt. Die äußere Hülle der Doppelschicht soll infolge der Reibung bei der Bewegung teilweise abgestreift werden, während der entsprechende Teil des inneren Belages der elektrischen Doppelschicht, der in das feste Teilchen fällt, mit ihm fortgeführt wird. Weil es aber schwer ist, sich vorzustellen, daß die unmittelbar an das Teilchen grenzenden Schichten, die zudem entgegengesetzte elektrische Ladungen tragen, durch so geringe mechanische Kräfte sollten getrennt werden können, während man doch annimmt, daß in einer flüssigkeitdurchströmten Röhre die an die Rohrwandung unmittelbar angrenzenden Flüssigkeitsschichten nicht fortgeführt werden, weil es ferner unerklärlich bleiben müßte, wie ein Metall in Lösung gehen sollte, wenn sich nicht von selbst Ionen von der Doppelschicht entfernen könnten, habe ich schon früher (l. c.) die Annahme gemacht, daß die elektrische Doppelschicht teilweise dissoziiert ist, so daß sich ihre Belegungen nicht völlig ausgleichen, sondern daß ein kleiner Überschuß der einen Elektrizität im Teilchen vorhanden ist, während die entsprechende Menge der andern in der Flüssigkeit verteilt ist. Nach der osmotischen Theorie der Stromerzeugung haben wir uns ja vorzustellen, daß ein suspendiertes Teilchen z. B. Minus-Ionen mit einem bestimmten Lösungsdrucke zu entsenden sucht und soviel davon in die Flüssigkeit schickt, bis die dadurch erregte elektrostatische

Rückanziehung dem Lösungsdruck eben das Gleichgewicht hält. Es werden also Minus-Ionen in die Lösung getrieben, das Teilchen erlangt eine positive Ladung und indem sich Minus-Ionen der Oberfläche des Teilchens auflagern, stellt sich die elektrische Doppelschicht her. Ist hingegen der Ionendruck der betreffenden Minus-Ionen in der Lösung schon von vornherein größer wie die Lösungstension, so werden sich umgekehrt Minus-Ionen auf dem Teilchen niederschlagen, Plus-Ionen es umlagern und die Flüssigkeit erlangt eine positive Ladung. Wird ein solches Teilchen bewegt, so führt es den geringen Überschuß negativer Elektrizität, den es festhält, mit sich und gibt Anlaß zur Erregung eines Stromes, dessen Sinn vom Sinne der Lage der Doppelschicht abhängt. Es wird die negative Elektrizität sich mit den Teilchen bewegen, wenn diese Minus-Ionen aus der Lösung aufgenommen oder positive an dieselbe abgegeben hat und umgekehrt im umgekehrten Falle.

Die Bildung einer elektrischen Doppelschicht kann nun auch vor sich gehen, ohne daß das Teilchen sich elektromotorisch zu betätigen braucht, sofern nur die in der Lösung vorhandenen Plus- und Minus-Ionen in beiden Phasen verschiedene Verteilungskoeffizienten aufweisen, nur wird eine solche Elektrizitätstrennung in der Regel eine viel geringfügigere sein, denn die Lösungsdrucke sind meist von ganz anderer Größenordnung (vergl. die I. Mitteilung dieser Studien, p. 138) als die »Verteilungsdrucke«. Ob nun die eine oder die andere Bildungsweise der Doppelschicht vorliegt, in allen Fällen wird das bewegte Teilchen die Elektrizität mit sich führen, die es trägt, ein Schluß, dessen Zulässigkeit in der zweiten Mitteilung wohl genügend begründet worden sein dürfte, daß hier wieder aus der Beobachtung des Sinnes der erzeugten Ströme auf den Sinn der Potentialdifferenz Metall/Lösung geschlossen werden dürfte.

Um den Sinn dieser Potentialdifferenz bei Metallen erkennen zu können, genügte es, Metalldrahtstücke zwischen zwei Elektroden desselben Metalles durch eine Lösung fallen zu lassen, die Elektroden mit einem Galvanometer zu verbinden und den Sinn des erzeugten Stromes nach dem Falle zu beobachten. Dies ist aber nicht mehr zulässig, sobald es

sich darum handelt, den Ladungssinn nichtmetallischer Partikeln zu ermitteln, denn diese könnten zum Auftritte neuer Potentialdifferenzen bei der Berührung mit den Metallelektroden Anlaß geben, deren Sinn und Größe kaum zu kontrollieren wäre. Die Berührung mit den Elektroden ist daher zu vermeiden und dies kann dadurch erzielt werden, daß man

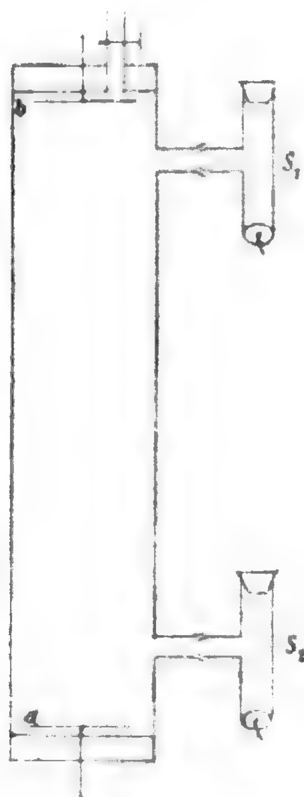


Fig. 1.

Die Seitenelektroden S_1 S_2 sind angeschliffen und können leicht ausgewechselt werden, Gummiringe oder Federn halten sie in ihrer Lage fest. Zur Entfernung schädlicher Gasblasen trägt der eine der Verschlußkorke einen Glashahn. Die Endelektroden *a*, *b* (aus Platin PbO_2, MnO_2 u. s. f.) konnten leicht eingeführt oder entfernt werden, wenn sie nicht gebraucht wurden.

die Elektroden nicht unmittelbar in die Röhre bringt, sondern zwei Ansätze zu ihrer Aufnahme der Röhre seitlich anfügt (Figur).

Diese Elektrodengefäße beschickte ich, um Diffusion und Vermischung hintanzuhalten, mit erstarrten gelatinösen Lösungen; sie wurden in den einzelnen Fällen mit erstarrter KCl-Lösung, HgCl und Quecksilber oder mit erstarrter salpetersaurer Silbernitratlösung und einem Silberdraht u. dgl. m.

beschickt, blieben immer bis zu ihrer Verwendung in entsprechender Lösung kurzgeschlossen und wurden nur dann in die Röhre eingesetzt, wenn sie, mit dem Galvanometer verbunden, keinen Ausschlag hervorriefen. Auf diese Weise erhält man recht konstante Elektroden, die bequem zu handhaben sind; es war immer eine Reihe solcher vorbereitet, die sich gegebenenfalls leicht auswechseln ließen, ohne daß die Röhre frisch beschickt zu werden brauchte.

Indem man die Berührung der fallenden Partikeln mit den Elektroden vermeidet, sinkt die Empfindlichkeit der Methode um ein Bedeutendes, gleichzeitig ist kein dauernder Strom mehr zu beobachten und die Messung muß während des Falles der Partikeln vorgenommen werden. Es empfiehlt sich deshalb, die zu untersuchenden Körper in Form feinen Pulvers zum Versuche zu verwenden, das längere Zeit zum Durchsetzen der Röhre braucht, und sich eines empfindlichen Galvanometers zu bedienen (zu meinen Versuchen verwendete ich ein d'Arsonval der Empfindlichkeit zirka $1 \cdot 10^{-9}$) und die Zuleitungen von den Elektroden direkt an dessen Klemmen anzuschließen. Man erhält dann bei jeder Rohrumkehr meist recht deutliche Ausschläge; zur weiteren Kontrolle habe ich, wo es nur anging, Elektroden von hinreichender Konstanz aus den untersuchten Körpern herzustellen, auch die Stromerzeugung mit der früher verwendeten Anordnung der Prüfung unterworfen.

Beobachtet man die Ströme, welche beim Falle des Pulvers zwischen den seitlichen Elektroden auftreten, so verhalten sich diese (bei ihrer Verbindung durch das Galvanometer) wie Mittelleiter; ist das fallende Pulver positiv geladen, bleibt also im oberen Teile der Röhre eine negative Ladung zurück, so muß die obere Seitenelektrode positiv gegen die untere sein und vice versa. Ich untersuchte zunächst, ob dies auch wirklich der Fall ist und bediente mich dazu einer Röhre, welche außer den zwei Elektroden an den Enden noch vier seitliche Ansätze trug, die zur Aufnahme von Silberdrähten bestimmt waren; man konnte also gleichzeitig die Ströme zwischen den End- und den Seitenelektroden beobachten, es zeigte sich, wie erwartet, daß die obere Seiten-

elektrode immer dann positiv gegen die unteren war, wenn die obere Endelektrode negativ gegen die andere wurde.

Beispielsweise erzeugte fallendes Silberpulver in verdünnter Silbernitratlösung zwischen den Endelektroden einen Strom, der im Galvanometer (481 Ohm) einen Ausschlag von 70 Teilstrichen hervorrief, wenn demselben 50.000 Ohm vorgeschaltet wurden, im erzeugten Strome bewegte sich die Plus-Elektrizität in der Fallrichtung des Pulvers.

Die Ströme zwischen den Seitenelektroden waren erheblich schwächer; schloß man die oberste und die unterste direkt an das Galvanometer, so schlug es bei jeder Umdrehung um etwa 20 Teilstriche aus. Die obere Elektrode war dabei positiv gegen die untere.

Ließ man das Silberpulver durch eine jodsilberhaltige Lösung von KJ fallen, so waren die Ausschläge etwas kleiner, die obere Endelektrode positiv, die obere Seitenelektrode negativ. Die Ströme zwischen den Seitenelektroden waren also in dieser Röhre etwa 300mal schwächer, aber noch gut zu beobachten. Zwei von vielen Meßreihen seien hier wiedergegeben.

Lösung verd. Silbernitrat.

(Ag/Lösung/0·1 n. KCl/HgCl/Hg+0·28 Volt.)

Endelektroden (Abstand 30 *cm*) 50.000 Ohm vorgesch. +70 Teilstriche Ausschlag.

Seitenelektroden (Abstand 24 *cm*) (Ausschlag in bestimmten Zeiträumen gemessen):

0, +20, 12, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1 . . . nach 1 Stunde —2
0, +19, 16, 14, 9, 8, 6 . . . .
0, +19, 15, 14, 12, 10 . . . . 4, 2, 2, 2, 1, 0 u. s. f.

Lösung 0·1 n. KJ (AgJ-haltig.)

(Ag/Lösung/0·1 n. KCl/HgCl/Hg+0·05 Volt.)

Endelektroden durch 50.000 Ohm mit dem Galvanometer verbunden, Ausschlag —62 Teilstriche.

Seitenelektroden direkt mit dem Galvanometer verbunden, Ausschlag wie früher gemessen:

0, 0, —14, 12, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 1 . . .
0, —8, 6, 3, 3, 2, 1 . . .
0, —9, 5, 4, 4, 2, 1 . . .
0, —10, 4, 3, 2, 2, 1 . . . u. s. f.

Wegen der Kleinheit dieser Ausschläge stand ich davon ab, den Potentialabfall im Rohre näher zu prüfen.

Da wir also auch hier Aufschluß über den Ladungssinn Ag/Lösung erhalten, konnte die Methode zu der geplanten Untersuchung benützt werden.

Die im folgenden aufgenommenen Meßresultate sind immer das Ergebnis von mindestens sechs Versuchen. Sehr kleine und nicht sicher beobachtete Ausschläge sind eingeklammert oder durch ein Doppelzeichen kenntlich gemacht, dessen oberes Zeichen das wahrscheinlichere vorstellt. Es ist immer nur der Sinn des beobachteten Ausschlages eingetragen worden, weil ihr Ausmaß nur von nebensächlicher Bedeutung ist, von der Leitfähigkeit der Lösung, der Länge der Röhre (meist zirka 30 *cm*), der Menge und Feinheit des Pulvers etc. abhängt und es uns hier nur darauf ankam, den Sinn zu bestimmen; es gibt das eingetragene Zeichen den Sinn der Ladung an, die das Pulver gegen die Lösung annahm.

Zu Anfang prüfte ich das Verhalten einer Reihe elektromotorisch wenig aktiver Stoffe, die erzeugten Ströme waren aber meist so schwach, daß ich von einer eingehenderen Untersuchung zunächst absehen mußte und hier nur einige Versuche mit Schwefel, Phosphor und Kieselsäure anführen will.

Schwefel (frisch destilliert in kleinen Stückchen oder zu Pulver zerrieben).

Die vielen Doppelzeichen zeigen schon an, wie schwach die beobachteten Ströme waren; jedes einzelne Zeichen bezieht sich auf eine neu beschickte Röhre.

Lösung	Ladungssinn des Schwefels				
Na_2S alkal. (an S gesättigt)	—	—	∓	—	∓
KCNS »	+	+			
$SnCl_2$ (stark angesäuert)	—	∓	(—)	∓	
HCOH » »	∓	—	±	(—)	—
HCl 1 n.	+	—	∓	∓	
H_2SO_4 1 n.	—	—	∓		
KOH	±	±			
KCn	(+)	(+)			

Kieselsäure (als feines Pulver).

Das Resultat dieser Versuche war im allgemeinen äußerst undeutlich; recht merkwürdig verhielt sich die Kieselsäure beim Eintragen in eine salzsaure Lösung:

Lösung HCl 0·5 n.

In den ersten Minuten stark positiv (Ausschlag 80, 40, 30, 28 . . .) nimmt der elektrische Gegensatz schnell ab und ist nach einigen Tagen, oft Stunden kaum mehr wahrzunehmen. Wird aber dieselbe Kieselsäure jetzt in eine konzentriertere Salzsäurelösung gebracht, so wird sie wieder stark positiv und ruft wieder Ausschläge ähnlicher Größe hervor, die wieder nach kurzer Zeit verschwinden u. s. f., brachte man das Pulver jetzt aber in verdünntere Säure, so war es deutlich negativ.

Ich habe diesen Versuch mehrmals mit gleichem Erfolge wiederholt.

Roter Phosphor (von Merck)

gab gleichfalls zweifelhafte Effekte in Säurelösungen.

Lösung HCl	—	—	±	—
H_2SO_4	—	∓	—	(—)

Sehr deutlich aber wurden die Ausschläge, wenn der Phosphor durch eine Lösung von Kaliumpermanganat, die mit Schwefelsäure versetzt war, geschickt wurde. Solange die Lösung gefärbt war, hatte der Phosphor dabei positive Ladung, war sie entfärbt, so wurde seine Ladung wieder unsicher, meist schwach negativ. Ebenso war Phosphor auch in angesäuerter Lösung von saurem chromsauren Kali positiv.

Ich habe noch eine Reihe von Leitern und Isolatoren, wie C, Glas, Paraffin, Wachs, Kolophonium etc. zur Untersuchung herangezogen, erhielt aber bisher so schwache Ströme, daß die Beobachtungen unsicher sind.

Diese Versuche hatten nur orientierenden Charakter und wurden in der Absicht ausgeführt, einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Elektrizitätserregung infolge ungleicher Beweglichkeit der Ionen der Lösung deutlich wahrzunehmen ist oder etwa sichtlich mit der Dielektrizitätskonstante zusammenhängt.

Es rührt nämlich von Knoblauch[1] ein beachtenswerter Versuch her, das Auftreten von Potentialdifferenzen bei der Berührung verschiedener Körper auf die verschiedene Beweglichkeit der Ionen zurückzuführen, die in der Feuchtigkeitshaut an der Oberfläche der Körper stets vorhanden sind. Die beweglicheren Ionen sollen schneller an den Körper dringen und ihm ihre Ladung erteilen. Die Potentialdifferenz soll also gleichen Ursprung haben wie an der Berührungsfläche verschiedener Lösungen, weil eben die Körper nicht unmittelbar in Berührung treten, sondern durch die Vermittlung einer Lösung, die sich an den Oberflächen durch die Wirkung der Feuchtigkeit der Luft, langsamer Verbrennung etc. bildet.

Nach Coehn[2] aber soll die Dielektrizitätskonstante den Sinn der Elektrizitätstrennung bestimmen. Körper mit größerer Dielektrizitätskonstante sollen immer positiv gegen solche mit kleinerer Dielektrizitätskonstante werden. Die Regel ist eine rein empirische und nicht allgemein gültig, träfe sie zu, so müßten in allen Lösungen, in welchen keine chemischen Reaktionen sich abspielen, S, P und SiO_2 stark negativ sein. Aus den wenigen angeführten Versuchen geht aber schon

---

[1] Zeitschr. für phys. Chemie, 39, p. 225 (1902). Coehn vertritt (W. Ann. 66, 1193, 1898) schon die Ansicht, daß der Teilungskoeffizient von Ionen, die in einer Gas- oder Flüssigkeitsschicht enthalten seien, welche an heterogene Stoffe haftet, für jedes Ion verschieden sei. Der Ursprung der Potentialdifferenz wird also in der verschiedenen Verteilung gesucht von Knoblauch in der verschiedenen Beweglichkeit.

[2] Wied. Ann., 64, p. 218 (1898).

hervor, daß sie hier nicht in Betracht kommt (vergl. z. B. S in KCNS, SiO_2 mit HCl), zudem habe ich mich mit der Coehnschen Versuchsanordnung überzeugt, daß sich Nitromethan (D. K. 38) und Nitroäthan (D. K. ca. 30) negativ gegen Glas laden! Die Regel versagt hier vollständig.

Die recht ansprechenden Vorstellungen von Knoblauch ließen erwarten, daß deutliche Plus-Ladungen in Säurelösungen, deutliche Minus-Ladungen in alkalischen Lösungen zu beobachten wären, aber in beiden Fällen sind die Ladungen recht undeutlich, in KCNS-Lösungen aber war S sogar trotz ihres stark alkalischen Titers positiv. Allerdings will Knoblauch (l. c. p. 280) seine Betrachtungen nicht auf Fälle angewendet wissen, in denen der Ladungssinn eines festen gegen ein flüssiges Dielektricum unter länger andauernder Berührung bestimmt wird, sondern nur für die Potentialdifferenzen, welche im Augenblicke des Zusammentreffens auftreten. Offenbar sind sie auch auf die hier beschriebenen Versuche nicht anzuwenden und darum bringen sie für die sonderbaren Erscheinungen, auf die man beim Eintragen von SiO_2 in HCl-Lösungen stößt, kaum eine genügende Erklärung bei; denn ist auch der Sinn der Ladungen der erwartete, so sollte der Verlauf der Erscheinung doch ein anderer sein. Wird nämlich die Potentialdifferenz dadurch hervorgerufen, daß die beweglicheren Ionen die Partikeln beladen, dann müßte die erzeugte Potentialdifferenz von Null zu einem Maximalwert ansteigen, bis die hergestellte Potentialdifferenz die Hinwanderung der beweglicheren Ionen so sehr verzögert, die der trägeren so sehr beschleunigt, daß beide Ionen nun gleich schnell an die Partikel dringen, und von diesem Zeitpunkt ab sollte sich nichts mehr ändern. Die beobachtete Potentialdifferenz ist aber anfangs groß und sinkt sehr rasch, eine Beobachtung, zu der man ein Analogon in einer Abhandlung von Dorn[1] findet.

Es kann aber nicht unbemerkt bleiben, daß man in allen Versuchsreihen eben dort zweifelhafte oder schwankende Resultate erhält, wo die Ionenbeweglichkeiten des gelösten Salzes etc. zwar verschieden, die Versuchsbedingungen aber elektromotorisch ganz undefiniert waren, z. B. S in KOH, S in HCl.

[1] Wied. Ann., *10*, 70 (1880).

Dagegen erhielt man eindeutige Resultate, wenn die S-Ionen-Konzentration der Lösung eine bestimmte war, so in den Beispielen: S in KCNS, S in Na_2S.

Nach der osmotischen Theorie der Stromerzeugung muß ja jedem Element eine bestimmte Lösungstension zukommen, auch S muß eine gewisse Tendenz haben, negative S-Ionen in die Lösung zu treiben; sind außerordentlich wenig S''-Anionen in der Lösung zugegen, wie es im Komplexsalz KCNS der Fall sein dürfte, so kann der Lösungsdruck vielleicht den Ionendruck in der Lösung überwinden, der aber die Oberhand gewinnt, wenn die Ionenkonzentration der Lösung an S'' zunimmt. Die Versuche in Na_2S sind vielleicht dafür ein Beispiel; im ersten Falle positiv, ist ja der S hier negativ, daneben wäre freilich die Stellung des Schwefels als schwaches Reduktionsmittel zu berücksichtigen, doch ist diese wenig ausgeprägt. Auch der P wird, wie wir sehen, positiv, wenn er in Lösung geht und scheint im übrigen als Reduktionsmittel zu wirken, doch könnte dieses Beispiel nicht mehr wie das erste als ein Indizium über die Natur des Ursprungs der Berührungselektrizität aufgenommen werden, hätten wir nicht a. a. O.[1] bessere Gründe für eine solche Annahme gefunden. Bei der Untersuchung der Potentialdifferenzen, die Pt in verschiedenen Umständen annimmt, war nämlich gefunden worden, daß sein Ladungssinn lediglich eine Funktion der Ionenkonzentration seiner Umgebung und der Stärke seiner O-, respektive H-Beladung ist. So war Pt negativ gegen schwach alkalische wie gegen schwach saure Lösungen, wenn es mit Wasserstoff beladen wurde. Dieses und andere ähnliche Beispiele scheinen deutlich dafür zu sprechen, daß die Elektrizitätserregung in der Hauptsache rein elektrochemischen Vorgängen ihren Ursprung verdankt.

Metalloxyde.

Deutlichere Merkmale zur Prüfung des eben gezogenen Schlusses hoffte ich unter besser definierten Versuchsbedingungen erhalten zu können und prüfte dazu das Verhalten von Metalloxyden verschiedener Oxydationsstufen in Lösungen von wechselnder Sauerstoff-Ionenkonzentration.

---

[1] Drude's Ann., *11*, 903 (1903).

Verschiedene Oxydationsstufen eines Metalles gleichen ja einer Sauerstoffelektrode von wechselndem Drucke, geben uns gleichsam ein Mittel an die Hand, die Lösungstension des Sauerstoffes stufenweise zu ändern. Superoxyde müssen einen hohen O-Partialdruck besitzen, die anderen Oxydationsstufen werden um so kleinere O-Drucke aufweisen, je größer ihre Tendenz ist, in höhere Oxydationsstufen überzugehen.

Den Druck der Sauerstoff-Ionen in der Lösung können wir aber bekanntlich beliebig variieren, indem wir ihre H·-, respektive OH′-Konzentration regeln; denn es ist ja nach dem Massenwirkungsgesetze:

$$H^{\cdot} + OH' \rightleftarrows H_2O \qquad \text{I} \qquad c_{H^{\cdot}} = \frac{k}{c_{OH'}}$$

$$OH' \rightleftarrows O'' + H^{\cdot} \qquad \text{II} \qquad c_{OH'} = k' c_{O''} c_{H^{\cdot}}$$

$$\text{also aus I und II} \qquad c_{O''} = \frac{k}{k'}\left(\frac{1}{c_{H^{\cdot}}}\right)^2 = \left(\frac{K}{c_{H^{\cdot}}}\right)^2.$$

Genau genommen kommt für das elektromotorische Verhalten der Oxyde noch ihre Löslichkeit in Frage, doch können wir diesen Faktor in den untersuchten Fällen wegen der Schwerlöslichkeit der angewandten Oxyde in erster Annäherung außer acht lassen und dürfen, weil die Löslichkeiten doch nicht so verschieden sein werden, erwarten, daß eine ungefähre Proportionalität zwischen dem Sauerstoffpartialdrucke (respektive seinem halben log.) der Oxyde und ihrem Oxydationspotential besteht. Dieses Oxydationspotential ist aber durch Variierung der OH′-Konzentration zu regeln. Handelt es sich also um elektromotorische Vorgänge, die denen im galvanischen Elemente gleichen, so werden sie einen regelmäßigen Gang aufweisen; sie werden ganz beliebig und regellos sein, wenn der Elektrizitätserregung ein anderer Vorgang zu Grunde liegt.[1]

[1] Genau genommen wäre der Partialdruck des Metalles im Oxyde gleichfalls in Rücksicht zu ziehen. Da aber in allen Fällen etwas Oxyd in Lösung geht, enthält die Lösung immer eine wenig veränderliche Metallionenkonzentration. Bei einer Wiederholung der Versuche wäre dies aber genauer zu berücksichtigen. Gewisse Schwankungen bei Versuchen mit Quecksilberoxyden sind vielleicht auf diese Vernachlässigung zurückzuführen.

Tabelle I.

Substanz	Lösung							
	NaOH, Konz.					NH_3	SH_2O_4	
	0·0001 norm.	0·001 norm.	0·1 norm.	1·0 norm.	5·0 norm.		0·001 norm.	0·1 norm.
Ag_2O .	+ + +		+ + +			+ +	(+)	
Ag_2O_2	+ + +		+ + +	+ +		+		
Hg_2O .	(+) (−)							
HgO . .	+ ± ±	∓ ∓	− − −	−		+ +		
Cu_2O .	− − −	− −						
CuO . .	+ ±	±				± ±		
PbO . .	− − −	− − −	− − −			−		
Pb_3O_4	− − −	− − −				−		
PbO_2 .	+ + +	+ + +		+ + +		+	+ +	+ +
CdO . .	− − −	− −						
NiO . .	− − −	− −						
Ni_2O_3 .	+ +	+ +					+	
CoO . .	− −						− −	
Co_2O_3		− −				−	+ +	
Al_2O_3 .	− −						− −	
MnO .	− −					− −		
Mn_2O_3	+ +		±	∓			+	
Mn_3O_4	− −							
MnO_2 .	+ + +	+ + +	+ + +	± + ±	− − −	+	+ +	
Fe_3O_4 .	− −	− −						

Da bekanntlich eine wässerige Lösung nur dann einen bestimmten $H^{\cdot}$- oder OH'-Ionengehalt aufweist, wenn sie ausgesprochen sauer oder alkalisch ist, während sonst jede kleine Verunreinigung große Differenzen verursachen kann, wurden hier durchwegs Lösungen von ganz bestimmtem Titer verwandt. In diesen gelangten 20 Metalloxyde von im ganzen zehn verschiedenen Metallen zum Versuche, dessen Resultate in der Tabelle 1 zusammengestellt sind (p. 873).

Silber.

Ag_2O_2 ist entsprechend seiner Natur als Superoxyd in verdünntem und konzentriertem Alkali positiv, verhält sich also wie eine Sauerstoffelektrode von hohem Sauerstoffdrucke.

Ag_2O zeigt aber wider Erwarten ein ähnliches Verhalten. Der Dissoziationsdruck des Ag_2O beträgt nach Le Chatelier[1] bei 300° 10 bis 15 Atmosphären, daraus berechnet sich unter Zugrundelegung einer Bildungswärme von 59 K.[2] für Zimmertemperatur ein Dissoziationsdruck von rund 10^{-9} Atmosphären, also ein bedeutend kleinerer Druck als unsere Messungen erwarten lassen würden. Es zeigte sich aber, daß die Lösung von NaOH sich während des Versuches braun färbte und Ag-Ionen enthielt, daß also der elektromotorische Vorgang hier ein ganz anderer ist als der gesuchte und nicht allein den einer Sauerstoffelektrode vorstellt, sondern daß hier auch der Silberdruck zu berücksichtigen wäre. In Übereinstimmung damit konnte Rothmund[3] keine konstanten Werte für die elektromotorische Kraft der Kette: $Ag/Ag_2O/NaOH/O_2/Pt$ finden (wohl wegen der schwankenden Ag-Konzentration) und die Messung von Le Chatelier auf diesem Wege nicht kontrollieren.

Quecksilber.

Hg_2O gab mir schwankende Werte, offenbar war das Präparat unrein; denn Proben, die verschiedenen Partien desselben entnommen waren, wirkten verschieden.

---

1 Zeitschr. für phys. Chemie, 1, p. 516 (1887).

2 Ostwald, Lehrbuch, II, p. 334 (2. Aufl.).

3 Zeitschr. für phys. Chemie, 31, p. 69 (1899).

HgO ist in OH'-armen Lösungen positiv, in OH'-reicheren negativ. Die Zeichenumkehr erfolgt in einer Lösung, die an OH' etwa 0·0001 bis 0·001 norm. ist. Die Sauerstoffelektrode zeigt die Umkehr in etwa 0·01 norm. NaOH an; dies ergibt für HgO einen Dissoziationsdruck von rund 10^{-8} Atmosphären, während Rothmund (l. c.) zirka 10^{-11} Atmosphären findet; die Übereinstimmung ist eine genügende zu nennen.

Kupfer.

Cu_2O ist in allen NaOH-Lösungen deutlich negativ.

Der Ladungssinn des CuO war wegen der Kleinheit der Ausschläge schwer zu ermitteln; doch scheint überall das negative Zeichen das wahrscheinlichere zu sein.

Blei.

Das unedlere Blei, dessen Oxyde viel geringeren Dissoziationsdruck besitzen müssen, ist denn auch in seinen Oxydationsstufen PbO und Pb_3O_4 in allen NaOH-Lösungen deutlich negativ. Das Superoxyd PbO_2 nimmt aber, wie natürlich, eine ganz andere Stellung ein.

Cd, Ni, Co, Al und Fe.

Je unedler das Metall wird, desto geringer ist der Dissoziationsdruck seiner Oxyde und Oxydule, desto deutlicher gibt sich ihr negativer Ladungssinn in allen NaOH-Lösungen zu erkennen. Ni_2O_3 hat superoxydähnlichen Charakter und damit dürfte wohl seine Sonderstellung begründet sein. (Auch in Co_2O_3 ist der Dissoziationsdruck größer wie in CoO; ersteres ist in 0·001 SH_2O_4 positiv, letzteres negativ.)

Mangan.

Die Versuche mit den Oxyden dieses Elementes nehmen ein besonderes Interesse in Anspruch, weil es hier wieder gelang, in verschieden konzentrierten Lösungen eine Umkehr des Ladungssinnes zu erreichen.

MnO ist in allen Lösungen negativ, Mn_3O_4 verhält sich gleichfalls wie das Oxyd eines unedlen Metalles, das Super-

oxyd MnO_2 hingegen ist in verdünnten NaOH-Lösungen wie in Säuren durchwegs positiv und erlangt in konzentrierten Alkalilösungen erst eine negative Ladung.

Nun hat O. F. Tower[1] die Potentialdifferenzen von Superoxydelektroden gegen andere konstante Elektroden gemessen und findet für MnO_2/NaOH (auf die Wasserstoffelektrode in 1 n. SH_2O_4 bezogen):

NaOH	MnO_2/NaOH
0·1 norm.	—0·461 Volt
0·05 »	—0·475 »
0·025 »	—0·492 »
0·01 »	—0·513 »
....	....

Daraus läßt sich für die Konzentrationen

NaOH	MnO_2/NaOH
1·0 norm.	—0·409 Volt
5·0 »	—0·371 »

Meine früheren Untersuchungen (l. c.) zeigten mir an, daß eine Umkehr des Ladungssinnes bei rund —0·4 Volt eintritt. Tatsächlich ist MnO_2 in 0·1 norm. NaOH deutlich positiv, in 5 norm. Lösung deutlich negativ, während der Ladungssinn in 1 norm. Alkali unbestimmt bleibt. In Übereinstimmung mit Tower fand ich MnO_2/NaOH 1·0 norm. —0·405 bis —0·412; MnO_2/NaOH 5·0 norm. —0·37 bis 0·35 Volt.

Wir gelangen daher zu dem bemerkenswerten Resultate, daß MnO_2 den Zeichenwechsel im selben »Umkehrpunkte« erfährt wie Pt, Au, Pd, Ag, Fe, Hg, daß es also bei unmittelbarer Berührung mit den genannten Metallen keine nennenswerte Potentialdifferenz annehmen kann, sofern keine chemische Veränderung dabei hervorgerufen wird.

Bei den Versuchen der Tabelle wurden erst die Oxyde unmittelbar nach ihrer Einführung in die Röhre untersucht,

[1] Zeitschr. für phys. Chemie, 18, p. 17 (1895).

dann in Berührung mit den Endelektroden gebracht (Pt-El.), die mehrere Tage geschlossen blieben. Wurden die Versuche dann wiederholt, so konnte ich kaum eine Änderung wahrnehmen, doch sollte man meinen, daß der Knoblauch'sche Effekt dadurch eliminiert worden wäre; es scheint ihm aber nur eine geringe Intensität zuzukommen; dafür spricht einerseits die Analogie mit den Potentialdifferenzen an der Trennungsfläche verschiedener Flüssigkeiten, die selbst bei sehr starkem Konzentrationsgefälle und bei der Anwesenheit recht verschieden beweglicher Anionen und Kationen ja so kleine Größen ergeben.

Dafür sprechen auch einige Beispiele der Tabelle. So ist, um nur eines hervorzuheben, das basische PbO noch in 0·0001 n. NaOH negativ, während seine eigene Basizität größer sein dürfte.

Amphotere Körper, wie Proteïn, *p*-Amidobenzoesäure, $Fe_2(OH)_6$, Zinnsäure etc. zeigen ein Verhalten, das mit den letztbesprochenen Anschauungen gut zu vereinen ist. Negativ in alkalischen, werden sie positiv in sauren Lösungen, doch führt die Betrachtung, daß sie wie Indikatoren wirken und in sauren Lösungen Anionen, in alkalischen Kationen entsenden, zu demselben Ergebnisse.

Salze.

Ein Fall, der besonders zum Studium der Knoblauchschen Elektrizitätserregung geeignet schien, liegt während der Auflösung von Säuren, Basen und Salzen vor, in denen Anion und Kation sehr verschiedene Beweglichkeit besitzen; denn für die Ausbildung solcher Potentialdifferenzen sind ein größtmögliches Konzentrationsgefälle und recht verschiedene Beweglichkeit beider Ionen besonders günstig.

Wegen der unvermeidlichen Änderung des Lösungsmittels während der Auflösung sind diese Versuche zwar weniger rein, doch kann man durch rasches und kontinuierliches Umdrehen der Röhre diesen Faktor auf ein Minimum reduzieren und immerhin Resultate gewinnen, die wenigstens orientierenden Wert besitzen.

Im folgenden sind die Resultate solcher Messungen zusammengestellt, im jeweilig untersuchten Körper findet man in der Tabelle das trägere Ion unterstrichen; da dieses langsamer wegdiffundiert, muß das Salz, respektive die Säure oder Base seinen Ladungssinn annehmen.

$\underline{Cu_2}Cl_2$	+ (sehr schwach)	±	+ (sehr schwach)		
$\underline{Cu}Cl_2$	+	(+)	(+)		
$\underline{Cu}SO_4$	+	+	+		
$\underline{Li}Cl$	±	∓	±		
$FeSO_4$	+	∓	±		
$KBr\underline{O_3}$	—	∓	∓		
$\underline{K}OH$	+ (schwach)	±	+ (sehr schwach)		
$\underline{Na}OH$	±	±	+ (schwach)		
$\underline{C_4O_4}H_6$ (Bernsteinsäure)	∓	∓	±	∓	(—)

Bestätigt sich auch im allgemeinen die Erwartung, daß der sich lösende Körper das Ladungszeichen des trägeren Ions annimmt, so sind die erregten Ströme doch ungleich schwächer wie in den Versuchen der Tabelle; waren sie dort oft recht groß (Ausschläge von 20 bis 40 Teilstrichen), so liegen sie hier meistens an der Grenze des Beobachtbaren und bringen nur selten Ausschläge von 5 Teilstrichen hervor; außerdem muß es befremden, daß die Erscheinung bei LiCl und gar KOH, NaOH und Bernsteinsäure so undeutlich wird, wo man besonders große Deutlichkeit erwartet hätte.

Aus alledem geht wohl hervor, daß die von Knoblauch beschriebene Art der Elektrizitätserregung zwar sicher den Erscheinungen zu Grunde liegt, daß ihre Wirkungen in der Regel aber durch die viel energischeren verdeckt werden, welche dem Inkrafttreten von Lösungsdrucken entspringen. Ja es scheint mir, als wäre es möglich, die überwiegende Mehrzahl der von diesem Forscher mitgeteilten Versuche mit Hilfe der beschriebenen Wirkung des immer gegenwärtigen Sauerstoffes ohne Rest zu beschreiben; viele Versuche, von denen einer p. 871

angeführt ist, scheinen mir für eine solche Erklärungsweise zu sprechen.[1]

In der Tat zählt der treibende Druck bei Diffusionserscheinungen selten 10 Atmosphären, während die Lösungsdrucke ja ungeheure Größe erreichen, und so ist es selbst bei bloß augenblicklicher Berührung wahrscheinlicher, daß die Bewegung der Ionen von den Lösungsdrucken bestimmt wird (die also auch dem Entstehen der Reibungselektrizität zu Grunde liegen können) und nur in den seltenen Fällen ungestört den Diffusionsdrucken folgen, in denen die Lösungsdrucke besonders klein sind.

[1] Ich halte es auch nicht für ausgeschlossen, daß die von Coehn (l. c.) mitgeteilten Beobachtungen auf ähnliche Weise gedeutet werden könnten, denn es fällt auf, daß eben die Körper zur Kathode wandern, die durch Autoxydation superoxydartige Körper liefern, von denen eine Spur genügt, das elektromotorische Verhalten zu bestimmen. So wanderte denn auch frisch destillierter Äther zur Anode, nach kurzer Zeit aber schon zur Kathode. Quincke beschreibt einen Fall, in welchem Alkohol (wahrscheinlich etwas verunreinigter) zur Anode wanderte. In beiden Fällen wird man doch nicht an eine so durchgreifende Änderung der Dielektrizitätskonstante durch unbestimmbar kleine Spuren einer Verunreinigung zu denken haben! Da die Coehn'sche Regel aber nicht die geringste Stütze in der Theorie findet (sucht man sie wie Coehn durch Verteilung wie Knoblauch auf die verschiedenen Beweglichkeiten der Ionen zu stützen, so wäre doch erst zu zeigen, warum die Dielektrizitätskonstante Verteilung und Beweglichkeit in diesem bestimmten Sinne beeinflussen sollte) und zudem manche Ausnahmen zeigt ($CHCl_3$, Nitromethan u. s. f.), wird man dazu geführt, nach einer andern Erklärungsweise zu suchen, deren wahrscheinlichste mir in der angegebenen Berücksichtigung durch Autoxydation auftretender superoxydartiger Körper zu liegen scheint.

Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in schlechtleitenden Flüssigkeiten

von

Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1904.)

I. Einleitung.

In zwei frühern Arbeiten »Über das Verhalten flüssiger Dielektrika beim Durchgang eines elektrischen Stromes«[1] untersuchte ich die zeitlichen Änderungen der Leitfähigkeit schlechtleitender Flüssigkeiten (Toluol, Benzol, Petroleum etc.) sowie die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze (Abhängigkeit der Leitfähigkeit im stationären Zustande von der Stromintensität) und wies dabei auf die Analogie dieser Erscheinungen mit den in ionisierten Gasen beobachteten hin. Die Ausbildung der Theorie der Leitung in ionisierten Gasen legte mir nun den Gedanken nahe, dieselbe auf die Flüssigkeiten anzuwenden und nach den analogen Methoden die Konstanten der Ionen in Flüssigkeiten (Zahl der pro Zeiteinheit und Volumeinheit entstehenden Ionenpaare, Koeffizient der Wiedervereinigung, Zahl der Ionen pro Volumeinheit, spezifische Geschwindigkeit) zu bestimmen.

---

[1] Schweidler, I. Mitteil., diese Sitzungsber., *109*, II a., p. 964, 1900 (auch Ann. d. Phys. *4*, p. 307, 1901); II. Mitteil. Ann. d. Phys. *5*, p. 483, 1901.

Wären die Annahmen, von denen die Theorie der Leitung in Gasen ausgeht, unverändert auf die Flüssigkeiten übertragbar, was durch die Erfüllung gewisser Bedingungsgleichungen zwischen experimentell bestimmbaren Größen geprüft werden kann, so wären auch die vorhin genannten Konstanten in einfacher Weise durch Bestimmung der Leitfähigkeiten im stationären Zustande bei verschiedenen Stromstärken und durch Beobachtung des zeitlichen Verlaufes der Stromstärke vor Erreichen des stationären Zustandes zu ermitteln. Wie sich zeigen wird, sind aber jene Bedingungsgleichungen nicht erfüllt, die Voraussetzungen daher nicht in ihrer ursprünglichen einfachen Form anwendbar und es ist daher eine Modifikation der Theorie notwendig.

Diese Modifikationen bringen es mit sich, daß auf eine exakte Ermittlung der Ionenkonstanten verzichtet werden muß, einerseits, weil die Annahmen teilweise willkürlich beziehungsweise nicht streng gültig sind, andrerseits weil — selbst strenge Gültigkeit der Annahmen vorausgesetzt — die erhaltenen Resultate einige dieser Konstanten überhaupt nicht mehr ermitteln lassen, von andern nur Mittelwerte, die der Natur der Sache nach zeitlich variabel sind, liefern. Immerhin scheint es, daß wenigstens die spezifische Geschwindigkeit der Ionen sich der Größenordnung nach bestimmen läßt, da unter verschiedenen Versuchsbedingungen erhaltene Resultate ziemlich gut übereinstimmen.

Ebenso wie in den oben zitierten Arbeiten habe ich die untersuchten Substanzen (Petroleum, Toluol, Olivenöl) einer besondern Reinigung nicht unterzogen und es ist wahrscheinlich, daß die beobachtete Leitfähigkeit großenteils von Verunreinigungen, besonders Wassergehalt, herrührt.

Das Problem, das ich mir stellte, war, zunächst zu untersuchen, welche quantitative Angaben über die in einer solchen Flüssigkeit eben vorhandenen Ionen gemacht werden können; die Frage, woher diese Ionen stammen und inwieferne die erhaltenen Resultate als Materialkonstanten verwendbar sind, bleibe einstweilen unberücksichtigt. Es soll im folgenden zuerst die Theorie ausgeführt werden, anschließend folgt dann die Mitteilung der experimentell erhaltenen Ergebnisse.

II. Theoretische Vorbemerkungen.

Übersicht über die Bezeichnungen und Maßeinheiten der Größen:

t	sec	Zeit.
C	cm^{-1}	Widerstandskapazität des durchströmten Flüssigkeitsraumes.
ω	cm^3	Volum des durchströmten Flüssigkeitsraumes.
R	$\frac{\text{Amp.}}{\text{pars}}$ ...	Reduktionsfaktor des Galvanometers [$3 \cdot 10 . 10^{-10}$].
e	Cb	Ladung eines Ions [$16 . 10^{-20}$].
E	Volt	Elektromotorische Kraft.
a	pars	Galvanometerausschlag.
A	»	— im stationären Zustande.
$Ra = i$	Amp.	Stromstärke.
J	»	— im stationären Zustande.
$\frac{Ci}{E} = k$	$\Omega^{-1} cm^{-1}$ ..	Spezifisches Leitvermögen.
K	» ..	— im stationären Zustande.
n	cm^{-3}......	Anzahl der Ionenpaare pro Volumeinheit.
N	»	— im stationären Zustande.
q	$\sec^{-1} cm^{-3}$.	Anzahl der pro Zeit- und Volumeinheit gebildeten Ionenpaare.
α	$\sec^{-1} cm^3$ ..	Koeffizient der Wiedervereinigung.
$\frac{i}{e\omega} = s$	$\sec^{-1} cm^{-3}$.	Anzahl der pro Zeit- und Volumeinheit durch den Strom ausgeschiedenen Ionenpaare.
S	» .	— im stationären Zustande.
u	cm^2 Volt^{-1} sec^{-1}	Spezifische Ionengeschwindigkeit.

a) Einfachste Fassung der Theorie.

Wir gehen von der Annahme aus, daß die in einer Flüssigkeit befindlichen Ionen des gleichen Vorzeichens durchaus gleichartig seien, daß sie sich mit einer der elektrischen Feld-

intensität proportionalen Geschwindigkeit bewegen und daß u die Summe der spezifischen Geschwindigkeiten $\left(\text{bezogen auf die Feldintensität von } 1 \frac{\text{Volt}}{cm}\right)$ des Anions und des Kations sei; ferner daß an jeder Stelle der Flüssigkeit in der Volumeinheit gleich viele positive und negative Ionen vorhanden seien; die Anzahl der Ionenpaare pro Volumeinheit sei mit n bezeichnet. q bezeichne die Zahl der pro Zeit- und Volumeinheit entstehenden Ionenpaare; durch Wiedervereinigung von entgegengesetzt geladenen Ionen zu neutralen Molekeln soll pro Zeit- und Volumeinheit die Zahl αn^2 von Ionenpaaren verschwinden, wo α, der Koeffizient der Wiedervereinigung, eine Konstante der Flüssigkeit ist. Wird die Flüssigkeit von einem elektrischen Strome durchflossen, so wird pro Zeiteinheit im ganzen durch den Strom i eine Anzahl von Ionenpaaren ausgeschieden, die durch $\frac{i}{e}$ gegeben ist; pro Zeit- und Volumeinheit beträgt diese Zahl $s = \frac{i}{e\omega}$, wo ω das Volum der durchströmten Flüssigkeit ist.

Aus diesen Voraussetzungen ergeben sich folgende Gleichungen, die zuerst von J. J. Thomson und E. Rutherford[1] für ionisierte Gase aufgestellt wurden:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - s; \tag{1}$$

im stationären Zustande:

$$\frac{dn}{dt} = 0.$$

$$n = N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{q - S}. \tag{1a}$$

$$k = neu. \tag{2}$$

[1] J. J. Thomson und E. Rutherford, Phil. Mag. 42, p. 192, 1896.

$$K = Neu = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e \, . \, u \sqrt{q - S} \tag{2a}$$

für den stationären Zustand;

$$\frac{dk}{dt} = eu \frac{dn}{dt} = eu(q - \alpha n^2 - s). \tag{3}$$

Es folgt hieraus, daß bei Einschaltung von einer elektromotorischen Kraft E das Leitvermögen K einen stationären Endwert annimmt, der eine Funktion der Stromstärke ist, und zwar eine Funktion von der Form:

$$K = A \sqrt{B - J}$$

oder

$$K^2 = A^2(B - J),$$

wie sich durch Einführen der neuen Konstanten A und B aus der Formel (2a) ergibt.

Die Konstante $B = e\omega q$ ist zugleich der Betrag des Sättigungsstromes. Die Beziehung zwischen Stromstärke und Leitvermögen kann also durch eine Parabel — wie in Fig. 1 —

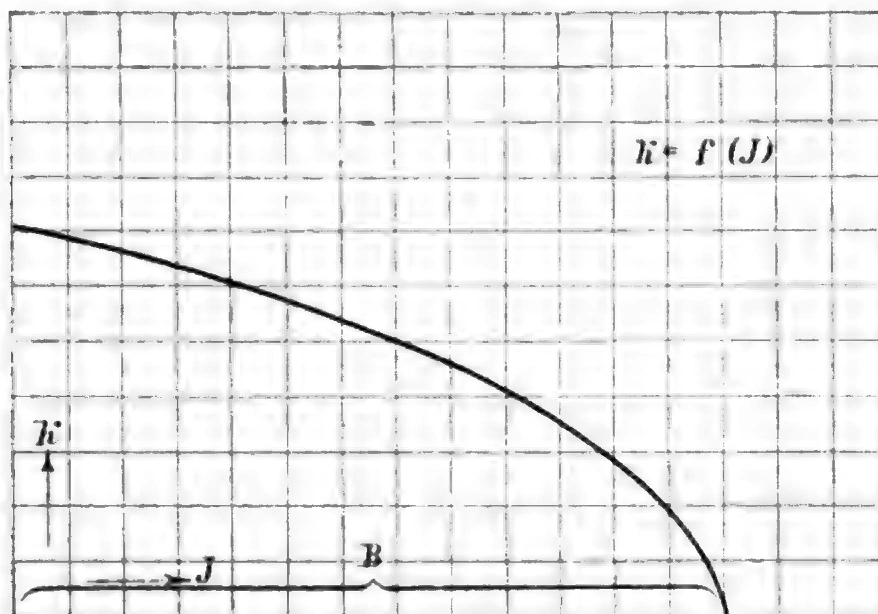


Fig. 1.

graphisch dargestellt werden. Durch Beobachtung des stationären Stromes bei zwei Werten der elektromotorischen Kraft

kann der Verlauf dieser Parabel und damit die Werte für den Sättigungsstrom B und die Größe q bestimmt werden.

Aus der Beobachtung des zeitlichen Verlaufes der Stromstärke nach Einschalten einer elektromotorischen Kraft E ergibt sich dann folgendes:

Es sei für $t = t_1$:

$$k \quad \text{und} \quad \frac{dk}{dt}$$

für $t = \infty$:

$$K$$

bestimmt; dann ist für $t = t_1$:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - s$$

für $t = \infty$:

$$\frac{dn}{dt} = 0 = q - \alpha N^2 - S.$$

also:

$$\frac{dn}{dt} = q - s - \alpha N^2 \frac{n^2}{N^2} = q - s - \left(\frac{k}{K}\right)^2 (q - S).$$

$\frac{dn}{dt}$ ist damit durch bekannte Größen ausgedrückt und aus den Gleichungen

$$\frac{dk}{dt} = eu \frac{dn}{dt} \tag{3}$$

und

$$k = neu \tag{2}$$

sind dann auch u und n bestimmbar, ebenso α durch Einsetzen der Werte in Gleichung (1).

Daß die Voraussetzungen, die dieser Theorie zu Grunde liegen, tatsächlich aber nicht erfüllt sind, folgt aus dem experimentellen Ergebnis, daß die Funktion $K = f(J)$ nicht die oben abgeleitete und graphisch dargestellte Form hat, sondern durch eine gegen die Abszissenachse konvexe Kurve abgebildet wird, wie es die später folgende Textfigur 2 zeigt. Die Anwendung obiger Formeln wird dadurch ausgeschlossen und es sind an

den Voraussetzungen Modifikationen vorzunehmen, die zu einer Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung führen.

b) Erste Modifikation der Theorie.

Es soll zunächst die Annahme gemacht werden, daß die Zahl der durch Wiedervereinigung verschwindenden Ionenpaare nicht durch αn^2, sondern durch eine andre unbekannte Funktion $\varphi(n)$ gegeben sei, ferner daß eventuell auch die Zahl der erzeugten Ionenpaare (q) ebenfalls von der vorhandenen Ionisation abhängig sei, daß also

$$\frac{dn}{dt} = F(n) - s,$$

wo $F(n)$ eine unbekannte Funktion.

Im übrigen seien die Voraussetzungen der ersten Fassung der Theorie aufrecht erhalten, insbesonders die Annahme eines allen Ionenpaaren gemeinsamen konstanten Wertes u der spezifischen Geschwindigkeit.

Die Größen n und u lassen sich dann folgendermaßen bestimmen:

Bei verschiedenen Werten der elektromotorischen Kraft:

$$E_1, E_2, E_3 \ldots$$

seien die stationären Endwerte der Stromstärke:

$$J_1, J_2, J_3 \ldots$$

und daraus die des spezifischen Leitvermögens:

$$K_1, K_2, K_3 \ldots$$

bestimmt. Durch eine empirische Formel oder graphische Darstellung kann dann die Funktion $K = f(J)$ konstruiert werden.

Ferner werde bei konstantem E die zeitliche Veränderung der Stromstärke verfolgt und i beziehungsweise k als Funktion von t bestimmt.

Für eine bestimmte Zeit t ist dann:

$$\frac{dk_t}{dt} = eu \frac{dn_t}{dt},$$

wobei:

$$\frac{dn_t}{dt} = F(n_t) - s_t.$$

Sucht man nun in der Kurve $K = f(J)$ jenen Wert J', für den das zugeordnete $K' = k_t$, so ist nach der Voraussetzung zugleich auch $N' = n_t$. Es ist aber:

$$\frac{dN'}{dt} = 0 = F(N') - S',$$

wo

$$S' = \frac{J'}{e\omega},$$

also:

$$F(n_t) = F(N') = S',$$

$$\frac{dn_t}{dt} = F(n_t) - s_t = S' - s_t.$$

Es werden hieraus $\frac{dn_t}{dt}$ und dann aus den Gleichungen:

$$\frac{dk_t}{dt} = eu\frac{dn_t}{dt}$$

und

$$k_t = n_t e u$$

die Werte für u und n_t berechnet.

Wären die Voraussetzungen dieser modifizierten Theorie erfüllt, so müßte der Ausdruck:

$$\frac{1}{S' - s_t} \cdot \frac{dk_t}{dt} = e \, . \, u$$

für verschiedene Zeitpunkte der gleichen Versuchsreihe konstant sein. Tatsächlich ist das aber nicht der Fall, sondern es zeigt sich stets, daß mit wachsender Zeit dieser Ausdruck abnimmt — abgesehen von unregelmäßigen Schwankungen, die von Beobachtungsfehlern herrühren.

c) Zweite Modifikation der Theorie.

Diese Erscheinung deutet darauf hin, daß die Annahme, welche allen Ionenpaaren die gleiche Summe der spezifischen Geschwindigkeiten zuschreibt, nicht erfüllt ist, daß vielmehr verschiedene Gattungen von Ionen mit verschiedenen Werten der spezifischen Geschwindigkeit vorhanden sind, so daß die spezifische Geschwindigkeit nur als Mittelwert eingeführt werden kann. Selbst dieser Mittelwert sowie die Anzahl der vorhandenen Ionen kann aber nicht bestimmt werden, solange das Verteilungsgesetz, nach dem die verschiedenen Werte der spezifischen Geschwindigkeit verteilt sind, unbekannt ist. Bloß ein Mittelwert, den man als »die mittlere Geschwindigkeit der in einem Zeitelement ausgeschiedenen Ionen« bezeichnen kann, ist einer experimentellen Bestimmung zugänglich, wie folgende Überlegung zeigt:

Es seien

$$u_1 u_2 \ldots u_i \ldots$$

die Werte der spezifischen Geschwindigkeit, die unter den vorhandenen Ionen vertreten sind,

$$n_1 n_2 \ldots n_i \ldots$$

die Anzahl der Ionenpaare, denen die entsprechende Geschwindigkeit zukommt. Es ist dann zu einer beliebigen Zeit:

$$k = \Sigma n_i u_i e = e \cdot \bar{u} \Sigma n_i,$$

wobei $\bar{u} = \frac{\Sigma n_i u_i}{\Sigma n_i}$ die mittlere Geschwindigkeit, Σn_i die Gesamtzahl der Ionenpaare zu dieser Zeit bezeichnet.

Da $n_1 \ldots n_i \ldots$ mit der Zeit sich ändern, ändert sich auch die mittlere Geschwindigkeit. Setzt man aber:

$$\frac{dk}{dt} = \sum \frac{dn_i}{dt} u_i e = e\left[\bar{u}\,\frac{d\Sigma n_i}{dt} + \Sigma n_i \frac{d\bar{u}}{dt}\right],$$

so ist von den Ausdrücken in der Klammer nur $\frac{d\Sigma n_i}{dt}$ bestimmbar, $\bar{u}$ und Σn_i bleiben unbestimmt.

Die Bestimmung von $\frac{d\Sigma n_i}{dt}$ geschieht in derselben Weise wie in der ersten modifizierten Fassung der Theorie, nämlich durch den Ausdruck $S'-s$, unter Zugrundelegen der Annahme, daß die Zahl der entstehenden und durch Wiedervereinigung verschwindenden Ionen nur eine Funktion der Leitfähigkeit sei. Da aber der gleiche Wert der Leitfähigkeit

$$K = e.\bar{u}\Sigma n_i$$

bei verschiedenen Werten der beiden Faktoren $\bar{u}$ und Σn_i, durch deren Produkt k gegeben ist, also bei nicht identischen Zuständen der Flüssigkeit vorhanden sein kann, ist diese Annahme nicht einwandfrei. Die auf Grund dieser Annahme abgeleiteten Werte werden daher nicht als exakte, sondern nur als Angaben der Größenordnung aufzufassen sein.

Ist zur Zeit t:

$$k = \Sigma n_i u_i e,$$

zur Zeit t':

$$k' = \Sigma n_i' u_i e,$$

$$k-k' = e\Sigma(n_i u_i - n_i' u_i) = e\Sigma(n_i - n_i')u_i,$$

so kann man diesen letzten Ausdruck auch in der Form:

$$k-k' = e\Sigma(n_i - n_i')u_i = e(\bar{u})\Sigma(n_i - n_i')$$

darstellen.

Der Wert:

$$(\bar{u}) = \frac{\Sigma(n_i - n_i')u_i}{\Sigma(n_i - n_i')}$$

kann dann, wie oben erwähnt, als »mittlere spezifische Geschwindigkeit der in der Zeit $(t'-t)$ ausgeschiedenen Ionen« bezeichnet werden; er ist nicht identisch mit dem Werte

$$\bar{u} = \frac{\Sigma n_i u_i}{\Sigma n_i},$$

der als »mittlere Geschwindigkeit der vorhandenen Ionen« bezeichnet werden kann.

Da beim Stromdurchgange die schnellsten Ionen als die im Verhältnisse zu ihrer Anzahl am meisten beim Ladungs-

transport beteiligten relativ am meisten durch den Strom konsumiert werden, ist es zu erwarten, daß der Wert $(\bar{u})$ unmittelbar nach Stromschluß am größten ist, dann aber in dem Maße, als die schnellern Ionen abgeschieden werden und die langsamern den Hauptteil der Elektrizitätsübertragung übernehmen, allmählich absinkt; es ist also qualitativ der beobachtete Verlauf mit dem theoretisch abgeleiteten in Übereinstimmung.

Der Größenordnung nach wird man die mittlere Geschwindigkeit der vorhandenen Ionen dem mittlern Werte der Geschwindigkeiten $(\bar{u})$ gleichsetzen können; die Bestimmung der Anzahl n aber ist nicht mehr durchführbar.

Die Bestimmung von $(\bar{u})$ aus den direkt beobachteten Größen geschieht nach folgendem Schema:

$$k_t = \frac{Ci}{E} = \frac{CR}{E} a_t,$$

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{CR}{E}\frac{da_t}{dt} = e(\bar{u})\frac{d\Sigma n_i}{dt} = e(\bar{u})(S'-s_t)$$

und daher, da

$$se\omega = i = Ra$$

ist:

$$(\bar{u}) = \frac{CR}{E}\cdot\frac{da_t}{dt}\cdot\frac{\omega}{e\omega(S'-s_t)} = \frac{C\omega}{E}\cdot\frac{da_t}{dt}\cdot\frac{1}{A'-a_t}.$$

III. Experimentelle Resultate.

Die Bestimmung der Stromstärke, beziehungsweise deren zeitlicher Änderung, geschah galvanometrisch. Das benutzte Spulengalvanometer hatte einen Reduktionsfaktor

$$R = 3\cdot 10.10^{-10}\,\frac{\text{Amp.}}{\text{pars}}.$$

Die elektromotorischen Kräfte, die den Strom in der Flüssigkeit erzeugten, wurden durch Abzweigen von einem Starkstromkreis erhalten; sie konnten zwischen 0 und 300 Volt beliebig variiert werden und wurden an einem Westonvoltmeter direkt abgelesen.

Die zu untersuchende Flüssigkeit befand sich zwischen Messingelektroden, und zwar kamen zwei Formen des Gefäßes in Verwendung:

1. Ein Zylinderkondensator, gebildet von zwei konzentrischen Zylindern von zirka 10 *cm* Länge und zirka 4 *cm* Durchmesser bei einer Dicke des hohlzylindrischen Raumes von 0·180 *cm*. Die für die Resultate in Betracht kommenden Größen sind:

$$\text{Volum } \omega = 23 \cdot 90\, cm^3,$$
$$\text{Widerstandskapazität } C = 1 \cdot 356 . 10^{-3}\, cm^{-1}.$$

2. Ein Plattenkondensator, gebildet aus zwei parallel und horizontal liegenden Platten, die durch isolierende Glasstückchen von 0·10 *cm* Dicke getrennt waren.

$$\omega = 3 \cdot 4\, cm^3,$$
$$C = 3 \cdot 0 . 10^{-3}\, cm^{-1}.$$

Die meisten Versuchsreihen wurden an käuflichem Petroleum (sogenanntem Kaiseröl) ausgeführt, das sich bereits in den frühern, oben zitierten Arbeiten insofern als geeignete Substanz erwiesen hatte, als die stationären Endwerte des Stromes bei gegebener elektromotorischer Kraft ziemlich konstant bleiben, während andre Flüssigkeiten (so besonders Benzol) durch Stehen an der Luft ihr Leitvermögen kontinuierlich ändern.

Ferner wurden einige Versuche mit Toluol und mit Olivenöl ausgeführt. Reines Hexan war zu schlecht leitend, um galvanometrische Messungen zuzulassen, eine Mischung von Petroleum und Hexan aber zeigte eine für die gewählte Versuchsanordnung passende Größe des Leitvermögens.

Von den Messungsreihen sei zunächst eine in extenso mitgeteilt, um die Anwendung der Theorie an einem praktischen Beispiele zu demonstrieren; von den andern werden dann nur kurz die Resultate angeführt.

Versuch 1.

Petroleum in Zylinderkondensator;
$C = 1 \cdot 356 . 10^{-3}\, cm^{-1}$;
$\omega = 23 \cdot 90\, cm^3$;

Einfüllung in den Apparat $10^h\ 30^m$.

t	E Volt	a Skalenteile	Temperatur
$10^h\ 35^m$	5	—	17·6° C.
— 1/4		28	
— 1/2		23·2	
36		21·5	
37		21·0	
38		20·8	
42		20·5	17·8
43	0	—	
11 00		—	18·0
— 1/4	100	240	
— 1/2		188	
— 3/4		168	
01		151	18·0
— 1/2		134	
02		129	
— 1/2		127	
03		126·3	
04		126	
05		126·2	
11		125·5	
18		125·5	18·2
39		125·2	18·5
40	0	—	
45		—	18·6
— 1/2	200	(240)	
46		177	
— 1/2		170	
48		168	
50		166	
12 00		162	18·8

Daraus ergibt sich:

1. Beziehung zwischen

$$E,\ A \text{ und } L = \frac{A}{E}$$

und

$$K = CR.L = 4\cdot 2.10^{-13}\,L.$$

E	A	L	$K\ (\Omega^{-1}\,cm^{-1})$
5	20·5	4·1	$17\cdot 2.10^{-13}$
100	125	1·25	5·25
200	162	0·81	3·40

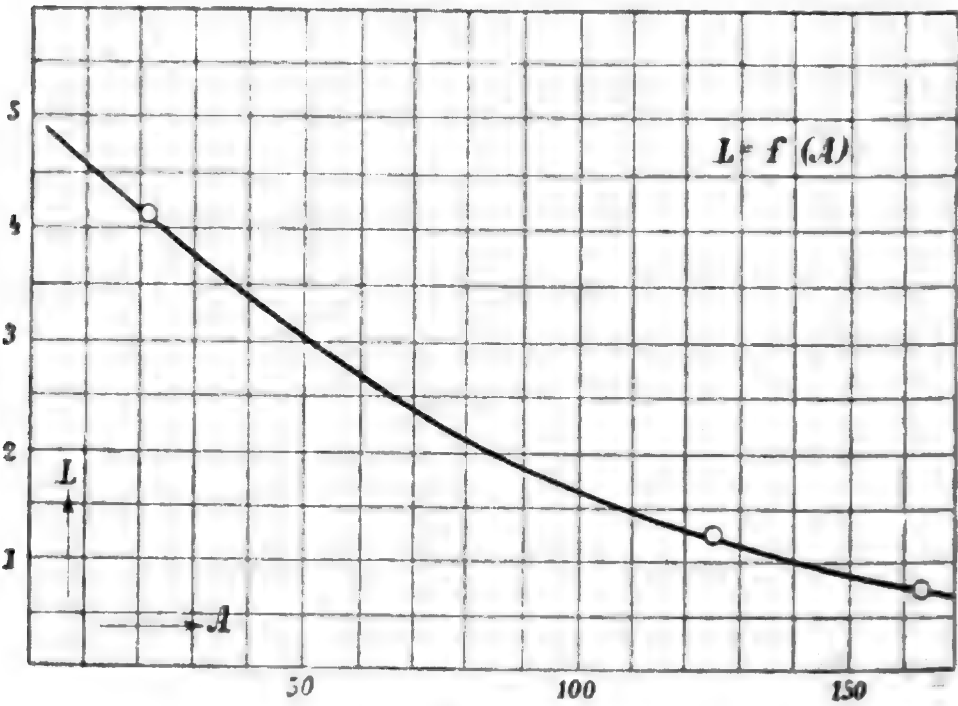


Fig. 2

$2a)$ Zeitlicher Verlauf bei $E = 100$ Volt:

t(sec)	a_t	a_t	A'	$a_t - A'$	$\frac{da_t}{dt}$	$\frac{da_t}{dt} / (a_t - A')$	$(\bar{u})$
15	240						
		214	80	134	3·47	$2·58.10^{-2}$	$83·5.10^{-7}$
30	188						
		178	90	88	1·33	1·51	48·9
45	168						
		159·5	102	57·5	1·13	1·90	61·6
60	151						
		142·5	105	37·5	0·57	1·50	48·6
90	134						
		131·5	120	11·5	0·16	1·40	45·4
120	129						
		127·5	122	5·5	0·025	0·45	14·6
240	126						

$2b)$ Zeitlicher Verlauf bei $E = 200$ Volt:

t(sec)	a_t	a_t	A'	$a_t - A'$	$\frac{da_t}{dt}$	$\frac{da_t}{dt} / (a_t - A')$	$(\bar{u})$
30	(240)						
		(209)	(138)	(71)	(4·2)	$(5·9).10^{-2}$	$(95·6).10^{-7}$
60	177						
		173·5	157	16·5	0·23	1·4	23·7
90	170						
		169	159	10·0	0·022	0·22	3·6
180	168						
		167	160	7·0	0·017	0·24	3·9
300	166						

Das Leitvermögen des untersuchten Petroleum ist unmittelbar nach Stromschluß ($10^h\,35^m$)

$$> 23·5.10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}$$

und variiert im stationären Endwerte bei verschiedenen Werten der elektromotorischen Kraft von $17·2$ bis $3·4.10^{-13}$.

Für die spezifische Geschwindigkeit der ausgeschiedenen Ionen erhält man in den beiden Versuchsreihen $2a)$ und $2b)$ mit wachsender Zeit abnehmende Werte, und zwar nach $2a)$:

$$(\bar{u}) = 83 \cdot 5 \text{ bis } 14 \cdot 6 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}},$$

nach 2*b)*:

$$(\bar{u}) = 95 \cdot 6 \text{ bis } 3 \cdot 9 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}},$$

also der Größenordnung nach übereinstimmende Werte.

Dabei ist zu bemerken, daß sowohl die Anfangs- wie die Endwerte von $(\bar{u})$ mit geringerer Genauigkeit bestimmt sind, wie die in der Mitte liegenden. Im Anfange nämlich ist infolge der raschen Änderung der Stromstärke und der Trägheit des Galvanometers der Wert a_t unverläßlich; am Ende wiederum, wo a_t sich wenig ändert, wird der Wert von $\frac{da_t}{dt}$ durch kleine Ablesungsfehler sowie durch eventuelle Änderungen der Stromstärke mit der Temperatur merklich beeinflußt.

Aus der graphischen Darstellung des Zusammenhanges zwischen Leitvermögen und Stromstärke kann schätzungsweise der Sättigungsstrom, der Wert der Stromstärke, für den $K = 0$ wird, gefunden werden. Man erhält so den ungefähren Wert:

$$B = qe\omega > 200 \text{ partes} =$$
$$> 600 . 10^{-10} A$$

und unter der Einführung der Werte

$$\omega = 23 \cdot 9 \, cm^3,$$
$$q = 16 . 10^{-20} \, Cb:$$

$$q > 1 \cdot 5 . 10^{10} \sec^{-1} cm^{-3},$$

d. i. die Zahl der Ionenpaare, die pro Sekunde und Kubikzentimeter erzeugt wird.

Die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Ionen läßt sich, wie bereits früher erwähnt, nicht ermitteln. Eine ganz rohe Schätzung der Größenordnung kann folgendermaßen vorgenommen werden:

Spezifisches Leitvermögen:

$$k = 10^{-12} \, \Omega^{-1} cm^{-1} \text{ im Mittel;}$$

spezifische Geschwindigkeit:

$$(\bar{u}) = 30.10^{-7}\ cm^2\ \text{Volt}^{-1}\ \text{sec}^{-1} \quad \text{im Mittel;}$$

$$n = \frac{k}{e(u)} = 2.10^{12}\ cm^{-3}$$

oder

$K = 3\cdot 4.10^{-13}$ bei $E = 200$ Volt im stationären Endzustand,
$(\bar{u}) = 3\cdot 9.10^{-7}$ » $E = 200$ »
$n = 5.10^{12}\ cm^{-3}$,

also rund 10^{12} bis 10^{13} Ionenpaare pro Kubikzentimeter.

Versuch 2.

Petroleum (andre Substanzprobe) in Zylinderkondensator wie bei Versuch 1.

Die Resultate sind:

Spezifisches Leitvermögen:

$K >$	$25\cdot 00.10^{-13}\ \Omega^{-1} cm^{-1}$	unmittelbar nach Stromschluß.
$=$	$6\cdot 89.10^{-13}$ »	bei $E = 50$ Volt.
$=$	$4\cdot 83.10^{-13}$ »	» $E = 100$ »
$=$	$3\cdot 32.10^{-13}$ »	» $E = 200$ »
$=$	$2\cdot 65.10^{-13}$ »	» $E = 290$ »

Aus dem zeitlichen Verlaufe der Stromstärke bei $E = 100$ Volt berechnen sich für aufeinanderfolgende Zeitintervalle die Geschwindigkeiten $(\bar{u})$:

t	$(\bar{u})$
$t = 30$ sec	
	$(\bar{u}) = 57.10^{-7}\ cm^2\ \text{Volt}^{-1}\ \text{sec}^{-1}$.
60	
	45
90	
	22
120	
	9
180	
	4·5
300	

Als nach längerm Stromdurchgange bei $E = 290$ Volt dann E auf 50 Volt verringert wurde, trat, wie es nach der Theorie vorauszusehen ist, ein Anwachsen der Stromstärke mit der Zeit ein. Der hieraus berechnete Wert von $(\bar{u})$ betrug 58.10^{-7}.

Sämtliche Resultate dieser Versuchsreihe sind in guter Übereinstimmung mit denen des Versuches 1.

Versuch 3.

Petroleum im gleichen Gefäße wie vorher.
Bei $E = 100$ Volt:

$$K = 0 \cdot 50.10^{-13}\, \Omega^{-1}\, cm^{-1},$$
$$(\bar{u}) = 100 \text{ bis } 48.10^{-7}\, cm^2 \text{ Volt}^{-1} \sec^{-1}.$$

Es ist also die gleiche Größenordnung von $(\bar{u})$ wie in den beiden ersten Versuchen vorhanden bei zirka zehnmal kleinerm Leitvermögen.

Versuch 4.

Petroleum in Plattenkondensator;

$$\omega = 3 \cdot 4\, cm^3,$$
$$C = 3\ 0.10^{-3}\, cm^{-1}.$$

Diese Probe wurde in vier Versuchsreihen bei verschiedenen Temperaturen beobachtet und liefert folgende Resultate:

Temp. 16° C.... $K = 1 \cdot 10.10^{-13}\, \Omega^{-1}\, cm^{-1}$ (für $E = 100$ Volt);
$(\bar{u}) = 51$ bis 26.10^{-7}.

Temp. 24° C.... $K = 2 \cdot 51.10^{-13}\, \Omega^{-1}\, cm^{-1}$ (für $E = 100$ Volt);
$(\bar{u}) = 51$ bis 16.10^{-7}.

Temp. 54° C.... $K = 9 \cdot 10.10^{-13}\, \Omega^{-1}\, cm^{-1}$ (für $E = 100$ Volt);
$(\bar{u}) = 58$ bis 18.10^{-7}.

Temp. 64° C.... $K = 15 \cdot 00.10^{-13}\, \Omega^{-1}\, cm^{-1}$ (für $E = 100$ Volt);
$(\bar{u}) = 55$ bis 30.10^{-7}.

Die Werte für $(\bar{u})$ sind übereinstimmend mit denen der frühern Versuche, obwohl die Dimensionen des durchströmten Flüssigkeitsraumes ganz andere sind. Auffallend erscheint es, daß bei Temperatursteigerung zwar das Leitvermögen stark wächst, dagegen die spezifische Geschwindigkeit ziemlich konstant bleibt. Es scheint also die Steigerung des Leitvermögens in erster Linie auf Vermehrung der Ionenzahl bei steigender Temperatur zu beruhen.

Versuch 5.

Mischung von Petroleum und Hexan (80 cm^3 Petroleum in 200 cm^3 Hexan) in Zylinderkondensator wie bei Versuch 1.

Es ergab sich:

		J	K
$E=$	25....	$22 \cdot 3 . 10^{-10} A$	$1 \cdot 21 . 10^{-13}$
	50....	$29 \cdot 5 . 10^{-10} A$	$0 \cdot 80$
	100....	$30 \cdot 4 . 10^{-10} A$	$0 \cdot 41$
	200....	$31 \cdot 6 . 10^{-10} A$	$0 \cdot 21$

Hier zeigt sich in auffälliger Weise die Abnahme des Leitvermögens mit der Stromstärke, so daß bei mäßigen Spannungen der Sättigungsstrom fast erreicht wird. Durch eine graphische Extrapolation erhält man:

$$\text{Sättigungsstrom } B = eq\omega = \text{zirka } 33 . 10^{-10} A$$

und daraus:

$$q = 0 \cdot 087 . 10^{-10} \sec^{-1} cm^{-3}.$$

Zwei Beobachtungsreihen für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke ergaben die Werte für $(\bar{u})$:

1. $(\bar{u}) = 247$ bis $195 . 10^{-7}$,
2. $(\bar{u}) = 224$ » $54 . 10^{-7}$.

Die Werte der spezifischen Geschwindigkeit liegen also im Petroleum-Hexangemische beträchtlich höher als in reinem Petroleum; das Leitvermögen aber ist durch die Beimischung des für sich sehr wenig leitenden Hexans herabgesetzt.

Versuch 6.

Toluol in Plattenkondensator;

$$\omega = 3\cdot 4\, cm^3, \qquad C = 3\cdot 0 . 10^{-3}\, cm^{-1}.$$

Es ergab sich:

		K		$(\bar{u})$
$E =$	25	$17\cdot 5 . 10^{-13}$	$t = 30$ bis 60 sec;	$1\cdot 9 . 10^{-7}$
	50	$15\cdot 4$	60 » 120 »	$0\cdot 8$
	100	$12\cdot 9$	120 » 240 »	$0\cdot 55$
	200	$10\cdot 3$		

Versuch 7.

Toluol im gleichen Plattenkondensator.

		K		$(\bar{u})$
$E =$	50	$14\cdot 9 . 10^{-13}$	$t = 30$ bis 60 sec;	$1\cdot 70 . 10^{-7}$
	100	$11\cdot 7 . 10^{-13}$	60 » 180 »	$1\cdot 05 . 10^{-7}$

Die beiden Proben liefern also wieder untereinander übereinstimmende, aber gegenüber Petroleum beträchtlich verringerte Werte der spezifischen Geschwindigkeit.

Versuch 8.

Olivenöl im Plattenkondensator wie vorher.

$K =$ zirka $50 . 10^{-13}$ unmittelbar nach Stromschluß.
$=$ $15 . 10^{-13}$ bei $E = 50$ Volt im stationären Zustande.
$(\bar{u}) = 12$ bis $1\cdot 6 . 10^{-7}$ (innerhalb 30^m absinkend).

Charakteristisch für Olivenöl im Gegensatze zu den früher untersuchten Substanzen ist die langsame Herstellung eines stationären Zustandes.

IV. Zusammenfassung der Resultate.

Es wurde galvanometrisch die Leitung durch Petroleum, Petroleum-Hexanmischung, Toluol und Olivenöl untersucht und der Versuch unternommen, die Theorie der Leitung in

ionisierten Gasen auf die an diesen Flüssigkeiten beobachteten Erscheinungen anzuwenden. Eine unmittelbare Übertragung der für die Gase gültigen Theorie auf die Flüssigkeiten erweist sich als nicht statthaft, da einige Konsequenzen dieser Theorie sich empirisch nicht bestätigen. Eine Modifikation der Voraussetzungen gestattet, wenigstens der Größenordnung nach die Summe der spezifischen Geschwindigkeiten des Anions und des Kations zu bestimmen. Es zeigt sich, daß Ionen mit abgestuften Werten der spezifischen Geschwindigkeit vorhanden sind und daß bei Einschaltung einer elektromotorischen Kraft zuerst die schnellern, dann die langsamern Ionen ausgeschieden werden.

Die Werte für die Summe der spezifischen Geschwindigkeiten des positiven und des negativen Ions ergeben sich bei einer und derselben Substanz in verschiedenen Versuchsreihen als ziemlich übereinstimmend, bei verschiedenen Substanzen merklich verschieden. Die Größenordnung dieser Geschwindigkeit $\left(250 \text{ bis } 0 \cdot 5 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}\right)$ ist wesentlich kleiner $\left(\text{zirka } \frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right)$ als die in Elektrolyten in wäßriger Lösung $(390 \text{ bis } 30 . 10^{-5})$.

Eine kurze Zusammenstellung der erhaltenen Resultate gibt folgende Tabelle:

Versuch 1. Petroleum:

$$K = 23-3 \cdot 4 . 10^{-13} \Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 96-4 \cdot 0 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 2. Petroleum:

$$K = 25-2 \cdot 6 . 10^{-13} \Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 57-4 \cdot 5 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 3. Petroleum:

$$K = 0 \cdot 5 . 10^{-13} \Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 100-48 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 4. Petroleum bei 16° C.:

$$K = 1 \cdot 1 . 10^{-13} \Omega^{-1} cm^{-1}, \qquad u = 51-26 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Petroleum bei 24° C.:

$$K = 2\cdot 5 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 51-16 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Petroleum bei 54° C.:

$$K = 9\cdot 1 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 58-18 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Petroleum bei 64° C.:

$$K = 15\cdot 0 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 55-30 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 5. Petroleum in Hexan:

$$K = 1\cdot 2-0\cdot 2 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 247-45 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 6. Toluol:

$$K = 17-10 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 1\cdot 9-0\cdot 55 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 7. Toluol:

$$K = 11\cdot 7 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 1\cdot 7-1\cdot 05 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

Versuch 8. Olivenöl:

$$K = 50-15 . 10^{-13}\,\Omega^{-1} cm^{-1}; \qquad u = 12-1\cdot 6 . 10^{-7} \frac{cm^2}{\text{Volt sec}}$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. VII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über eine Darstellung des Legendre'schen Zeichens

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. Juni 1904.)

1.

Es seien p, q verschiedene ungerade Primzahlen, x, y Unbestimmte und

$$X = 1+x+x^2+\ldots+x^{p-1},$$
$$Y = 1+y+y^2+\ldots+y^{q-1}.$$

Eine ganze Funktion $F(y)$ von y, welche nach Ersetzung von y durch $y^2, y^3, \ldots y^{q-1}$ sich nur um eine durch y^q-1 teilbare ganze Funktion ändert, hat in Bezug auf Y einen von y unabhängigen Rest. Denn es sei

$$R(y) = a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{q-1}y^{q-1}$$

der Rest von $F(y)$ in Bezug auf den Teiler y^q-1. Da $y^{mq}-1$ durch y^q-1 teilbar ist, so hat $F(y^m)$ in Bezug auf y^q-1 denselben Rest R_m wie $R(y^m)$. Weil aber die Zahlen

$$0, m, 2m, \ldots (q-1)m$$

nach q inkongruent und infolgedessen die Reste von

$$y^0, y^m, y^{2m}, \ldots y^{(q-1)m}$$

in Bezug auf y^q-1 verschieden sind, so ist a_1 der Koeffizient von y^m in R_m und es muß nach der Annahme $a_1 = a_m$ sein.

Hieraus folgt

$$R(y) = a_0 + a_1(y + y^2 + \ldots + y^{q-1})$$
$$= a_0 - a_1 + a_1 Y.$$

Wendet man diese Identität auf die Funktion

$$F(y) = (t-y)(t-y^2)\ldots(t-y^{q-1})$$

an, welche die vorausgesetzte Eigenschaft besitzt, und bezeichnet ihren Rest in Bezug auf Y mit $G(t)$, eine durch eine ganze Funktion φ algebraisch teilbare ganze Funktion kurz mit $[\varphi]$, so ergibt sich

$$F(y) = G(t) + [Y].$$

Nach Ersetzung von y durch t folgt

$$0 = G(t) + [Y(t)]$$

und es erhellt, daß $G(t)$ durch $Y(t)$ algebraisch teilbar ist. Da aber $G(t)$ in t vom Grade $q-1$ ist und bei t^{q-1} den Koeffizienten 1 hat, so muß $G(t)$ mit $Y(t)$ zusammenfallen. Somit ist:

$$Y(t) = \frac{t^q - 1}{t-1} = (t-y)(t-y^2)\ldots(t-y^{q-1}) + [Y].$$

2.

Da

$$x^a y^b - 1 = x^a y^b - y^q + [Y]$$
$$= y^b(x^a - y^{q-b}) + [Y]$$

ist, so ergibt sich

$$(x^a y^b - 1)^{pq} = (x^a - y^{q-b})^{pq} + [Y]$$

und es wird

$$\Pi(x^a - y^b)^{pq}(x^a y^b - 1)^{pq} = \Pi(x^a - y^n)^{pq} + [Y],$$

$$b = 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots q-1.$$

Nach dem obigen (1) ist daher

$$\Pi(x^a - y^b)^{pq}(x^a y^b - 1)^{pq} = Y(x^a)^{pq} + [Y].$$

Setzt man daher

$$P = \Pi(x^a - y^b)(x^a y^b - 1)$$

$$a = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}, \quad b = 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2},$$

$$f(x) = Y(x)\, Y(x^2) \ldots Y\left(x^{\frac{p-1}{2}}\right),$$

so ergibt sich

$$P^{pq} = f(x)^{pq} + [Y).$$

Der Rest der Funktion $f(x)$ in Bezug auf X läßt sich in folgender Weise bestimmen.

Da

$$f(x)\Pi(1-x^a) = \Pi(1-x^{qa}) \qquad a = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$$

$$f(x^{p-1})\Pi(1-x^{(p-1)a}) = \Pi(1-x^{(p-1)qa})$$

oder

$$f(x^{p-1})\Pi(1-x^{p-a}) = \Pi(1-x^{q(p-a)}) + [x^p - 1)$$

ist, so wird

$$f(x)f(x^{p-1})\Pi(1-x^m) = \Pi(1-x^{qm}) + [x^p - 1)$$

$$m = 1, 2, \ldots p-1.$$

Es ist aber nach (1)

$$\Pi(1-x^m) = X(1) + [X) = p + [X)$$

und, weil die Reste von

$$x^q,\ x^{2q}, \ldots x^{(p-1)q}$$

in Bezug auf $x^p - 1$ bis auf die Reihenfolge mit

$$x, x^2, \ldots x^{p-1}$$

zusammenfallen,

$$\Pi(1-x^{qm}) = \Pi(1-x^m) + [x^p - 1) = p + [X).$$

Somit ist

$$p(f(x)f(x^{p-1})-1)=[X),$$
$$f(x)f(x^{p-1})-1=[X).$$

Andrerseits ist

$$f(1)=q^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{q}{p}\right)\quad(\text{mod. } p).$$

Wird daher

$$f(1)=\left(\frac{q}{p}\right)+hp$$

gesetzt und der Rest von $f(x)-hX$ in Bezug auf x^p-1 mit

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{p-1}x^{p-1}$$

bezeichnet, so ist

$$\varphi(x^{p-1})=f(x^{p-1})+[X)$$

und es wird

$$\varphi(x)\varphi(x^{p-1})=1+[X).$$

Da jedoch

$$\varphi(1)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

ist, so verschwindet die Funktion

$$\varphi(x)\varphi(x^{p-1})-1$$

für $x=1$ und ist daher nicht nur durch X, sondern auch durch $x-1$ teilbar. Somit ist

$$\varphi(x)\varphi(x^{p-1})=1+[x^p-1).$$

Hiernach hat $\varphi(x)\varphi(x^{p-1})$ den Rest 1 in Bezug auf x^p-1. Der Koeffizient von x^0 in diesem Reste wird aber erhalten, wenn man das Produkt $\varphi(x)\varphi(x^{p-1})$ ausführt und die Koeffizienten

$$b_0^2,\ b_1^2,\ldots b_{p-1}^2$$

aller Glieder addiert, in welchen x einen durch p teilbaren Exponenten aufweist. Daher ist

$$b_0^2+b_1^2+\ldots+b_{p-1}^2=1$$

und es erhellt,[1] daß alle Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_{p-1}$ bis auf eine, etwa b_k, $= 0$ sind und b_k den Wert ± 1 hat. Somit ist

$$\varphi(x) = \pm x^k$$

und die Gleichung $\varphi(1) = \left(\frac{q}{p}\right)$ ergibt

$$\varphi(x) = \left(\frac{q}{p}\right) x^k.$$

Hieraus folgt

$$f(x) = \left(\frac{q}{p}\right) x^k + [X),$$

$$f(x)^{pq} = \left(\frac{q}{p}\right) + [X).$$

Man hat daher die Identität

$$\left(\frac{q}{p}\right) = P^{pq} + [X) + [Y).$$

Diese Darstellung des Legendre'schen Zeichens ergibt ähnlich wie bei Eisenstein einen einfachen Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes. Denn durch Vertauschung von p und q, x und y geht P in $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} P$ über und es wird

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} P^{pq} + [X) + [Y).$$

Hieraus folgt aber

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{q}{p}\right) = [X) + [Y)$$
$$= 0$$

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right).$$

[1] Kummer, Sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers (Lionville's Journal, Bd. 16, 1851).

3.

Man erhält auch die Eisenstein'sche Darstellung,[1] wenn

$$x = e^{\frac{4\pi i}{p}}, \qquad y = e^{\frac{4\pi i}{q}}$$

gesetzt wird. Hiedurch wird

$$(x^a - y^b)(x^a y^b - 1) = (x^{2a}+1)y^b - (y^{2b}+1)x^a$$

$$= 2e^{\frac{4a\pi i}{p}} e^{\frac{4b\pi i}{q}} \left(\cos\frac{4a\pi}{p} - \cos\frac{4b\pi}{q}\right)$$

$$= 4e^{\frac{4a\pi i}{p}} e^{\frac{4b\pi i}{q}} \left(\sin^2\frac{2b\pi}{q} - \sin^2\frac{2a\pi}{p}\right)$$

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left\{\Pi\, 4\left(\sin^2\frac{2b\pi}{q} - \sin^2\frac{2a\pi}{p}\right)\right\}^{pq}$$

$$= \Pi\, 4\left(\sin^2\frac{2b\pi}{q} - \sin^2\frac{2a\pi}{p}\right).$$

[1] Eisenstein (Crelle's J., Bd. 29, p. 177). — Lionville (Journ. de math. p. e. a., t. 12, p. 95.

Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit des Natriums mit der Induktionswage

von

Erwin Lohr.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1904.)

Ich verwendete zu meinen Messungen die Wien'sche Induktionswage und verweise bezüglich der Einzelheiten dieser Methode auf die Arbeit Wien's.[1] — Historisch zu erwähnen wären noch die Induktionswagen von Oberbeck und Bergmann[2] und die von Hughes.[3]

Die Dimensionen der einzelnen Teile waren ungefähr denen der Wien'schen Anordnung gleich, wobei ich die größeren Rollen benützte. Die Bestimmung des Selbstpotentials der kompensierenden Rolle geschah durch Vergleichen mit einer Selbstinduktionsnormale.

Viel Schwierigkeiten machte mir die erste Aufstellung, da die Felder der einzelnen Rollen sich leicht gegenseitig stören. Entfernungen von etwa 2·5 *m* zwischen den einzelnen Rollen, dem Induktorium, Saitenunterbrecher, Vibrationsgalvanometer genügten, um diese Störungen zu eliminieren. Bei diesen Störungen ist auch die Richtung der Rollen von großem Einflusse.

Da ich also den Saitenunterbrecher, der, um einen möglichst ruhigen Gang zu erzielen, an Kautschukbändern

---

[1] Wied. Ann., 49, p. 306, 1893.

[2] Wied. Ann., 31, p. 792, 1887.

[3] Phil. Mag. (5), 8, p. 50, 1879.

aufgehängt wurde, vom Vibrationsgalvanometer, daher auch aus meiner Nähe entfernen mußte, besorgte ich das Spannen der Saite mittels einer Stange, die mit der Stellschraube fest verbunden war. Meiner Erfahrung nach ist nämlich die Einstellung auf das Maximum der Empfindlichkeit eine sehr feine und geht in kürzester Zeit wieder verloren, so daß sie fortwährend kontrolliert und erneuert werden muß. Auch die Einstellung der Kompensationsrolle geschah mit Hilfe einer Stange, die Rolle selbst lag auf einem hölzernen Schlitten, der in einer Führung auf Glasröhren glitt.

Der Unterbrecher war ähnlich dem von Prof. Wien[1] beschriebenen, als Kontakte verwendete ich in Quecksilber tauchende, zu Nadelspitzen zugefeilte Platindrähte. Als vorteilhaft erwies sich auch das Anbringen einer über die Windungen des Elektromagneten gewickelten Lage Drahtes, die kurz geschlossen wurde.[2] Es wird dadurch der Öffnungsfunke geschwächt und die Amplitude der Saite vergrößert.

Da das optische Telephon, das mir zur Verfügung stand, nicht besonders empfindlich war, verwendete ich als Stromanzeiger ein Vibrationsgalvanometer,[3] welches vollkommen zufriedenstellend arbeitete.

Die Kompensationsrolle hatte ein Selbstpotential von $10 \cdot 37.10^7$ *cm* und einen Widerstand von 8·755 Ohm bei 14·4° C.

Schon bei den Vorversuchen, die ich mit Quecksilber anstellte, zeigte es sich, daß bei schlecht leitenden Metallen, wie es das Quecksilber ist, die Einstellung wohl gegen eine geringe Verschiebung der Rolle allein, oder eine Änderung des Rheostatenwiderstandes allein sehr empfindlich ist, daß es aber möglich ist, durch Änderung des Widerstandes und entsprechendes Nachschieben der Rolle auch für eine andere benachbarte Wertekombination die Nulleinstellung zu erhalten. Dadurch leidet natürlich die Genauigkeit der Ablesung und man muß zumindestens stets zwei Ablesungen machen, eine

[1] Ann. 44, p. 681, 1891.
[2] Ann. 44, p. 344, 1891.
[3] Ann., 56, p. 27, 1895.

mit einem möglichst kleinen, die zweite mit einem möglichst großen Werte des Widerstandes.

Theoretisch gibt es natürlich stets nur ein Wertepaar der wechselseitigen Induktion und des Widerstandes, das die Stromlosigkeit des Brückenzweiges ermöglicht. Von der Empfindlichkeit der ganzen Anordnung wird es abhängen, wie lange uns der Brückenzweig noch stromlos erscheint.

Es läßt sich leicht durch eine einfache theoretische Betrachtung zeigen, daß bei einer bestimmten Empfindlichkeit für die Änderung einer der beiden Größen für sich allein diese Empfindlichkeit eine, namentlich bei schlecht leitenden Metallen, viel geringere sein wird, sobald wir beide Faktoren entsprechend variieren.

Die Empfindlichkeit der Einstellung hängt von dem rascheren oder langsameren Unklarwerden des Spaltbildes ab, dieses wieder von der Intensität des Stromes, der durch den Brückenzweig geht.

Dieser Strom ist nach den für Wechselströme erweiterten Kirchhoff'schen Sätzen gegeben durch den Ausdruck:

$$k = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + w(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)},$$

wobei die a die Widerstandsoperatoren der vier Zweige sind, w der Widerstand des Brückenzweiges.

Die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges ist dann:

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3.$$

Da wir nur kleine Änderungen dieser Größen betrachten, können wir den Nenner als konstant ansehen und bei unseren Untersuchungen weglassen.

Wir haben bei unserer Brückenkombination die Werte

$$a_1 = w_1 + inp_1,$$
$$a_2 = w_2 + inp_2,$$
$$a_3 = w_3,$$
$$a_4 = w_4.$$

Nach der Einführung des Metalles in die Rolle 1 und der kompensierenden Rolle in die Rolle 2 werden w_1, w_2, p_1, p_2 modifiziert erscheinen, und zwar erhalten wir w'_1, p'_1, w'_2, p'_2, wobei:

$$w'_2 = w_2 + \frac{M^2 n^2}{W^2 + n^2 P^2} W,$$

$$p'_2 = p_2 - \frac{M^2 n^2}{W^2 + n^2 P^2} P.$$

Dabei bedeuten w, p die Widerstände und Selbstpotentiale der Zweige, W, P Widerstand und Selbstpotential der kompensierenden Rolle, M wechselseitiger Induktionskoeffizient, n Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden. Die Gleichung für die Stromlosigkeit wird dann lauten:

$$0 = w'_1 w_4 - \left(w_2 + \frac{M^2 n^2}{W^2 + n^2 P^2} W\right) w_3 + \\ + i n \left[p'_1 w_4 - \left(p_2 - \frac{M^2 n^2}{W^2 + n^2 P^2} P\right) w_3\right].$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei, sie gibt uns also einen bestimmten Wert für W und einen für M; wenn wir die rechte Seite als Funktion von M und W auffassen, so erhalten wir für diese speziellen Werte

$$f(M, W) = 0.$$

Ändern wir jetzt M oder W oder beide, so wird $f(M', W')$ einen von Null verschiedenen Wert haben.

Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$f(M+\varepsilon, W) = f(M, W) + \frac{\partial f}{\partial M} \varepsilon,$$

$$f(M, W+\delta) = f(M, W) + \frac{\partial f}{\partial W} \delta,$$

$$f(M+\varepsilon, W+\delta) = f(M, W) + \frac{\partial f}{\partial M} \varepsilon + \frac{\partial f}{\partial W} \delta.$$

Es erscheint schon aus diesem Ansatze wahrscheinlich, daß die Glieder mit ε und mit δ sich teilweise aufheben können. Führen wir die Rechnung weiter aus, so bekommen wir:

$$f(M+\varepsilon, W) = \frac{2Mn^2}{W^2+n^2P^2} w_3 (inP - W)\varepsilon,$$

$$f(M, W+\delta) =$$

$$= \frac{M^2n^2}{W^2+n^2P^2} w_3 \left(\frac{2W^2}{W^2+n^2P^2} - 1 - in \frac{2PW}{W^2+n^2P^2} \right) \delta,$$

$$f(M+\varepsilon, W+\delta) =$$

$$= \frac{Mn^2}{W^2+n^2P^2} w_3 \left\{ -2W\varepsilon + M \frac{W^2-n^2P^2}{W^2+n^2P^2} \delta + \right.$$

$$\left. + 2inP \left(\varepsilon - \delta \frac{M.W}{W^2+n^2P^2} \right) \right\}.$$

Die Möglichkeit, daß einer Kompensation im reellen Teil auch eine Kompensation im imaginären Teil entspricht, wird von den Werten W, n, P abhängen.

Solange W und nP von derselben Größenordnung sind, wie das bei meiner Aufstellung auch noch für Quecksilber der Fall war, ist immer nur eine teilweise Kompensation innerhalb enger Grenzen möglich. Wächst aber W so, daß man nP daneben vernachlässigen kann, dann können wir schreiben:

$$f(M+\varepsilon, W+\delta) =$$

$$= \frac{Mn^2}{W^2+n^2P^2} w_3 \left\{ -W\left(2\varepsilon - \frac{M}{W}\delta\right) + 2inP\left(\varepsilon - \frac{M}{W}\delta\right) \right\}.$$

Hierin kann ich stets

$$2\varepsilon - \frac{M}{W}\delta = 0$$

machen; der imaginäre Ausdruck gibt dann einen Strom:

$$k = \frac{Mn^2}{W^2+n^2P^2} w_3 . 2nP\varepsilon.$$

Da mit zunehmendem W das M nicht zunimmt, so wird einesteils der Koeffizient von ε kleiner mit zunehmendem W, andernteils kann man für ein bestimmtes vorgegebenes δ das ε umso kleiner wählen, je kleiner der Quotient $\frac{M}{W}$ wird. — W wird aber umso größer, je schlechter das Metall leitet und je kleiner seine Dimensionen sind.

Je empfindlicher die ganze Anordnung ist, umso weniger wird auch diese Erscheinung fühlbar.

Die Versuche mit Quecksilber ergaben mir trotz aller Sorgfalt nicht die richtigen Werte für die Leitfähigkeit, ich ging also daran, die in der Formel

$$\lambda = \frac{\tau_0 (1 + 0 \cdot 94\, D/R)}{x . R . D}$$

von Wien gefundene Konstante $x = 2 \cdot 116$ neu zu bestimmen. In der Formel bedeuten λ die spezifische Leitfähigkeit, τ_0 eine experimentell bestimmbare Größe, D, R Dicke und Radius der Kreisscheibe.

Ich legte dabei den von Kohlrausch angegebenen Wert der Leitfähigkeit des Quecksilbers, $1 \cdot 0438 . 10^{-5}$, bei 18° C. zugrunde.

Das Quecksilber wurde in ein aus Bleiglyzerat gedrehtes Gefäß gegossen, der Durchmesser mit der Schublehre gemessen und die Höhe des Zylinders aus dem Gewicht des Quecksilbers berechnet.

Ich machte sieben Bestimmungen mit verschieden dicken Quecksilberschichten; die Mittelwerte sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$R = 7 \cdot 49\ cm.$

D	D/R	τ_0	ϑ	x
$1 \cdot 26\ cm$	$0 \cdot 168$	$1 \cdot 801 . 10^{-4}$	20·1° C.	$2 \cdot 125$
$1 \cdot 68$	$0 \cdot 224$	$2 \cdot 298 . 10^{-4}$	20·6	$2 \cdot 126$
$2 \cdot 10$	$0 \cdot 280$	$2 \cdot 757 . 10^{-4}$	21	$2 \cdot 128$

D	D/R	τ_0	ϑ	x
2·52 *cm*	0·336	$3 \cdot 175.10^{-4}$	20·3° C.	2·126
2·94	0·393	$3 \cdot 576.10^{-4}$	20·3	2·134
3·36	0·449	$3 \cdot 934.10^{-4}$	19·9	2·132
3·78	0·505	$4 \cdot 275.10^{-4}$	19·6	2·135

Das ergibt den Mittelwert **2·129.**

Die so erhaltene Konstante ist daher um etwa ein halbes Prozent größer als die von Wien gefundene. Das liegt zum Teile daran, daß Wien für die Leitfähigkeit des Quecksilbers bei 18° C. den Wert 1·0461 einsetzt, zum Teil an der Verschiedenheit der Felder der benützten Rollen, da diese Konstante, wie sich schon aus den Bestimmungen Wien's ergibt, für verschiedene Rollen etwas abweichende Werte erhält.

Immerhin kann auch bei der Bestimmung des Selbstpotentials der Kompensationsrolle ein kleiner Fehler unterlaufen sein. Die bei der Bestimmung verwendeten Bifilarrollen und Widerstandssätze sind ja nie vollkommen induktionsfrei.

Jedenfalls war ich durch die Konstantenbestimmung unabhängig von einem etwaigen kleinen Fehler dieses Wertes.

Matthießen[1] hat im Jahre 1857 die Leitfähigkeit des Natriums bestimmt. Er preßte das Natrium durch eine Öffnung so, daß es in Drahtform austrat; trotzdem er es direkt in Steinöl eintreten ließ, oxydierte sich die Oberfläche, so daß der Ablesungswert innerhalb 20 Minuten um 1·6% abnahm. Diese Drähte hatten einen Durchmesser von 0·321 *mm*, eine Länge von zirka 400 *mm*. Trotz der Oxydation und der geringen Länge stimmen die von ihm für verschiedene Drähte gefundenen Werte auffallend gut überein.

Er findet im Mittel:

$$\lambda = 40 \cdot 52 - 0 \cdot 1459t + 0 \cdot 000158t^2,$$

wobei für t die Temperatur einzusetzen ist und λ auf Silber $= 100$ bei 0° C. bezogen ist, das gibt in absoluten Einheiten, wenn wir mit Kohlrausch für Silber $\lambda_0 = 67 \cdot 0.10^{-5}$ setzen

$$\lambda_{18 \cdot 7} = 25 \cdot 36.10^{-5}.$$

[1] Pogg. Ann. 100, p. 177, 1857.

Oder wenn wir den in den Landolt'schen Tabellen benützten Wert des harten Silbers ($\lambda = 59 \cdot 68 . 10^{-5}$) zur Umrechnung benützen, erhalten wir

$$\lambda_{18 \cdot 7} = 22 \cdot 59 . 10^{-5}.$$

Der in den Landolt'schen Tabellen angeführte Wert für die Leitfähigkeit des Natriums gibt umgerechnet:

$$\lambda_0 = 19 \cdot 46 . 10^{-5}.$$

Da der Wert der Leitfähigkeit mit zunehmender Temperatur sinkt, ist dieser Wert viel zu klein. Der Grund für diese Differenz liegt darin, daß bei der Umrechnung augenscheinlich nicht der von Matthießen ausdrücklich als der richtige angegebene Wert benützt wurde, den er bei der Bestimmung mittels der Natriumdrähte erhalten hatte, sondern der um vieles zu kleine, der sich bei der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten ergab, als das Natrium in Kapillarröhren gemessen wurde.

Bei der Bestimmung der Leitfähigkeit galt es zunächst, das Natrium in die Gestalt von zylindrischen Platten zu bringen.

Dabei durfte einesteils nicht zuviel Natrium genommen werden, weil sonst die Glieder einer zur Berechnung notwendigen Reihenentwicklung zu groß wurden, andernteils durfte der Durchmesser der Platten nicht zu klein sein, weil sonst die Empfindlichkeit der Einstellung sehr nachließ. Nach verschiedenen fehlgeschlagenen Versuchen blieb ich bei folgendem Verfahren.

Ein Stück von etwa 40 *g* Natrium wurde mit Filtrierpapier sorgfältig abgetrocknet, dann auf einer Glasplatte in die Presse gegeben. Auf das Natrium kam ein Stück Pergamentpapier, durch Unterlagsplättchen wurde erreicht, daß die gepreßte Platte die gewünschte Dicke erhielt.

Das Pergamentpapier ließ sich nachher leicht hinwegnehmen, während das Natrium an der Glasplatte haftete. Die

gegen das Glas gekehrte Seite war dadurch gegen Oxydation vollkommen geschützt und die ursprünglich darauf befindliche Oxydhaut so dünn auseinandergezogen, daß die Platte auf dieser Seite nahezu blank war. Auf der andern Seite, wie auch auf dem Rande befand sich natürlich eine dünne Oxydhaut. Die Platte wurde nun mit Hilfe einer runden Glasplatte rund zugeschnitten. Die so erhaltene zylindrische Scheibe wurde dann in Vaselinöl gelegt und gemessen.

Nach der Messung wurde der Radius mit der Schublehre bestimmt, dann die Platte wieder sorgfältig getrocknet und gewogen. Aus Gewicht und Radius berechnete ich die Dicke.

Um den Einfluß der Oxydschicht möglichst zu eliminieren, wurden stets zwei Wägungen gemacht, die eine mit Oxydschicht, die andre nachdem diese durch Abwaschen mit Äther und Alkohol entfernt war.

Ich entnehme meinem Beobachtungshefte zwei solche Wägungen:

Gewicht des Natriums

vor der Behandlung mit Alkohol.....	19·53 *g*,	10·90 *g*;
nach der Behandlung mit Alkohol ...	19·31 *g*,	10·70 *g*.

Wir haben daher Abweichungen von etwa 1 bis 2%. Da ein Teil der Oxydschicht sich wohl erst während der Wägung gebildet haben mag und da durch den Alkohol etwas mehr als bloß die Oxydhaut weggenommen wurde, nahm ich das Mittel der beiden Wägungen als den richtigen Wert an.

Bei der Berechnung der Dicke der Platte mußte das spezifische Gewicht des Natriums benützt werden. Eine Bestimmung mit dem Pyknometer gelang mir nicht, da das Natrium auf alle anwendbaren Flüssigkeiten, wie Vaselinöl, Petroleum, Petroläther, reagiert und sich so stets Gasblasen bilden, die das spezifische Gewicht zu klein erscheinen lassen. Auch nach der Auftriebsmethode ist die Bestimmung aus demselben Grunde ungenau, ich erhielt für ein Stück nicht gepreßten Natriums 0·977. Das gepreßte konnte wegen der großen Oberfläche der Platte gar nicht verwendet werden. Da dieser Wert jedenfalls etwas zu klein ist, verwendete ich den von Kohlrausch angegebenen Wert 0·98.

Ich führte die Bestimmung für fünf Platten mit verschiedenen Dimensionen durch.

Folgende Tabelle gibt die Mittelwerte für die einzelnen Platten:

R	D	τ_0	θ	$\lambda . 10^5$
3·87 *cm*	0·292 *cm*	$4·831 . 10^{-4}$	18·4° C.	21·52
4·57	0·227	4·627	16·6	21·91
3·88	0·233	3·842	19·1	21·09
5·07	0·265	5·888	19·2	21·63
4·57	0·302	5·913	20·2	21·36

Das gibt im Mittel für 18·7° C.:

$$\lambda_{18·7} = 21·5 . 10^{-5}.$$

Reduzieren wir die fünf Werte alle auf die Temperatur 18·7° C., so erhalten wir:

21·49,
21·71,
21·13,
21·68,
21·50.

Das gibt:

		In Prozenten des Mittelwertes
Mittlerer Fehler des Einzelwertes	0·23	1·07%
Wahrscheinlicher Fehler des Einzelwertes	0·15	0·69
Mittlerer Fehler des Mittels	0·103	0·48
Wahrscheinlicher Fehler des Mittels	0·069	0·32

Zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten wurden ähnliche Platten verwendet. Sie wurden in einer Glasschale mit Vaselinöl erwärmt, dann wurde die Schale in Flanell gehüllt und in die Rolle gebracht. Die Methode ist der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten aus dem Grunde nicht sehr günstig, weil sich während der Beobachtung der Kupferdraht der Rolle naturgemäß etwas erwärmt; das genügt, um das Gleichgewicht der Brückeneinstellung zu zerstören und die ganze Messung illusorisch zu machen. Da man also

angewiesen ist, die Einstellung möglichst rasch zu machen, leidet die Genauigkeit. Ich suchte das durch eine große Anzahl von Messungen zu ersetzen.

Innerhalb des von mir beobachteten Intervalles, 20° bis 70° C., nahm ich auf Grund der erhaltenen Werte einen linearen Verlauf an. Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhielt ich aus 25 Beobachtungen für die erste Platte und aus 28 Beobachtungen für die zweite, folgende Resultate:

Für

$$\lambda_t = \lambda_{18}(1-at),$$

wobei λ_{18} der Leitfähigkeit bei 18° C. entspricht, war für

Platte I..... $10^3 . a = 4 \cdot 324$,

Platte II..... $10^3 . a = 4 \cdot 348$.

Daraus im Mittel:

$$10^3 . a = \mathbf{4 \cdot 336}.$$

Berechnet man mit Hilfe des Temperaturkoeffizienten die einzelnen Werte und vergleicht sie mit den beobachteten, so findet man:

Mittlerer Fehler der Einzelmessung...........	0·42%
Wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessung ...	0·28
Mittlerer Fehler des Mittelwertes	0·06
Wahrscheinlicher Fehler des Mittelwertes	0·04

Der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit ist also nicht wesentlich verschieden von dem anderer Metalle.

Nach Abschluß meiner Arbeit erschien in der physikalischen Zeitschrift die Arbeit des Herrn Bernini[1] über denselben Gegenstand, wenn auch nach der Matthießen'schen Methode mit Kapillarröhren. Er erhält für den Temperaturkoeffizienten in dem Intervalle 0 bis 97·3 den Wert 0·00439, welcher mit dem von mir erhaltenen 0·00434 sehr gut übereinstimmt. Der Wert, den er für die Leitfähigkeit erhält, ist kleiner als der von mir gefundene; da das Natrium die Kapillarröhre, in der es gemessen wurde, wie Bernini selber

[1] Phys. Zeitschrift 5, p. 241, 1904.

zugibt, nicht vollkommen kontinuierlich ausfüllte, ist sein Wert jedenfalls zu klein, ebenso wie der Wert, den Matthießen bei der zweiten, in Kapillarröhren vorgenommenen Bestimmung erhielt.

Das von mir verwendete Natrium war als chemisch rein gekauft worden; um es von mechanischen Beimengungen zu reinigen, wurde es geschmolzen und durch leinene Säckchen gepreßt.

Es war mir nachträglich möglich, das verwendete Natrium im I. chemischen Institute der Wiener Universität analysieren zu lassen. Die von Herrn Wohack vorgenommene Analyse ergab:

In 100 *g* metallischem Natrium waren enthalten:

Al	0·48 *g*,
Fe	Spuren,
Ca	0·33 *g*,
Na	99·1 *g*.

Die Vor- und Nachteile der Methode hat schon Wien am Schlusse seiner zitierten Arbeit hervorgehoben. Die erste Aufstellung ist jedenfalls sehr mühsam und zeitraubend, da die verschiedenen Rollen sich leicht gegenseitig stören.

Wegen der großen Empfindlichkeit des Hauptkreises geht die Anfangseinstellung im Laufe der Messung leicht verloren.

Da man bei schlechten Leitern, wie Quecksilber, große Mengen nehmen muß, bei guten nicht über eine gewisse Menge nehmen darf und doch einen möglichst großen Durchmesser braucht, ist man auch bezüglich des zur Bestimmung nötigen Materials und seiner Eignung zur Bearbeitung an bestimmte Schranken gebunden.

Die Verwendung kleinerer Rollen ist für gute Leiter natürlich günstiger, doch muß man dann die mehrfach besprochene Konstante als für dieselben richtig annehmen, da eine Konstantenbestimmung mit Quecksilber für kleine Rollen nicht gut durchführbar ist.

Die Kugelform war für Natrium nicht recht anwendbar, da es im flüssigen Zustande hätte eingefüllt werden müssen, sich

aber dann beim Erstarren stark zusammenzieht, wobei die Oberfläche uneben wird. Ich habe daher bezüglich der Kugelform keine Erfahrungen.

Die Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Temperaturkoeffizienten habe ich schon erwähnt.

Von einer Bestimmung der Leitfähigkeit des Kaliums wurde abgesehen. Wegen der Entzündbarkeit dieses Metalles an der freien Luft würde das Pressen und namentlich das Wägen der Scheiben nicht ohne erhebliche neue Schwierigkeiten und Fehlerquellen möglich sein.

Vorteile müßte die Methode überall dort bieten, wo man gut leitende Metalle leicht in die gewünschte Form bringen kann und wo es wünschenswert ist, große Flächen zur Verfügung zu haben, um etwaige Änderungen des Leitvermögens z. B. durch Bestrahlungen u. dgl. zu untersuchen.

Astrospektrographische Untersuchung der Sterne γ Cygni, α Canis minoris und ε Leonis

von

Dr. **Ed. Haschek** und Dr. **K. Kostersitz.**

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1904.**)

Durch die denkwürdigen Untersuchungen Rowland's ist die Ausmessung der Wellenlängen im Sonnenspektrum vorläufig zu einem befriedigenden Abschlusse gebracht worden. Eine Durchmessung von Sternspektren in gleicher Vollständigkeit und Genauigkeit wurde bisher noch nicht vorgenommen und ist auch schwer möglich wegen der Lichtschwäche der Objekte, welche Aufnahmen mit großen Rowland'schen Gittern oder Prismenapparaten ähnlicher Definition bisher ausgeschlossen hat. Aber auch die mit den üblichen Sternspektrographen erzielten Aufnahmen sind bisher nur ausnahmsweise vollständig durchgemessen und identifiziert worden. Man begnügt sich vielmehr in der überwiegenden Anzahl der Fälle mit der Feststellung des Spektraltypus, der Ausmessung einiger Hauptlinien und der Bestimmung der Geschwindigkeit im Visionsradius. Es liegt dies wohl hauptsächlich an der unbequemen und zeitraubenden Art der üblichen Methode der Ausmessung unter dem Komparator. Bis vor kurzem kam dazu noch die Schwierigkeit, die gemessenen Linien irdischen Elementen zuzuweisen, da genügend genaue und ausführliche Tabellen der Spektren fehlten. Hat ja doch erst in letzter Zeit J. Lunt[1] in

[1] Astroph. Journ. XI, p. 262 (1900).

Capstadt eine ausführliche Untersuchung über das Spektrum des Siliciums angestellt, von dem er einige Linien in Sternspektren beobachtet hatte, ohne sie nach den vorhandenen Messungen mit Sicherheit identifizieren zu können. Dieser Mangel ist in letzter Zeit dadurch behoben worden, daß durch die Untersuchungen von F. Exner und E. Haschek über die Funken- und Bogenspektren ausführliche Tabellen der Spektrallinien im Blau und Ultraviolett für sämtliche Elemente mit Ausnahme der Gase vorliegen.[1] Diese Messungen wurden durchwegs nach der gleichen Methode, von denselben Beobachtern und mit denselben Apparaten in ununterbrochener Folge ausgeführt, wodurch die möglichste Gewähr für volle Einheitlichkeit gegeben ist, welche noch dadurch erhöht wird, daß die angewendete Methode ein ebenso genaues, als rasches Arbeiten gestattet.

Über diese Methode hat einer von uns bereits im Astrophysical Journal einen kurzen Bericht erstattet.[2]

Bei dem erwähnten Stande der Arbeiten über die Ausmessung von Sternspektren war es für uns von großem Interesse, einen Versuch der Anwendung dieser Methode auch auf die Ausmessung von Sternspektrogrammen zu machen. Wir sind den Herren Geheimrat Prof. Dr. H. C. Vogel, Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam, und Prof. Dr. W. W. Campbell, Direktor des Lick-Observatory auf Mount Hamilton, welche die große Güte hatten, uns einige Sternspektrogramme zur Verfügung zu stellen, zu ganz besonderem Danke verpflichtet und wollen vor allem den beiden genannten Herren diesen unseren Dank auch hier aussprechen. Von Herrn Geheimrat Vogel erhielten wir zwei Kopien eines Spektrogrammes von γ Cygni; Direktor Campbell sandte uns drei Originalspektrogramme von α Canis minoris, ε Leonis und ε Pegasi.

[1] F. Exner und E. Haschek, Wellenlängentabellen der ultravioletten Funkenspektra der Elemente, Wien, Deuticke, 1902; — und dieselben, Wellenlängentabellen der ultravioletten Bogenspektra der Elemente, Wien, Deuticke, 1904.

[2] Karl Kostersitz, »On a new objective method of measurement of Spektrograms«, Ap. J. 1902, Vol. XVI, p. 262.

Einen vorläufigen Bericht über unsere Untersuchung haben wir bereits in der Boltzmann-Festschrift[1] publiziert; es möge uns gestattet sein, nunmehr ausführlich über den Gang und die Ergebnisse unserer Arbeit Mitteilung zu machen.

Die Ausmessung geschah nach der objektiven Methode der Wellenlängenbestimmung.

Zu diesem Zwecke wurden Bilder der Spektren unter Verwendung einer Projektionslampe von Schuckert in etwa 34facher Vergrößerung mittels eines Steinheil'schen Gruppenantiplaneten auf einem Schirm entworfen. Die nötigen Bewegungen waren: Verschiebungen des Spektrums in seiner Ebene und zwar in der Richtung seiner Längsausdehnung, was aus freier Hand geschah, und in der dazu senkrechten Richtung mit Hilfe einer Stellschraube, dann Drehung um eine Horizontalachse, normal zur Ebene des Spektrums, ebenfalls mit Hilfe einer Schraube, um das Bild des Spektralstreifens zu der Skala am Schirme parallel stellen zu können. Weiter mußte die Möglichkeit gegeben sein, die Vergrößerung zu variieren, um die Standardlinien mit den zugehörigen Skalenteilen zur Koinzidenz zu bringen; dies wurde ohne Beeinträchtigung der Schärfe in genügendem Maße durch Verschiebung des ganzen Projektionssystems in der Richtung seiner optischen Achse bewirkt. Der Schirm selbst konnte zur Erzielung einer genauen Einstellung in der Richtung der Skala verschoben werden. In passender Weise war dafür gesorgt, daß die Oberfläche des Schirmes eine Ebene sei und daß der Schirm sich nur in seiner eigenen Ebene bewegen ließ.

Der wichtigste Teil der Meßvorrichtung war die Skala; um sie herzustellen, gingen wir in folgender Weise vor. Wir befestigten zunächst eine provisorische Millimeterskala auf dem Schirme und bestimmten aus einer Reihe von Ablesungen die Stellung der Eisenstandardlinien des Vergleichsspektrums auf dem Schirme. Aus diesen so erhaltenen Zahlen rechneten wir mit Hilfe der Hartmann'schen Formel die Konstanten für das

---

[1] E. Haschek und K. Kostersitz, Über einen Versuch der Ausmessung von Sternspektrogrammen nach der objektiven Methode der Wellenlängenbestimmung.

vergrößerte Spektrum und bestimmten für das projizierte Bild den Wert der Dispersion für je 10 AE in Millimetern. Zwischen je 10 AE wurde linear interpoliert und die Skala nach den so erhaltenen Werten mit einer Perreaux'schen Teilmaschine auf einem Streifen entsprechend vorpräparierten, guten Zeichenpapiers auf halbe AE geteilt. Selbstverständlich haben wir gegen Verzerrungen und Verziehungen der Skala weitgehende Vorsichtsmaßregeln ergriffen.

Da wir durch die beschränkten räumlichen Verhältnisse gezwungen waren, das Bild auf eine kurze Distanz zu entwerfen und wegen der Krümmung des Bildfeldes nicht das ganze Spektrum gleichzeitig auf dem Schirme scharf erhalten konnten, so mußten wir die Skala in zwei Teilen anfertigen; der erste reicht von λ 4100 bis λ 4320, der zweite von λ 4300 bis λ 4620. Die beiden Skalenstreifen sind unmittelbar übereinander angeordnet, so daß eine kleine Seitenverschiebung und Höhenverstellung des projizierten Negativs genügt, um die eine oder die andre Skala zur Messung verwenden zu können.

Wenn auch die Mühe der Herstellung einer solchen Skala bei präziser Arbeit eine ziemlich große ist, so bedeutet doch das Vorhandensein einer genauen Skala dieser Art eine ganz außerordentliche Ersparnis an Zeit und Mühe für die weitere Untersuchung, sobald man mehrere Spektrogramme auszumessen hat, die mit demselben Apparate und unter gleichen Bedingungen aufgenommen sind. Beweis dessen, daß wir zur Berechnung und Herstellung dieser Skala für die Spektrogramme des Lick-Observatory weniger Zeit gebraucht haben, als zur direkten Berechnung der Wellenlängen bei γ Cygni und daß die Bestimmung der Wellenlängen mit Hilfe der Skala für ein Spektrogramm durchschnittlich einen Zeitaufwand von etwa fünf Stunden beanspruchte.

Wir haben eine eigene Skala selbstverständlich nur für die Negative des Lick-Observatory, die mit dem Mills-Spektrograph aufgenommen sind, hergestellt, hingegen nicht für das Diapositiv von γ Cygni.

Die Ablesung selbst erforderte einige Vorsichtsmaßregeln. Bei Ausmessung von Emissionsspektren, die im Laboratorium aufgenommen sind, projizieren sich die schwarzen Linien des

Negativs auf hellem Grunde und zwar in der Art, daß der Schirm fast vollständig mit dem Bilde des Negativs überdeckt ist, dessen Linien sich über die ganze Höhenausdehnung des Schirmes erstrecken. Es handelt sich also hier nur um die präzise Angabe der Stellung der dunklen Linien auf einem gleichmäßig erleuchteten hellen Grunde und das Seitenlicht ist für die Erkennung von Details in der einzelnen Spektrallinie selbst nicht störend. Wenigstens konnte bei den Versuchen, welche für die Ausmessung der Wellenlängentabellen von F. Exner und E. Haschek gemacht wurden, ein störender Einfluß des Seitenlichtes nie bemerkt werden, solange nicht der Schirm mit intensivem Licht fremder Lichtquellen beleuchtet wurde. Ganz anders hingegen bei den Sternspektrogrammen. Hier handelt es sich um Absorptionsspektren und das Negativ präsentiert sich als ein schmaler dunkler Streifen mit einzelnen Aufhellungen. Selbst bei der von uns angewendeten 34fachen Vergrößerung war dieser Streifen im projizierten Bilde kaum 2 *cm* breit. Damit nun nicht das Auge durch die große, hell erleuchtete Fläche des übrigen Schirmes gestört und ermüdet werde, wodurch leicht die Möglichkeit von Täuschungen durch Nachbilder gegeben wäre, hielten wir es für notwendig, durch Auflegen eines passend ausgeschnittenen Stanniolstreifens das Negativ bis auf den Spektralstreifen mit dem Vergleichsspektrum abzublenden. Hiedurch trat das Bild des Spektrums auf dem im übrigen dunklen Schirme sehr präzise hervor und das Auge ermüdete nicht; es konnten daher auch Einzelheiten und Feinheiten des projizierten Bildes leicht erkannt werden.

Die Ablesung selbst konnte in zweierlei Art geschehen. Entweder wir stellten die Linien des gleichzeitig mit dem Sternspektrum projizierten Vergleichs-Spektrums nach ihren bekannten Wellenlängen auf der Skala richtig ein und lasen dann die Stellung der Sternlinien ab, wobei wir also die Wellenlängen um den Betrag der Doppler'schen Verschiebung gefälscht erhielten; oder wir stellten direkt sicher erkennbare und passende Eisenlinien des Stern-Spektrums nach ihrer bekannten Wellenlänge auf der Skala ein und bekamen dann die Wellenlängen frei von der Doppler'schen Verschiebung. Beide Wege sind theoretisch gleichberechtigt und werden im

allgemeinen auch abwechselnd verwendet werden können, wenigstens so lange, als die Absorptionsstreifen im Sternspektrum genügende Präzision aufweisen.[1] In welcher Art sich in beiden Fällen die Doppler'sche Verschiebung bestimmen läßt, ist wohl ohneweiters klar.

Zur technischen Seite der Ablesearbeit sei noch erwähnt, daß es vorteilhaft ist, die Skalenstriche tunlichst kurz zu machen und sie bei der Ablesung nur teilweise in den Spektralstreifen hineinragen zu lassen, weil dadurch die Sicherheit der Ablesung, also die Genauigkeit der Wellenlängenbestimmung bedeutend gewinnt.

Da die Skala wegen der geringen Dispersion nur auf halbe AE. geteilt war, so wurden die Ablesungen meist nur auf Zehntel AE. ausgeführt und nur bei besonders günstigen Linien konnten noch die Zwanzigstel AE. abgeschätzt werden. Um aus den Messungen die Zehntel AE. sicher zu bekommen, war es dann natürlich notwendig, die Ablesungen öfters zu wiederholen und wir glauben, daß wir in den Mittelwerten aus je fünf Ablesungen bei jedem Spektrogramm hinreichend genaue Zahlen erhalten haben. Zum Beweise dieser Behauptung diene die Tatsache, daß aus einer kleineren Anzahl von willkürlich herausgegriffenen Linien als wahrscheinliche Fehler folgende Werte in AE. sich ergaben:

	für die einzelne Ablesung	für das Resultat
γ Cygni	± 0·025 AE.	± 0·008 AE.
α Canis min.	± 0·032 AE.	± 0·017 AE.

Für die Identifikationen benützten wir die Wellenlängentabellen von F. Exner und E. Haschek für die Funkenspektra und für die Bogenspektra. Wir suchten zunächst nach den »Haupttabellen« die Koinzidenzen auf. Für jene Elemente, bei denen zahlreichere und auch schwächere Linien identifiziert werden konnten, wurden dann auch die ausführlichen Tabellen auf weitere Koinzidenzen zu Rate gezogen,

[1] Allerdings darf nicht übersehen werden, daß die Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung für verschiedene Linien mitunter recht divergierende Werte gibt.

namentlich für solche Linien, die in den Haupttabellen nicht aufgefunden werden konnten.

Von Wichtigkeit ist es bei der Frage der Identifikation auch, auf die trennende Kraft des verwendeten Spektrographen Rücksicht zu nehmen. Die trennende Kraft des Mills-Spektrographen ist in der Gegend von Hγ — und nur für diese Gegend standen uns Aufnahmen zur Verfügung — 0·25 AE. Wie nun der Anblick der Wellenlängentabellen der Elemente in irgend einer beliebigen Spektralgegend zeigt, finden sich in dem Bereiche von 0·25 AE. in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle zwei und mehr Spektrallinien auch für jene Stoffe, die in den Sternspektren identifiziert werden konnten. Es ist daher klar, daß man für irgend eine einzelne Linie, die ja sehr häufig ein Komplex mehrerer, von mehreren Elementen herrührender Absorptionsstreifen sein wird, auch mehrfache Identifikationen wird bekommen müssen und daß es auch andrerseits, wenigstens für Zwecke der Identifikation, überflüssig ist, eine Genauigkeit anzustreben, welche über die Zehntel AE. hinausgeht. Daß es bei den Identifikationen gleichgültig ist, ob man mit einer Genauigkeit von 0·01 AE. oder 0·001 AE. gemessen hat, ergibt sich übrigens auch daraus, daß man eben wegen der angegebenen Grenze der trennenden Kraft für die Identifikationen auch noch Linien in den Tabellen heranziehen kann, deren Wellenlängen von der gemessenen Wellenlänge um etwa 0·12 AE. differieren. Eine über die Zehntel AE. hinausgehende Ablesegenauigkeit hätte ja nur dann einen Sinn, wenn man Linien von so kleinen Distanzen noch getrennt wahrnehmen und ablesen oder wenigstens den komplexen Charakter von Linien mit Sicherheit angeben könnte.[1]

Ein gutes Beispiel für das Zusammenfließen von nahe benachbarten Linien bietet die Linie *G* des Sonnenspektrums, die auch in den von uns gemessenen Sternspektren auftritt. An dieser Stelle finden sich nämlich die Linien

---

[1] In den weiter unten folgenden Tabellen sind die Ablesungen auf Zehntel AE. sicher angegeben; die Hundertel haben die Bedeutung von Korrekturziffern.

Ca 4307·92, Ti 4308·08 und Fe 4308·10. Da nun in den von uns ausgemessenen Sternspektren immer wenigstens auch Ca und Fe vorhanden ist, die Ca- und Fe-Linie hier aber nur um 0·18 AE. voneinander abstehen, so hängt es sehr von der relativen Intensität dieser beiden Linien ab, wo man den Absorptionsstreifen des Sternspektrums abliest. Man sieht aus diesem Beispiele, daß eine höhere Genauigkeit der Wellenlängenbestimmung als bis auf 0·1 AE. in allen derartigen Fällen — und deren gibt es sehr viele — illusorisch ist. Und da man beim Anblick eines Sternspektrums von vornherein nie wissen kann, ob ein Absorptionsstreifen eine oder mehrere Linien repräsentiert, so wäre es wohl ein überflüssiger Arbeitsaufwand, die Lage der Absorptionsstreifen mit größerer Genauigkeit ablesen zu wollen.

Unter Berücksichtigung der angegebenen Gründe nahmen wir für unsere Identifikationen Linien noch als koinzidierend mit den in den Tabellen angegebenen Linien an, deren gemessene Wellenlänge von der in den Tabellen angegebenen um höchstens 0·1 AE. abweicht. Diese maximale Grenze wurde aber nur in sehr seltenen Fällen wirklich erreicht und hauptsächlich nur bei Linien solcher Elemente, für welche nach den Tabellen die Koinzidenz mehrerer Linien sich ergab. Durchschnittlich beträgt die Abweichung bei den Identifikationen etwa 0·05 AE.

Auch für die Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung und damit auch der Geschwindigkeit der Sterne im Visionsradius wird ein höherer Grad von Genauigkeit illusorisch sein, weil man im Spektrum nur in Ausnahmsfällen Linien nicht komplexer Natur, einfache Linien, für die Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung wird verwenden können, wie vielleicht die Wasserstofflinie Hγ; aber auch diese nicht in jenen Sternen, welche einen starken Gehalt an Chrom oder Vanadium aufweisen, weil in der Nähe von Hγ starke Cr- und V-Linien stehen. In den von uns ausgemessenen Spektrogrammen ist die Linie Hγ für diesen Zweck auch deshalb nicht günstig, weil sie eine Breite von mehr als 1 AE. aufweist, daher nicht mit der wünschenswerten Präzision ablesbar ist.

Übrigens wird man auch im Vergleichsspektrum nur jene Linien für die Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung auswählen dürfen, welche man nach den Aufnahmen mit stark dispergierenden Apparaten als Linien ohne Begleiter kennt.

Linien, die bei genügender Reinheit des Spektrums, also bei Verwendung großer Gitter, als enge Dublets oder Triplets erscheinen, fließen bei kleiner Dispersion in einfache Streifen zusammen, deren Intensitätsverteilung sich im Laboratorium für reines Material ganz wohl bestimmen ließe. In Aufnahmen von Sternspektren mit einem Apparat von derselben kleinen Dispersion wird aber der entsprechende Streifen keineswegs immer dieselbe Intensitätsverteilung aufweisen müssen. Es wird ja in vielen Fällen die Möglichkeit vorhanden sein, daß Linien verschiedener, eventuell auch unbekannter Elemente an dieser Stelle auftreten. Abgesehen davon kann man ja nur für ganz bestimmte physikalische Verhältnisse die Intensitätsverteilung studieren und es ist eine große Anzahl von Linien bekannt, bei denen schon der Wechsel von Bogenspektrum zum Funkenspektrum, also eine Änderung der physikalischen Bedingungen die Intensitätsverteilung ganz wesentlich verändert; in welcher Art aber Veränderungen der physikalischen Verhältnisse des Sternes in dem Aussehen des Spektrums und der einzelnen Linien in die Erscheinung treten, darüber können wir heutzutage noch nichts Zuverlässiges aussagen. Es ist ja sicher, daß wir es in dem beobachteten Spektrum mit einer gegenseitigen Überlagerung von Teilspektren zu tun haben, welche durch die Verschiedenheit der physikalischen Bedingungen sowohl in Bezug auf Tiefenerstreckung wie auch Oberflächenverteilung der leuchtenden Dämpfe bedingt sind. Es wird also allerdings das Aussehen der einzelnen Spektrallinien hauptsächlich den vorherrschenden physikalischen Bedingungen entsprechen; jedoch werden wir nicht in der Lage sein, im Laboratorium zu kontrollieren, in welcher Weise jene übereinander gelagerten Teilspektren sich gegenseitig modifizieren und eine Abweichung des spektralen Bildes von der den vorherrschenden Bedingungen entsprechenden Form bewirken.

Auch das Auftreten von raschen Strömungen in der Atmosphäre des Sternes würde schon hinreichen, um (infolge der Doppler'schen Verschiebung) ein Undeutlichwerden, eine Verbreiterung der Linien hervorzurufen; da wir es aber dann bestimmt mit der Emission aus verschieden konstituierten Gegenden zu tun haben, so wird auch eine verschiedene Intensitätsverteilung der Linien in die Erscheinung treten müssen. Daß auch die Rotation des Sternes als Ganzen hiebei mitspielen kann, soll ebenfalls nicht unerwähnt bleiben. Ebenso wird die anomale Dispersion, welcher bei den Spektren vieler Sterne zweifellos eine große Rolle zufällt, in zahlreichen Fällen zur Erklärung von Eigentümlichkeiten des spektralen Bildes des Sternes herangezogen werden können.[1]

Auch wenn man von den eben erörterten Übelständen absieht, ist eine Messung der Wellenlängen von Sternlinien auf Hundertel AE. oder noch genauer gewiß eine prekäre Sache. Aus den von uns untersuchten, mit dem Mills-Spektrographen des Lick-Observatory aufgenommenen Spektrogrammen ergaben sich in den einzelnen Spektralbezirken folgende Maße für die Größe einer Angström-Einheit auf dem Originalnegativ in Millimetern:

	λ		
	4100	4300	4500
1 AE......	0·116	0·084	0·063

Eine Wellenlängenbestimmung auf 0·01 AE. entspricht demnach im Negativ der Messung einer Distanz der Absorptionsstreifen des Sternspektrums von einer feststehenden Vergleichslinie bis auf 0·0012, beziehungsweise 0·0008 und 0·0006 *mm*. Eine solche Genauigkeit ist aber für Längenmessungen wohl nur erreichbar bei scharf definierten feinen Teilstrichen eines Normalmaßstabes, kaum aber für die Linien des Spektrums, die namentlich unter dem Mikroskope sehr unbestimmt sind und nur eine unsichere, überdies noch durch

[1] Vergl. die Untersuchungen von H. Ebert über anomale Dispersion, insbesondere in Rücksicht auf die Spektren neuer Sterne; Astron. Nachrichten, Nr. 3877 und 3917; Physikal. Zeitschr., IV, Nr. 17, und Boltzmann-Festschrift, p. 448 bis 454.

das Korn der photographischen Platte arg beeinflußte und gestörte Einstellung ermöglichen.[1] Dazu kommt, daß das Mikroskopobjektiv darauf berechnet ist, die feinsten Einzelheiten mit der größtmöglichen Präzision darzustellen; man sieht daher bei einer Vergrößerung, welche etwa der von uns auf dem Schirm angewendeten beiläufig 34 fachen Vergrößerung entspricht, die einzelnen Silberkörner in der photographischen Schicht vollkommen klar definiert und muß Stellung, Intensität und Charakter der Linien erst aus der verschieden dichten Lagerung der Silberkörner im Gesichtsfelde erschließen. Ein Versuch aber, etwa durch ein Herausrücken aus der scharfen Einstellung den störenden Einfluß des Korns der Platte eliminieren zu wollen, wäre fruchtlos, da durch eine Veränderung der scharfen Einstellung sofort das ganze Bild völlig verwischt und für die Messung gänzlich unbrauchbar wird.

Ungleich besser hingegen liegen die Verhältnisse bei der objektiven Methode der Ausmessung. Im projizierten Bilde ist nämlich das Silberkorn überhaupt nicht sichtbar, oder aber es erscheint höchstens in demselben Maße definiert, wie etwa bei einem Lichtdruck oder einer Heliogravüre; ohne daß also die Möglichkeit der Erkennung von Einzelheiten, welche die Spektrallinie zeigt, irgendwie beeinträchtigt wäre, hat man das Bild auf dem Schirm doch so weit »unscharf«, um nicht durch die Wahrnehmung des Silberkorns gestört zu sein.

Dessenungeachtet würden wir uns aber unter den dargelegten Verhältnissen nicht für berechtigt halten, aus

[1] Um einen genauern Überblick zu bekommen, haben wir im Spektrum von ε Leonis eine Distanzmessung der Linien 4404 und 4383 im Vergleichsspektrum mit einer Teilmaschine durchgeführt. Die Schraube hat eine Ganghöhe von 0·5 *mm* und gestattet, die Tausendelumdrehungen direkt am Nonius zu messen und halbe Tausendel zu schätzen. Die Ablesungen wurden fünfmal ausgeführt und als mittlerer Fehler der Einzelnablesung 0·0032 *mm*, beziehungsweise als wahrscheinlicher Fehler des Mittels 0·0010 *mm* gefunden. Für die Wellenlängenbestimmung der einen Linie, bezogen auf die andre als Normale, ergeben sich daraus die Fehler 0·044 AE. beziehungsweise 0·014 AE. Die Ablesungen beziehen sich auf das Vergleichsspektrum, das bei diesem Spektrogramm besonders schön ist. Für die Absorptionslinien des Sternspektrums ergeben sich wesentlich höhere Werte, nämlich 0·070 AE. beziehungsweise 0·021 AE. für die entsprechenden Fehlergrößen.

Spektrogrammen, bei denen etwa 12 AE. auf einen Millimeter gehen, bei denen also zwei Linien mit der Wellenlängendifferenz von 1 AE. nur um etwa 0·084 *mm* voneinander abstehen, Wellenlängen bis auf 0·001 AE. zu bestimmen.[1]

Was die Messung der Doppler'schen Verschiebung bei den von uns untersuchten Spektrogrammen anlangt, so haben wir diese Größe meist nach Fe-Linien bestimmt, welche genügende Gewähr für Einheitlichkeit boten. Die Verschiebung wurde am Schirm für die einzelnen Linien direkt abgelesen; aus den Einzelablesungen für dieselbe Wellenlänge haben wir dann in derselben Weise das Mittel gebildet, wie bei den Wellenlängenablesungen selbst.

Wir bekamen so für jeden Stern eine Reihe von Zahlen, welche zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Sternes im Visionsradius verwendet werden konnten. Aus diesen Zahlen haben wir Einzelwerte für die Geschwindigkeit des Sternes im Visionsradius bekommen, die ihrerseits wieder zu einem Mittel vereinigt wurden. Wir geben diese Zahlen bei den einzelnen Sternen nur auf Zehntelkilometer an, obgleich sich aus den ermittelten Werten eine größere Genauigkeit errechnen ließe, da wir überzeugt sind, daß gerade bei den Geschwindigkeiten der Sterne im Visionsradius genauere Angaben als bis auf Zehntelkilometer illusorisch sind. Genügen ja doch schon Bewegungen innerhalb der absorbierenden Atmosphäre des Sternes, um einzelne Linien so weit undeutlich zu machen, daß ein höherer Grad von Genauigkeit wenig Wert hat. Auch die anomale Dispersion wird durch Veränderungen der Intensitätsverteilung innerhalb der Linie in dem Sinne wirken, »Verschiebungen« vorzutäuschen, die nicht auf die Bewegung des Sternes als Ganzen im Visionsradius zurückzuführen sind. Wollte man also die Geschwindigkeit im Visionsradius noch genauer bestimmen, so würde man zwar eventuelle Zahlen-

[1] Was aber die im konkreten Falle von uns erreichte, oben erörterte Meßgenauigkeit betrifft, so kann es für uns nicht zweifelhaft sein, daß sich bei Verwendung einer bessern und präzisern instrumentellen Anordnung, als sie uns zur Verfügung stand, eine noch weitaus größere Genauigkeit wird erzielen lassen.

angaben machen, ohne jedoch über die Grenzen der Genauigkeit dieser Angaben irgend ein zuverlässiges Urteil gewinnen zu können.

In Betreff der Zuverlässigkeit der von uns mit Hilfe der Exner-Haschek'schen Tabellen angegebenen Identifikationen bemerken wir zunächst, daß unsere Messungen der Sternspektren natürlich nur jenen Bereich umfassen, welcher auf den Spektrogrammen mit genügender Schärfe zur Darstellung gelangt war. Es wäre allerdings auch möglich gewesen, über diese Grenze hinaus die Messung fortzusetzen; da jedoch die Bildschärfe an den beiden Enden der untersuchten Spektrogramme nicht mehr eine solche ist, daß eine nach unserer Anschauung zuverlässige Messung daselbst gestattet wäre, so haben wir geglaubt, uns in dieser Richtung Beschränkung auferlegen zu sollen und haben die Messungen für den Zweck der Identifikationen nur innerhalb des Bereiches genügender Schärfe ausgeführt. Für eine genaue Bestimmung der chemischen Konstitution des Sternes ist nun allerdings dieser Bereich viel zu klein.

Umfassen ja doch die Aufnahmen der Sternspektren, die uns zur Verfügung standen, sämtlich nur den meßbaren Bereich von etwa λ 4100 ÅE. bis 4600 ÅE. Eine große Zahl von Elementen hat aber die Hauptemission in anderen Teilen des Spektrums und es läßt sich eine ganze Anzahl von Elementen anführen, die in dieser Gegend nicht einmal schwache Linien aufweisen, wodurch sich von vornherein die Zahl der Identifikationsmöglichkeiten beschränkt. Wir geben im folgenden nach den Tabellen von F. Exner und E. Haschek, für die Funken- und Bogenspektren getrennt, eine Zusammenstellung jener Elemente, welche im oben angegebenen Bereiche nur durch relativ schwache Linien vertreten sein können *(A)*, sowie jener *(B)*, welche hier überhaupt keine Linien aufweisen. Die Spektren der Gase sind dabei nicht berücksichtigt.

Der Schluß auf das Vorhandensein eines Elementes in der Sternatmosphäre wird natürlich um so sicherer, je mehr Linien man im Spektrum nachzuweisen vermag und je geringer die Wahrscheinlichkeit ist, daß innerhalb der Grenzen der

trennenden Kraft des verwendeten Spektrographen an der fraglichen Stelle noch Linien anderer Elemente stehen. Wenn also auch im allgemeinen die Sicherheit der Identifikationen mit der Zahl der festgestellten Linien wächst, so wird doch andrerseits mitunter schon aus dem Vorhandensein von ganz wenig Linien auf das Vorkommen eines Elementes in der Sternatmosphäre geschlossen werden können. —

	Funken	Bogen
A	Ag Al As Au Be Cu Li Si Ta Te Zn	Au Ir Li Mg Pb Si Zn
B	Be B Na Ra Tl	Al As B C Ge K Na Ra Sb Te Tl

Daß man bei den Identifikationen in vielen Fällen nicht mit Sicherheit auf das Vorherrschen jener Verhältnisse wird einen Schluß ziehen können, wie sie aus Laboratoriumsversuchen bekannt sind, erscheint wohl ziemlich selbstverständlich, wenn man bedenkt, daß wir über die Bedingungen des Leuchtens der Sterne eigentlich noch keine sichere Vorstellung haben. Man wird daher aus dem Auftreten von »Funkenlinien« nicht ohneweiters schließen dürfen, daß auf dem Stern analoge physikalische Verhältnisse herrschen, wie im elektrischen Funken und es wäre unrichtig, in einem solchen Falle sich lediglich auf die Identifizierung nach den Tabellen für die

Funkenspektra der Elemente beschränken zu wollen. Andrerseits unterliegt aber wohl auch der Schluß, daß nicht identifizierbare Linien des Spektrums unbedingt Elementen angehören müssen, die uns von der Erde her noch nicht bekannt sind, einigen Bedenken. Es ist ja wohlbekannt, daß es noch nicht gelungen ist, die Linien der vom Spektrum von ζ Puppis her bekannten Linienserie des Wasserstoffspektrums im Laboratorium herzustellen. Und so kann auch die Möglichkeit, durch irgend welche passende Versuchsbedingungen von den bekannten irdischen Elementen außer ihren uns bereits bekannten normalen Spektren noch neue Spektren herzustellen, gewiß nicht von vornherein als ausgeschlossen betrachtet werden. Für die Richtigkeit dieser Annahme besitzen wir gewisse Fingerzeige; wir brauchen nur an das »Bandenspektrum« des Quecksilbers zu denken oder uns zu erinnern, wie außerordentlich das Aussehen der Spektren der Gase im Geißlerrohre je nach Verschiedenheit von Druck und Entladungsart sich verändert. So kennen wir z. B. für Argon drei, für Krypton und Xenon je zwei Linienspektren.

Wenn bei der Ausmessung der uns vorgelegenen Spektrogramme, die wir, wie schon erwähnt, nach den Wellenlängentabellen von F. Exner und E. Haschek identifiziert haben, sich manche Ungleichheiten für Funken und für Bogen ergaben, so wird die Erklärung hiefür zunächst darin zu suchen sein, daß zwischen den Linien der Funkenspektra und jenen der Bogenspektra beträchtliche Intensitätsunterschiede bestehen. Aber auch die physikalischen Verhältnisse, wie sie in der Photosphäre des untersuchten Sternes herrschen, werden in dieser Richtung einen Einfluß ausüben können.

Wenn wir auf spektral-analytischer Grundlage Schlüsse auf physikalische Verhältnisse und chemische Konstitution des untersuchten Sternes ziehen wollen, so können wir dies im allgemeinen nach drei Richtungen hin tun:

1. Schlüsse aus dem Aussehen und Charakter des ganzen Spektrums;

2. Schlüsse auf gewisse spezielle physikalische Verhältnisse, also Aggregatzustand, Druck, Temperatur u. s. w.; endlich

3. Schlüsse auf die elementare Zusammensetzung.

Gegen die erste Art von Schlüssen ist keine wesentliche Einwendung zu erheben, weil sie vorläufig nur eine Klassifikation der Sterne nach ihren Spektraltypen gibt, die eine Einteilung nach allgemeinen Gesichtspunkten ermöglicht. Eine Einheitlichkeit konnte hier leider noch nicht erreicht werden.

Gerade die Tatsache, daß in Beziehung auf die Deutung von Spektren unsere Kenntnisse leider noch recht lückenhaft sind, muß uns auch gegen die zweite Art von Schlüssen bedenklich machen. Diese Bedenken werden noch vermehrt durch den Umstand, daß es bisher noch nicht möglich war, Sternspektrogramme von so scharfer Definition zu erhalten, wie sie für Untersuchungen solcher Art unerläßlich wären.

Bei diesem Anlasse möchten wir, wie es auch vor uns schon wiederholt geschehen ist, mit allem Nachdrucke darauf hinweisen, wie dringend notwendig es ist, die spektrale Forschung durch eingehende Untersuchungen im Laboratorium Hand in Hand mit der spektralen Durchforschung des gestirnten Himmels tunlichst auszugestalten. Änderungen im Aussehen oder im Auftreten von Linien berechtigen uns nicht, Schlüsse auf eine bestimmte physikalische Konstitution des emittierenden Körpers zu ziehen, solange wir nicht genau wissen, unter welchen Verhältnissen irdisch diese Phänomene beobachtet werden.

Wie leicht man in den Schlüssen, die auf dem Auftreten bestimmter Linien beruhen, zu ganz divergenten Resultaten gelangen kann, zeigt die bekannte Streitfrage über das Auftreten der Magnesiumlinie λ 4481 in den Sternspektren. Der Schluß, daß dieses Auftreten auf eine besonders hohe Temperatur der leuchtenden Dämpfe hindeute, basierte darauf, daß irdisch diese Linie nur im Funkenspektrum bekannt war, hingegen nicht im Bogenspektrum. Da man nun allgemein dem Funken eine besonders hohe Temperatur, jedenfalls eine höhere als dem Bogen zuzuschreiben pflegt, so war die erwähnte Folgerung naheliegend. Nun wissen wir aber eigentlich gar nichts Bestimmtes über die Temperatur des elektrischen Funkens und fast ebensowenig über die Temperatur des elektrischen Bogens; keinesfalls aber dürften wir behaupten, die Temperatur des Funkens sei höher, als jene des Bogens,

wenn wir diesen Schluß aus dem verschiedenen Aussehen des spektralen Bildes im Funken und im Bogen ziehen wollten.

Eines ist nämlich sicher und das ist, daß wir es weder im Funken noch im Bogen bezüglich der Emission des leuchtenden Dampfes mit einer reinen Temperaturstrahlung zu tun haben. Übrigens ist es ohneweiters möglich, sowohl mit dem elektrischen Funken die sogenannten »Bogenspektren«, als auch umgekehrt mit dem elektrischen Bogen die »Funkenspektren« herzustellen; man braucht nur im letzteren Falle das Auftreten der Linien in den einzelnen Partien des elektrischen Bogens zu studieren und wird finden, daß nahe an den Elektroden sich das »Funkenspektrum« offenbart. Besonders schön ist dies im ultravioletten Spektrum des Eisens zu sehen, sobald auf der metallischen Elektrode die Schmelzkappe zu einem kugeligen Regulus zusammenschmilzt, von dem dann der Bogen abgeht.[1] Diese Erscheinung ist aber keineswegs auf diesen einzelnen Fall beschränkt; wir können sie vielmehr immer beobachten, selbst dann, wenn man Kohlen mit Lösungen der Metalle imprägniert; man muß nur irgendwie dafür sorgen, daß der Bogen von einer möglichst kleinen Stelle der Elektrode abgeht, dort also möglichst große Stromdichte herrscht.

Nun ist die Stromdichte im elektrischen Funken, besonders wenn man größere Kapazitäten eingeschaltet hat, an den Elektroden eine sehr hohe, und Hand in Hand mit der Erhöhung der Stromdichte geht sicher auch die Entwicklung des leuchtenden Dampfes. Wir sind daher wohl zu dem Schlusse berechtigt, daß das Auftreten der »Funkenlinien« an eine erhöhte Dampfdichte gebunden ist. Beweis dessen, daß durch das Einschalten von Selbstinduktion, welche eine Vergrößerung der Funkendauer und damit eine Verkleinerung der in der Zeiteinheit übergehenden Elektrizitätsmenge bewirkt, umgekehrt auch das Funkenspektrum dem Bogenspektrum ähnlicher wird.[2]

In anderer Art kann man übrigens im elektrischen Funken das Bogenspektrum auch noch erhalten, wenn man die

---

[1] Siehe F. Exner und E. Haschek, Wellenlängentabellen der ultravioletten Bogenspektra der Elemente; p. 4.

[2] Siehe Schenk, Ap. J., XIV, p. 116 ff.

Dampfdichte des untersuchten Stoffes durch Verdünnen mit einem anderen leuchtenden Dampfe heruntersetzt, also bei Verwendung von Legierungen oder Mischungen verschiedener Elemente.

Bei den Versuchen von Hartmann und Eberhard über das Auftreten der Mg-Linie λ 4481 im Bogen[1] mußten infolge der sehr geringen Stromstärke die metallischen Magnesiumelektroden einander außerordentlich nahe gebracht werden; der ungemein kurze Bogen, der in dieser Art erzeugt wurde, bestand demnach in seiner Gänze nur aus den Schichten unmittelbar an den sich fast berührenden Elektroden. Ungeachtet der bei diesen Versuchen verwendeten geringen Stromstärke wurde also doch wegen der kleinen Ansatzfläche und der Kürze des Bogens eine hohe Dichte des leuchtenden Dampfes erzielt, das heißt, es waren bei diesen Versuchen mit einem elektrischen Bogen im Grunde genommen doch jene Bedingungen gegeben, welche im elektrischen Funken herrschen.

Daß es auch unter normalen Versuchsbedingungen möglich ist, die Funkenlinien mit dem Bogen zu erzeugen, beweisen die Versuche von Liveing und Dewar, welche beiden Forscher bei Verwendung von Mg-Stäben und Strom von normaler Stärke die Mg-Linie λ 4481 auch im Bogenspektrum auftreten sahen, da durch die hohe Stromstärke und das reine Material für genügend hohe Dampfdichte gesorgt war, um auch im »mittleren« Spektrum des Bogens die Intensität dieser Linie entsprechend zu steigern.

Auch die »langen« und »kurzen« Linien nach Lockyer werden analog, und zwar einfach dadurch zu erklären sein, daß in den verschiedenen Partien des elektrischen Flammenbogens verschiedene Dichte des leuchtenden Dampfes und daher auch verschiedene Emission der Spektrallinien herrscht. Die Versuchsanordnung Lockyer's bringt es übrigens mit sich, daß wir über die physikalischen Voraussetzungen des Auftretens von Linien einen sicheren Schluß nur bezüglich jener Linien werden ziehen können, welche dem Spektrum der äußersten Dampfhülle des elektrischen Bogens entsprechen, also bezüglich

[1] Astronom. Nachr. Nr. 3858.

der längsten der »enhanced lines«. Nur diese repräsentieren ja ein reines Spektrum dieser Dampfhülle. Bezüglich der kurzen Linien werden hingegen derartige Schlüsse immer unsicher sein, da sich die Linien aller anderen Teilspektren gegenseitig überdecken.

Was die Linienverschiebungen anlangt, welche die Variationen der physikalischen Bedingungen des leuchtenden Dampfes begleiten, so sind sie von so geringer Größe, daß sie für Sternspektra noch innerhalb der Fehlergrenze fallen und wegen der gewiß häufigen Komplexität der Linien auch bei höherer Meßgenauigkeit unauffindbar bleiben werden. Daß aber bei Veränderung der physikalischen Bedingungen des leuchtenden Dampfes Linienverschiebungen tatsächlich vorkommen, ist schon wiederholt und in letzter Zeit wieder von Kent[1] nachgewiesen worden, während J. M. Eder und E. Valenta[2] die Existenz solcher Verschiebungen leugnen. Wir sind nicht in der Lage zu entscheiden, worauf diese Diskrepanz der Angaben zurückzuführen ist.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich aber unseres Erachtens auch der Schluß, daß es bedenklich ist, Wellenlängen, die man in Sternspektren gemessen hat, unmittelbar und ohne weiteres auf irdische Verhältnisse zu übertragen. Solche Messungen wurden nämlich tatsächlich schon in Sternspektren an Linien ausgeführt,[3] die bisher im Laboratorium noch nicht mit einer für eine präzise Wellenlängenbestimmung ausreichenden Schärfe dargestellt werden konnten, in den Spektren gewisser Sterne hingegen mit großer Schärfe auftreten. Gerade der Umstand aber, daß diese Linien in den Sternspektren ein ganz anderes Aussehen zeigen, als beim Laboratoriumsversuche, zwingt zu der Annahme, daß die Bedingungen, unter welchen diese Linien von der Sternatmosphäre emittiert werden, ganz andere sind, als die Versuchsbedingungen im Laboratorium. Wir wissen aber, daß mit der Veränderung der Bedingungen des Leuchtens auch die Wellenlänge des

1 Vergl. Astroph. Journ., 14, p. 201 (1901).

2 J. M. Eder und E. Valenta, Diese Sitzungsber., IIa., Bd. 112 (1903).

3 J. Hartmann, Astroph. Journ. 18 (1903); — J. Scheiner, Publ. des Astroph. Obs. Potsdam (1895); — W. S. Adams, Astroph. Journ. 15 (1900).

emittierten Lichtes sich verändern kann; und wenn auch nach dem bisherigen Stande unserer Kenntnisse diese Variationen nicht besonders groß sind, so erreichen sie doch immerhin einen solchen Betrag, daß sie die Grenzen der erzielbaren Genauigkeit weit übersteigen und durch Versuchsfehler nicht erklärbar sind. Man ist daher unseres Erachtens nicht berechtigt, die durch Ausmessung in Sternspektren erhaltenen Wellenlängen von Linien der erwähnten Art als die für irdische Verhältnisse geltenden normalen Wellenlängen anzusehen, bevor nicht experimentell bewiesen ist, daß die aus den Sternspektren erhaltenen Wellenlängen solcher Linien mit den vom Laboratorium her bekannten identisch sind. Dieser Nachweis wäre aber eben nur dadurch zu erbringen, daß man im Laboratorium die Bedingungen herstellt, unter denen die fraglichen Linien scharf erscheinen, d. h. also jene Bedingungen, die auf dem Sterne herrschen.

Im besonderen ist nun zu den von uns untersuchten Spektren mit allen jenen Beschränkungen, deren Notwendigkeit wir eben dargelegt haben, folgendes zu bemerken.

Das starke Auftreten der Eisen- und Titanlinien und das Vorhandensein der Absorptionslinien aller seltenen Erden läßt darauf schließen, daß die Atmosphären dieser Sterne eine beträchtlich hohe Temperatur besitzen, da ja sonst diese schwer flüchtigen Materialien in der Sternatmosphäre nicht in so bedeutenden Quantitäten vorhanden sein könnten.

Man kann aus dieser Tatsache vielleicht weiter folgern, daß auf diesen Sternen noch ein früher Zustand der Weltenbildung herrsche und daß auch noch keine Sedimentierung, keine ausgesprochene Schichtung nach dem Gewichte, nach größeren Tiefen hin stattgefunden habe. Jedenfalls befinden sich noch alle Elemente in gasförmigem Zustande und es ist noch nicht zur Bildung eines festen Kernes gekommen, der die schwereren Elemente an sich gezogen hat. Dieser Zustand unterscheidet sich also von dem Zustande auf unserer Sonne, wo die seltenen Erden schon mehr gegen den Kern hin gewandert sind.

Der Umstand, daß die leicht flüchtigen Materalien, wie die Alkalien, Erdalkalien u. s. w. von uns entweder nicht oder nur

in wenigen Vertretern aufgefunden wurden, widerspricht dieser Auffassung nicht, sondern erklärt sich daraus, daß in dem gemessenen Spektralbezirk eben nur das Ca bedeutendere Linien aufweist.

Um aus dem spektralen Bilde auf die Konstitution eines Sternes halbwegs sichere Schlüsse ziehen zu können, ist es übrigens notwendig, eine Reihe zeitlich auseinander liegender Spektralaufnahmen desselben Sternes miteinander vergleichen zu können. Denn wenn es auch unwahrscheinlich ist, daß kleine lokale Störungen auf dem Fixsterne den Gesamtcharakter des Spektrums oder auch nur einzelner Linien wesentlich ändern werden, so ist doch klar, daß etwas ausgedehntere Veränderungen in der Dichte, dem Drucke u. s. w., kurz gesagt in allen jenen physikalischen Bedingungen, die auf die Brechungsexponenten der Gase einen Einfluß haben, auch auf das Aussehen und die Stellung der Spektrallinien, sowie auf den Charakter des spektralen Bildes im allgemeinen einen nicht unbedeutenden Einfluß werden ausüben müssen. Dies wird besonders dann der Fall sein, wenn solche Veränderungen und Störungen etwa zufällig in jenen Teilen der Fixsternatmosphäre vor sich gehen, welche die äußerste Hülle des Sternes, also auch dessen visuelle Peripherie bilden. In diesem Falle kann nämlich in den Randstrahlen infolge der anomalen Dispersion eventuell auch noch Licht von der Rückseite des Fixsternes zu uns gelangen, das einen wesentlich anderen Charakter haben kann, als das unter normalen Umständen emittierte Licht. So ist es namentlich möglich, daß durch die anomale Dispersion unter Umständen helle Linien vorgetäuscht werden, welche dann zu den verschiedensten, innerlich nicht genügend motivierten Deutungen Anlaß geben können.

Solange übrigens nicht im Laboratorium alle Bedingungen genau erforscht sind, die auf das Aussehen der Spektrallinien Einfluß haben und solange man nicht genau weiß, welchen Wert die hier in Betracht kommenden Veränderlichen haben müssen, damit die einzelne Spektrallinie ein bestimmtes Aussehen zeige, solange wird man auch aus dem Aussehen der Spektrallinien und aus dem ganzen Charakter

des spektralen Bildes keinen sicheren Schluß auf die Konstitution des Sternes ziehen können.

Mit Sicherheit aber dürfen wir wohl aus der Tatsache der Veränderung des Spektrums darauf schließen, daß auch der Zustand des emittierenden Körpers sich in irgend einer Art verändert haben muß. Wegen der Kleinheit des Fixsternbildes und der dadurch bedingten Unmöglichkeit, ein anderes als das »mittlere« Spektrum des Sternes zu beobachten, können wir natürlich beim Fixsternspektrum nur zeitliche Veränderungen des Sternes als Ganzen wahrnehmen; wir sind aber — im Gegensatze zu Spektren von Himmelskörpern, deren Bilder genügende Flächenausdehnung besitzen, um Detailbeobachtungen zu ermöglichen — nicht im stande, lokal begrenzte Veränderungen, z. B. Strömungen, Wirbel, Schichtungen in einzelnen Teilen der Oberfläche u. s. w. als solche zu konstatieren. Allerdings wird es auch im Falle der spektralen Untersuchung jenes Fixsternes, der vermöge seiner geringen Entfernung von uns Flächenausdehnung zeigt, nämlich unserer Sonne notwendig sein, Schlüsse, die sich auf partielle, von der untersuchten Örtlichkeit abhängige Veränderungen des spektralen Bildes aufbauen, mit großer Vorsicht zu ziehen und zwar eben wegen der Störungen durch anomale Dispersion.

Wie schon erwähnt, läßt sich in Bezug auf die Konstitution der Fixsterne aus deren spektralem Bilde nach dem bisherigen Stand unserer Kenntnisse nur eine Art von Schlüssen mit einiger Sicherheit ableiten und das sind jene Schlüsse, die aus dem Emissionsspektrum auf die chemische Zusammensetzung des untersuchten Sternes gezogen werden können. Freilich werden unter den ungünstigen Verhältnissen, unter denen wir die Spektra der Fixsterne untersuchen müssen, diese Untersuchungen nie vollständig und unbedingt zuverlässig werden können. Die Absorption der Erdatmosphäre[1] verhindert uns ja, im ultravioletten Teile wesentlich weiter, als bis zur Wellen-

[1] Observatorien, die auf günstig gelegenen hohen Bergen erbaut sind, werden unter unvergleichlich bessern atmosphärischen Verhältnissen arbeiten als Sternwarten in der Niederung, namentlich in großen Städten oder in deren unmittelbaren Nähe.

länge 3000 AE. vorzudringen; für eine große Zahl von Elementen findet sich aber die Hauptemission gerade in dem Wellenbereiche unter 3000 AE. Für den Nachweis solcher Elemente in einer Sternatmosphäre ist man dann angewiesen auf die verhältnismäßig schwachen oder wenig zahlreichen Linien in anderen Spektralbezirken, die bei einem etwas geringeren Prozentgehalte der Sternatmosphäre an dem betreffenden Materiale auch vollständig ausbleiben können; Elemente, die nur im äußersten Ultraviolett Linien geben, werden überhaupt nicht nachgewiesen werden können.

Wenn also nach dem Gesagten die Schlüsse auf die chemische Konstitution der Fixsterne auch nicht vollständig sein können, so haben sie doch in diesem ihrem beschränkten Umfange den Vorteil relativer Sicherheit für sich. Allerdings wird man Linien, die man nach den aus dem Laboratorium her bekannten Spektren nicht zu identifizieren vermag, deshalb noch nicht ohneweiters als Linien von irdisch nicht vorkommenden oder noch nicht bekannten Elementen ansprechen dürfen; wir kennen ja Fälle genug, daß ein und dasselbe Element mehrere Spektren aufweisen kann und es ist die Wahrscheinlichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß dies für alle Elemente gilt und daß nur die Versuchsbedingungen noch nicht bekannt sind, unter denen diese Erscheinung auftritt.

Aus dem Aussehen der Spektrallinien Schlüsse auf die physikalische Konstitution der Sternatmosphäre abzuleiten, ist ganz abgesehen von den Störungen durch anomale Dispersion bei den Aufnahmen mit Prismenspektrographen, wie sie uns derzeit allein zur Verfügung stehen, auch aus dem Grunde nicht möglich, weil infolge der geringen auflösenden Kraft dieser Spektrographen fast jede der beobachteten Linien einen Komplex mehrerer Linien darstellt. Betrachtet man nämlich das Sonnenspektrum und berücksichtigt man, daß die von uns untersuchten Sternspektren mit dem Sonnenspektrum große Ähnlichkeit haben, so drängt sich sofort die Vermutung auf, daß reine oder wesentlich reinere Sternspektren, als sie uns vorlagen, auch bezüglich der Zahl der Linien ein ganz ähnliches Aussehen aufweisen würden, wie das Sonnenspektrum. Da sich nun im Rowland'schen Sonnenspektrum im Intervalle von

einer AE. zehn bis fünfzehn Spektrallinien vorfinden, in den von uns untersuchten Sternspektren aber im günstigsten Falle vier Linien innerhalb einer AE. getrennt zu erkennen wären, so darf man schließen, daß in dem Sternspektrum wohl fast jede der gemessenen Linien ein Komplex einer ganzen Reihe einzelner Linien sein wird.

Demgegenüber wird man gewiß nicht einwenden dürfen, daß ja auch die großen Rowland'schen Gitter noch nicht die volle Definition der Spektrallinien geben, wie die Versuche nach der Interferenzmethode zeigen, nach denen eine große Zahl von bisher für einfach angesehenen Linien sich als komplex ergeben hat. Denn die Definition der Rowland'schen Gitter genügt weitaus für praktische Zwecke und Schwierigkeiten der Identifikation werden sich aus diesem Grunde wohl nur in den allerseltensten Fällen ergeben. Auch Veränderungen im Aussehen der Spektrallinien werden sich schon bei der Definition der Rowland'schen Gitter ganz gut erkennen lassen, auch wenn diese Veränderungen etwa von Variationen in der Intensität der komponierenden Linien herrühren sollten. Schließlich kann man ja, solange man es mit einem einzelnen Elemente zu tun hat, oder mit Mischungen von Elementen solcher Art, daß die Spektrallinien nicht allzunahe stehen, die Veränderungen, welche die Linie unter verschiedenen Versuchsbedingungen erleidet, mit ausreichender Genauigkeit studieren.

Wir geben im folgenden die ausführlichen Tabellen der Linien, wie wir sie in den Sternspektren gemessen haben. Jede Zahl ist ein Mittelwert aus fünf Ablesungen, die, wie schon erwähnt, gewöhnlich auf Zehntel, bei besonders scharfen Linien auf Zwanzigstel der Ångström'schen Einheit gemacht wurden. Die Zahlen sind auf zwei Dezimalen gegeben, von denen wir der zweiten nur den Wert einer Korrekturziffer beimessen, obwohl sich aus der Fehlerrechnung eine Zuverlässigkeit bis auf etwa drei Einheiten der zweiten Dezimale ergäbe. Gewonnen wurden die Zahlen nach den Eisenlinien des Vergleichspektrums, für welche Rowland's Zahlen aus dem Sonnenspektrum genommen wurden, was bei der hier angestrebten

Genauigkeitsgrenze keinen merkbaren Fehler involviert. Die nächste Kolonne unter *i* gibt die Intensitätsschätzungen der Sternlinien, worin höhere Zahlen höhere Intensität des Absorptionsstreifens bedeuten. Diese Schätzungen erheben keinen Anspruch auf besondere Zuverlässigkeit und sind nur beiläufig gemacht. Auch dürfte sich während der Messungen der Maßstab verändert haben, so daß in verschiedenen Spektren gleichen Zahlen verschiedene Helligkeiten entsprechen können. Übrigens haben ja die Angaben der Intensitäten nur orientierenden Wert, da man bei so geringer Reinheit des Spektrums nicht die Intensität einer einzelnen Linie bestimmt, sondern die eines ganzen Komplexes. Unter *F* und *B* sind die Identifikationen nach den Wellenlängentabellen von F. Exner und E. Haschek für Funken-, respektive Bogenspektren gegeben, und zwar das Symbol des Elementes, dem die betreffende Linie zugewiesen werden konnte und die Intensität, welche sie bei den Messungen im Laboratorium aufwies. Diese Kolonnen geben die möglichen, die letzte Kolonne (»Hauptidentifikationen«) die wahrscheinlichen Identifikationen. Bemerkt sei ausdrücklich, daß wir beim Vergleiche unserer Messungen in den Sternspektren mit den Spektren der Edelgase keine Koinzidenzen auffinden konnten, also die Anwesenheit von Argon, Helium, Krypton, Neon und Xenon in den Atmosphären der Sterne aus den uns vorliegenden Spektralteilen nicht nachweisen konnten. Es beweist dies natürlich nichts für die tatsächliche Abwesenheit dieser Stoffe.

γ Cygni.

Das ausgemessene Spektrogramm ist ein Diapositiv nach einer Aufnahme des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam genommen von G. Eberhard mit Spektrograph IV, 1902, November 8·2833 M. E. Z. Da uns von Potsdam nur dieses eine Spektrogramm zur Verfügung stand, so wäre die Anfertigung einer eigenen, der Dispersion dieses Spektrums angepaßten Skala umso unökonomischer gewesen, als das Spektrogramm nicht im Originale, sondern nur in Reproduktion (zwei Diapositive) vorlag. Wir lasen daher die Stellung der Linien an einer Millimeterskala ab und rechneten dann unter

Zugrundelegung der Hartmann'schen Formel und mit Hilfe einer Rechenmaschine die so erhaltenen Werte auf Wellenlängen um.

Es ist dies wesentlich dieselbe Arbeit, die man bei einer Ausmessung der Spektren unter dem Mikroskop zu leisten hat, doch ist die Ablesung unvergleichlich rascher und weniger anstrengend. Wir benötigten für die fünfmalige Ablesung des Spektrums etwa $2^1/_2$ Stunden. Trotz der ausgiebigsten Benützung einer Rechenmaschine erforderte die Berechnung der Wellenlängen dann noch etwa 15 Tage zu je mindestens 3 Arbeitsstunden, also beiläufig die zwanzigfache Zeit, die zur Ablesung nötig war. Aus diesen Daten kann man sich wohl ein Bild von den Vorteilen der objektiven Methode machen, bei welcher die Ablesungen an der Skala direkt die Wellenlängen geben.

In Betreff der großen Anzahl von Identifikationen aus der Gruppe der seltenen Erden verweisen wir auf das oben Gesagte.

Die 137 von uns gemessenen Linien sind keineswegs sämtliche Linien, die wir bei den einzelnen Messungen als vorhanden konstatieren konnten. Der Umstand, daß manche Linien äußerst schwach und unbestimmt sind, brachte es mit sich, daß sie nicht bei allen Lesungen auch tatsächlich gemessen wurden. Es fehlen also in einigen Lesungen einzelne Linien; diese haben wir bei der Mittelbildung nicht weiter berücksichtigt. Diese Auslassungen wären kaum notwendig gewesen, wenn nicht der Umstand, daß der von uns verwendete Apparat für Aufnahmen von ganz anderer Art und Größe gebaut ist, kleine Ungleichheiten bei der Einstellung und Ablesung der verschiedenen Messungen mit sich gebracht hätte. Wir hielten uns selbstverständlich nicht für berechtigt, die nur einmal gemessenen Linien zu Zwecken der Identifikation heranzuziehen. Übrigens ist dieser Überschuß an Linien für die Schlüsse auf die Zusammensetzung des Sternes nur von geringem Einflusse, weil es sich nur um schwache und um schlecht definierte Linien handelt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß wir auf dem Originalnegativ viel mehr Linien hätten präzise ablesen können, da ja bei jedem photographischen Übertragungsprozesse eine Reihe von Details verloren geht.

Über die Unsicherheit der einzelnen Ablesungen haben wir schon oben gesprochen.

Zur Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung benützten wir die Eisenlinien λ 4325·94, 4383·72 und 4404·95.

Die Ausmessung dieser Verschiebung ergab für die Geschwindigkeit im Visionsradius den Wert von +21·1 *km* pro Sekunde relativ zur Erde für die oben angegebenen Daten der Aufnahme.

λ	*i*	*F*	*B*	Haupt-Identifikat.
4250·26	3	Fe 4	Fe 10	Fe
50·89	3	Fe 6	Fe 15	Fe
51·58	1	V 1		
52·74	1	Yb 3	Yb 1, Nd 4?	**Yb**
54·42	2	Cr 50	Cr 50 u.	Cr
56·17	1+br.	Nb 1, Ho 1, Cr 1+	Ti 3	
58·29	3	Zr 8	Zr 3	Zr
60·46	4	Fe 10	Fe 20	Fe
62·07	2	Nd 4	Nd 3	Nd
67·12	1+	C 10+br., Fe 1	Gd 3	C
67·97	1+	Fe 1		
69·35	1	Pr 3	Pr 2	**Pr**
71·37	4	Fe 4	Fe 15	Fe
71·98	4	Fe 10, Pr 3	Pr 3, Fe 30	Fe, Pr
73·54	2	Th 4	Th 4, Li 5+br., Rh 4	Th
74·93	2	Cr 30, Fe 1	Cr 50 u., Zr 3	Cr
75·77	1	La 4	La 3	La
78·35	1	Pr 3	Pr 1+, Ti 3	**Pr**
82·56	2	Fe 3, Zr 10, Pr 5, U 3	Fe 10, Pr 6	Fe, Pr
83·15	1	V 3, Ca 20	Ca 50	Ca
84·43	1	Cr 2	Ru 5	
85·61	1	Fe 1, Sa 4	Sa 4	Sa
88·05	3	V 3+r., U 3	U 2, Ni 3	
94·25	3	Ti 10, Fe 4	Ti 2, Fe 15, Os 10	Fe
95·02	2	Sc 5 r.	Zr 4	

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4296·79	3	Ce 8		
98·19	1	Fe 1, V 4	V 3	V
99·38	2	Ti 3, Fe 4	Ti 4, Fe 15, Ca 30, Ce 3	Ti, Fe
4300·35	3	Ti 8	Ti 3	Ti
01·21	3	Nb 5, Ti 3	Ti 15	Ti
03·51	3		Gd 1+	
05·84	3	Sr 100 r., Sc 6	Sc 8	Sc
08·01	4	Ca 20, Ti 8, Fe 15	Ca 30, Nd 3, Fe 30	Ca, Fe
09·78	2+	Y 20	Y 20, Nb 3	Y
13·07	2	Ti 8	Ti 2	Ti
14·36	3	Sc 30	Sc 30	Sc
17·08	2+ br.	Yb 5 r.	Yb 1	Yb
18·95	2+	Ti 3, Ca 30, Sa 8	Ti 10, Ca 50, V 4, Ho 3, Sa 10	Ti, Ca, Sa
21·04	3	Sc 20	Sc 20	Sc
25·25	2	Sc 20	Sc 20, Ru 4, Cr 3, Ho 3	Sc
25·97	3	Fe 15	Fe 30	Fe
27·13	1+	Ti 1	Ru 4, Pt 5	
28·11	1+	Nd 5	Nd 6	Nd
30·74	2+ br.	Eu 3	Gd 3	
34·03	1+	La 15	La 20	La
37·35	2	Fe 2	Fe 6, Ru 3	Fe
38·17	3	Ti 10	Ti 2, Sr 5+ r.	Ti
40·73	4+ br.			H
44·55	2	Pr 10, Cr 10	Pr 3+, Cr 10	Pr, Cr
51·12	2	Cr 4, Fe 1+	Cr 8	Cr
51·95	2	Cr 10	Cr 15	Cr
52·87	1	Ce 3, Fe 2	Ce 3, Fe 4	Ce, Fe
54·82	1+	Sc 3	Sc 3	Sc
58·81	1+	Hg 200, Y 8 r.		Hg, Y
59·91	1	Cr 6, Pr 4	Cr 8, Pr 3+, Zr 6	Cr, Pr
62·28	<1	Sa 5	Sa 5, U 4	Sa
64·89	<1	La 3	La 3, Ce 4, Wo 3	La

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4368·02	1			
69·75	1	Ti 2+		
71·36	1	Zr 15, Cr 8	Cr 10	Cr
74·94	4	Sc 20, Ti 3, Rh 20, Y 100 u.	Rh 30	Rh, Sc, Y
76·19	1	Fe 2	Fe 5	Fe
79·99	1	Cr 1	Zr 6	
83·77	4	Fe 20	Fe 100	Fe
85·56	2	La 3, Ru 4	La 2, Ru 4	Ru, La
86·97	2+ d.	Pb 500	Ce 6	
88·54	<1	Er 3, Fe 1+	Nb 3	
92·04	<1	Pt 3	Pt 5	Pt
94·34	1			
95·33	2	Ti 20, Pr 3, V 10 u.	Ti 10, Pr 2, V 15, Zr 3	Ti, V, Pr
96·14	1+	Ti 2	Pr 4	
98·36	2		Y 20, Ce 3	
99·99	2	Ti 6	Ti 2	Ti
4400·68	2	Sc 20	Sc 20, V 10	Sc
01·70	1+	Ni 15 r.	Ni 15	Ni
03·47	1+	Pr 3	Pr 1, Zr 3	Pr
04·98	3	Fe 15	Fe 50, Ti 3	Fe
07·85	1	Fe 1+	V 10	
08·56	1	Gd 4, Fe 1+, V 15 u.	V 20, Fe 3	V, Fe
09·51	1	Sa 3, Ho 3	Sa 4, (Er-Ho) 8	Sa, Ho
11·00	1+			
12·17	1	Ti 5		
13·77	1			
15·45	4	Fe 10	Fe 20	Fe
17·01	1		Ce 2	
17·98	1	Ti 6		
20·80	1		Sa 8, Nb 8	
22·76	1+	Fe 1, Y 10	Y 10	Y
24·45	1	Sa 10	Sa 20, Cr 3	Sa
25·61	1	Ca 20	Ca 100	Ca

λ	*i*	*F*	*B*	Haupt-Identifikat.
4427·55	2	Fe 1, V 4	Fe 5, V 3	V, Fe
30·21	<1	Cr 1	La 20	
30·76	1	Fe 1	Fe 3	Fe
33·20	<1		Th 3	
35·17	1	Ca 20	Ca 100, Mo 10	Ca
35·77	1	Eu 30, Ca 15	Eu 50, Ca 50	Eu, Ca
41·92	1	V 8	V 10, Sa 3	V
43·37	1+	Zr 15, Fe 2	Fe 3	Fe
44·13	1+	Ti 4		
44·74	1	Ti 1	Ru 3	
47·91	1	Fe 2	Fe 4	Fe
50·70	2	Ti 4	Ti 1	Ti
51·77	<1	Nd 10, Mn 10	Nd 10, Mn 5	Nd, Mn
54·96	2	Ca 30 u.	Ca 200 u., Zr 4	Ca
55·95	<1	Mn 3	Mn 3, Ca 20	Mn, Ca
57·67	<1	Ti 5, V 3, Zr 5, Mn 4	Ti 15, V 4, Mn 4	Ti, Mn, V
59·31	1	Fe 2, Ni 5	Fe 4, Er 3, Ni 3	Ni, Fe
61·74	2	Fe 1	Fe 4	Fe
64·74	1	Ti 2		
66·74	1	Fe 2, Gd 4	Fe 4, Gd 4	Gd, Fe
68·73	2	Ti 15	Ti 4, Pr 10	Ti
69·42	1	Nd 3	Nd 3	Nd
71·11	1	Nd 3	Nd 2, Sa 3	Nd
73·06	1	Mn 3	Mn 3, Sa 5	Mn
76·21	1	Fe 2	Fe 5, Ag 3, Gd 4	Fe
81·37	2	Mg 50+br.	Tm 3, Ti 8	Mg
82·47	1	Fe 2	Fe 5	Fe
84·33	1	Wo 4	Wo 10	Wo
85·91	<1		Fe 1	
87·17	<1		Ce 5, Mo 4	
88·46	1	Au 4 r., Ti 6	Ti 1	Ti
89·49	1			
93·83	1	Ba 1+br.	Ba 6	
94·78	1	Fe 2, Zr 15	Fe 6	Fe

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4497·13	1	Cr 10, V 3, Zr 15	Cr 10, Zr 3	Cr, Zr
4501·56	2	Ti 15	Ti 4, Mo 4	Ti
07·04	<1	Cr 1		
08·53	1		Nb 3	
15·64	2	Cr 1		
18·62	1		Yb 10	
20·43	2	V 2		
22·93	3	Ti 4	Ti 5, Eu 20, Gd 3	Ti
25·26	1	Ba 100 r.	Ba 20	Ba
28·86	1	Fe 3	Fe 10, Rh 10	Fe
29·77	1	Al 7+	V 3	
31·39	1	Fe 1	Fe 3	Fe
34·38	1	Pr 4	Pr 5 d.	Pr

α Canis minoris.

Das von uns untersuchte Spektrogramm ist ein Originalnegativ des Lick-Observatory, aufgenommen mit dem Mills-Spektrograph, 1899, September 26·32, Mount Hamilton.

Die Aufnahme zeigt im blauen Teil eine starke Intensität. Da dieses Spektrogramm ein besonders schönes Vergleichsspektrum (Fe) besitzt, so haben wir es benützt, um danach mittels der früher angegebenen Methode die Skala zu rechnen, welche wir für die Ausmessung der drei Negative des Lick-Observatory verwendet haben.

Wie bei den andern Spektrogrammen, so zeigt sich auch hier ein Unscharfwerden nach den beiden Enden hin, das von der Bildkrümmung herrührt. Die Zahl der gemessenen Linien bei diesen Spektrogrammen betrug 195. Die Bestimmung der Wellenlängen wurde auf Grund einer fünfmaligen Ablesung des Spektrums durchgeführt. Eine genaue Revision der identifizierten Linien hat ergeben, daß für einzelne Elemente, z. B. Eisen, die Zahl der Identifikationen nach dem Bogenspektrum größer ist als nach dem Funkenspektrum,

während für andre Elemente, z. B. die seltenen Erden, die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen. Es scheint dies darauf hinzudeuten, daß in der Atmosphäre des Sternes für die Absorption des Eisendampfes die Verhältnisse, wie sie im elektrischen Flammenbogen herrschen, zur Geltung kommen, während gleichzeitig für andre Elemente, z. B. für die seltenen Erden, die Emissions- und Absorptionsverhältnisse dem Zustande des leuchtenden Dampfes im elektrischen Funken näher zu liegen scheinen. Als Erklärung hiefür könnte man eventuell mit jenen Einschränkungen, welche wir oben erörtert haben, eine Schichtung des Dampfes in der Sternatmosphäre annehmen und, was mit aller Reserve ausgesprochen sei, die Dämpfe der Elemente aus der Gruppe der seltenen Erden in tiefern Schichten vermuten, als etwa die Dämpfe des Eisens.

Alle bisher bekannten Laboratoriumsversuche über den Unterschied zwischen Bogen- und Funkenspektren lassen sich nämlich, wie weiter oben näher ausgeführt ist, dahin deuten, daß dieser Unterschied zum großen Teil auf verschiedener Dichte des leuchtenden Dampfes beruht und daß die durchschnittliche Dampfdichte im Funken höher ist als im Bogen. Da nun die Sternatmosphäre gegen das Gravitationszentrum hin sicherlich an Dichte zunehmen wird, so möchte man wohl versucht sein, anzunehmen, daß die seltenen Elemente sich eben schon in den tiefern Schichten angehäuft haben, während die höhern Dampfschichten vorwiegend von andern Elementen gebildet werden. Dieser Schluß wird sich übrigens schon von vornherein auf die Unterschiede des Gewichtes gründen lassen, die eine Annäherung der schwererm Elemente an das Gravitationszentrum bewirken müssen. Hiedurch werden selbstverständlich jene Folgerungen nicht berührt, die uns weiter oben dazu geführt haben, auf den von uns untersuchten Sternen ein frühes Stadium der Weltenbildung zu vermuten.

Zur Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung benützten wir die Eisenlinien: $\lambda = 4250 \cdot 29$, $4294 \cdot 95$, $4308 \cdot 10$, $4325 \cdot 97$, $4383 \cdot 73$, $4404 \cdot 95$.

Die Ausmessung dieser Verschiebungen ergab für die Geschwindigkeit im Visionsradius den Wert von $-34 \cdot 4$ *km*

pro Sekunde relativ zur Erde für die angegebenen Daten der Aufnahme.

λ	*i*	*F*	*B*	Haupt-Identifikat.
4126·15	1+br.			
27·86	1+br.	Cr 1	Ce 2, Gd 1+	
32·23	1+br.	Fe 4, V 10	Fe 15, U 2	Fe
34·46	1+br.	Zr 2		
37·10	1+br.	Fe 1	Ce 1+, Fe 2, Mo 1	
43·63	1+br.	Fe 3	Fe 5	Fe
44·01	1+br.	Fe 5	Fe 15	Fe
49·40	1+br.	Zr 30	Zr 6, Pr 1	Zr
52·25	1+br.	La 10, Ce 9, Fe 1+ br.	La 6, Ce 4, Nb 2+	La, Ce
54·16	1+	Fe 2+, Pr 2	Fe 4, U 4, Pr 2	Fe
54·82	1+		Wo 3	
56·73	1+br.	Pr 3, Th 3	Pr 3, U 4	Pr
57·79	1			
59·04	1+br.	Fe 1+, Zr 1	Os 3	
61·56	1+br.	Cr 3	Cr 1+, Nd 1+	
63·75	1+br.	Ce 4, Nb 10, Cr 4, Th 3	Nb 20, Ce 2	Nb
67·36	1+br.	Zr 1+	Gd 1+, Ti 1	
71·08	1	Pd 4, Fe 1	Fe 2	
72·06	1	Pr 4, Ti 15	Pr 6, Ti 1	Pr
72·74	1	Ir 3	Os 8	
73·61	1	Ti 3? Fe 1+ br.		
76·76	1	Mn 4, Ce 3	Fe 2, Mn 2	
77·70	1	Y 50, Fe 1+, Pr 1, Zr 1+	Y 30, La 2? Pr 1, V 1	Y
81·89	1	Fe 4	Fe 4	Fe
84·20	>1+		Os 3?	
87·16	1	Fe 4	Fe 8, U 2	Fe
87·89	1	Fe 4, V 1+	Fe 10, Tm 10	Fe
88·70	1+r.			
91·58	1	Fe 3	Fe 5	Fe
95·53	1	Fe 1+	Fe 2	

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4198·42	1	Fe 3	Fe 3	Fe
99·20	1	Fe 5	Fe 6, Zr 6	Fe
4201·02	1	V 1	V 1, Wo 1	
02·22	1	Fe 6	Fe 10, Os 5, U 1	Fe
04·05	1		Fe 3	
05·19	1+	Eu 50, V 10	Eu 100	Eu
06·80	1+	Sa 3, Pr 15, V 1+	Sa 4, Pr 20, V 1	Sa, Pr
08·74	1+	Fe 1+	Fe 1	
10·45	1	Fe 3, Sa 3	Fe 4, Sa 8	Fe, Sa
12·03	1	Pr 3, Os 3 r.	Os 30, Zr 3, Pr 1	Os, Pr
13·80	1	Fe 1	Fe 1	
15·62	2	Wo 8, Sr 500 u., Rb 10 u., Pr 1	Sr 100 u., Rb 200 u., Ce 1, Nb 1	Sr, Rb
16·28	1	Fe 1	Fe 3	Fe
17·62	1+	La 10	La 4, Ce 3	La
19·47	1	Wo 3, Fe 3	Wo 3, Fe 3, Mo 2	Wo, Fe
20·32	1	Nd 3?, Pr 1, Zr 1	Sa 3, Nd 3, Pr 1	Nd, Pr
22·36	1	Fe 2	Ho 3, Fe 4	Fe
24·36	1	Fe 1, V 2, Zr 2	Fe 3, Va 3, Sa 1	Fe, V
25·51	1	V 6, Sa 4, Pr 15	Sa 10, Pr 20 r., U 1+	Sa, Pr
26·80	3	Ge 50 r., Ca 100 u.	Ca 1000 u.	Ca
27·54	1	Fe 4	Fe 6	Fe
29·63	>1+		Fe 1, Nd 2	
33·31	1	V 3, Pr 3, Fe 2+	Pr 3, Ce 1, Nd 1	Pr
33·77	1	Fe 3	Fe 6	Fe
35·36	1	Nd 4, Mn 20	Nd 4, Mn 10, Er 1?	Nd, Mn
36·12	2	Y 5, Fe 4	Y 10, Fe 10	Y, Fe
37·26	1		Mo 3, Fe 1, Os 1	
38·05	1	Ti 2	Ti 4	Ti
38·92	1	Gd 4	Gd 4, Fe 3	Gd
39·89	1	Mn 5, Fe 1+	Mn 3, Fe 2	Mn
40·51	1	Zr 3, Ca 1+, V 2	Zr 8 r., Mo 3, Ca 3+, Fe 1, Nb 1, V 1	Zr
42·56	1	Cr 5	Cr 1+	
45·38	1	Pb 500	Fe 2, Sa 2	

λ	*i*	*F*	*B*	Haupt-Identifikat.
4246·12	1	Ce 5, Zr 1+	Ce 5, Ho 3, Mo 4	Ce
46·91	1	Ce 3, Ru 3, Sc 100, V 1	Ce 3, Ru 4, Sc 50	Ce, Ru. Sc
47·53	1	Nd 8, V 1+ br.	Nd 10, Fe 3, Sa 1	Nd
50·23	2	La 6, Fe 4	Fe 10	Fe
50·93	2	Mo 10, Fe 6, Zr 1	Fe 15	Fe
54·47	1	Cr 50, Fe 1	Cr 50 u., Nd 1?, Ru 1	Cr
58·34	1	Zr 8		
60·20	1		Ru 3, Gd 3	
60·68	2	Fe 10 r.	Fe 20	Fe
62·01	1	Nd 4	Nd 3	Nd
63·18	1			
64·22	1		Zr 1	
65·41	1	V 3	V 3, Fe 1, Ti 1	V
67·05	1	C 10+ br., Fe 1	Gd 3, Cr 1	
67·92	1	Fe 1, Pr 2		
69·04	1+ r.		U 1	
71·23	2	Fe 4, Cr 1	Fe 15, Cr 2	Fe
71·91	2	Pr 3, Fe 10	Fe 30, Pr 3	Fe, Pr
73·46	1	Th 4, Ti 1	Th 4, Li 5+br., Nb 1, Ti 1	Th, Ti
74·91	1	Cr 30, V 1, Fe 1, Zr 1	Cr 50 u., U 1, Zr 3	Cr
75·66	1	Ce 1	Ce 2+	
78·26	1	Pr 3	Pr 1+, U 1+	
81·13	1	Sa 3+	Sa 5, Ce 1+, Nd 1	Sa
82·51	1	Zr 10, Fe 3	Fe 10	Fe
83·12	1	Ca 20, V 3	Ca 50	Ca
84·31	1	V 10	V 8	V
85·58	1	Ce 3, Sa 4, Fe 1, Pr 2	Sa 4, Ce 2, Fe 1, Pr 1	Sa, Ce, Pr
86·11	1	Ti 4	Ti 10, Nb 1, Os 3	Ti
87·04	1	La 20, U 3, Nb 3	La 6, Nb 4	La, Nb
88·08	2	U 3, Ti 2	Ni 3, Os 1, Ti 1	
89·51	1	Ca 20, Zr 2	Ca 50	Ca
90·40	1	Ti 10, Zr 1	Mo 4+, Nb 1, Ti 2, Zr 1	

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4291·07	1	Ti 2	Fe 1, U 1	
91·68	1	Ge 3+ br.	Fe 2	
92·29	1	Mo 4, Sa 3	Sa 4, Mo 10, Wo 1	Mo, Sa
94·28	1	Ti 10, Fe 4	Fe 15, Ti 2	Fe, Ti
95·00	1	Sc 5 r., Ru 3	Sc 5, Ru 4, Zr 4	Sc, Ru
95·34	1	Pr 3	Zr 1	
96·77	1		Cr 1, Mo 2	
98·22	1	V 4, Fe 1	V 3, Fe 1	V
99·29	2	Ca 20, Pr 4	Ca 30, Sa 1	Ca
4300·21	1	Ti 8	Ti 3, Nb 1	Ti
02·06	1	Zr 5, Ti 5	Mo 1+, Ti 2	
02·76	1	Ca 50, Zr 1, Cr 1	Ca 100, Zr 1	Ca
03·36	1	Fe 1, Ce 1		
05·59	1	V 3, Fe 1	Sr 20, Cr 2, Fe 1, Nd 1, V 1	
07·02	1		Wo 3	
08·07	3	Ca 20, Ti 8, Fe 15	Ca 30, Nd 3, Fe 30, Ti 4	Ca, Fe, Ti
09·62	1+	V 2	Nd 1	
13·05	2	Ti 8, V 1+	Nb 1, Sa 1, Ti 2	
14·31	1	Sc 30, V 1+	Sc 30	Sc
15·24	1	Ti 5, Fe 3	Fe 6, Mo 1	Fe
18·88	1	Ti 3, Ca 30, V 1+	Ca 50, Ti 10, V 4	Ca, Ti
21·01	2	Sc 20, Pr 1	Sc 20	Sc
25·27	2	Sc 20, Ti 3, Cr 2	Sc 20, Ru 4, Cr 3	Sc
25·99	2	Nd 5, Fe 15	Nd 15, Fe 30	Nd, Fe
30·86	1	Eu 3, Gd 4, Ti 3	Ni 1	
31·87	1	V 1+	Ni 3, Ce 1	
37·25	1	Fe 2	Fe 6	Fe
38·10	1	Ti 10	Nb 1, Ti 2	Ti
39·70	1+		Cr 5, Zr 1	
40·65	5+		Zr 1+	H
41·57	1	Ti 3, Pr 1	Mo 3, Cr 1, Pr 1	
44·62	1+	Cr 10	Pr 3+, Cr 10	Cr
51·10	1			
52·03	2	Cr 10, Pr 8	Cr 15, Pr 10	Cr, Pr

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4352·95	1	Fe 2	Ce 3, Fe 4	Fe
58·82	1+	Hg 200, Y 8 r.	Zr 3, Sc 1	
59·82	1+	Cr 6	Cr 8, Mo 2, Ni 2	Cr
67·83	1	Ti 6		
69·97	1	Gd 4, Fe 2	Ti 3, Gd 5, Fe 3	Gd, Fe
71·56	1	V 1+	Cr 10	
74·63	1	Pr 3, Sc 20	Sc 20	Sc
75·14	1	Y 100 u., Sa 3, Nd 6 r.	Y 50, Sa 3, Nd 6, Mo 10, Mn 1	Y, Sa, Nd
76·18	1	Fe 2?, V 1	Fe 5, Gd 1	Fe
83·82	2	Fe 20	Fe 100	Fe
85·07	1	Sc 4, Pr 3, Cr 5	Sc 3, Wo 3, Cr 8, Nb 2, Pr 1+	Sc, Cr
85·63	1	Fe 1+	Y 1	
87·08	1	Ti 5, Pb 500		
91·19	1	Gd 4, Ti 2	Gd 3, Ru 3, Fe 1	Gd
94·26	1	Ti 2	Y 1	
95·26	1	Ti 20, Pr 3	Ti 10, Nb 1, Wo 1	Ti
96·03	1+	Pr 3, Ti 2	Ti 1	
98·20	1	Y 15	Y 20, Nd 1	Y
99·91	1		Ti 2	
4400·62	1	Sc 20	Sc 20	Sc
01·64	1			
03·51	1+	Pr 3, Sa 3, Ce 1	Zr 3, Sa 4, Wo 1	Sa
04·97	2	Fe 15, Zr 2	Fe 50	Fe
07·87	1	Fe 1+, Ti 1	Fe 2	
08·63	1	V 15 u.	Fe 3, V 20	V
15·30	2	Fe 10	Fe 20, Wo 1	Fe
16·98	1			
17·93	1	Ti 6		
18·49	1	Ti 2		
22·02	1	Ti 2+	Ti 3, Wo 2	Ti
22·71	1	V 1, Fe 1	Cr 2+d, Fe 2, Wo 1	
25·61	1	Ca 20	Ca 100	Ca
27·47	1	V 4, Fe 2, Zr 2	V 3, Fe 5, Zr 3	V

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4430·29	1		U 1	
30·78	1		Fe 3, Gd 5, Cr 2+	
35·15	1	Mo 4, Ca 20, Pr 1+	Ca 100 u., Mo 10	Ca, Mo
35·76	1	Eu 30, Ca 15	Eu 50, Ca 50	Eu, Ca
42·50	1	Fe 2	Fe 4, Sa 2	Fe
43·99	1	Ti 15	Ti 4, Nb 1	Ti
47·84	1	Fe 2	Fe 4	Fe
50·58	1	Ti 4		
51·71	1	Nd 10, Mn 10	Mn 5, Nd 10, Er 1+? U 1+	Mn, Nd
54·56	1	Fe 1	Fe 2, Pr 2	
54·95	1	Ca 30 u.	Zr 4, Ca 200 u., Mo 1, Nb 2+d, Pr 2	Ca
56·04	1	Mn 3, Ca 15, V 1	Mn 3, Ca 20, Nd 1, Pr 1	Mn, Ca
59·31	2	Ni 5, Fe 2	Ni 3, Fe 4, Wo 1+	Ni, Fe
61·83	1+	Fe 1	Fe 4	Fe
64·66	1+	Ti 2	Mo 1, Ti 1	
66·70	1	Gd 4, Fe 2	Gd 4, Fe 4	Gd, Fe
68·72	1	Ti 15	Ti 4	Ti
69·55	1		Fe 2	
73·10	1	Mn 3?, Sa 4?, Pr 1	Mn 3?, Sa 5? Pr 1	
76·21	1	Fe 2	Fe 5, Ag 3	Fe
81·32	2	Mg 50+ br., Cr 1+		Mg
82·37	1	Fe 2	Fe 5	Fe
84·24	1			
85·75	1+	Pr 2	Ce 1, Pr 1+, Sa 1+	
94·74	1	Zr 15, Fe 2	Fe 6, Nb 2	Fe
4501·41	>1	Ti 15, V 2	Ti 4, Mo 4	Ti
08·46	1+	Fe 1+, Ti 1+	Ti 1+	
15·55	1	U 4, Fe 1+ br.	Cr 1	
22·73	1	Eu 15, Fe 1+	Eu 20, Nb 1, Sa 1	Eu
28·75	1	V 5, Fe 3	Mo 3+, Fe 10	Fe
34·25	1	Co 4, Ti 6	Co 3, Ti 3, Pr 5 d.	Co, Ti
35·94	1	Zr 3	Zr 10, Cr 6	Zr
49·59	3	Fe 1+	Cr 2, Mo 1, Ru 1?	

ε Leonis.

Das untersuchte Spektrogramm ist ein Originalnegativ des Lick-Observatory, aufgenommen mit dem Mills-Spektrograph, 1900, Mai 28·4028, Mount Hamilton.

Das Spektrum dieses Sternes ist das linienreichste unter den vier Spektren, die uns zur Verfügung standen. In dem untersuchten Wellenlängenbereiche haben wir 265 Linien gemessen. In Bezug auf Bildkrümmung und Unschärfe der Enden des Spektrums gilt im allgemeinen dasselbe wie beim Spektrogramm von α Canis minoris. Während bei α Canis minoris ein merklicher Unterschied der Identifikationen nach dem Funken- und nach dem Bogenspektrum sich ergab, konnte bei ε Leonis ein derartiger hervortretender Unterschied nicht konstatiert werden. Man möchte also etwa aus dieser Tatsache schließen, daß dieser Stern in einem noch frühern Stadium der Entwicklung sich befinde, in welchem noch keinerlei nachweisbare Schichtung der Stoffe nach bestimmten, physikalisch verschieden qualifizierten Elementengruppen stattgefunden hat.

Zur Bestimmung der Doppler'schen Verschiebung benützten wir die Eisenlinien:

$$\lambda = 4308 \cdot 10,\ 4315 \cdot 25,\ 4325 \cdot 97,\ 4383 \cdot 73,\ 4404 \cdot 95,\ 4415 \cdot 30.$$

Die Ausmessung dieser Verschiebungen ergab für die Geschwindigkeit im Visionsradius den Wert von +31·4 *km* pro Sekunde relativ zur Erde für die angegebenen Daten der Aufnahme.

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4215·76	6 d.?	Sr 500 u., Rb 10 u.	Rb 200 u., Sr 100 u.	Sr, Rb
16·17	1		Pr 1+ br.	
17·56	1+ br.			
19·48	4	Wo 3, Fe 3	Fe 3	Fe
20·41	4	Nd 3	Nd 3	Nd
22·40	1	Fe 2	Fe 4, Ho 3	Fe
25·51	1+	Va 6, Sa 4, Pr 15	Sa 10, Pr 20 r., Fe 3?	Sa, Pr
26·90	6	Ca 100 u.	Ca 1000 u.	Ca
27·59	1	Fe 4	Fe 6	Fe
29·79	3 d.		Sa 10, V 2?	
33·6	1		Os 4, Fe 6	
35·40	1	Nd 4, Mn 20	Nd 4, Mn 10	Nd, Mn
36·11	4	Y 5, Fe 4	Y 10, Fe 10	Y, Fe
37·26	2	Pr 1	Mo 3, Fe 1	
38·10	1	Ti 2	Ti 4	Ti
39·02	1	Gd 4	Gd 4, Fe 3	Gd
39·95	3	Mn 5, Nd 4	Mn 3, Ho 4, Nd 4, Ce 5	Mn, Nd
40·58	1	Zr 3	Ca 3+, Zr 8 r.	Zr
42·58	1	Cr 5, Mn 2+?		
43·58	1	Pr 3	Pr 3	Pr
45·48	1	Pb 500	Fe 2, Gd 1	
46·15	1	Ce 5	Ce 5, Ho 3, Mo 4	Ce
46·98	1	Sc 100	Sc 50	Sc
47·61	1	Fe 2+	Fe 3	Fe
48·36	1	Fe 1+	Fe 1, Nd 1? Zr 1	
49·60	1	Zr 1+, Pr 1?	Nb 3, Sa 3, Pr 1	
50·30	1	Fe 4	Fe 10	Fe
50·97	4	Fe 6	Fe 15	Fe
52·64	1	Nd 7	Nd 4	Nd
54·51	1	Cr 50, Pr 4	Cr 50 u.	Cr
56·00	1	Ce 3?	Ce 3? Ti 3?	
58·23	1	Zr 8?	Zr 3	
58·53	1	Ce 1, Nd 1	Fe 1	

λ	*i*	*F*	*B*	Haupt-Identifikat.
4260·21	3	Ru 1, Pr 1?, Gd 1?	Gd 3, Ru 3	
60·66	1	Fe 10 r.	Fe 20	Fe
62·06	2+	Nd 4	Nd 3	Nd
64·40	1		Fe 1	
66·10	1	Mn 5	Mn 3	Mn
67·00	3	C 10+ br., Zr 2		C
67·99	1	Fe 1, Pr 2, Nd 1+?	Fe 2	
68·94	1	V 10, Gd 3	Gd 3	Gd, V
71·34	4	Fe 4	Fe 15	Fe
71·96	6	Fe 10	Fe 30, Pr 3	Fe
73·51	3	Th 4	Th 4, Li 5+br.	Th
73·91	1	Nd 2	Nd 1	
74·92	4	Cr 30, Zr 1	Cr 50 u., Zr 3	Cr
75·68	3	Ce 1	Ce 2+	
76·74	2+	Er 3	La 3?	
77·63	2+	Zr 2	Nb 3, Zr 2?	
78·29	1	Pr 3, Gd 1?	Gd 1?	
79·02	1	Ce 2, Ti 1+?	Ce 2, Ti 2?	
79·84	3+ br.	Sa 4	Sa 8	Sa
80·56	1	Cr 3	Cr 3	Cr
81·2	1	Sa 3+?	Sa 5? Th 3?	
82·55	3	Zr 10, Fe 3	Fe 10	Fe
83·09	3	Va 3, Ca 20	Ca 50	Ca
84·42	2+ br.	Ru 4?	Ru 5?	
85·56	1	Ce 3	Sa 4, Ce 2	Ce
86·14	1	Ti 4	Ti 10	Ti
86·57	1	V 3	V 2	V
87·55	1	Ti 4	Ti 10	Ti
88·13	5	Va 3+ r., U 3	Ni 3	
89·84	5+ br.	Cr 30	Cr 30 u.	Cr
90·32	1	Er 3?	Mo 4+?	
91·07	2	Ti 2, Nd 2?	Ti 10? Fe 1, Nd 2?	
91·65	1	Ge 3+ br.?	Zr 3	
92·31	3	Mo 4, Sa 3	Sa 4, Mo 10	Mo, Sa

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4293·35	2	Pr 3, Mo 4, Zr 4, Ru 3	Mo 10	Mo
94·29	5	Fe 4, Ti 10	Fe 15	Fe, Ti
95·02	1 d.	Ru 3, Ho 3? Sc 5 r.	Sc 5, Ru 4, Zr 4, Ho 8?	Ru, Sc
95·37	1	Pr 3? Nd 1?	Nd 1, Zr 1	
96·06	1 d.	Ti 4, Ru 4	Ti 10, Ru 5	Ti, Ru
96·82	1	Ce 8	Ce 8	Ce
98·37	1			
99·08	5	Ca 20. Pr 4	Er 3, Pr 3, Ca 30	Ca, Pr
4300·19	3+	Ti 8?	Ti 3	
01·25	1	Ti 3, Nb 5	Ti 15	Ti
02·14	3+	Ti 5, Zr 5	Ti 2, Zr 2?	Ti
02·78	2+	Ca 50	Ca 100	Ca
04·64	3	Nd 5	Nd 4	Nd
05·70	3 d.?	Sr 100 r.	Sr 20	Sr
06·13	1	Ti 8	Yb 5? Ti 20	Ti
06·88	2	Ce 4	Ce 4	Ce
08·06	6 d.	Fe 15, Ti 8, Ca 20	Ca 30, Nd 3, Fe 30	Ca, Fe
09·15	3	Sa 4, Zr 4	Sa 8	Sa
09·78	2	Y 20	Nb 3, Y 20	Y
12·30	1	Nd 1+?		
13·09	5	Ti 8, Sa 1, V 1+br.?	Sa 1, Ti 2	Ti
14·41	6	Sc 30?	Ru 4, Sc 30?	
15·21	6	Fe 3, Ti 5	Ti 4, Fe 6	Fe, Ti
16·99	3	Ti 2		
18·84	4	Ti 3, Ca 30	V 4, Ti 10, Ca 50	Ca, Ti
20·65	5	Gd 1	Gd 2	
21·08	1	Sc 20	Sc 20?	Sc
21·98	1	Ti 3?	Ti 8?	
22·71	1	La 5	La 6, Eu 3	La
23·39	1	Sa 4?	Sa 5?	
25·30	4	Ti 3, Sc 20	Ru 4, Cr 3, Ho 3, Ti 8, Sc 20	Ti, Sc
25·98	6	Fe 15, Nd 5	Fe 30, Nd 15	Fe, Nd

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4327·20	1	Pt 3, Gd 5?	Pt 5, Gd 10?	Pt
28·19	2	Nd 5?	Nd 6?	
30·47	1+	Ti 3		
30·94	1	Ti 3		
31·81	1	V 1+?	Ni 3	
33·03	1	V 8	V 3	V
34·07	1	La 15, Pr 8	La 20, Pr 10	La, Pr
34·28	1+	Sa 6	Sa 8	Sa
37·22	2	Fe 2	Fe 6	Fe
38·09	2	Ti 10	Sr 5+ r.?	
39·78	3	Zr 3, Co 3	Ho 3	
40·67	10	Ce 1?, Zr 1+	Ce?, Zr 1+	H
41·60	1	Ti 3	Mo 3	
43·48	1+		Fe 1, Zr 1?	
43·93	1+	Ti 1	Ti 1, Fe 1	
44·63	2	Cr 10	Cr 10, Pr 3+	Cr
46·80	1	Gd 2, Ti 1, Zr 2	Gd 4, Fe 1? Ti 1, Zr 2?	Gd
47·46	1	Gd 3	Gd 3	Gd
48·04	1	Zr 3, Sa 6	Sa 10, Zr 8 r.	Sa, Zr
49·08	1		Fe 1+, Y 4, Nb 3	
51·22	3	Cr 4	Cr 8	Cr
52·02	5	Cr 10, Pr 8?	Cr 15, Pr 10	Cr
52·98	2	V 6	Fe 4, V 10	V
54·74	1	Sc 3	Sc 3	Sc
58·88	3	Y 8 r.	Zr 3, Y 10, Nd 2	Y
59·80	3	Cr 6	Cr 8	Cr
61·0	1	Nd 2, Zr 2	Zr 5, Gd 3	Zr
64·36	1	Nd 3, V 3	Nd 3	Nd
64·90	1	La 3	La 3, Ce 4, Wo 3	La
67·91	4	Ti 6		
69·51	2			
69·96	2	Gd 4	Gd 5, Fe 3	Gd
71·47	3	Cr 8	Cr 10	Cr

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4372·40	1	Ru 10	Ru 10	Ru
74·60	3	Pr 3, Sc 20	Sc 20	Sc
75·16	3	Sa 3, Nd 6 r., Y 100 u.	Sa 3, Nd 6, Mo 10, Y 50	Sa, Nd, Y
76·20	3	V 1	Gd 1	
79·47	1	V 30 u.	V 30 u.	V
80·98	1			
82·98	1	Nd 3, Mn 2+	Fe 1, Mn 1	
83·84	6	Fe 20	Fe 100	Fe
84·96	4	Er 3, V 30 u.	V 30, Sc 3	V
85·58	2+	Ru 4	Ru 4	Ru
87·00	1	Ti 5, Pb 500	Ce 6?	
88·02	1		Eu 4	
88·54	1	Er 3	Nb 3	
89·50	1			
90·11	1	V 20 u.	V 20	V
91·25	1	Th 10, Ru 1, Ti 2, Nd 1?	Nd 2, Ru 3	
91·96	1	Pt 3	Pt 5, Cr 3	Pt
94·34	1	Nd 2, Ti 2?	Nd 1	
95·35	4	V 10 u.?	Zr 3, V 15	V
96·08	1	Ti 2	Ti 1	Ti
98·29	1	Y 15	Y 20	Y
99·91	3	Ti 6	Ti 2	Ti
4400·57	3	Sc 20	Sc 20	Sc
01·62	3	Ni 15 r.?	Ni 15?	
03·52	1	Pr 3, Sa 3	Zr 3, Sa 4	Sa
04·96	6	Fe 15	Fe 50	Fe
06·79	1	V 5 u.	V 10, Gd 3	V
07·90	2	Ti 1, V 4 u.?	V 10? Fe 2, Ti 1	
08·54	3	Gd 4, V 15 u.	Fe 3, Wo 3	
09·51	2	Sa 3, Ho 3	Sa 4, (Er, Ho) 8	Sa, Ho
10·77	1		Ce 3 d.?	
11·34	1	Ti 5	Nd 6, Gd 3	
12·12	1	Mn 2, Ti 1, Zr 1	Mn 2, Zr 1	Mn, Zr

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4413·90	1	Pr 4	Pr 4	Pr
15·26	4	Fe 10	Fe 20	Fe
15·62	3	Sc 15?	Sc 20?	
16·98	1			
17·93	1	Ti 6	Ti 2	Ti
18·55	1	Ti 2		
19·12	1	Ce 6, Gd 4?, Pr 3?	Gd 4? Pr 3?	
22·07	1+		Ru 3, V 3	
22·64	1	Er 4, Y 10?	Gd 6, Y 10?	
23·27	1			
24·30	1+	Gd 1	Gd 1, Pr 1	
25·68	2	Ca 20	Ca 100	Ca
27·44	4	V 4?	Zr 3, V 3, Fe 5	
28·64	1	Ru 3, V 4	Ce 3, Ru 5, V 5	Ru, V
30·00	3	V 4, La 8	V 5, La 20	La, V
30·66	3		Ti 3, Fe 3	
31·53	1	Sc 3	Sc 2	Sc
33·38	1	Fe 1	Fe 1?	
34·00	1	Sa 6, U 3	Sa 10	Sa
35·23	3	Ca 20	Ca 100 u., Mo 10	Ca
35·77	3	Ca 15, Eu 30	Ca 50, Eu 50	Ca, Eu
36·35	1	V 5	V 5, Gd 3	V
37·13	1		Mo 3, Wo 3	
37·91	1	Pr 1+	V 10?	
38·38	1	Gd 4	Gd 3	Gd
41·84	1	V 8	V 10	V
42·50	1		Fe 4, Sa 2	
43·22	1	Zr 15	Zr 5, Mo 5	Zr
43·98	3	Ti 15	Ti 4	Ti
44·80	1	Zr 1?		
45·60				
47·08	1	Pr 3		
47·92	1	Fe 2?	Fe 4	Fe
49·39	1	Ti 5	Ti 10	Ti

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4450·59	3	Ti 4		
51·71	1+	Nd 10, Mn 10	Mn 5, Nd 10	Mn, Nd
54·94	4	Ca 30 u.	Ca 200 u.	Ca
56·00	1	Mn 3, Ca 15	Mn 3, Ca 20	Mn, Ca
57·62	1	Ti 5, V 3	V 4, Ti 15	Ti, V
58·39	1	Mn 5	Mn 5?	Mn
59·32	3	Ni 5?	Fe 4, Ni 3?	
60·47	2	V 10 u.	U 3	
61·36	2+	Ce 3, Mn 4	Zr 3, Mn 4, Ce 3	Ce, Mn
61·85	2+	Fe 1	Fe 4	Fe
63·20	1	U 3, Nd 10	Nd 10	Nd
64·75	3	Ti 2?		
66·72	3	Gd 4	Gd 4, Fe 4	Gd
68·61	4	Ti 15	Ti 4	Ti
69·52	4	Nd 3	Fe 2	
71·0	1	Ti 2	Sa 3?, Ti 1, V 1	
72·99	4	Mn 3	Mn 3	Mn
76·34	3	Gd 2	Gd 4	Gd
79·68	2	Mn 2	Mn 1?	
80·20	2	V 3	V 3	V
81·40	3	Mg 50+br.	Tm 3, Ti 8	Mg
82·38	3		Fe 5	
84·41	1	Wo 4?	Wo 10	
85·76	1	Ce 1? Sa 1, Zr 2, Pr 2	Ce 1? Pr 1+, Sa 1+	
87·10	1	Ce 4	Ce 5	Ce
88·43	1	Ti 6, V 1, Au 1+r.	Ti 1	
89·20	1	V 10, Ti 3	Ti 6, Ba 8+	Ti
89·97	1		Fe 1	
90·94	1	V 3? U 3?		
91·68	1	V 1, Zr 1?	V 1, Zr 1	
94·63	3	Zr 15	Wo 3	
96·18	1	Ti 3?	V 3?	
97·06	1	Cr 10, V 3	Zr 3, Cr 10	Cr

λ	i	F	B	Haupt-Identifikat.
4499·2	1	Mn 4, Zr 1+ br.	Mn 4? Sa 3? La 1	
4504·98	2		Wo 3	
06·85	1	V 2?	Mo 3	
08·48	1	Fe 1+	Ti 1+?	
12·98	1	Ti 4, V 3+, Al 5+	Ti 15	Ti
14·51	2	V 3		
15·52	2	U 4, Fe 1+ br.	U 3?	
17·64	1+	V 3	Mo 3, Fe 1	
18·44	1+			
20·41	3	V 2? Fe 1+ br.	V 1?	
22·68	4	La 8, Eu 15		
25·20	3	Ba 100 r.	Ba 20	Ba
26·64	2+ br.	Cr 6	Cr 8	Cr
28·79	4	Fe 3, V 5	Fe 10, Mo 3+	Fe
29·57	2+	Al 7+	Mo 4	
31·07	4	Co 20 r., Ru 1+	Cu 3, Ru 3, Co 10	Co, Ru
33·32	1+	Ti 5? Th 3?	Ti 20?	
34·18	1	Ti 6, Co 4	Co 3, Ti 3	Co, Ti
36·01	4	Zr 3, Pr 3	Pr 5, Ti 5	Pr
38·73	1		Sa 1	
40·64	1	Cr 3	Cr 3	Cr
41·43	1	Nd 4	Nd 4	Nd
43·88	1	U 7, Ru 1+	U 4, Co 3	U
45·08	1	Ce 1?	Ce 1	
47·05	1	Nb 3	Nb 10, Ru 1	Nb
49·77	4	V 8, Ti 20 r.? Co 5, Mn 1+	Co 4, V 3, Ti 4	Co, V
52·49	2	Pt 6+ r.?	Pr 2	
54·22	3	Ba 1000 u.	Ba 500 u.	Ba
56·06	2+	Fe 1+ br.		
58·74	1+	Ce 1?	La 4? Ce 1	
64·88	1	Ru 1+	Ru 2	
65·58	1+ br.	Zr 2?	Cr 4? Zr 2	
72·04	3	V 10	V 4	V

ε Pegasi.

Negativ des Lick-Observatory, aufgenommen mit dem Mills-Spektrograph am 26. Juni 1898.

Das uns vorliegende Spektrogramm dieses Sternes zeigt einen von den Spektren der drei andern Sterne durchaus abweichenden Charakter, der nicht nur in dem Gesamtaussehen des spektralen Bildes, sondern auch in dem Aussehen und der Beschaffenheit der einzelnen Linien zur Geltung kommt. Wiederholte sorgfältige Untersuchungen des Spektrogrammes brachten uns zu der Vermutung, daß wir es in einzelnen Partien des Spektrums möglicherweise mit hellen Linien zu tun haben könnten. Da wir jedoch ein sicheres Urteil hierüber erst dann abgeben können, wenn uns noch andre Spektrogramme von ε Pegasi vorliegen werden, so wollen wir jene Vermutung mit aller Reserve nur ausgesprochen haben, um damit zu begründen, daß wir ausführliche Messungen über diesen Stern hier nicht mitteilen. Hoffentlich gelangen wir später in den Besitz von Material, das es uns möglich macht, unsre Untersuchungen über diesen Stern zu Ende zu führen.

Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung

von

Prof. Dr. **Karl Zahradnik** in Brünn.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Juni 1904.)

1. Es seien A, B Schnittpunkte der Parallelen durch den Punkt $M(x|y)$ zur X-, respektive Y-Achse und $M_1(x_1|y_1)$ der Fußpunkt der vom Koordinatenanfang auf die Gerade $\overline{AB}$ gefällten Senkrechten. Die so erhaltenen Punktpaare M, M_1 stehen in einer einfachen birationalen kubischen Verwandtschaft, denn es ist

$$x = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1}, \quad y = \frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}, \tag{1}$$

und umgekehrt

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad y_1 = \frac{x^2y}{x^2+y^2}. \tag{1'}$$

Die Birationalität ist geometrisch evident, denn die Senkrechte im Punkte M_1 auf $\overline{OM_1}$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A, B, womit auch der Punkt M eindeutig bestimmt erscheint. Die Gerade $\overline{AB}$, welche wir mit $\text{II}\ (u|v)$ bezeichnen wollen, ist so den Punkten M, M_1 eindeutig zugeordnet.

Diese Verwandtschaft wollen wir nun in der Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung verwerten, indem wir die Bildkurve der Geraden

$$(M_1) = ax_1+by_1+c = 0 \tag{2}$$

untersuchen.[1] Wir erhalten so für die Transformierte der Geraden die Gleichung

$$(M) \equiv (ay+bx)xy+c(x^2+y^2) = 0, \tag{4}$$

also eine rationale Kurve dritter Ordnung, mit einem isolierten Punkt im Anfangspunkte der Koordinaten und mit sämtlichen realen Asymptoten.

Die Koordinaten der Geraden Π sind

$$u = -\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \qquad v = -\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

somit

$$x_1 = -\frac{u}{u^2+v^2} \qquad y_1 = -\frac{v}{u^2+v^2}.$$

Beschreibt nun der Punkt M_1 die Gerade (M_1), so hüllt die Gerade Π die Kurve zweiter Klasse

$$(\Pi) \equiv c(u^2+v^2)-(au+bv) = 0$$

ein, also eine Parabel, da sie die unendlich ferne Gerade $(0|0)$ zur Tangente hat.

Die Gleichung derselben in Punktkoordinaten lautet

$$(bx-ay)^2-4c(ax+by+c) = 0. \tag{5}$$

[1] Wir setzten ein rechtwinkliges Koordinatensystem voraus; wäre ϑ der Achsenwinkel, so bekämen wir, $\cos\vartheta = c$ gesetzt:

$$x_1 = \frac{(y-cx)xy}{x^2+y^2-2cxy}$$

$$y_1 = \frac{(x-cy)xy}{x^2+y^2-2cxy},$$

woraus wieder

$$x = \frac{x_1^2+y_1^2+2cx_1y_1}{x_1+cy_1}$$

$$y = \frac{x_1^2+y_1^2+2cx_1y_1}{y_1+cx_1}$$

folgt als Transformationsformeln statt (3) und (1).

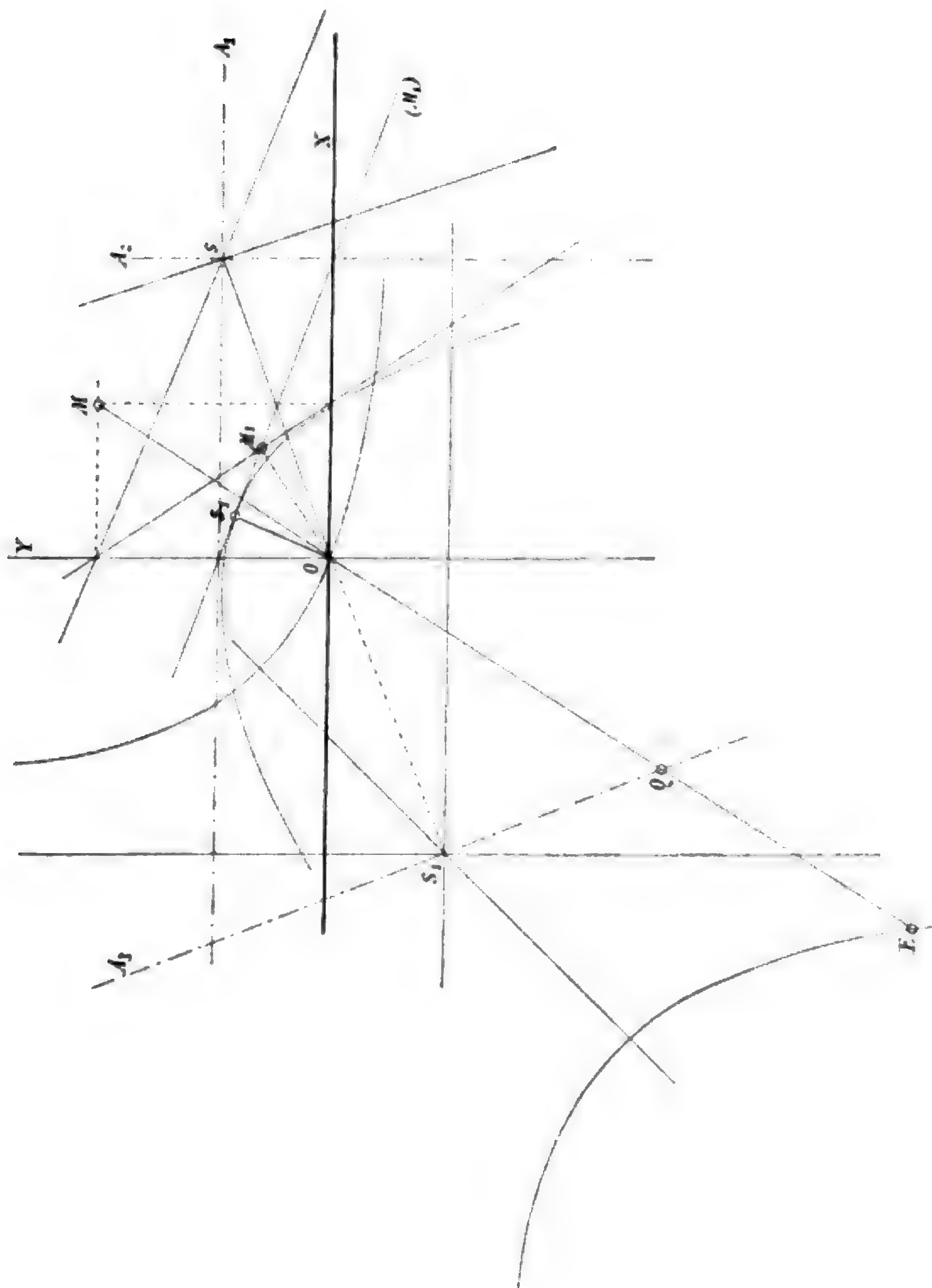


Fig. 1.

Die gegebene Gerade (M_1) ist die Scheiteltangente der Parabel und $bx - ay = 0$ deren Achse. Die Koordinaten des Scheitels S_1 sind

$$\xi_1 = -\frac{ac}{a^2+b^2}, \quad \eta_1 = -\frac{bc}{a^2+b^2} \tag{6}$$

oder wenn wir die Koordinaten der Geraden (M_1) mit u_1, v_1 bezeichnen,

$$\xi_1 = -\frac{u_1}{u_1^2+v_1^2}, \quad \eta_1 = -\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}.$$

Die Gleichung der Direktrix lautet:

$$ax+by+2c = 0.$$

Die gegebene Gerade (M_1) ist die Fußpunktskurve der Parabel (Π) für den Koordinatenanfang als Pol, was ja bekannt ist, da der Koordinatenanfang Brennpunkt der Parabel (Π) ist.

Kehren wir nun zur Kurve dritter Ordnung (M) zurück. Ist $a = 0$, beziehungsweise $b = 0$, so erhalten wir:

$$bx^2y+c(x^2+y^2) = 0,$$

beziehungsweise

$$axy^2+c(x^2+y^2) = 0,$$

mit welchen Kurven sich G. de Longchamps[1] beschäftigt hat und als gemischte Kurve dritter Ordnung anführt.

2. Führen wir mittels der Gleichung $y = tx$ den rationalen Parameter t ein, so erhalten wir für die Gleichung des Ortes (M)

$$x = -\frac{(1+t^2)c}{(at+b)t}, \quad y = -\frac{(1+t^2)c}{at+b}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte t lautet:

$$T \equiv (at^2-2bt^3-at^4)x+(-b-2at+bt^2)y-(1+t^2)c = 0.$$

Die Parameter der unendlich fernen Punkte der Kurve sind $t = 0$, $t = \infty$, $t = -\frac{b}{a}$, somit sind die Gleichungen der entsprechenden Asymptoten

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv by+c = 0 \\ A_2 &\equiv ax+c = 0 \qquad (7) \\ A_3 &\equiv ab^2x+a^2by-(a^2+b^2)c = 0. \end{aligned}$$

[1] Loria G., Spezielle algebr. und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte, p. 91.

Dem Schnittpunkte S der Asymptoten A_1, A_2, welcher auf der Kurve (M) liegt, ist die gegebene Gerade (M_1) und der Scheitel S_1 der Parabel nach (2) zugeordnet, denn sind ξ, η Koordinaten des Punktes S, so ist

$$\xi_1 = \frac{\xi\eta^2}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta_1 = \frac{\xi^2\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

und

$$u_1 = -\frac{1}{\xi}, \qquad v_1 = -\frac{1}{\eta}.$$

Die Koordinaten der Asymptote A_3 sind

$$u = -\frac{ab^2}{(a^2+b^2)c}, \quad v = -\frac{a^2b}{(a^2+b^2)c},$$

somit ist

$$u = -\frac{u_1v_1^2}{u_1^2+v_1^2}, \qquad v = -\frac{u_1^2v_1}{u_1^2+v_1^2},$$

wo $u_1|v_1$ die Koordinaten der Geraden (M_1) sind. Die Asymptote A_3 liegt somit symmetrisch in Bezug auf den Anfangspunkt zu der Geraden, welcher die gegebene Gerade (M_1) als Π_1 zugeordnet ist, geht somit durch den zu S in Bezug auf O symmetrischen Punkt $S'\left(\frac{c}{a}\,\middle|\,\frac{c}{b}\right)$ und steht in demselben auf der Geraden $\overline{OS'}$ senkrecht.

Das Asymptotendreieck.

2. Die Fläche des Asymptotendreieckes der rationalen Kurve dritter Ordnung (M)

$$\Delta = \frac{2(a^2+b^2)^2c^2}{a^3b^3},$$

somit ist auch

$$\Delta = 2\frac{(\xi^2+\eta^2)^2}{\xi\eta} = 2\frac{(u_1^2+v_1^2)^2}{u_1^3v_1^3}.$$

Setzen wir

$$\frac{\Delta}{2} = m^2,$$

so erhalten wir

$$(\xi^2+\eta^2)^2-m^2\xi\eta = 0 \tag{8}$$

$$m^2 u_1^3 v_1^3-(u_1^2+v_1^2)^2 = 0. \tag{9}$$

Ist nun $\Delta =$ konstant, somit auch m, so besagen die letzten Gleichungen, daß »alle Geraden (M_1), denen als Bildkurven rationale Kurven dritter Ordnung mit einem Asymptotendreieck von konstantem Flächeninhalt entsprechen, eine rationale Kurve sechster Klasse einhüllen und daß der Ort der Punkte S, denen diese Geraden zugeordnet sind, eine Lemniskate ist mit dem Doppelpunkte im Anfangspunkte der Koordinaten.«

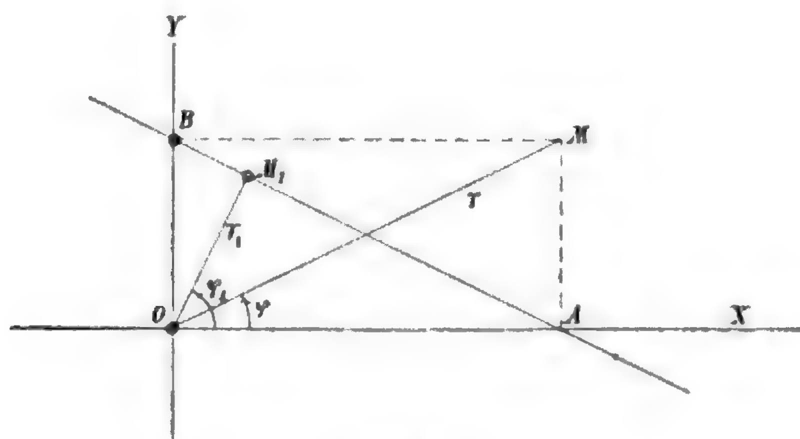


Fig. 2.

3. Die Fußpunktskurve der Einhüllenden ist die der Lemniskate (S) zugeordnete Kurve (S_1), nämlich

$$(\xi_1^2+\eta_1^2)^4-m^2\xi_1^3\eta_1^3 = 0, \tag{10}$$

welche auch der Ort der Scheitel von Parabeln ist, welche den einzelnen Geraden (M_1) zugeordnet sind.

Die Gleichungen der Kurven (S) und (S_1) in Polarkoordinaten sind

$$r^2 = m^2 \sin\varphi \cos\varphi \qquad (S)$$

$$r^2 = m^2 \sin^3\varphi \cos^3\varphi. \qquad (S_1)$$

Die Kurve (S_1) liegt wie die Lemniskate im ersten und dritten Quadranten, ist ihr der Form nach ähnlich und ihr Flächeninhalt beträgt den sechsten Teil des Flächeninhaltes von (S).

Konstruieren wir die Kurve (S_2) so, daß bei gleichem Polarwinkel

$$\overline{OS_2^2} = \overline{OS}.\overline{OS_1},$$

so erhalten wir für dieselbe die Gleichung

$$r^2 = m^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \qquad (S_2)$$

oder in Parallelkoordinaten

$$(\xi_2^2+\eta_2^2)^3 = m^2\xi_2^2\eta_2^2.$$

Die so konstruierte Kurve ist eine vierblättrige Rhodonee.[1]

Nebenbei mögen die Inversionskurven für den Anfangspunkt als Zentrum der Inversion erwähnt werden. Für $\varkappa$ als Radius des Inversionskreises bekommen wir, wenn wir $\frac{\varkappa^2}{m} = n$ setzen, für die Inverse von (S) bekanntlich

$$xy = n^2;$$

die Inverse von (S_2) ist die Kreuzkurve

$$x^2y^2 = n^2(x^2+y^2)$$

und die Inverse von (S_1) ist

$$x^3y^3 = n^2(x^2+y^2)^2.$$

Umkreis des Asymptotendreieckes.

4. Es sei C das Zentrum des dem Asymptotendreieck umgeschriebenen Kreises. Da das Asymptotendreieck in S rechtwinklig ist, so ist C der Mittelpunkt des zwischen den Koordinatenachsen liegenden Teiles der Asymptote A_3. Bezeichnen wir mit $x'|y'$ dessen Koordinaten, so sind

$$x' = \frac{ac}{b^2} = -\frac{\eta^2}{\xi}$$

$$y' = \frac{bc}{a^2} = -\frac{\xi^2}{\eta},$$

[1] Gino Loria, Spezielle algebr. und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, deutsch von F. Schütte, Leipzig, 1902, p. 231, 304.

wo $\xi|\eta$ wie früher die Koordinaten von S sind, und die Gleichung des Umkreises lautet

$$x^2+y^2-\frac{2ac}{b^2}x-\frac{2bc}{a^2}y-\frac{3c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}=0$$

oder

$$x^2+y^2+2\frac{\eta^2}{\xi}x+2\frac{\xi^2}{\eta}y-3(\xi^2+\eta^2)=0.$$

Der Halbmesser des Umkreises ist:

$$\overline{CS}^2=\frac{c^2(a^2+b^2)^3}{a^4b^4}=\frac{(\xi^2+\eta^2)^3}{\xi^2\eta^2}=\frac{(u_1^2+v_1^2)^3}{u_1^4v_1^4},$$

woraus folgt: Alle Geraden (M_1), denen als Bildkurven rationale Kurven dritter Ordnung entsprechen, deren Asymptotendreiecke Umkreise vom konstanten Halbmesser haben, hüllen eine Kurve achter Klasse

$$u_1^4v_1^4-r^2(u_1^2+v_1^2)^3=0$$

ein und der Ort der Punkte S, denen diese Geraden zugeordnet sind, ist wieder die vierblättrige Rhodonee

$$(\xi^2+\eta^2)^3-r^2\xi^2\eta^2=0.$$

Schwerpunkt des Asymptotendreieckes.

5. Für die Koordinaten $\xi'|\eta'$ des Schwerpunktes T des Asymptotendreieckes finden wir

$$\xi'=\frac{2a^2-b^2}{3ab^2}c$$

$$\eta'=\frac{2b^2-a^2}{3a^2b}c.$$

Die Gerade (M_1) dreht sich um einen in ihr gelegenen Punkt.

6. Mit der Geraden (M_1) ist gegeben: Der Scheitel S_1 der Parabel II, der Schnittpunkt S der zu den Achsen parallelen Asymptoten der Kurve dritter Ordnung (M), welche der Geraden (M_1) zugeordnet ist; die dritte Asymptote A_3; der

Schwerpunkt T des Asymptotendreieckes und der Mittelpunkt C dessen Umkreises.

Dreht sich nun die Gerade (M_1) um einen auf ihr liegenden festen Punkt $P(\alpha|\beta)$, so ist

$$c = -(a\alpha + b\beta).$$

Setzen wir nun die veränderliche Richtungskonstante der Geraden (M_1)

$$-\frac{a}{b} = t,$$

so beschreibt bei dieser Umdrehung der Punkt S_1 einen Kreis, dessen Gleichung

$$\xi_1 = -\frac{t(\beta - \alpha t)}{1+t^2}$$

$$\eta_1 = \frac{\beta - \alpha t}{1+t^2}$$

oder

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 - \alpha\xi_1 - \beta\eta_1 = 0$$

ist. Derselbe hat OP zum Durchmesser und den Halbierungspunkt dieser Strecke zum Zentrum, was auch geometrisch evident ist, da wir die Strecke OP von den Punkten der Ortskurve (S_1) aus unter rechtem Winkel sehen.

7. Bei dieser Umdrehung der Geraden (M_1) um den Punkt $(\alpha|\beta)$ beschreibt der Punkt S eine Hyperbel

$$\xi = -\frac{\beta - \alpha t}{t}$$

$$\eta = \beta - \alpha t,$$

welche parallele Asymptoten zu den Koordinatenachsen und den Drehungspunkt $P(\alpha|\beta)$ zu ihrem Mittelpunkte hat.

8. Die Ortskurve von C ist bei dieser Umdrehung der Geraden (M_1)

$$x' = \frac{ac}{b^2} = t(\beta - \alpha t)$$

$$y' = \frac{bc}{a^2} = -\frac{\beta - \alpha t}{t^2}$$

also eine rationale Kurve vierter Ordnung und vierter Klasse

$$(xy-\alpha\beta)^2-(\alpha x-\beta^2)(\beta y-\alpha^2)=0,$$

welche einen isolierten Doppelpunkt $\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\middle|\frac{\alpha^2}{\beta}\right)$ und die unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen zu ihren Rückkehrpunkten hat. Die Koordinatenachsen sind somit Rückkehrtangenten und Asymptoten der Kurve, welche durch deren Schnittpunkt, nämlich den Koordinatenanfang hindurchgeht.

9. Ist t die Richtungskonstante der durch den Punkt $(\alpha|\beta)$ gehenden Geraden (M_1), so ist die Gleichung der Asymptote A_3 der entsprechenden Kurve dritter Ordnung (M)

$$A_3 \equiv -tx+t^2y+(t^2+1)(\beta-\alpha t)=0.$$

Dreht sich nun die Gerade (M_1) um den Punkt $(\alpha|\beta)$, so hüllen die Asymptoten A_3 eine rationale Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung ein. Ihre Gleichung in Parameterdarstellung ist

$$x=-\alpha+\frac{\alpha t^3+2\beta}{t}$$

$$y=-\beta+\frac{2\alpha t^3+\beta}{t^2}$$

Verschieben wir das Achsensystem in den Punkt $(-\alpha|-\beta)$ als Koordinatenanfang, so erhalten wir für die Einhüllende von (A_3) die Gleichung

$$x=\frac{\alpha t^3+2\beta}{t},\quad y=\frac{2\alpha t^3+\beta}{t^2}$$

oder

$$F\equiv(xy-9\alpha\beta)^2-4(x^2-3\beta y)(y^2-3\alpha x)=0.$$

Die Einhüllende der Asymptoten besitzt demnach drei Rückkehrpunkte, von denen einer reell, die beiden andern imaginär sind. Dieselben sind die Schnittpunkte der Parabeln

$$P_1\equiv x^2-3\beta y=0,\quad P_2\equiv y^2-3\alpha x=0$$

mit Ausnahme des im Anfangspunkte der Koordinaten liegenden Schnittpunktes, welcher den Schwerpunkt des Rückkehrpunktdreieckes bildet.

Durch diese Rückkehrpunkte geht auch die Hyperbel

$$H \equiv xy - 9\alpha\beta = 0.$$

Ist ε die imaginäre dritte Wurzel aus 1, so sind die Koordinaten der Rückkehrpunkte

$$x_0 = 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}, \quad y_0 = 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2},$$

$$x_1 = \varepsilon x_0, \quad y_1 = \varepsilon^2 y_0, \quad x_2 = \varepsilon^2 x_0, \quad y_2 = \varepsilon y_0$$

und als solche genügen sie der Gleichung $F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0$.

Da wir die Gleichung der Einhüllenden (A_3) schreiben können:

$$H^2 - 4P_1P_2 = 0,$$

so erkennen wir dieselbe als das Erzeugnis zweier Kegelschnittsbüschel

$$H + 2\lambda P_1 = 0$$
$$2P_2 + \lambda H = 0$$

10. Bezeichnen wir mit S'' den Punkt, dem die Asymptote A_3 als Gerade zugeordnet ist, so sind seine Koordinaten

$$\xi'' = \frac{a^2+b^2}{ab^2}c$$

$$y'' = -\frac{a^2+b^2}{a^2b}c.$$

Dreht sich nun die Gerade (M_1) um ihren Punkt $(\alpha|\beta)$, ändert die Asymptote A_3 ihre Lage, somit auch der Punkt S'', der eine rationale Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkt im Anfangspunkte der Koordinaten

$$\xi'' = \frac{(\beta-\alpha t)(1+t^2)}{t}$$

$$\eta'' = -\frac{(\beta-\alpha t)(1+t^2)}{t^2}$$

oder in gewöhnlicher Darstellung

$$\xi''^2\eta''^2+(\xi''^2+\eta''^2)(\alpha\xi''+\beta\eta'') = 0$$

beschreibt.

Konstruktion der rationalen Kurve dritter Ordnung (M) als einer Zissoidalen.

11. Gegeben sei der Kegelschnitt

$$C \equiv a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+dx+ey = 0$$

und die Gerade

$$P \equiv mx+ny+p = 0.$$

Durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehende Gerade schneidet C_2 im Punkte E und die Gerade P im Punkte Q. Tragen wir nun vom Punkte Q die Sehne $EO = QM$ auf dem Strahl in der Richtung gegen O ab, so erhalten wir für die Ortskurve $(M) \equiv C_3$

$$C_3 \equiv (a_1x^2+b_1xy+c_1y^2)(mx+ny+p)-(mx+ny)(dx+ey)=0.$$

Ist nun $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, so ist

$$C_3 \equiv xy(mx+ny)-mdx^2-(me+nd-p)xy-ney^2 = 0.$$

Setzen wir nun noch

$$m = b, \quad n = a, \quad md = -c, \quad ne = -c, \quad me+nd-p = 0,$$

somit

$$d = -\frac{c}{b}, \quad e = -\frac{c}{a}, \quad p = -\frac{a^2+b^2}{ab}c,$$

so wird

$$C_3 \equiv xy(bx+ay)+c(x^2+y^2) = 0,$$

somit

$$C_1 \equiv (M).$$

Wir können somit unsere durch die Transformation (3) der Geraden (M_1) erzeugte Kurve (M) als eine Zissoidale erzeugen, für welche

$$C_2 \equiv xy - \frac{c}{b}x - \frac{c}{a}y = 0$$

$$P \equiv bx + ay - \frac{a^2+b^2}{ab}c = 0$$

ist. Die Gerade P ist die Asymptote A_3 von (M) und geht durch den Mittelpunkt $\left(\frac{c}{a} \middle| \frac{c}{b}\right)$ von C_2, welcher somit der Symmetriepunkt von S ist in Bezug auf den Koordinatenanfang. Die Asymptoten von C_2 sind parallel zu den übrigen zwei Asymptoten A_1, A_2 von (M). Da wir nun P und C_2 leicht konstruieren können, so folgt dies auch für die Kurve (M).

Die angeführte Transformation in Polarkoordinaten.

12. Die Untersuchung der angeführten kubischen birationalen Verwandtschaft gestaltet sich in Polarkoordinaten sehr einfach. Denn sind $r|\varphi$ beziehungsweise $r_1|\varphi_1$ Koordinaten des Punktes M beziehungsweise M_1, so ist (Fig. 2)

$$OA = OM \cos\varphi$$
$$OM_1 = OA \cos\varphi_1,$$

somit

$$OM_1 = OM \cos\varphi \cos\varphi_1.$$

Nun ist

$$\varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

somit ist

$$\cos\varphi \cos\varphi_1 = \sin\varphi \cos\varphi = \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$$

und

$$r_1 = r \sin\varphi_1 \cos\varphi_1.$$

Ist nun

$$r = f(\varphi)$$

die Gleichung der Kurve (M), so ist

$$r_1 = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$$

die Gleichung der Bildkurve (M_1) oder wenn wir die umgekehrte Transformation anwenden und von der Kurve (M_1)

$$r_1 = F(\varphi_1)$$

ausgehen, so ist die Gleichung ihrer Bildkurve

$$r = \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Daß man die Transformation in beiden Richtungen wiederholen kann, ist selbstverständlich. Wir wollen hier nur die Transformation der Geraden und des Kreises noch erwähnen. Ist

$$r_1 = -\frac{c}{a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1}$$

die Gleichung der Geraden (M_1), so ist die Gleichung der Bildkurve

$$r = -\frac{c}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi},$$

was die Gleichung (4) ist in Polarkoordinaten.

Betrachten wir die Gerade als Ortskurve (M), so ist ihre Bildkurve (M_1) die Strophoidale

$$r_1 = -\frac{c\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{a\sin\varphi_1 + b\cos\varphi_1}.$$

Betrachten wir nun den Kreis mit dem Pol als Zentrum. Seine Bildkurve, wenn wir ihn als Ortskurve (M) betrachten, ist

$$(M_1)\ldots r_1 = a\sin\varphi_1\cos\varphi_1,$$

also eine vierblättrige Rhodonee. Nehmen wir aber den Kreis als Ortskurve (M_1) an, so ist seine Bildkurve

$$(M)\ldots r = \frac{a}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

also die Kreuzkurve.

Auf die nähere Untersuchung der Bildkurve des Kegelschnittes werden wir in der nächsten Arbeit zurückkommen.

Graphische Nachweise zur Olbers'schen Methode der Kometenbahnbestimmung, zum Satze der konstanten Flächengeschwindigkeit und zur Ephemeridenrechnung

von

Prof. Dr. **L. Weinek,**

Direktor der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 8 Textfiguren.)

Vorgelegt in der Sitzung am 21. April 1904.)

I. Zur Olbers'schen Bahnbestimmungsmethode.

In die Olbers'sche Methode der Bahnbestimmung der Kometen[1] hat Gauss bei Gelegenheit der Bahnberechnung des zweiten Kometen von 1813[2] zur Vereinfachung des Rechnungsverfahrens mehrere Hilfsgrößen eingeführt, welche auch in Encke's Abhandlung über die Olbers'sche Methode[3] übernommen wurden und noch heute in allgemeinem Gebrauche sind. Es dürfte nun von Interesse sein, die meisten dieser Hilfsgrößen in einer einzigen Zeichnung (Fig 1) dargestellt zu sehen. Bemerkt sei dazu, daß Olbers die Koordinaten der ersten Beobachtung mit einem Striche, diejenigen der zweiten

[1] »Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen«, von Wilh. Olbers. Weimar 1797. Dieselbe wurde im Jahre 1847 von J. F. Encke in zweiter Auflage und im Jahre 1864 von J. G. Galle in dritter Auflage neu herausgegeben.

[2] »Beobachtungen des zweyten Cometen vom Jahre 1813, angestellt auf der Sternwarte zu Göttingen, nebst einigen Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen«, von Carl Friedrich Gauss in »Monatliche Correspondenz« von F. v. Zach, XXVIII. Bd., p. 501 bis 513.

[3] »Über die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Cometenbahnen«, von J. F. Encke in »Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1833«, p. 264 bis 312.

und dritten Beobachtung mit zwei beziehungsweise drei Strichen bezeichnet. Gauss und Encke hingegen lassen, um nicht zu viele Indices mitzuführen, die erste Beobachtung ohne Strich und geben der zweiten nur einen, der dritten zwei

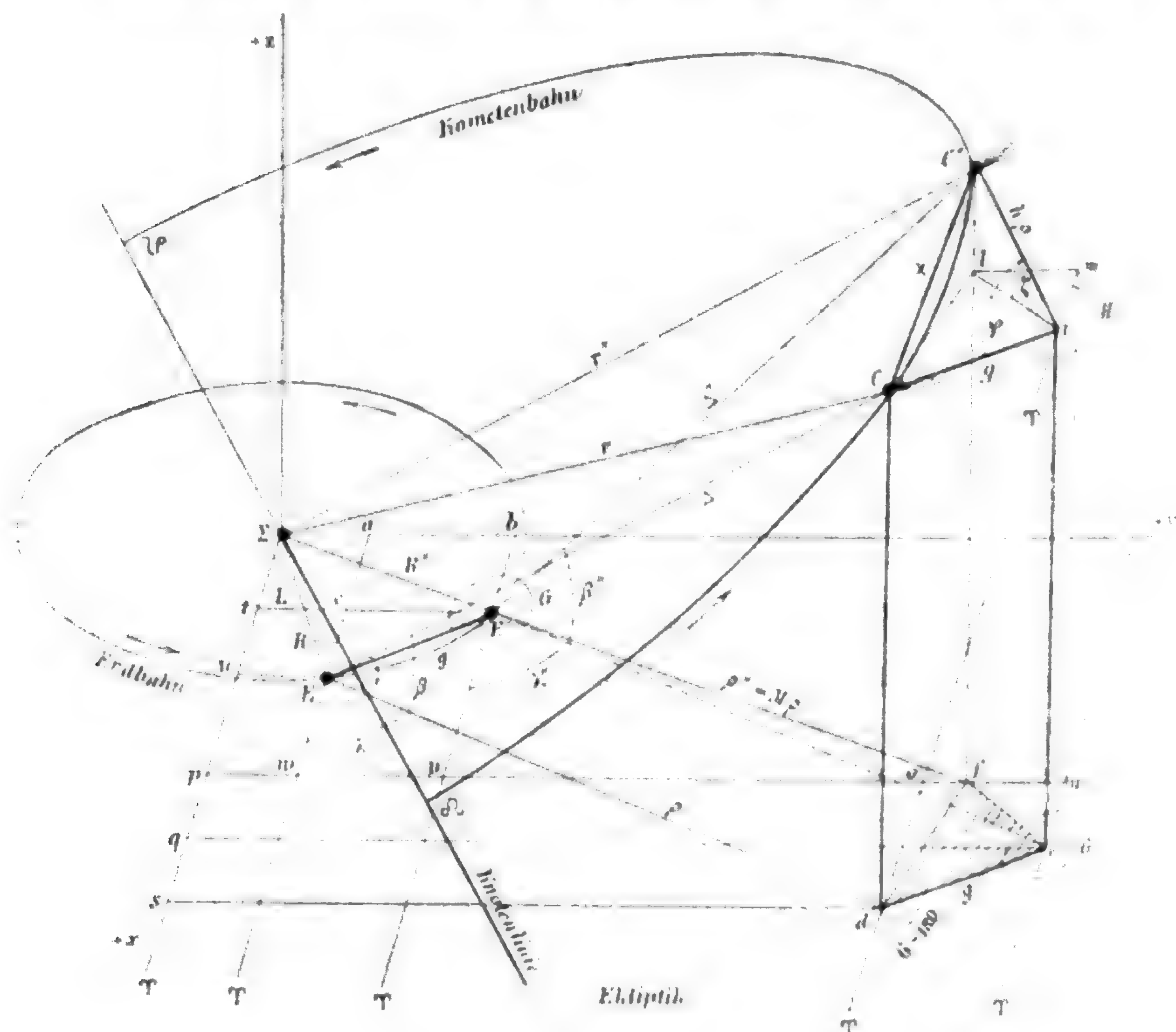


Fig. 1.

Striche. Diese letztere Bezeichnungsweise werde auch hier beibehalten. Es seien:

$t\ \ t'\ \ t''$ die Beobachtungszeiten der ersten, zweiten und dritten Beobachtung,

$\lambda\ \ \lambda'\ \ \lambda''$ die geozentrischen Längen des Kometen, [1]

$\beta\ \ \beta'\ \ \beta''$ die geozentrischen Breiten des Kometen,

---

[1] Bei Gauss und Encke sind statt λ, β die Buchstaben α δ gewählt, welche aber gegenwärtig vornehmlich für Rektaszension und Deklination gebraucht werden.

r r' r'' seine Entfernungen von der Sonne,
Δ Δ' Δ'' seine Entfernungen von der Erde,
ρ ρ' ρ'' seine kurtierten Abstände von der Erde,
$\odot$ $\odot'$ $\odot''$ die geozentrischen Längen der Sonne,
R R' R'' die Distanzen der Erde von der Sonne,
g die Sehne zwischen dem ersten und dritten Erdorte,
$\varkappa$ die Sehne zwischen dem ersten und dritten Kometenorte.[1]

In Fig. 1 ist zunächst die Erdbahn mit dem ersten und dritten Erdorte (E und E'') und die Kometenbahn mit dem ersten und dritten Kometenorte (C und C'') gezeichnet. Die Durchschnittslinie beider Ebenen gibt die Knotenlinie. ☊ sei der aufsteigende Knoten, in welchem sich der Komet über die Ebene der Ekliptik erhebt. Σ stelle die Sonne dar. Die positive x-Axe weise nach dem Frühlingsnachtgleichenpunkte ♈, die positive y-Axe nach einem Punkte der Ekliptik mit der Länge von 90° und die positive z-Axe nach dem Ekliptikpole mit der Breite von $+90°$. Es ist:

$$\Sigma E = R, \quad \Sigma E'' = R'', \quad EE'' = g$$
$$\Sigma C = r, \quad \Sigma C'' = r'', \quad CC'' = \varkappa$$
$$EC = \Delta, \quad E''C'' = \Delta''$$

und

$$\Delta \cos \beta = Ed = \rho, \quad \Delta'' \cos \beta'' = E''f = \rho'',$$

wenn d und f die Projektionen von C und C'' auf der Ekliptik sind.

Ziehen wir von E und E'' Parallele zur x-Axe und zur y-Axe. Dann lauten die heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten der Erde für die erste und dritte Beobachtung:

$$Ea = X, \quad E''b = X''$$
$$\Sigma a = Y, \quad \Sigma b = Y''.$$

Heißt weiter die heliozentrische Länge der Erde in $E \ldots L$, so ist

$$\left.\begin{aligned} X &= R \cos L = R \cos(\odot - 180) = -R \cos \odot \\ Y &= R \sin L = R \sin(\odot - 180) = -R \sin \odot \end{aligned}\right\}$$

[1] Bei Gauss und Encke steht hierfür k.

ebenso

$$\left.\begin{aligned} X'' &= -R''\cos\odot'' \\ Y'' &= -R''\sin\odot'' \end{aligned}\right\}$$

Nennen wir nun die Länge des ersten Erdortes (E), gesehen vom dritten Erdorte (E'') aus, G, so ist weiter:

$$\begin{aligned} Ec &= g\cos(360-G) = g\cos G = X-X'' \\ E''c &= g\sin(360-G) = -g\sin G = Y''-Y, \end{aligned}$$

daher

$$\left.\begin{aligned} g\cos G &= R''\cos\odot''-R\cos\odot \\ g\sin G &= R''\sin\odot''-R\sin\odot \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \cos\odot - \sin\odot \\ \sin\odot \quad \cos\odot \cdot \end{matrix} \qquad 1)$$

wie bei Gauss a. a. O., p. 506. Multipliziert man mit den rechts stehenden Faktoren und addiert, so resultiert:

$$\left.\begin{aligned} g\cos(G-\odot) &= R''\cos(\odot''-\odot)-R \\ g\sin(G-\odot) &= R''\sin(\odot''-\odot) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

welche Gleichungen zur Ermittlung von g und G dienen (Gauss a. a. O., p. 508).

Verschieben wir jetzt die Erdsehne g in der Ekliptik parallel mit sich selbst bis zum Punkte d $(de = EE'')$ und hierauf senkrecht zur Ekliptik nach dem ersten Kometenorte C $(Ci = de = EE'')$, verbinden ferner i mit C'', so kann leicht nachgewiesen werden, daß

$$iC'' = h\rho, \quad \sphericalangle C''il = \zeta \; (il \| ef)$$

und die Länge des Punktes l, von i aus gesehen, H ist. Anderseits ist $\sphericalangle C''iC$ als die Gauss'sche Hilfsgröße φ aufzufassen. Man hat nämlich:

$$h\rho\cos\zeta = il$$

und wenn $lm \| fn$, d. i. parallel zur y-Axe gezogen wird:

$$im = il\cos(H-180) = -il\cos H = en = pq = tq-tp,$$

also

$$il\cos H = h\rho\cos\zeta\cos H = tp-tq = tp-us \text{ (wegen } tu = qs).$$

somit

$$h\rho\cos\zeta\cos H = \rho''\cos\lambda'' - \rho\cos\lambda.$$

Ebenso findet sich:

$$lm = il\sin(H-180) = -il\sin H = fn = vn - vf$$

und

$$il\sin H = h\rho\cos\zeta\sin H = vf - vn = vf - wo$$
$$(\text{wegen } vw = on),$$

daher

$$h\rho\cos\zeta\sin H = \rho''\sin\lambda'' - \rho\sin\lambda.$$

Endlich ist:

$$C''l = h\rho\sin\zeta = C''f - lf = C''f - Cd$$
$$h\rho\sin\zeta = \rho''\operatorname{tg}\beta'' - \rho\operatorname{tg}\beta.$$

Wird, wie bei Olbers, das Verhältnis

$$\frac{\rho''}{\rho} = M$$

und in erster Annäherung

$$M = \frac{t''-t'}{t'-t}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta'\sin(\lambda-\odot') - \operatorname{tg}\beta\sin(\lambda'-\odot')}{\operatorname{tg}\beta''\sin(\lambda'-\odot') - \operatorname{tg}\beta'\sin(\lambda''-\odot')}$$

gesetzt, so hat man, wenn auf beiden Seiten der eben abgeleiteten drei Gleichungen mit ρ dividiert wird (wie bei Gauss a. a. O., p. 506):

$$\left.\begin{aligned} h\cos\zeta\cos H &= M\cos\lambda'' - \cos\lambda \\ h\cos\zeta\sin H &= M\sin\lambda'' - \sin\lambda \\ h\sin\zeta &= M\operatorname{tg}\beta'' - \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \cos\lambda'' - \sin\lambda'' \\ \sin\lambda'' \quad \cos\lambda'' \\ \; \end{matrix} \qquad 3)$$

Multipliziert man die erste und zweite Gleichung mit den rechts stehenden Faktoren und addiert, so resultiert (Gauss a. a. O., p. 508):

$$\left.\begin{aligned} h\cos\zeta\cos(H-\lambda'') &= M - \cos(\lambda''-\lambda) \\ h\cos\zeta\sin(H-\lambda'') &= \sin(\lambda''-\lambda) \\ h\sin\zeta &= M\operatorname{tg}\beta'' - \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Diese Gleichungen ergeben die Hilfsgrößen: h, ζ und H.

Bei Betrachtung der Pyramide $CilC''$ hat man sofort (Fig. 2):

$$\cos\varphi = \\ = \cos\zeta\cos(G-H) \qquad 5)$$

Fig. 2.

wie bei Gauss, p. 508. Ferner folgt aus Fig. 3, welche den größten Kreis durch den ersten Kometenort und den ersten Sonnenort darstellt, wenn ψ den Winkelabstand des Kometen von der Sonne bezeichnet:

$$\cos\psi = \cos(\odot - \lambda)\cos\beta$$

analog

$$\cos\psi'' = \cos(\odot'' - \lambda'')\cos\beta'' \qquad 6)$$

Fig. 3.

Siehe Gauss a. a. O., p. 506. Genauer wird man die Winkel ψ und ψ'' aus ihren Tangenten berechnen. Zu diesem

Zwecke nennen wir die Neigung jenes größten Kreises durch K und S (Fig. 3) zur Ekliptik w. Dann ist:

$$\sin\psi \sin(180-w) = \sin\beta$$
$$\sin\psi \cos(180-w) = \sin(\odot-\lambda)\cos\beta$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi \sin w &= \sin\beta\\ \sin\psi \cos w &= \sin(\lambda-\odot)\cos\beta\end{aligned}\right\}$$

somit

und

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} w &= \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda-\odot)}\\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda-\odot)}{\cos w}\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Analog erhält man für die dritte Beobachtung w'' und ψ''.

Heißt weiter nach Gauss (p. 508 und 509):

$$\left.\begin{aligned}&g\sin\varphi = A\\ &R\sin\psi = B \qquad\qquad h\cos\beta = b\\ &R''\sin\psi'' = B'' \qquad\qquad \frac{h\cos\beta''}{M} = b''\\ &g\cos\varphi - bR\cos\psi = c \qquad g\cos\varphi - b''R''\cos\psi'' = c''\\ &h\rho - g\cos\varphi = d\ [1]\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

so ist aus Fig. 1 beziehungsweise Fig. 4 die Bedeutung der wichtigen Größe d sofort erkennbar und man hat:

$$\varkappa^2 = d^2+g^2\sin^2\varphi = d^2+A^2$$
$$\varkappa = \sqrt{d^2+A^2}. \qquad 9)$$

Aus Fig. 3 erkennt man auch die Bedeutung von B und B''.

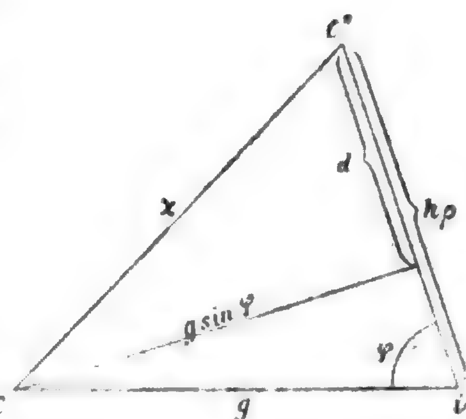


Fig. 4.

[1] Bei Gauss und Encke steht u statt d; doch wird gegenwärtig mit u zumeist das Argument der Breite (heliozentrischer Winkelabstand des Gestirnes vom aufsteigenden Knoten) bezeichnet.

Ferner ist, wenn C den wahren Kometenort zur Zeit der ersten Beobachtung (K ist dessen geozentrische Projektion an der Sphäre) darstellt:

$$r^2 = \Delta^2 + R^2 - 2\Delta R \cos\psi$$

oder

$$r^2 = (\Delta - R\cos\psi)^2 + R^2 \sin^2\psi,$$

somit

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (\rho\sec\beta - R\cos\psi)^2 + B^2 \\ r''^2 &= (M\rho\sec\beta'' - R''\cos\psi'')^2 + B''^2 \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

und in Benützung der Hilfsgrößen b, c und d:

$$r^2 = \left(\frac{\rho - \cos\beta\, R\cos\psi}{\cos\beta}\right)^2 + B^2$$

$$= \left(\frac{h\rho - h\cos\beta\, R\cos\psi}{h\cos\beta}\right)^2 + B^2$$

$$= \left(\frac{h\rho - bR\cos\psi}{b}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{d+c}{b}\right)^2 + B^2,$$

daher

$$r = \sqrt{\left(\frac{d+c}{b}\right)^2 + B^2}$$

analog 11)

$$r'' = \sqrt{\left(\frac{d+c''}{b''}\right)^2 + B''^2}$$

Der Wert von d muß so bestimmt werden, daß die Lambert'sche Gleichung:

$$6k(t''-t) = (r+r''+\varkappa)^{\frac{3}{2}} - (r+r''-\varkappa)^{\frac{3}{2}}, \qquad 12)$$

in welcher k die bekannte Konstante des Sonnensystems und $\log 6k = 0\cdot0137327-10$ ist, erfüllt wird. Während Gauss den Wert von d so variiert, bis die damit aus 9) und 11) berechneten $\varkappa$, r und r'' der Gleichung 12) Genüge leisten, zieht Encke den von Olbers vorgeschlagenen Weg,[1] nach welchem

---

[1] »Über die zweckmaßigste Art, bei der Berechnung einer Cometenbahn die Versuche anzustellen« von Dr. Olbers im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1833, p. 251 bis 263.

eine erste Annahme über r und r'' gemacht wird, vor. Man setzt zuerst, da $r+r''$ selten oder nie <1 und ebenfalls selten >3 sein wird, $r+r''=2$; damit verschafft man sich aus der Lambert'schen Gleichung mit Hilfe einer geeigneten Tafel die Sehne $\varkappa$, hiermit d und weiter verbesserte Werte von r und r'' beziehungsweise von $r+r''$ u. s. w., ein Verfahren, das heute noch üblich ist und keiner näheren Erläuterung bedarf. Es möge nur noch erwähnt werden, daß d allgemein positiv oder negativ sein kann. Wenn $\varkappa > g$ ist, was zumeist der Fall sein wird, ist $d = +$; wäre dagegen $\varkappa < g$, so bleibt d so lange positiv, als $r' < 2$, d. i. kleiner als die doppelte Entfernung der Erde von der Sonne ist.

Hat man das definitive d gefunden, so ist

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{d+g\cos\varphi}{h} \\ \rho'' &= M\rho \end{aligned}\right\}$$

woraus sich dann leicht die Bahnelemente: Länge des aufsteigenden Knotens, Neigung, Periheldistanz, Länge des Perihels und Perihelzeit ergeben.

II. Zur Flächengeschwindigkeit in der Bahn.

Nennen wir die Masse der Sonne k^2, diejenige eines Planeten (Kometen), der sich um dieselbe bewegt, $\mu = k^2 m$, so daß m das Verhältnis der Masse des Planeten zur Masse der Sonne ausdrückt, und verlegen den Koordinatenanfangspunkt eines beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystems in den Sonnenmittelpunkt, so lauten die Bewegungsgleichungen des Planeten, dessen Abstand von der Sonne r heiße, bei der ungestörten Bewegung (Zweikörperproblem):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0 \qquad 1)$$

$$\frac{d^2y}{dt} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0 \qquad 2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = 0 \qquad 3)$$

Bildet man 2) x — 1) y, so folgt

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist aber die Derivation nach t von: $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$, daher

$$D_t\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt = 0$$

und integriert

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c \qquad 4)$$

ähnlich

$$\frac{x\,dz - z\,dx}{dt} = c' \qquad 5)$$

und

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = c'' \qquad 6)$$

worin $c\,c'\,c''$ Integrationskonstante sind.

Bildet man weiter 4) z — 5) y + 6) x, so ergibt sich die bekannte Gleichung:

$$cz - c'y + c''x = 0, \qquad 7)$$

welche besagt, daß der Planet (Komet) zufolge der nach dem Newton'schen Gesetze stattfindenden gegenseitigen Anziehung sich in einer Ebene bewegt, welche durch den Koordinatenanfangspunkt, d. i. durch den Sonnenmittelpunkt hindurchgeht.

Fragen wir nach der graphischen Bedeutung dieser Integrationskonstanten c, c' und c''. Dieselbe ist aus Fig. 5 und Fig. 6 leicht erkenntlich. In Fig. 5 sei Σ die Sonne, m der Planet. Letzterer bewege sich in einem unendlich kleinen Zeitteilchen von m nach m'. Dabei kann mm' mit der Bahn selbst identifiziert werden. Heißt die Fläche, die bei der Bewegung von m nach m' in der Zeit Eins beschrieben wird, oder die Flächengeschwindigkeit seiner Bewegung f, so ist die Fläche $\Sigma mm'$ gleich $f\,dt$ zu setzen. Projizieren wir nun diese unendlich kleine Bahnfläche auf die xy-Ebene und lassen letztere mit

der Ekliptik zusammenfallen. Die positive x-Axe zeige nach dem Frühlingsnachtgleichenpunkte ♈, die positive y-Axe nach einem Punkte der Ekliptik mit der Länge $\lambda = 90°$ und die z-Axe nach dem Ekliptikpole mit der Breite $\beta = +90°$. Projizieren wir ferner die Bahnpunkte m und m' an die Sphäre und legen durch die betreffenden Projektionsorte Breitenkreise.

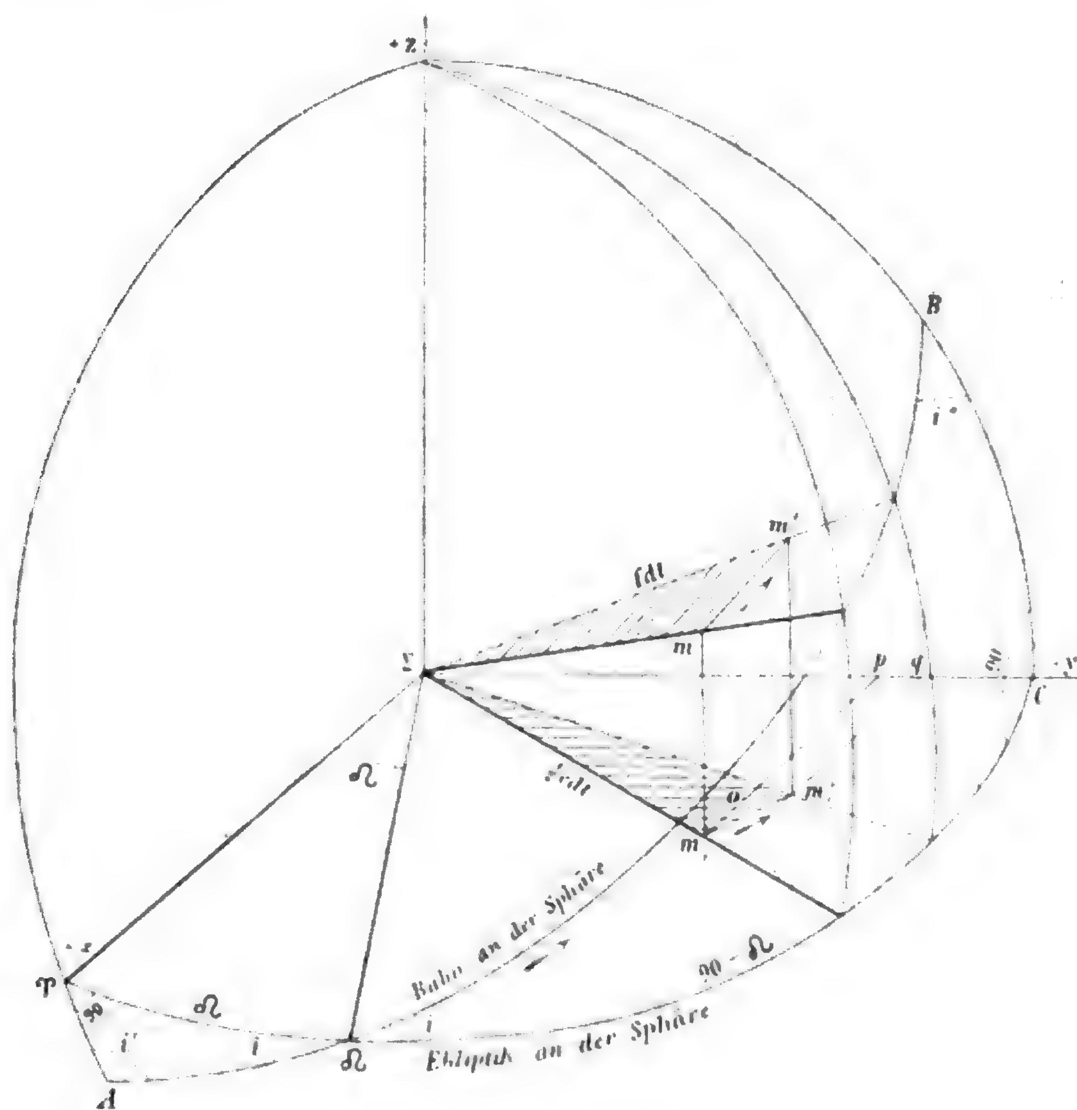


Fig. 5.

Dann ist $\Delta \Sigma m_1 m_1'$ die Projektion von $\Delta \Sigma m m'$ auf die Ebene xy. Ziehen wir noch die Parallelen zur x-Axe $m_1 p$ und $m_1' q$, ferner $m_1' o$ parallel zur y-Axe. Die Planetenbahn an der Sphäre (AB) bilde mit der Ekliptik an der Sphäre (♈C) den Winkel i (Neigung der Bahn) und schneide letztere dort, wo der Planet sich über die Ekliptik erhebt, im Punkte ☊ (aufsteigender

Knoten). $\sphericalangle \Upsilon \Sigma \Omega$ oder die sphärische Seite $\Upsilon \Omega$ ist dann die Länge des aufsteigenden Knotens und heiße ebenfalls Ω. Anderseits bilde die Bahnebene, welche mit der Ebene xy den Winkel i einschließt, mit der Ebene xz den Winkel i' und mit der Ebene yz den Winkel i''.

Betrachten wir zunächst das Projektionsdreieck in der Ekliptik xy. Aus Fig. 5 ergibt sich sofort:

$$\Delta \Sigma m_1 m_1' = \Delta \Sigma m_1 p + \Box m_1' o p q + \Delta m_1 m_1' o - \Delta \Sigma m_1' q$$
$$= \frac{yx}{2} + dy(x - dx) + \frac{dy\,dx}{2} - \frac{(y+dy)(x-dx)}{2}.$$

Somit

$$2\Delta \Sigma m_1 m_1' =$$
$$= xy + 2x\,dy - 2dx\,dy + dx\,dy - xy - x\,dy + y\,dx + dx\,dy$$
$$= x\,dy + y\,dx.$$

Hierbei ist zu beachten, daß in der Zeichnung beim Übergange von m_1 zu m_1' die Größe $m_1 o = dx$ eine Abnahme bedeutet. Fassen wir aber dx als Zuwachs auf, so folgt bei gleichzeitiger Verwendung von Formel 4) für die Ebene xy:

$$2\Delta \Sigma m_1 m_1' = x\,dy - y\,dx = c\,dt. \qquad 8)$$

Projizieren wir anderseits das Dreieck $\Sigma m m'$ auf die Ebene xz (Fig. 6), so wird, wenn in dieser die Hilfslinien $m_1 r$, $m_1' s$ und $m_1 t$ gezogen werden:

$$\Delta \Sigma m_1 m_1' = \Delta \Sigma m_1' s + \Box m_1 t s r + \Delta m_1 m_1' t - \Delta \Sigma m_1 r$$
$$= \frac{(x-dx)(z+dz)}{2} + z\,dx + \frac{dx\,dz}{2} - \frac{xz}{2},$$

somit

$$2\Delta \Sigma m_1 m_1' = xz - z\,dx + x\,dz - dx\,dz + 2z\,dx + dx\,dz - xz$$
$$= x\,dz + z\,dx.$$

Da hier wieder $dx = m_1 t = rs$ beim Übergange von m_1 nach m_1' eine Abnahme bedeutet, so folgt für dx als Zuwachs und in Benützung von 5) für die Ebene xz:

$$2\Delta \Sigma m_1 m_1' = x\,dz - z\,dx = c'\,dt. \qquad 9)$$

Endlich ist in der Ebene yz (Fig. 6):

$$\Delta\Sigma m_1 m_1' = \Delta\Sigma v m_1' + \square m_1 w v u + \Delta m_1 m_1' v - \Delta\Sigma m_1 u$$
$$= \frac{(y-dy)(z+dz)}{2} + z\,dy + \frac{dy\,dz}{2} - \frac{yz}{2},$$

also

$$2\Delta\Sigma m_1 m_1' = yz - z\,dy + y\,dz - dy\,dz + 2z\,dy + dy\,dz - yz$$
$$= y\,dz + z\,dy$$

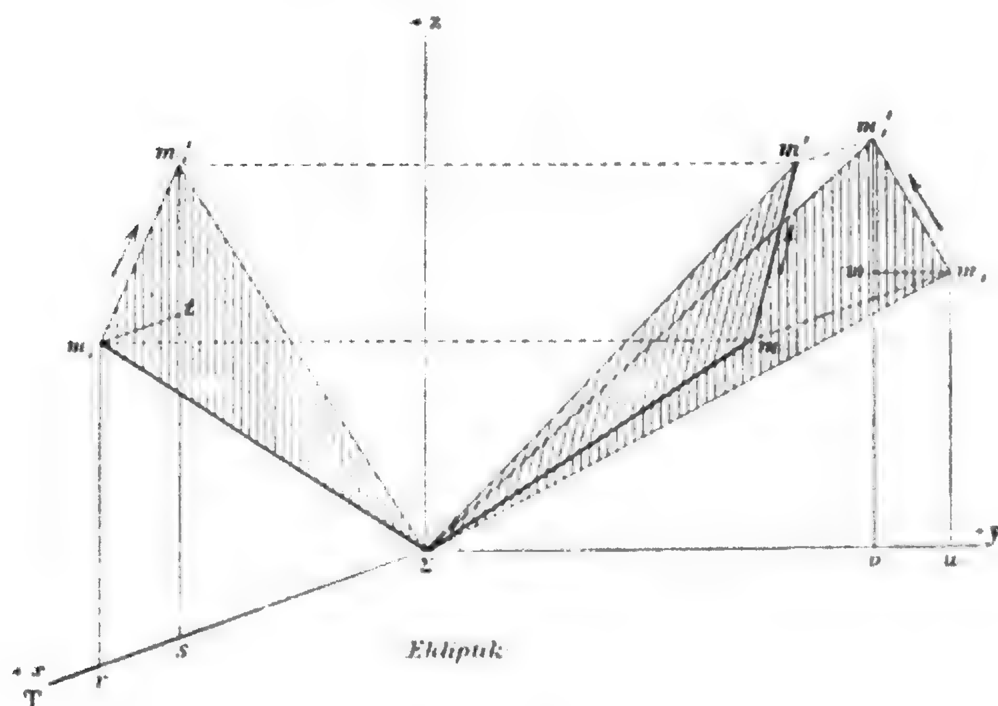


Fig. 6.

und, weil in der Zeichnung $dy = m_1 w = uv$ eine Abnahme darstellt, für die Ebene yz:

$$2\Delta\Sigma m_1 m_1' = y\,dz - z\,dy = c''dt. \qquad 10)$$

Indem die Neigungswinkel des Raumdreieckes $\Sigma m m'$ zu den Projektionsdreiecken in xy, xz und $yz \ldots i$, i' und i'' lauten, so folgt weiter nach einem bekannten Satze der Projektionslehre:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Sigma m_1 m_1' \text{ in } xy &= f\,dt \cos i \\ \text{» » } xz &= f\,dt \cos i' \\ \text{» » } yz &= f\,dt \cos i'' \end{aligned}\right\}$$

und in Verwendung der Beziehungen 8), 9) und 10):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx) &= \frac{1}{2}c\ dt = f\,dt \cos i\\ \frac{1}{2}(x\,dz-z\,dx) &= \frac{1}{2}c'\,dt = f\,dt \cos i'\\ \frac{1}{2}(y\,dz-z\,dy) &= \frac{1}{2}c''dt = f\,dt \cos i''\end{aligned}\right\}$$

woraus

$$\left.\begin{aligned}c &= 2f\cos i\\ c' &= 2f\cos i'\\ c'' &= 2f\cos i''\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

folgt.

Weiter ist aus den sphärischen Dreiecken $\Upsilon A\Omega$ und ΩBC (Fig. 5):

$$\cos i' = -\cos i \cos 90 + \sin i \sin 90 \cos \Omega$$
$$\cos i'' = -\cos i \cos 90 + \sin i \sin 90 \cos (90-\Omega),$$

somit

$$\left.\begin{aligned}\cos i' &= \sin i \cos \Omega\\ \cos i'' &= \sin i \sin \Omega\end{aligned}\right\}$$

daher

$$\left.\begin{aligned}c &= 2f\cos i\\ c' &= 2f\sin i\cos\Omega\\ c'' &= 2f\sin i\sin\Omega\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so ergibt sich

$$c^2+c'^2+c''^2 = 4f^2,$$

so daß f, die Flächengeschwindigkeit in der Bahnebene, als Konstante erscheint (zweites Kepler'sches Gesetz).

Die Gleichung der Bahnebene geht nun über in:

$$z\cos i - y\sin i\cos\Omega + x\sin i\sin\Omega = 0. \qquad 13)$$

Bezeichnen wir die siderische Umlaufszeit des Planeten in seiner elliptischen Bahn mit τ, die halbe große Axe der Bahn mit a, die halbe kleine Axe mit b, die Exzentrizität

mit e und den Parameter mit p, so kann die konstante Flächengeschwindigkeit f auch aus dem Verhältnisse der ganzen Fläche der Ellipse ($\pi a b$) zur verstrichenen Zeit (τ) hergeleitet werden. Also

$$f = \frac{\pi a b}{\tau} = \frac{\pi a . a \sqrt{1 - e^2}}{\tau}$$

und wegen $p = a(1 - e^2)$:

$$f = \frac{\pi a^2}{\tau} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{\tau}.$$

Zwischen τ und der oben eingeführten Konstante k besteht aber die Beziehung (aus welcher das dritte erweiterte Kepler'sche Gesetz folgt):

$$\tau^2 = 4 \pi^2 \frac{a^3}{k^2 (1 + m)}.$$

Wird dieses τ in f substituiert, so erhält man:

$$f = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} \, \frac{k \sqrt{1 + m}}{2 \pi a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} k \sqrt{p (1 + m)}, \qquad 14)$$

weshalb die Gleichungen 4), 5) und 6) schließlich übergehen in

$$\left.\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{p(1+m)} \cos i \\ x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{p(1+m)} \sin i \cos \Omega \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= k \sqrt{p(1+m)} \sin i \sin \Omega \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

Dieselben stellen die Beziehungen zwischen den vier Elementen der Bahn: Ω, i und a, e (letztere sind in p enthalten) sowie der Masse m, ihren Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten dar.

III. Zur Ephemeridenrechnung.

Sind die Bahnelemente eines Planeten oder Kometen gegeben und sucht man mehrere Orte desselben in Länge und Breite beziehungsweise in Rektaszension und Deklination, um diese mit den beobachteten Orten vergleichen zu können, so leitet man allgemein zuerst die heliozentrischen Koordinaten des Gestirnes in Bezug auf die Ekliptik oder den Äquator ab

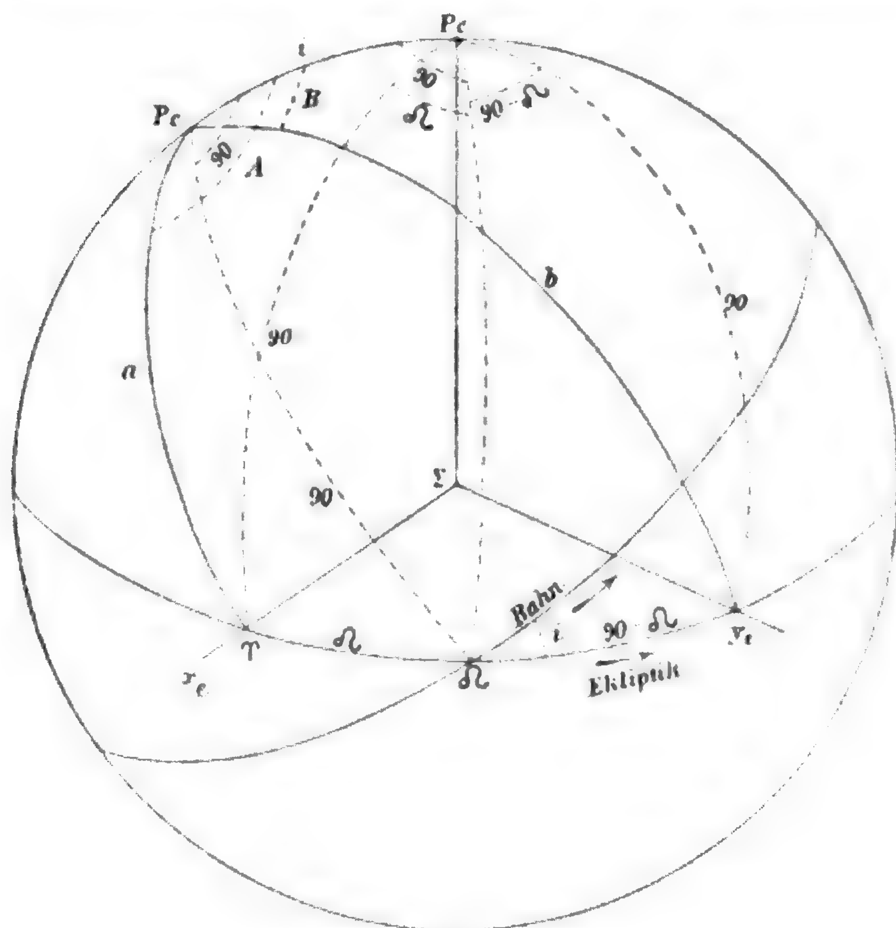


Fig. 7.

und führt in dieselben die Hilfsgrößen a, b, c, A, B, C ein, welche nur von einzelnen Bahnelementen abhängig sind und für dieselbe Bahn als Konstante erscheinen. Die geometrische Bedeutung dieser Hilfsgrößen möge hier erörtert werden.

Wählen wir vorerst die Ekliptik als Grundebene (Fig. 7). In Σ befinde sich die Sonne. Die x-Axe gehe nach dem Frühlingsnachtgleichenpunkte, die y-Axe liege in der Ekliptik und habe die Länge $= 90°$ (y_e), die z-Axe weise nach dem Ekliptikpole P_e. Zeichnen wir außer der Ekliptik an der Sphäre

auch die Bahn des Gestirnes, deren Neigung i und Knotenlänge Ω heiße. Der Pol der Bahn liege in P_c. In der Figur mögen P_e und P_c in der Ebene des Papieres gedacht werden. Nennen wir $P_c \Upsilon = a$, $P_c y_e = b$, $\sphericalangle \Upsilon P_c P_e = A$, $\sphericalangle y_e P_c P_e = B$, so ergibt sich sofort aus $\Delta \Upsilon P_c P_e$:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A &= \sin(90-\Omega) \sin 90 \\ \sin a \cos A &= \sin i \cos 90 - \cos i \sin 90 \cos(90-\Omega) \\ \cos a &= \cos i \cos 90 + \sin i \sin 90 \cos(90-\Omega) \end{aligned}\right\}$$

ferner aus $\Delta y_e P_c P_e$, in welchem der Winkel an P_e gleich $180-\Omega$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin b \sin B &= \sin(180-\Omega) \sin 90 \\ \sin b \cos B &= \sin i \cos 90 - \cos i \sin 90 \cos(180-\Omega) \\ \cos b &= \cos i \cos 90 + \sin i \sin 90 \cos(180-\Omega) \end{aligned}\right\}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\ \cos a &= \sin i \sin \Omega \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \\ \sin b \cos B &= \cos i \cos \Omega \\ \cos b &= -\sin i \cos \Omega \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Dies sind die bekannten Hilfsformeln bei direkter Bewegung. Die Größen a, b, A, B sind nur Funktionen von i und Ω, also für dieselbe Bahn konstant. Bei retrograder Bewegung ist, wenn die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik wieder kleiner als 90° aufgefaßt wird, einfach in diese Formeln für $i \ldots 180-i$ einzusetzen.

Die heliozentrischen Koordinaten bezüglich der Ekliptik lauten dann, wenn der heliozentrische Winkelabstand des Planeten beziehungsweise Kometen vom aufsteigenden Knoten u (Argument der Breite) und seine Entfernung von der Sonne r genannt wird:

$$\left.\begin{aligned} x_e &= r \sin a \sin (A+u) \\ y_e &= r \sin b \sin (B+u) \\ z_e &= r \sin i \sin u \end{aligned}\right\}^{1} \qquad 2)$$

Fügt man diesen zu berechnenden Koordinaten des Gestirnes die ekliptikalen geozentrischen Koordinaten der Sonne X_e, Y_e und Z_e an, so erhält man die geozentrischen Koordinaten des Planeten oder Kometen bezüglich der Ekliptik. Heißen dann λ, β, Δ die geozentrische Länge, Breite und Distanz des Gestirnes, so ist

$$\left.\begin{aligned} x_e+X_e &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\ y_e+Y_e &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\ z_e+Z_e &= \Delta \sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

woraus der geozentrische ekliptikale Ort des Gestirnes aus den gegebenen Elementen gefunden wird.

Wählen wir nun als Grundebene den Äquator (Fig. 8). In Σ sei wieder die Sonne. Die x-Axe zeige nach dem Frühlingsnachtgleichenpunkte ♈, die y-Axe nach einem Punkte des Äquators mit der Rektaszension von 90° (y_a), die z-Axe nach dem Pole P_a des Äquators; P_e sei der Pol der Ekliptik, P_c derjenige der Bahnebene. Verbinden wir ♈, y_a und P_a mit P_c durch größte Kreise und nennen diese Abstände a, b, c, die Winkel derselben mit dem größten Kreise $P_c P_e$ . . . A, B, C, so erhalten wir zunächst aus Δ♈$P_c P_e$ dieselben Werte für a und A, wie früher, ferner, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet, aus $\Delta y_a P_c P_e$:

$$\left.\begin{aligned} \sin b \sin B &= \sin(180-\Omega)\sin(90+\varepsilon) \\ \sin b \cos B &= \sin i \cos(90+\varepsilon) - \cos i \sin(90+\varepsilon)\cos(180-\Omega) \\ \cos b &= \cos i \cos(90+\varepsilon) + \sin i \sin(90+\varepsilon)\cos(180-\Omega) \end{aligned}\right\}$$

und aus $\Delta P_a P_c P_e$:

$$\left.\begin{aligned} \sin c \sin C &= \sin(180-\Omega)\sin\varepsilon \\ \sin c \cos C &= \sin i \cos\varepsilon - \cos i \sin\varepsilon \cos(180-\Omega) \\ \cos c &= \cos i \cos\varepsilon + \sin i \sin\varepsilon \cos(180-\Omega) \end{aligned}\right\}$$

[1] Man vergleiche dieselbe Form bei Gauss, »Theoria motus«, deutsch von A. Haase, p. 62, wo nur statt sin a und sin b . . . a und b stehen.

somit

$$
\left.\begin{aligned}
\sin a \sin A &= \cos \Omega \\
\sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\
\cos a &= \sin i \sin \Omega \\
\sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon \\
\sin b \cos B &= -\sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \cos \Omega \\
\cos b &= -\cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega \\
\sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\
\sin c \cos C &= \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega \\
\cos c &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega
\end{aligned}\right\} \quad 4)
$$

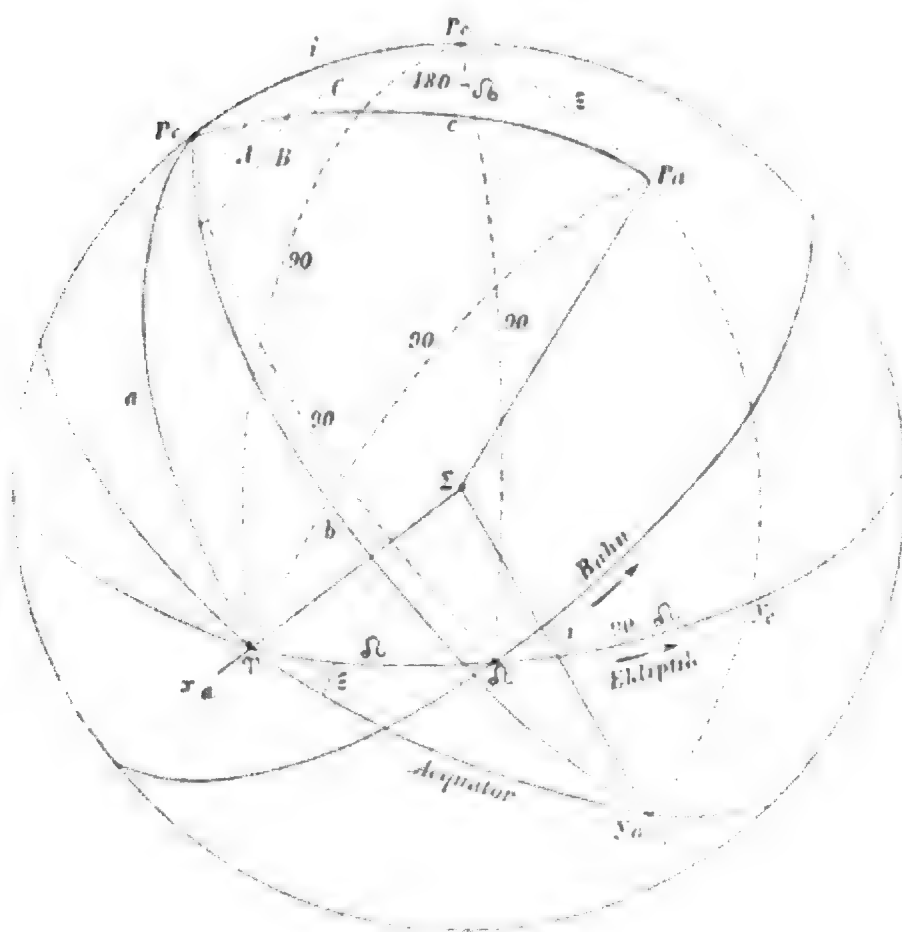


Fig. 8.

Diese Formeln sind identisch mit den gebräuchlichen zur Ermittlung der Hilfsgrößen *a*, *b*, *c*, *A*, *B*, *C* in Bezug auf den Äquator bei direkter Bewegung. Bei retrograder ist abermals für $i \ldots 180-i$ einzuführen. Wieder erscheinen diese Hilfsgrößen als Konstante, solange dieselbe Bahn in Betracht kommt.

Die heliozentrischen Koordinaten des Gestirnes bezüglich des Äquators lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= r \sin a \sin (A+u) \\ y_a &= r \sin b \sin (B+u) \\ z_a &= r \sin c \sin (C+u) \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Gibt man zu denselben die geozentrischen äquatorealen Koordinaten der Sonne X_a, Y_a, Z_a, welche sich in den Jahrbüchern vorfinden, hinzu, so erhält man die geozentrischen rechtwinkligen Koordinaten des Planeten oder Kometen in Bezug auf den Äquator. Heißen dann die geozentrischen polaren Koordinaten des Gestirnes bezüglich des Äquators: α (Rektaszension), δ (Deklination) und Δ (Distanz), so ist

$$\left.\begin{aligned} x_a + X_a &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ y_a + Y_a &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ z_a + Z_a &= \Delta \sin \delta \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

woraus der geozentrische äquatoreale Ort des Gestirnes aus den gegebenen Elementen erhalten wird.

Magnetisierungszahlen einiger organischer Verbindungen und Bemerkungen über die Unabhängigkeit schwach magnetischer Flüssigkeiten von Feldstärke und Dissoziation

von

Dr. **Stephan Meyer.**

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1904.)

Weitaus der größte Teil der Bestimmungen von Magnetisierungszahlen organischer Verbindungen rührt von S. Henrichsen her, der seine Resultate in zwei Abhandlungen[1] publiziert hat. Das Hauptergebnis seiner Untersuchungen war, daß in den organischen Substanzen die Magnetisierungszahl additiv aus den Werten für die komponierenden Atome berechnet werden kann, wenn denselben je nach der betreffenden Zahl von Bindungen verschiedene, aber für sich konstante Suszeptibilitäten zugeordnet werden.

Später haben dann H. Freitag[2] Messungen an Substanzen der aromatischen Reihe und G. Heinrich[3] solche an der Alkoholreihe vorgenommen.

Während aber die meisten Forscher, die sich mit diesen Fragen beschäftigt haben, zu dem Schlusse gekommen waren, daß die Suszeptibilität von der Feldstärke unabhängig sei, fanden Freitag und Heinrich bei Feldstärken zwischen

[1] Wied. Ann., *34*, p. 180, 1888; *45*, p. 38, 1892.

[2] Vergl. Beibl. zu den Ann. d. Phys., *24*, p. 1170, 1900.

[3] Vergl. Beibl. zu den Ann. d. Phys., *24*, p. 1171, 1900.

7500 und 11500 C. G. S. die merkwürdige Beziehung, daß das Produkt aus Feldstärke und Magnetisierungszahl konstant blieb.

Dieser Satz ist zwar seither von andrer Seite nicht bestätigt worden, hat aber in der Literatur bisher auch keinen Widerspruch gefunden. Da aber, wenn er richtig wäre, damit die schönen Ergebnisse Henrichsen's zum großen Teil illusorisch würden, scheint es mir immerhin wichtig, einige von mir angestellte Beobachtungen anzuführen, die das entgegengesetzte Resultat hatten und die ältere Annahme, daß mindestens in erster Annäherung die Magnetisierungszahl von der Feldstärke unabhängig ist, bestätigen.

Die Messungen wurden nach der Methode der eisenfreien Wage, die an einem Wagebalken ein langes, dünnwandiges Glasrohr trägt, das mit seinem geschlossenen Ende in die Mitte des homogenen Magnetfeldes hängt, durchgeführt.[1] Sie beziehen sich auf Wasser als Vergleichsmedium. Setzt man die Magnetisierungszahl desselben $\varkappa . 10^6 = -0 \cdot 66$ bei 20°,[2] oder den Molekularmagnetismus desselben $k . 10^6 = -11 \cdot 9$, so ergeben sich für Methylalkohol und Äthylalkohol bei Feldstärken $\mathfrak{H}$ zwischen 6000 und 17000 C. G. S., d. i. einem Bereiche, der denjenigen der Herren Freitag und Heinrich einschließt, die folgenden Werte für die Molekularmagnetismen k:

Methylalkohol		Äthylalkohol	
$\mathfrak{H}^2 . 10^{-6}$	$-k . 10^6$	$\mathfrak{H}^2 . 10^{-6}$	$-k . 10^6$
36	20·1	36	31·4
68	20·3	68	31·6
102	20·2	102	31·5
141	20·4	127	31·7
177	20·2	141	31·6
213	20·3	177	31·6
246	20·4	201	31·7
287	20·3	213	31·5
		246	31·8
		290	31·7

[1] Vergl. diese Sitzungsber., CVIII (II a.), p. 264.

[2] Vergl. ebenda, p. 271, und Ann. d. Phys., 6, p. 870.

Dabei ist unter k der Molekularmagnetismus, bezogen auf ein Mol. im Liter, verstanden, also wenn der Zug seitens des Magnetfeldes auf ein gleiches Volum Wasser p_{H_2O} ist,

$$k = \frac{p}{p_{H_2O}} \cdot \frac{\mu . \varkappa_{H_2O}}{1000},$$

worin p der direkt an der Wage abgelesene Zug (für diamagnetische Körper negativ), μ das Molekulargewicht, $\varkappa_{H_2O}$ die Magnetisierungszahl des Wassers ($0 \cdot 66 . 10^{-6}$ bei 20°) bedeuten.

Die kleinen Schwankungen in den Zahlenreihen liegen innerhalb der Fehlergrenzen und es ergibt sich für diese beiden Alkohole zweifellos der Satz, daß innerhalb der angewandten Feldstärken die Magnetisierungszahl von der Feldintensität unabhängig ist.

Da ferner S. Henrichsen nach einer andern Methode[1] Propylalkohol, Isobutylalkohol, Paraldehyd, Ameisensäure, Allylchlorid, Amylchlorid, Amylacetat, Isovaleriansäure, Aceton, Isobutylbromid, Isobuttersäure, Propylacetat, Äthylformiat, Propylformiat untersucht und alle diese Substanzen bezüglich der Suszeptibilität von der Feldstärke unabhängig gefunden hat, so dürfte sich der Satz wohl dahin verallgemeinern lassen, daß die Magnetisierungszahl innerhalb weiter Grenzen der Feldstärke bei schwach magnetischen (diamagnetischen) Substanzen als von der Feldintensität unabhängig anzusehen sei.[2]

Damit soll freilich die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein, daß innerhalb sehr weiter Grenzen der Feldstärke zwischen 0·1 und 40000 C. G. S., wie sie Heydweiller[3] zusammengestellt hat, nicht kleinere Änderungen der Magnetisierungszahl vorkommen könnten; doch sind selbst diese schwachen Änderungen bisher nur für Eisensalzlösungen als nicht ausgeschlossen erwiesen.

---

[1] W. A. 45, p. 39, 1892.

[2] Vergl. hiezu auch diese Sitzungsber., CVIII (II a.), p. 890 ff., 1899, die Resultate an anorganischen Verbindungen.

[3] Vergl. Ann. d. Phys. *12*, p. 614, 1903.

Magnetisierungszahlen organischer Verbindungen.

Im folgenden seien die Resultate einiger Bestimmungen an organischen Verbindungen wiedergegeben, die eine Ergänzung der von S. Henrichsen[1] erhaltenen Werte bilden.

Die Messungen sind alle mit der eisenfreien Wage gemacht, das verwendete dünnwandige Glasrohr war zirka 30 *cm* lang und hatte einen Durchmesser von zirka 16 *mm*. Die Feldstärke betrug in allen Fällen nahezu 18000 C. G. S. Der Einfluß der verdrängten Luft wurde in gleicher Weise, wie dies Henrichsen getan hat, dadurch zu eliminieren versucht, daß der Magnetismus der Luft als 3·8% — und zwar im entgegengesetzten Sinne — desjenigen von Wasser angenommen wurde.

Es wurden hauptsächlich einige homologe Reihen der Beobachtung unterzogen. Für die erste derselben, die Alkoholreihe, liegen Vergleichswerte von Henrichsen vor, die in der Tabelle in Klammern unter meinen Werten wiedergegeben sind und ein Urteil darüber erlauben, wie weit Messungen nach verschiedenen Methoden, an verschiedenem Material und bei verschiedener Feldstärke von einander abzuweichen vermögen.

In der Tabelle bedeuten M den Volumenmagnetismus, bezogen auf Wasser $= 1·000$, ρ das spezifische Gewicht bei 20°, m den spezifischen Magnetismus, μ das Molekulargewicht und k den Molekularmagnetismus, bezogen auf Wasser. Man erhält den Absolutwert von k dann aus dieser Kolumne unmittelbar durch Multiplikation der Zahlen mit der Magnetisierungszahl des Wassers $[\varkappa = -0·689(1-0·0016t).10^{-6}]$, doch ist diese Bestimmung für Wasser nicht allenthalben anerkannt worden,[2] so daß es zweckmäßiger erscheint, sich hier mit den Relativwerten zu Wasser zu begnügen.

In der letzten Kolumne ist unter Δ die Differenz der Molekularmagnetismen für den Zuwachs um CH_2 in einer homologen Reihe eingetragen.

Alle angeführten Substanzen sind diamagnetisch, weshalb das Zeichen — überall weggelassen werden konnte.

[1] Siehe die Tabelle bei S. Henrichsen, W. A., *34*, p. 205/6, 1888.

[2] Vergl. Ann. d. Phys. *6*, p. 515, 1901, und p. 870, 1901.

Substanz	Formel	M	ρ	m	μ	k	Δ
Wasser	H_2O	1·000	0·998	1·00	18	18·0	
Methylalkohol	CH_3-OH	0·765 (0·763)	0·796 (0·795)	0·96 (0·960)	32	30·7 (30·7)	
							17·1 (16·6)
Äthylalkohol	C_2H_5-OH	0·820 (0·811)	0·789 (0·789)	1·04 (1·028)	46	47·8 (47·3)	
							18·3 (16·4)
Propylalkohol	C_3H_7-OH	0·858 (0·854)	0·79 (0·804)	1·085 (1·062)	60	65·1 (63·7)	
							16·3 (16·9)
Normalbutylalkohol	C_4H_9-OH	0·873	0·79	1·10	74	81·4	
Isobutylalkohol	C_4H_9-OH	0·889 (0·873)	0·80 (0·802)	1·11 (1·089)	74	82·1 (80·6)	
							16·7 (15·5)
Amylalkohol	C_5H_{11}-OH	0·907 (0·885)	0·814 (0·811)	1·115 (1·092)	88	98·1 (96·1)	

Substanz	Formel	M	ρ	m	μ	k	Δ
Pentan	C_5H_{12}	0·814	0·620	1·31	72	94·3	
Hexan	C_6H_{14}	0·827	0·657	1·26	86	108·4	14·1
Heptan	C_7H_{16}	0·820	0·661	1·24	100	124·0	15·6
Oktan	C_8H_{18}	0·814	0·680	1·20	114	137·0	13·0
Benzol	C_6H_6	0·858	0·880	0·975	78	76·0	
Toluol	C_7H_8	0·867	0·886	0·98	92	90·2	14·2
Orthoxylol	C_8H_{10}	0·920	0·84	1·09	106	116·0	15·8
Cumol	C_9H_{12}	0·910	0·84	1·085	120	130·0	14·0
Cymol aus Campher	$C_{10}H_{14}$	0·901	0·83	1·08	134	145·0	15·0
dto. ex oleo Cumini	$C_{10}H_{14}$	0·901					

Substanz	Formel	M	ρ	m	μ	k	Δ
Anilin	$C_6H_5.NH_2$	0·976	1·022	0·955	93	88·8	
Dimethylanilin	$C_6H_5.N(CH_3)_2$	0·948	0·955	0·992	121	120·0	2×15·6 = 31·2
Diäthylanilin	$C_6H_5.N(C_2H_5)_2$	0·957	0·939	1·02	149	152·0	2×16·0 = 32·0
Toluidin	$CH_3.C_6H_4.NH_2$	0·988	1·003	0·988	107	105·8	17·0
Jodäthyl	C_2H_5J	1·162 (1·202)	1·935 (1·932)	0·602 (0·622)	155·5	93·6 (97·1)	
Bromäthyl	C_2H_5Br	0·994 (1·003)	1·460 (1·464)	0·681 (0·685)	109	74·2 (74·7)	
Monochlorbenzol	C_6H_5Cl	0·964	1·10	0·876	112·4	98·5	
Brombenzol	C_6H_5Br	1·041	1·49	0·699	157	109·7	
Jodbenzol	C_6H_5J	1·144	1·64	0·698	203·5	142·0	
Safrol	$C_6H_3(O.CH_2)O.CH_2.CH:CH_2$	0·907	1·09	0·832	162	134·8	
Isosafrol	$C_6H_3(O.CH_2.O)CH:CH.CH_3$	0·927	1·11	0·835	162	135·3	
Methyleugenol	$C_6H_3(OCH_3)_2CH_2.CH:CH_2$	0·939	1·03	0·912	178	162·3	
Methylisoeugenol	$C_6H_3(OCH_3)_2.CH:CH.CH_3$	0·939	1·05	0·894	178	159·1	

Was zunächst die Übereinstimmung der von Henrichsen gefundenen Werte der Alkoholreihe sowie von Jodäthyl und Bromäthyl mit meinen Messungen anbelangt, so ist dieselbe zwar keine vollständige, aber mit Rücksicht auf die sehr verschiedenen Versuchsbedingungen befriedigend. Es geht jedenfalls aus dieser Übereinstimmung abermals hervor, daß eine wesentliche Abhängigkeit von *k* von der Feldstärke nicht angenommen werden kann.

Zieht man die Differenzen der Molekularmagnetismen homologer Reihen für den Zuwachs um die Gruppe CH_2 in Betracht, so liefern die

	Alkohole		Paraffine
	17·1		14·1
	18·3		15·6
	16·3		13·0
	16·7		
Mittel...	17·1	Mittel. .	14·2

	Benzolhomologe		Aniline
	14·2		15·6
	15·8		15·6
	14·0		16·0
	15·0		16·0
Mittel...	14·75	Mittel...	15·8

und das Toluidin zum Anilin den Wert 17·0.

Henrichsen hat aus den folgenden Gruppen für den Zuwachs um CH_2 erhalten:

Alkohole	16·3
Aldehyde	16·4
Säuren, Ester................	16·4
Chloride	15·9
Bromide	16·9
Jodide	15·6
Sulfide	16·2
Propylenbromid — Äthylenbromid	15·9

Hiezu ergeben meine Messungen:

Alkohole	17·1
Paraffine	14·2
Benzole	14·8
Aniline	17·0 und 15·8

Henrichsen zog aus seinen Zahlen den Schluß, daß der Molekularmagnetismus der Gruppe CH_2 gleich 16·3 zu setzen und additiv berechenbar sei. Es scheint mir aber doch aus meinen Resultaten naheliegend, anzunehmen, daß diese additive Berechnungsweise wohl in gröbster erster Annäherung gestattet sein mag, jedoch der Eintritt von CH_2 in stereochemisch genommen engeren Raum vielleicht einen geringeren Zuwachs der Diamagnetisierung hervorbringe, zumindestens aber von dem Aufbaue des Moleküls abhänge. Denn die Schwankungen der einzelnen Δ innerhalb einer Reihe sind zwar ziemlich beträchtlich, jedoch die Unterschiede der Mittelwerte doch zu bedeutend, um sich aus anderweitigen Störungen ableiten zu lassen.

Die von mir untersuchten isomeren Substanzen Normalbutylalkohol, Isobutylalkohol, Safrol, Isosafrol, Methyleugenol, Methylisoeugenol lieferten im Einklange mit Henrichsen's Beobachtungen an andern isomeren Körpern das Ergebnis, daß zumindest in erster Annäherung hier Unterschiede der Magnetisierungszahlen nicht zu konstatieren sind.

Für die Halogenverbindungen ergibt sich teilweise gute Übereinstimmung der Additivität. Nimmt man z. B. die von Henrichsen gegebenen Werte für Chloroform und Bromoform und die obigen für Chlorbenzol und Jodbenzol:

$$\begin{matrix} CHCl_3 & 80 \cdot 7 \\ CHBr_3 & 115 \cdot 7 \end{matrix} > 35 = 3 \times 11 \cdot 1 \qquad \begin{matrix} C_6H_5Cl & 98 \cdot 5 \\ C_6H_5Br & 109 \cdot 7 \end{matrix} > 11 \cdot 2,$$

so ergeben sich für Br—Cl dieselben Differenzen.

Dagegen liefern

$$\begin{matrix} C_2H_5Br & 74 \cdot 2 \\ C_2H_5J & 93 \cdot 6 \end{matrix} > 19 \cdot 4 \qquad \begin{matrix} C_6H_5Br \\ C_6H_5J \end{matrix} > 32 \cdot 3$$

in anderm Falle die Differenzen J—Br sehr von einander abweichende Zahlen. Freilich war in diesem Falle die Reinheit der zersetzlichen Substanzen nicht verbürgt.

Man wird also auch in diesem Falle bei der Anwendung der additiven Beziehung sehr vorsichtig sein müssen.

Es scheint sonach sichergestellt, daß auch bei den organischen Verbindungen die Art der Lagerung im Moleküle nicht ohne Einfluß auf das magnetische Verhalten zu sein braucht.

Da man nun überhaupt den verschiedenen Bindungen Einwirkungen auf die Suszeptibilität zuerkennen muß, schien es mir wichtig, auch die Abhängigkeit von der Dissoziation in den Lösungen nochmals in weiteren Grenzen genauer zu untersuchen. Das Ergebnis war dasselbe, das bisher von verschiedenen Seiten erhalten worden ist, nämlich merkliche Unabhängigkeit der Magnetisierungszahl von der Dissoziation. Da die Zahlen aber immerhin von Interesse sein können, mögen die Angaben für Kobaltchloridlösung und Kupfersulphatlösung hier Platz finden.

In der Tabelle bedeuten p den direkt an der Wage abgelesenen, der Magnetisierungszahl proportionalen Zug, ρ die Dichte, c die relative Volumenkonzentration.

Kobaltchlorid	p (Gramm)	$\rho_{15°}$	c
I.	+2·2	1·122	1·000
II.	+1·03	1·067	0·500
III.	+0·433	1·034	0·250
IV.	+0·138	1·017	0·125
V.	—0·007	1·008	0·0625
VI.	—0·0845	1·004	0·0312
VII.	—0·126	1·002	0·0156
VIII.	—0·143	—	0·0078
∞ = Wasser.	—0·163	0·998	0·000

Kupfersulphat	p	ρ	c
I.	+0·227	1·1774	1·000
II.	+0·030	1·090	0·500
III.	—0·062	1·046	0·250

Kupfersulphat	p	ρ	c
IV.	—0·114	1·023	0·125
V.	—0·138	1·012	0·062
VI.	—0·148	—	0·031
VII.	—0·156	—	0·016
∞ = reines Wasser. .	—0·163	0·998	0·000

Trägt man diese Werte graphisch auf, so erhält man nahezu exakte gerade Linien, obgleich die Dissoziationskoeffizienten innerhalb der verwendeten Grenzen der Konzentrationen außerordentlich verschiedene Größen sind.

Es bestätigt sich sonach, daß die Magnetisierungszahlen von der Dissoziation als unabhängig anzusehen sind.

Über das Newton'sche Phänomen der Scintillation

(II. Mitteilung)[1]

von

Karl Exner (k. M. k. Akad.) und Dr. **W. Villiger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juni 1904.)

Die Fixsterne erscheinen bei Betrachtung durch ein Fernrohr von hinreichend großer Öffnung als helle, ruhige Scheiben. Der horizontale Durchmesser eines solchen Sternscheibchens wurde mit D bezeichnet und $\frac{1}{D_m}$, wo D_m ein mittleres D an gegebenem Orte bezeichnet, als das optische Vermögen (O. V.) der Atmosphäre an dem betreffenden Orte der Erdoberfläche in Anspruch genommen.

Diesbezügliche Messungen wurden hauptsächlich an der Sternwarte in München durchgeführt und die Resultate derselben in der ersten Mitteilung zusammengestellt. Es ergab sich in Übereinstimmung mit der richtigen Erklärung der Scintillation:[2]

1. Mit der Zenithdistanz wächst D, die Wellenbewegung am Mondrande und die Zitterbewegung des Sternes, die sich

[1] Erste Mitteilung siehe diese Sitzungsber., Bd. CXI, Abt. II a., November, 1902.

[2] Über die Scintillation. Eine Monographie. K. Exner; Tempsky, 1891.

zeigt, wenn die Öffnung des Instrumentes hinreichend reduziert wird.[1]

2. Sterne ungleicher Größe zeigen unter sonst gleichen Umständen angenähert gleiche *D*.

3. Die Zitterbewegung eines Fixsternes bei hinreichend reduzierter Öffnung des Instrumentes stimmt genügend überein mit dem Durchmesser *D*, den der Stern bei voller Öffnung eines großen Instrumentes zeigt.

4. Steht ein Fixstern in der Nähe des Mondes, so ist sein *D* nahe gleich der Wellenbewegung des vertikalen Mondrandes.

Mit Rücksicht auf Satz 1, nach welchem das *D* eines Sternes von der Zenithdistanz abhängt, empfiehlt es sich, die Messungen zur Bestimmung des O. V. auf eine begrenzte Zenithdistanz zu beziehen, etwa auf die wahre Zenithdistanz $\zeta = 70$ bis 80°.

Sterne ungleicher Größe sollen nach der gegebenen Erklärung der Scintillation unter sonst gleichen Umständen gleiche *D* zeigen. Nach Satz 2 ist dies nur angenähert der Fall, die lichtschwachen Sterne zeigen etwas zu kleine *D*. Es rührt dies offenbar daher, daß bei letztern die periphersten Teile des Scheibchens wegen zu geringer Lichtstärke nicht mehr wahrgenommen werden, obwohl sie vorhanden sind. Um diese Ungenauigkeit zu vermeiden, kann man bei lichtschwachen Sternen statt *D* die Zitterbewegung des Sternes (Doppelamplitude) messen, die dem *D* gleich ist, wo dann die Größe des Sternes gleichgültig ist. Daß der bei lichtschwachen Sternen etwas zu geringe Ausfall der gemessenen *D* den oben angeführten Grund hat, findet eine Bestätigung in dem Umstande, daß in den Fällen, wo die Abweichungen größer sind, im Beobachtungsjournale sich der Vermerk »nebelig« findet. Es wird sich übrigens zeigen, daß der Fehler hinreichend klein ist, um vernachlässigt werden zu können.

Verwendet man also zur Bestimmung des O. V. eines Ortes die Methode der Durchmesserbestim-

[1] Der erste, sich auf *D* beziehende Teil dieses Satzes wurde zuerst von E. R. v. Oppolzer ausgesprochen.

mung, so wird man mit Vorteil Sterne von angenähert gleicher Größe zu wählen haben, etwa Sterne von 3. bis 5. Größe.

Die in München mit dem Refraktor von 284 *mm* durchgeführten *D*-Messungen wurden nicht speziell zur Bestimmung des O. V. des Ortes, sondern zu verschiedenen Zwecken angestellt. Gleichwohl gestattet die große Zahl der Messungen eine hinreichend angenäherte Bestimmung des O. V.

Um den Einfluß der Sterngröße auf die *D*-Bestimmung abschätzen zu können, wurden aus den Tafeln der ersten Mitteilung alle sich auf Sterne 2. Größe beziehenden *D*-Messungen zusammengestellt, die sich zugleich auf Zenithdistanzen von 70 bis 80° beziehen, und ebenso verfahren mit den Sternen 4. und 6. Größe.

Es ergab sich:

$\zeta = 70$ bis 80° (wahre Zenithdistanz).

	D	Seite der 1. Mitteilung	
Sterne 2. Größe	3·1"	21	Mittel: $D_m = 3·2''$
	3·7	22	
	4·2	24	
	2·7	25	
	2·5	26	
Sterne 4. Größe	2·5"	22	Mittel: $D_m = 3·3''$
	2·7	22	
	2·5	22	
	2·9	25	
	2·1	25	
	2·7	25	
	2·9	28	
	4·0	32	
	5·0	32	
	4·3	42	
	3·7	44	
	3·4	44	
	3·8	45	

	D	Seite der I. Mitteilung	
Sterne 6. Größe	1·7″	14	Mittel: $D_m = 3 \cdot 4''$
	2·1	14	
	2·1	14	
	2·5	15	
	2·5	15	
	3·2	15	
	3·6	19	
	6·5	24	
	6·0	24	
	6·2	24	
	2·4	28	
	3·0	45	
	3·3	45	

Kürzt man diese für Sterne 2., 4. und 6. Größe erhaltenen Zahlen $D_m = 3 \cdot 2''$, $3 \cdot 3''$, $3 \cdot 4''$ auf ganze Sekunden, so erhält man als Mittel der Sterndurchmesser D für Sterne 2., 4. und 6. Größe bei $\zeta = 70$ bis $80°$ dieselbe Zahl 3 und O. V. $= \frac{1}{3}$.

Man ersieht hieraus, daß der Einfluß der Sterngröße auf die D-Messung innerhalb der angenommenen Grenzen so gering ist, daß man bei der Bestimmung des O. V. des Ortes, wie schon erwähnt, Sterne 3. bis 5. Größe zulassen könnte.

In der folgenden Tabelle sind aus den Zahlen des Anhanges der ersten Mitteilung die D aller jener Sterne zusammengestellt, die der Bedingung $\zeta = 70$ bis $80°$ und der Größe 3 bis 5 entsprechen, und zwar unter Einschluß der durch Messung der Zitterbewegung und der Wellenbewegung des vertikalen Mondrandes erhaltenen Zahlen.

$\zeta = 70$ bis $80°$, Sterngröße $= 3$ bis 5.

Seitenzahl der I. Mitteilung	Sterngröße	D	
19	5	4·3″	
22	4	2·5	
22	4½	2·7	
23	4	2·5	
25	4½	3·4	
25	4	2·9	
25	4½	2·2	
25	4	2·7	
25	4	2·1	Mittel sämtlicher
26	4	2·2	$D = 3 \cdot 39'' = 3''$;
28	4	0·0	
28	4	2·9	dem entspricht:
32	4	4·0	$O.V. = \frac{1}{3''} = \frac{1}{3}$.
32	4	5·0	
41	3	5·2	
41	3	5·6	
41	3	5·0	
42	4	4·5	
42	4	4·3	
43	4	4·7	
43	4	3·2	
44	4	3·7	
44	4	3·4	

Kürzt man also das Mittel der hier erhaltenen D auf ganze Sekunden, so ergibt sich auch hier für das O. V. die Zahl $\frac{1}{3}$.

Es wurden schließlich sämtliche D-Messungen der I. Mitteilung auf ganze Sekunden gekürzt und das Mittel genommen. Ausgeschieden wurden hiebei die Messungen der vertikalen

Sterndurchmesser und jene der Wellenbewegung am horizontalen Mondrande. Bei Sternen, die das Beugungsbild der Objektivöffnung zeigten, wurde $D = 0$ gesetzt.

Es ergab sich:

Mittel sämtlicher *D* in ganzen Sekunden.

Seite der I. Mitteilung	*D* in ganzen Sekunden	Summe der *D*	Zahl der *D*
14, 15	1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4	22	9
16, 17	0, 0, 0, 1, 1, 1, 1	5	8
18, 19	1, 4, 4, 4, 4, 4, 4	25	7
20, 21	3, 3, 3, 3, 3, 6, 2, 3	26	8
22, 23	3, 4, 3, 3, 1, 6	29	5
24, 25	6, 6, 6, 4, 3, 3, 3, 2, 3	36	9
26, 27	6, 8, 11, 8, 4	37	5
28, 29	3, 0, 2, 3, 2, 0, 0, 3, 3, 0, 0	16	11
30, 31	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 3, 4	21	12
32, 33	3, 4, 5, 0, 0	12	5
34, 35	0, 0	0	2
36, 37	0, 0, 5, 5, 4	14	5
38, 39	3, 3, 3, 3, 6	18	5
40, 41	5, 5, 4, 5, 6, 7, 6	38	7
42, 43	3, 5, 4, 4, 3, 5, 3, 6, 5	38	9
44, 45	3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 4	26	8
		363	115

Demnach ist das Mittel sämtlicher *D* gleich 363 : 115 in ganzen Sekunden, also auch hier das optische Vermögen $O.\,V. = \frac{1}{3}$.

Obgleich bei den hier benützten Messungen keineswegs, wie es bei den Bestimmungen des O. V. eines Ortes der Fall sein soll, die Messungen räumlich und zeitlich gleichmäßig verteilt waren, geht doch aus den erhaltenen Zahlen hervor, daß man mit einiger Sicherheit das O. V. für die Sternwarte in München gleich $\frac{1}{3''}$ oder kürzer gleich $\frac{1}{3}$ setzen könne. Seien als Beispiele noch einige Notizen über D-Messungen beigefügt.

Carlini[1] erhielt bei Beobachtungen am Polarstern Oscillationen von 10″ bis 12″. Dies würde in der gegebenen Himmelsrichtung und zur gegebenen Zeit einem O. V. der Atmosphäre $= \frac{1}{11}$ entsprechen.

In einem analogen Fall erhielt Struve einen Durchmesser von 8″, entsprechend einem O. V. $= \frac{1}{8}$.

Montigny fand als größte Amplitude der Zitterbewegung entfernter terrestrischer Objekte bei Tage 25″, entsprechend einem O. V. der eingeschalteten Luftstrecke $= \frac{1}{50}$.

Dr. Holetschek fand für den Spielraum der Wellenbewegung des Mondrandes an der Sternwarte in Wien:

Datum der Beobachtung	Höhe des Mondes	Spielraum der Bewegung eines Punktes des Mondrandes
29. Oktober 1871	58°	15″
18. Februar 1872	66°	10″
10. Dezember 1872	51°	14″

Dies würde für Zeit und Richtung der Beobachtungen ergeben:

$$\text{O. V.} = \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}.$$

[1] Humboldt, Kosmos III, 293.

Douglass und See erhielten auf dem Lowell-Observatory als doppelte Amplitude der Zitterbewegung der Fixsterne 1″ bis 4″, entsprechend einem O. V. $= \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$.

Aus 26 Messungen der Krümmungen der in das Scintillometer fallenden Lichtwellenflächen und leider nur zwei Messungen der Erstreckungen der konkaven oder konvexen Teile der Wellenflächen wurde in Wien eine mittlere Amplitude der Zitterbewegung der Sterne zu 6 Sekunden berechnet. Dieses äußerst unsichere Resultat würde einem O. V. $= \frac{1}{12}$ entsprechen.

Die Bestimmung des O. V. einer Sternwarte ist mit dem Aufwand einer nur geringen Mühe verbunden. Es würde genügen, durch ein Jahr in jedem Monate einmal vier *D*-Messungen nach den Weltgegenden an Sternen 3. bis 5. Größe und 70 bis 80° wahrer Zenithdistanz vorzunehmen.

Die obigen Zusammenstellungen und Folgerungen aus den Münchener Messungen haben, obwohl nur ein rohes Näherungsverfahren angewendet wurde, doch so gute Resultate ergeben, daß es wünschenswert erschien, noch genauer auf den Gegenstand einzugehen, wie im folgenden geschieht.

In der ersten Mitteilung sind die Messungen, die in den Jahren 1901 bis 1902 mit dem Refraktor von 284 *mm* freier Öffnung an der Münchener Sternwarte angestellt wurden, einer eingehenden Diskussion auf die Erklärung der Scintillation im allgemeinen behandelt worden, ohne dabei auf das optische Vermögen (O. V.) des Beobachtungsortes näher einzugehen. Ein Versuch, aus den vorhandenen Messungen auf die Güte des Beobachtungsortes München genauere Schlüsse zu ziehen, soll hier gemacht werden. Es muß dabei im voraus bemerkt werden, daß für eine eingehende Behandlung des Gegenstandes die Messungen noch zu wenig zahlreich sind; es fehlen besonders mehr größere Reihen von Messungen innerhalb eines Abends, die von 0 bis 90° Zenithdistanz gehen.

Auf p. 9 der ersten Mitteilung wurde der Satz abgeleitet:

»Sterne ungleicher Größe zeigen unter sonst gleichen Umständen angenähert gleiche Durchmesser *D*.«

Dieser Satz kann nur als erste Annäherung bezeichnet werden und wollen wir versuchen, die Abhängigkeit der *D*-Werte von der Sternhelligkeit (*m*) näher zu bestimmen. Wir müssen uns dabei vor allem darüber klar sein, daß *D* von den folgenden Umständen abhängig ist:

1. Luftzustand,
2. Zenithdistanz ζ,
3. Helligkeit der Sterne,
4. freie Öffnung der Objektives.

Um die Abhängigkeit von der Helligkeit der Sterne zu ermitteln, wird man also je eine *D*-Messung von zwei verschieden hellen Sternen einer Beobachtungsreihe, welche Messungen auch zeitlich nicht zu weit voneinander abliegen, mit derselben Objektivöffnung und genähert gleicher Zenithdistanz angestellt sind, miteinander kombinieren. Da auch innerhalb desselben Abends der Luftzustand öfters wechselt, so wurden mehrere Messungen von der Mitnahme ausgeschlossen, sobald entsprechende Bemerkungen über die Beobachtungen das angezeigt erscheinen ließen. Es gilt das besonders von den Messungen, bei denen bemerkt wurde, daß der *D*-Wert während der Beobachtung innerhalb einiger Minuten große Schwankungen ausführt.

Mit diesen Bedingungen ist es möglich, aus sämtlichen Messungen der ersten Mitteilung 25 Sternpaare auszuwählen und mag noch bemerkt werden, daß dabei die Differenz der Zenithdistanz in keinem Falle 2° übersteigt, ferner liegen die Messungen eines Sternpaares zeitlich im Maximum 15 Minuten auseinander.

Es bezeichne noch:

Δm die Helligkeitsdifferenz der Komponenten eines Sternpaares, in Größenklassen ausgedrückt;

ΔD die Differenz der *D*-Werte der jeweiligen Komponenten;

ζ das Mittel der Zenithdistanzen, in denen die Messungen angestellt;

D_m das Mittel der beiden D-Werte;

$D' = \frac{\Delta D}{\Delta m}$ die Zunahme von D, wenn die Sternhelligkeit um eine Größenklasse wächst.

Dann erhält man folgende Werte:

Tabelle A.

Sternpaar Nr.	D_m	ζ	D'	Mittelwerte für ζ	Mittelwerte für D'
1	0·97	11°4	−0·10		
2	0·88	13·4	−0·06	19°4	−0·06
3	2·70	13·9	−0·06		
4	0·86	28·8	−0·01		
5	0·86	31·5	−0·01		
6	2·75	32·9	+0·10	38·8	−0·01
7	1·00	34·7	−0·02		
8	0·88	46·2	−0·09		
9	0·94	50·5	−0·02		
10	0·89	51·4	+0·02		
11	3·65	62·8	+0·18	59·2	+0·02
12	1·43	63·4	−0·04		
13	2·67	67·8	−0·03		
14	3·96	73·0	+0·51		
15	3·20	74·4	+0·17		
16	3·18	74·6	+0·43		
17	2·84	75·6	+0·33	75·6	+0·31
18	3·58	75·9	+0·20		
19	2·38	76·2	+0·21		
20	3·79	76·4	+0·34		
21	2·61	78·9	+0·25		
22	3·44	82·8	+0·37		
23	5·36	82·5	+0·82	83·0	+0·34
24	4·31	84·4	−0·10		
25	3·87	82·3	+0·28		

In den letzten beiden Kolumnen sind für ζ und D' über entsprechend abgegrenzte Gebiete Mittelwerte gebildet und es ist daraus zu entnehmen, daß die D-Werte von $\zeta = 0°$ bis 60° etwa mit zunehmender Sternhelligkeit kleiner, von $\zeta = 60°$ bis 90° dagegen größer gemessen werden.

Der wenn auch kleine, in der Reihe der D' jedoch deutlich ausgesprochene negative Wert ist als Messungsfehler zu erklären. Die Messungen sind mit einem Fadenmikrometer angestellt, das zur Bestimmung von Scheibendurchmessern unter einer Bogensekunde und verschiedener Helligkeit die Abweichungen erklärlich macht. Bei geringerer Intensität der Beugungsscheibchen wird beim Messen immer die Tendenz bestehen bleiben, zwischen den Fäden das Scheibchen noch besser zu erkennen. Die Vergrößerung des negativen Betrages von D' mit der Abnahme der Zenithdistanz ist eine Folge der größern Unsicherheit der Messungen in der Nähe des Zenithes, verursacht durch die unbequeme Lage des Beobachters.

Bei den Bemerkungen über die Genauigkeit der D-Messungen (I. Mitteilung, p. 46) ist auf diesen Umstand schon hingewiesen worden. Die unbequeme Lage des Beobachters bei Zenithdistanzen unter 30° verursacht unwillkürlich eine Abnahme der Aufmerksamkeit des Beobachters für die eigentliche Meßverrichtung.

Von $\zeta = 60°$ an werden die D' positiv, entsprechend der Vergrößerung der Sternscheibchen durch Scintillation. Diese sind naturgemäß immer sehr unscharf begrenzt, verwaschen, die Abnahme der Intensität am Rande der Scheibchen ist eine allmähliche, so daß beim Messen der D-Werte hellerer Sterne die Begrenzung der Scheibchen mehr nach außen verlegt wird.

Die in Tabelle A erhaltenen Werte für D' können nun benützt werden, um die D-Messungen auf eine bestimmte Sterngröße, wir wählen dafür $m = 6 \cdot 0$, zu reduzieren. Zu der Reduktion werden die D' einer durch graphische Ausgleichung erhaltenen Kurve entnommen und damit die fünf Messungsreihen, die sich über größere ζ-Intervalle erstrecken, auf $D_{6 \cdot 0}$ reduziert.

Tabelle *B*.

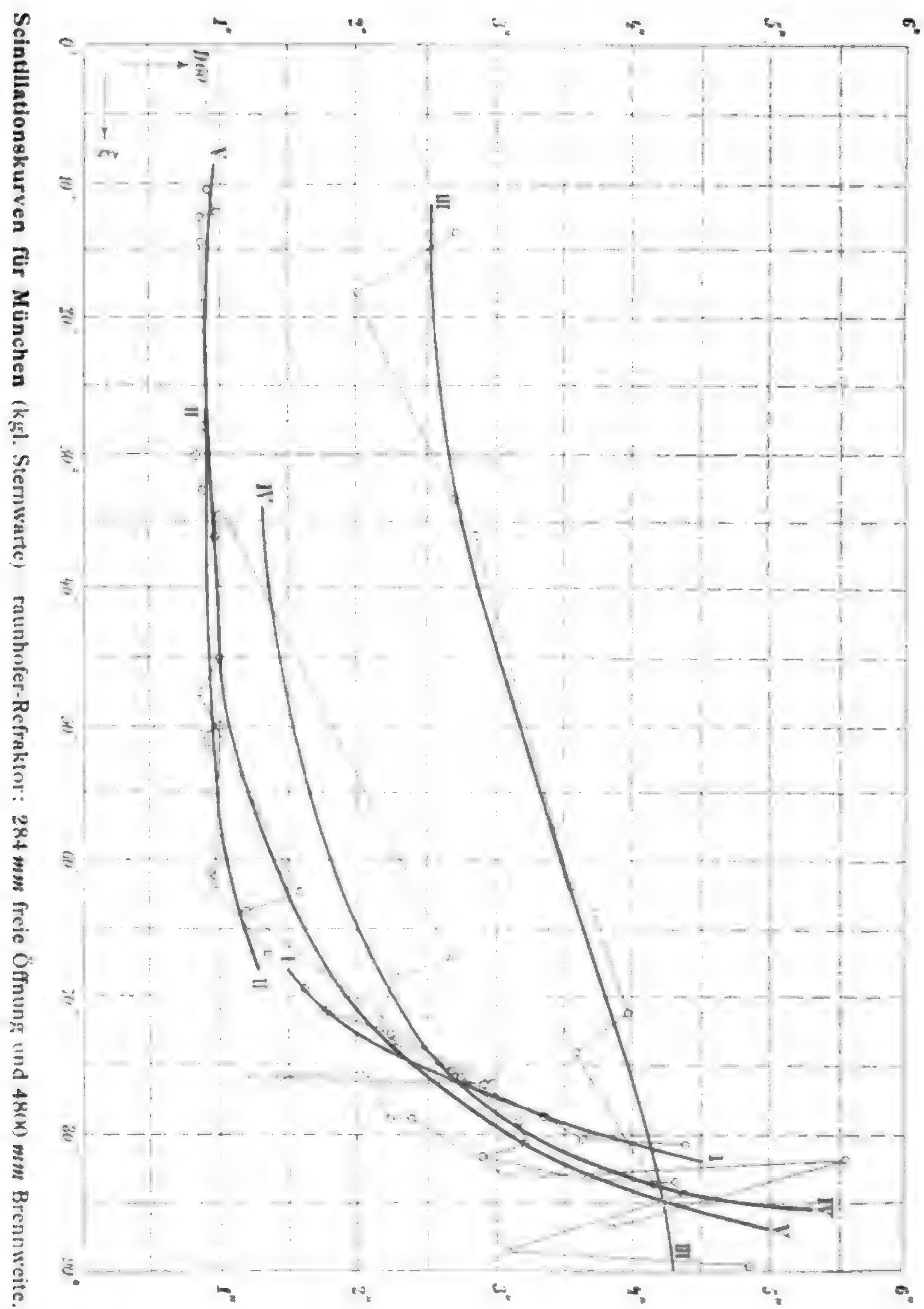
Scintillationskurven.

Datum	Stern	Größe (m)	Luft	Bild	D_m	ζ	$D_{6\cdot 0}$	Kurve
		m						
1901 September 29	*SD* —3°3891	6·5	I—II	II	1°50	69°4	1°58	I
		6·5	I—II	II	1·70	71·0	1·80	
		6·5	I—II	II	2·10	72·6	2·22	
		6·5	I—II	II	2·11	73·4	2·25	
		6·5	I—II	II	2·50	75·4	2·63	
		6·5	I—II	II	2·60	75·8	2·70	
		6·5	I—II	II	3·21	79·0	3·37	
		6·5	I—II	II	3·50	80·2	3·63	
		6·5	I—II	II	4·24	81·0	4·41	
1901 Dezember 5	II 213	4·9	II	II—I	0·84	32·9	0·86	II
	II 211	7·8	II	II—I	0·87	30·0	0·82	
	II 215	6·5	II	II—I	0·86	27·7	0·84	
	II 671	5·9	II	II—III	0·88	51·8	0·88	

	II	672	4·1	II	II—III	0·91	51·0	0·87	
	II	683	7·5	II	II—III	0·96	50·1	0·99	
	II	1030 Hauptst.	5·7	II	III	0·97	61·9	0·94	
	II	1030 Begleit.	5·7	II	III	0·95	61·0	0·92	
	II	1028	7·5	II	III	0·97	67·3	1·27	
1901 Dezember 16	II	447	5·6	III	IV	2·66	13·9	2·69	III
	II	448	7·0	III	IV	2·75	13·9	2·68	
		974	5·0		IV	2·02	18·2	2·08	
	I	753	5·7	III	IV	2·69	32·3	2·70	
	II	755	4·5	III	IV	2·81	33·6	2·84	
	I	755	7·3	III	IV	3·42	61·8	3·54	
	I	757	4·8	III	IV	3·88	63·9	3·73	
	I	943	4·7	III	IV	4·32	71·4	3·98	
	I	942	6·1	III	IV	3·59	74·3	3·62	
	I	1047	5·8	III	IV	4·28	84·2	4·20	
	I	1046	6·4	III	IV	4·34	84·7	4·38	
	I	1072	3·8	II	IV	3·84	88·6	3·07	
	I	1395	3·9	III	IV	5·63	89·8	4·89	

Datum	Stern	Größe (m)	Luft	Bild	D_m	ζ	$D_{6\cdot 0}$	Kurve
1902 Jänner 8	I 1212	6·5	II	I—II	1ᵐ02	34°6	1ᵐ01	IV
	I 1210	3·7	II	I—II	0·99	34·8	1·04	
	I 1487	5·9	II	IV	2·70	67·2	2·68	
	I 1485	4·0	II	IV	2·65	68·4	2·21	
	I 1396	7·1	II	IV	1·83	73·1	2·15	
	ζ Urs. maj.	2·1	II	III—IV	4·20	76·4	2·95	
	ζ Urs. maj. Begleit.	4·5	II	III—IV	3·38	76·4	2·90	
	g Urs. maj.	4·0	II	III—IV	2·89	76·3	2·15	
	ζ Urs. maj.	2·1	II	II—III	2·69	76·3	1·44	
	ζ Urs. maj. Begleit.	4·5	II	II—III	2·19	76·3	1·71	
	g Urs. maj.	4·0	II	II—III	2·73	76·2	2·09	
	I 1485	4·0	II	IV	2·89	78·9	2·23	
	I 1487	5·9	II	IV	2·42	78·9	2·39	
	I 1487	5·9	II	IV	3·09	82·7	3·06	
	I 1485	4·0	II	IV	3·80	82·8	3·12	
	Sirius	1·0	II	II—III	7·91	82·2	5·53	
	Sirius	1·0	II	II—III	6·31	87·0	3·86	

1902 Jänner 10	II 278	5·3	II—III	II	0·82	10·5	0·87	V
	II 279	8·2	II—III	II	1·11	12·2	0·95	
	II 349	7·9	II—III	II	0·97	12·4	0·83	
	II 348	5·0	II—III	II	0·80	14·4	0·86	
	II 905	5·0	II—III	II	0·86	36·3	0·87	
	I 516	7·0	II—III	II	0·98	45·0	0·99	
	I 515	5·0	II—III	II	0·79	47·5	0·78	
	I 715	7·2	II—III	III	1·48	62·8	1·60	
	I 714	4·9	II—III	III	1·38	64·0	1·23	
	I 1210	3·7	II—III	III	4·03	79·2	3·28	
	I 1212	6·5	II—III	III	3·12	80·8	3·28	
	I 1210	3·7	II—III	III	3·64	81·7	2·89	
	I 1212	6·5	II—III	III	3·47	82·9	3·64	
	I 1210	3·7	II—III	III	5·13	84·2	4·38	



Scintillationskurven für München (kgl. Sternwarte) Fraunhofer-Refraktor: 284 *mm* freie Öffnung und 4800 *mm* Brennweite.

Diese Werte $D_{6\cdot 0}$ sind in der Figur aufgetragen und daraus Scintillationskurven erhalten, aus denen folgendes zu entnehmen ist.

1. Für die Abende mit relativ gutem Luftzustande verlaufen die Kurven bei $\zeta = 65$ bis $70°$ entsprechend einem geringen Einfluß der Scintillation sehr flach, parallel der ζ-Achse. Von $\zeta = 70°$ an wachsen die $D_{6\cdot 0}$-Werte sehr rasch, und zwar ist der Anstieg der Kurve bei I, d. h. an dem Abend mit bester Luft, am schnellsten. Das hängt damit zusammen, daß bei guter Luft die Scintillationsscheiben bedeutend ruhiger sind und dadurch die Begrenzung der Scheibchen weiter nach außen verlegt wird. Je größer die Luftunruhe ist, bei umso kleinerer Zenithdistanz macht sich die Scintillation bemerkbar; bei V in $\zeta = 60°$ und bei III schon im Zenith. Für die größern Zenithdistanzen, $\zeta > 80°$, findet in letztern Fällen ein weniger rasches Ansteigen der $D_{6\cdot 0}$-Werte statt, was damit zu erklären ist, daß bei den durch den schlechtern Luftzustand bedingten unruhigen und unscharf begrenzten Scintillationsscheibchen deren Rand unwillkürlich weiter nach innen verlegt wird.

2. Infolge der unter 1. bemerkten Eigenschaften fallen die Kurven der Abende, bei denen der Luftzustand für astronomische Messungen genügt, bei $\zeta = 70$ bis $80°$ in einem engen Bereiche zusammen und es ist damit in $D_{6\cdot 0}$, $\zeta = 75°$ ein Zahlenwert gewonnen, der für die Güte der Beobachtungsmöglichkeit eines Ortes, dessen optisches Vermögen (O. V.) maßgebend sein kann. Aus der Figur kann man entnehmen:

$$D_{6\cdot 0,\,\zeta = 75°} = 2\cdot 6$$

und damit wird

$$\text{O. V. München} = \frac{1}{2\cdot 5}.$$

3. Die Kurve III ist an einem Abend mit ganz schlechtem Luftzustande, an dem genauere Messungen unmöglich waren, erhalten. Es ist dabei bemerkenswert, daß

$$D_{6\cdot 0,\,\zeta = 75°} \text{ (bei gutem Luftzustande)} = D_{6\cdot 0,\,\zeta = 0°} \text{ (bei äußerst schlechtem Luftzustande)},$$

d. h. das O. V. eines Ortes ist auch gegeben durch die Größe der Sternscheibchen in der Nähe des Zenithes, unter dem schlechtesten Luftzustande des Beobachtungsortes gemessen.

Unter diesen schlechtesten Luftverhältnissen sind dabei solche zu verstehen, bei denen ein Messen nicht mehr möglich oder ratsam, andrerseits aber auch noch nicht jener ganz unregelmäßige Zustand erreicht ist, der die Scintillationsscheibchen mit rasch veränderlichem Durchmesser erscheinen läßt. (Solche Abende kommen selten vor, in München besonders bei Föhnwind, wie das auf p. 23 der ersten Mitteilung angemerkt ist).

Um ohne Benützung der Kurven einen weitern Wert für O. V. abzuleiten, wurden sämtliche D_m-Messungen der ersten Mitteilung für $\zeta = 70$ bis $80°$ zusammengestellt und auf $D_{6\cdot0}$ reduziert.

Tabelle *C*.

Datum	Stern	Größe (m)	D_m	ζ	$D_{6\cdot0}$
1901 September 29	*SD* −3°3891	6·5	1″8	71°	1″8
» 29	»	6·5	2·1	73	2·2
» 29	»	6·5	2·1	73	2·3
» 29	»	6·5	2·5	75	2·6
» 29	»	6·5	2·6	76	2·7
» 29	»	6·5	3·2	79	3·4
1901 Dezember 6	1 942	6·1	3·6	74	3·6
» 6	1 943	4·7	4·3	71	3·9
» 28	ζ Urs. maj. Hauptst.	2·1	3·7	75	2·6
» 28	» Begleit.	4·5	2·7	75	2·2
» 28	*g* Urs. maj.	4·0	2·5	75	1·9
1902 Jänner 8	ζ Urs. maj. Hauptst.	2·1	4·2	76	3·1
» 8	» Begleit.	4·5	3·4	76	2·9
» 8	*g* Urs. maj.	4·0	2·9	76	2·3
» 8	ζ Urs. maj. Hauptst.	2·1	2·7	76	1·6
» 8	» Begleit.	4·5	2·2	76	1·7
» 8	*g* Urs. maj.	4·0	2·7	76	2·1
» 8	I 1396	7·1	1·8	73	2·2
» 8	I 1485	4·0	2·9	79	2·3
» 8	I 1487	5·9	2·4	79	2·4
» 10	I 1210	3·7	4·0	79	3·3

Datum		Stern	Größe (m)	D_m	ζ	$D_{6\cdot 0}$
1902 März	5	ζ Can. maj.	3·2	5·2	78	4·3
1902 September	7	γ Librae	4·3	4·3	74	3·8
»	7	»	4·3	3·2	76	2·7
»	8	ν Scorpii	4·2	3·7	74	3·1
»	8	»	4·2	3·4	75	2·8
»	8	*SD* —18°4249	6·5	3·0	74	3·2
»	8	»	6·5	3·4	75	3·5
		Mittel....			75°	2'74

Es ergibt sich damit als Mittelwert:

$$D_{6\cdot 0,\, \zeta = 75°} = 2'74. \quad \text{(Mittl. Fehler } \pm 0'13.)$$

Dies steht in Übereinstimmung mit dem oben aus den Kurven gefundenen Werte, wenn man die große Unsicherheit der D-Messungen berücksichtigt, auf die am Schlusse der ersten Mitteilung aufmerksam gemacht wurde. Es folgt:

Das optische Vermögen O. V. des Beobachtungsortes München (kgl. Sternwarte) ist, auf Sterne 6. Größe bezogen, zu 1 : 2·6 anzunehmen.

Zur Theorie der Strahlung bewegter Körper

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juni 1904.)

Bewegt sich eine strahlende Fläche mit gleichförmiger Geschwindigkeit in derselben Richtung wie die von ihr ausgesandte Strahlung, so muß zur Überwindung des von letzterer ausgeübten Druckes beständig Arbeit geleistet werden. Diese Arbeit verwandelt sich nun gleichfalls in Strahlungsenergie, so daß also von einer in diesem Sinne bewegten Fläche um diesen Betrag mehr Energie ausgeht als von einer ruhenden. Bewegt sich hingegen die Fläche in der der ausgesandten Strahlung entgegengesetzten Richtung, so leistet letztere stets Arbeit und es geht dann von der bewegten Fläche um diesen Betrag weniger Energie aus als von einer ruhenden.

Bewegt sich andrerseits eine absorbierende Fläche so, daß sie vor der auffallenden Strahlung zurückweicht, so leistet letztere beständig Arbeit; die Fläche kann daher nur um das Äquivalent der letzteren weniger Strahlung absorbieren, d. h. in innern Wärmeinhalt verwandeln. Bewegt sich hingegen die absorbierende Fläche der auffallenden Strahlung entgegen, so muß beständig von außen Arbeit gegen den Druck der Strahlung geleistet werden. Diese Arbeit kann nur als Wärme in der absorbierenden Fläche auftreten. Die Wirkung der Bewegung ist also in diesem Falle die, daß die Fläche um den Betrag der geleisteten Arbeit mehr Wärme absorbiert.

Diese Auffassungsweise ist bereits von verschiedenen Autoren[1] ausgesprochen worden.

Im folgenden habe ich nun versucht, diese Sätze auf die Strahlung in einem bewegten Hohlraum anzuwenden. Außer der von den Wänden desselben gelieferten Strahlung muß sich in demselben auch Strahlungsenergie befinden, die aus mechanischer Arbeit gewonnen ist und wieder in solche verwandelt wird. Dieselbe ist wesentlich durch die Bewegung des Hohlraumes bedingt; ihr Betrag ist, wie sich zeigen wird, dem Quadrat der Geschwindigkeit des Systems proportional (in erster Annäherung), vermehrt also scheinbar die kinetische Energie des Systems. Es liegen also hier Verhältnisse vor, welche der Bewegung eines Elektrons ganz analog sind. Ebenso wie dort der Begriff »elektromagnetische Masse« eingeführt wird, könnte man auch hier von einer »scheinbaren Masse« sprechen, die durch die Strahlung bedingt ist. Ebenso wie die elektromagnetische Masse der statischen Energie des ruhenden Elektrons proportional ist, ist auch die durch Strahlung bedingte scheinbare Masse dem Energieinhalte des ruhenden Hohlraumes proportional. Und zwar ist der Proportionalitätsfaktor in beiden Fällen von derselben Größenordnung. Da nun der Wärmeinhalt jedes Körpers zum Teil aus Strahlungsenergie besteht, muß auch jeder Körper eine solche scheinbare, von der Temperatur abhängige Masse besitzen, die sich zu der Masse in gewöhnlichem Sinn addiert.

1.

Wir betrachten nun einen zylindrischen Hohlraum R, der sich mit konstanter Geschwindigkeit c in der Richtung des Pfeiles bewegt (Fig. 1). Sei $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit des Lichtes und $\sigma = \frac{c}{\mathfrak{V}}$. Ferner seien A und B zwei schwarze Flächen. Die Mantelfläche des Hohlraumes sowie die äußere Begrenzung der schwarzen Körper sei durch nach innen vollkommen

[1] Siehe J. H. Poynting, Phil. Trans. 202, p. 525, 1904; Vl. v. Türin, Ann. d. Naturphil., III, p. 270, 1904; M. Abraham, Boltzmann-Festschrift, p. 84, und Drude, Ann. XIV, p. 236, 1904.

spiegelnde Flächen gebildet. Der Querschnitt des Raumes R sei gleich 1, seine Höhe gleich D. Der Außenraum sei ganz frei von Strahlung, also auf der absoluten Temperatur Null,



Fig. 1.

während den Flächen A und B eine bestimmte Temperatur zukommen soll.

Wir haben jetzt zwischen absoluter und relativer Strahlenrichtung zu unterscheiden;[1] es ist bequemer, unserer Betrachtung die letztere zu Grunde zu legen.

Sei nun

$$2\pi i_0 \cos\psi \sin\psi d\psi$$

die Energiemenge, die A in der Zeiteinheit in der relativen Richtung zwischen ψ und $\psi + d\psi$ aussendet, wobei ψ also der Winkel ist, den die relative Strahlenrichtung mit der Normalen (und mit der Richtung der Geschwindigkeit c) einschließt. i_0 muß dann (bezüglich ψ) eine Konstante sein, wie ich bereits in einer frühern Arbeit hervorgehoben habe.[2] Diese Strahlung übt nun auf A einen Druck aus, dessen in die Richtung der Normalen (im Sinne von $-c$) fallende Komponente den Wert

$$2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi d\psi$$

haben möge. Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit c, so erhalten wir die Arbeit, die in einer Sekunde von außen gegen diesen Druck geleistet wird, welche nun auch in Strahlung verwandelt wird, so daß also die gesamte Strahlung, welche A in der gegebenen Richtung verläßt, den Wert

[1] Siehe darüber F. Hasenöhrl, diese Sitzungsber., CXIII., p. 469; — M. Abraham, l. c.

[2] L. c. p. 474.

$$2\pi(i_0+p_1 c)\cos\psi\sin\psi d\psi = 2\pi i\cos\psi\sin\psi d\psi$$

hat. Dieser Ausdruck gibt uns nun auch den Betrag der in der Zeiteinheit auf B fallenden Strahlung an. Von derselben wird dort ein Teil absorbiert, ein Teil in Arbeit verwandelt. Falls B auf der absoluten Temperatur Null befindlich wäre, so wäre die eben betrachtete Strahlung die einzige in R befindliche. Da in diesem Falle keine Widerstandskraft gegen die Bewegung unseres Systems zu erwarten ist, muß in A und B derselbe Druck nach entgegengesetzten Richtungen wirksam sein, so daß im ganzen keine Arbeit geleistet wird. Es wird also in B die Energiemenge

$$2\pi i_0\cos\psi\sin\psi d\psi$$

absorbiert und die Energiemenge

$$2\pi p_1\cos\psi\sin\psi d\psi . c$$

in mechanische Arbeit verwandelt.

Denken wir uns nun B auf derselben Temperatur wie A befindlich, so gibt auch B in einer bestimmten Richtung die Energie

$$2\pi i_0\cos\psi\sin\psi d\psi$$

ab. Übt diese Strahlung den Druck $2\pi p_2\cos\psi\sin\psi d\psi$ aus, so leistet sie Arbeit, um deren Betrag die von B gelieferte Energie zu vermindern ist, so daß also B von der Strahlungsmenge

$$2\pi(i_0-p_2 c)\cos\psi\sin\psi d\psi = 2\pi i'\cos\psi\sin\psi d\psi$$

verlassen wird. Dieselbe Energiemenge fällt in A auf und zwar lehrt eine der frühern ganz analoge Betrachtung, daß dortselbst die Energiemenge

$$2\pi i_0\cos\psi\sin\psi d\psi$$

absorbiert wird, weil gegen die auffallende Strahlung von außen die Arbeit $2\pi p_2\cos\psi\sin\psi d\psi$ geleistet werden muß, die sich gleichfalls in Wärme verwandelt.

Es wird also von beiden Körpern A und B gleichviel absorbiert, wie emittiert; auf beiden Flächen lastet (in entgegengesetzter Richtung) derselbe Druck

$$2\pi(p_1+p_2)\cos\psi\sin\psi d\psi,$$

so daß in Summe keine Arbeit geleistet wird. Wenn also keine äußern Kräfte wirken, behält das System seine Geschwindigkeit bei.

Falls der eine der Körper A oder B durch einen vollkommenen Spiegel ersetzt wird, muß der Strahlungszustand in R genau derselbe bleiben,[1] es ist also unter anderm dann auch $2\pi(p_1+p_2)\cos\psi\sin\psi d\psi$ der Druck auf den Spiegel.

Wir fragen uns nun nach dem Energieinhalte des Raumes R. Die von A nach B gehende Strahlung hat die relative Geschwindigkeit:[2]

$$\mathfrak{V}(-\sigma\cos\psi+\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}) = \mathfrak{V}_-.$$

Die von B nach A gelangende Strahlung hat die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{V}(+\sigma\cos\psi+\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}) = \mathfrak{V}_+,$$

beide haben den Weg $\dfrac{D}{\cos\psi}$ zurückzulegen, also ist der gesamte Energieinhalt des Raumes R

$$\int_0^{\pi/2}\frac{D}{\cos\psi}\left[\frac{2\pi(i_0+p_1c)\cos\psi\sin\psi d\psi}{\mathfrak{V}_-}+\frac{2\pi(i_0-p_2c)\cos\psi\sin\psi d\psi}{\mathfrak{V}_+}\right]$$

$$= 2\pi i_0 D\int_0^{\pi/2}\sin\psi d\psi\left(\frac{1}{\mathfrak{V}_-}+\frac{1}{\mathfrak{V}_+}\right)+$$

$$+2\pi c D\int_0^{\pi/2}\sin\psi d\psi\left(\frac{p_1}{\mathfrak{V}_-}-\frac{p_2}{\mathfrak{V}_+}\right). \qquad (1)$$

Der erste der beiden Summanden gibt den Teil der Energie des Raumes R an, der von den schwarzen Körpern

[1] Vergl. J. Larmor, Boltzmann-Festschrift, p. 595, 1904.

[2] Vergl. F. Hasenöhrl, l. c.

geliefert wurde. Mit demselben hat sich meine bereits zitierte Arbeit beschäftigt.

Der zweite Summand repräsentiert dagegen Strahlungsenergie, welche aus mechanischer Arbeit gewonnen ist. Da bei gleichförmiger Bewegung, wie wir sahen, keine Arbeit geleistet wird, muß dies eine Arbeit sein, welche bei Beschleunigung unseres Systems geleistet werden muß.

Man kann den Betrag dieser Energiemenge auch leicht auf folgende Weise bestimmen. Denken wir uns unser System in absoluter Ruhe, die beiden schwarzen Flächen *A* und *B* irgendwie am Ausstrahlen gehindert; den Raum *R* also ganz frei von Strahlung. Es soll nun in einem Augenblicke der Strahlung von *A* und *B* freie Bahn gelassen werden und gleichzeitig das System in verschwindend kurzer Zeit auf die Geschwindigkeit *c* gebracht werden. Von diesem Augenblick an muß gegen die von *A* ausgehende Strahlung die Arbeit $2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi d\psi . c$ in der Zeiteinheit geleistet werden. Es vergeht nun die Zeit $\frac{D}{\mathfrak{B}_- \cos\psi}$, bis diese Strahlung in *B* anlangt und dort ihrerseits das gleiche Arbeitsquantum liefert. Während dieser Zeit ist die von außen gelieferte Arbeit also unkompensiert. Ebenso leistet die von *B* ausgehende Strahlung gleich von Beginn an die Arbeit $2\pi p_2 \cos\psi \sin\psi d\psi . c$ und es vergeht jetzt die Zeit $\frac{D}{\mathfrak{B}_+ \cos\psi}$, bis diese Strahlung in *A* anlangt und dort die gleiche Arbeit im entgegengesetzten Sinne von außen her geleistet werden muß. Es wurde also von außen her um

$$\frac{D}{\cos\psi . \mathfrak{B}_-} 2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi d\psi . c - \frac{D}{\cos\psi . \mathfrak{B}_+} 2\pi p_2 \cos\psi \sin\psi d\psi \, c$$

mehr Arbeit geleistet, als aus der Strahlung gewonnen. Integrieren wir diesen Betrag über alle Strahlungsrichtungen, so erhalten wir den obigen Ausdruck.

Falls unser System zu Anfang in Ruhe befindlich, die Flächen *A* und *B* jedoch nicht gehindert waren, Strahlung zu emittieren, befindet sich auch zu Anfang in *R* Strahlungsenergie in bestimmtem Betrage. Die obige Überlegung deutet

an, daß diese Energie ganz absorbiert und nicht in Arbeit verwandelt wird. Und zwar läßt sich dies auch direkt zeigen, wenn man für p_1 und p_2 ihre Werte einführt, die wir im folgenden Abschnitt angeben werden. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, verlege ich den Beweis dieses Satzes in den § 4 dieser Abhandlung. Es ist also im Ausdruck (1) der erste Summand die von den strahlenden Körpern gelieferte Energie, der zweite die aus Arbeit entstandene. Wir bezeichnen letztere mit L, setzen also

$$L = 2\pi c D \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \left(\frac{p_1}{\mathfrak{B}} - \frac{p_2}{\mathfrak{B}_-} \right). \qquad (2)$$

2.

Wir wollen nun für die Größen p_1 und p_2, die wir vorläufig unbestimmt ließen, ihren Wert einführen. Derselbe ist allgemein wohl zuerst von M. Abraham in seinen bereits zitierten Abhandlungen angegeben worden. Und zwar sind diese Werte aus der Lorentz'schen Theorie des Elektromagnetismus abgeleitet. Da man auch auf andrem Wege zu denselben Ausdrücken gelangt (siehe § 3 der vorliegenden Arbeit), erscheint ihre Richtigkeit noch wahrscheinlicher. Nach Abraham ist der Strahlungsdruck auf eine Fläche numerisch gleich der auffallenden oder ausgesandten Strahlung dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit, und zwar wirkt dieser Druck in der absoluten Richtung der Strahlung. Sei φ der Winkel, welchen die absolute Richtung der unter dem relativen Winkel ψ ausgesandten Strahlung mit der Richtung von c einschließt. Dann ist die früher mit p_1 bezeichnete Größe

$$p_1 = \frac{1}{\mathfrak{B}} i \cos\varphi,$$

da wir ja unter p_1 die — allein wirksame — normale Druckkomponente verstanden. Eine Beziehung zwischen φ und ψ erhält man leicht aus nachstehender Figur 2, welche mit Fig. 1 meiner zitierten Abhandlung im wesentlichen identisch ist und welche wohl keiner weitern Erklärung bedarf.

Es ist:

$$\mathfrak{B}_- = \sqrt{\mathfrak{B}^2 + c^2 - 2\mathfrak{B}c\cos\varphi} = \mathfrak{B}\sqrt{1+\sigma^2-2\sigma\cos\varphi} =$$
$$= \mathfrak{B}(-\sigma\cos\psi + \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}),$$

woraus sich die Beziehungen:

$$\cos\psi = \frac{1-\sigma\cos\varphi}{\sqrt{1+\sigma^2-2\sigma\cos\varphi}}$$

und

$$\cos\varphi = \sigma\sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi} \qquad (3)$$

ergeben.

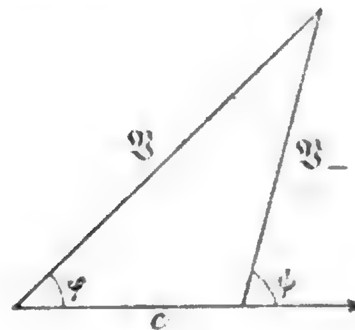


Fig. 2.

Es ist also:

$$p_1 = \frac{i}{\mathfrak{B}}(\sigma\sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}); \qquad (4)$$

setzen wir dies in die Gleichung $i = i_0 + p_1 c$ ein, so folgt

$$i = i_0 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_-\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \qquad (5)$$

und

$$p_1 = i_0 \frac{\sigma\sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}{\mathfrak{B}_-\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} =$$
$$= i_0 \frac{\cos\psi + \sigma\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}{\mathfrak{B}(1-\sigma^2)\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}. \qquad (6)$$

Ganz analog ergibt sich:

$$i' = i_0 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_+\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \qquad (7)$$

und

$$p_2 = \frac{i'}{\mathfrak{B}} \left(-\sigma \sin^2\psi + \cos\psi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi}\right) \tag{8}$$

oder

$$p_2 = i_0 \frac{-\sigma \sin^2\psi + \cos\psi \sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}{\mathfrak{B}_+ \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi}} =$$

$$= i_0 \frac{\cos\psi - \sigma\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}{\mathfrak{B}(1-\sigma^2)\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}. \tag{9}$$

Setzen wir dies in (2) ein, so wird:

$$L = 2\pi c D i_0 . \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\psi \, d\psi}{\mathfrak{B}(1-\sigma^2)\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}$$

$$\left[\cos\psi\left(\frac{1}{\mathfrak{B}_-} - \frac{1}{\mathfrak{B}_+}\right) + \sigma\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}_-} + \frac{1}{\mathfrak{B}_+}\right)\right] =$$

$$= \frac{4\pi c D i_0 \sigma}{\mathfrak{B}^2(1-\sigma^2)^2} \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \frac{1+\cos^2\psi - \sigma^2\sin^2\psi}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}.$$

Setzen wir noch den Energieinhalt des ruhenden Hohlraumes R

$$\frac{4\pi i_0 D}{\mathfrak{B}} = E_0,$$

so wird nach Durchführung der Integration

$$L = E_0 \frac{c^2}{\mathfrak{B}^2} \frac{1}{(1-\sigma^2)^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{(1-\sigma^2)^2}{4\sigma^3} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right].$$

Vernachlässigen wir hierin Größen von der Ordnung σ^3, so wird

$$L = E_0 \frac{c^2}{\mathfrak{B}^2} \cdot \frac{4}{3}.$$

Dieser Ausdruck hat nun die Form und die Dimension einer kinetischen Energie. Man kann also sagen, daß die kinetische Energie unseres Systems scheinbar um L vergrößert

wurde oder auch, daß zur mechanischen Masse unseres Systems noch eine scheinbare Masse

$$\mu = \frac{8}{3}\frac{E_0}{\mathfrak{V}^2}$$

hinzugekommen ist. Und zwar ist die Einführung dieser Masse ganz analog der der elektromagnetischen Masse. Bezeichnen wir für den Augenblick die Energie eines ruhenden Elektrons mit ε_0, so ist die elektromagnetische Masse desselben gleich $\frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0}{\mathfrak{V}^2}$ oder $\frac{8}{5}\frac{\varepsilon_0}{\mathfrak{V}^2}$,[1] je nachdem man es mit Flächen- oder Volumenladung zu tun hat. Der Größenordnung nach ist also das Verhältnis dasselbe. Auch die exakten Ausdrücke haben eine gewisse Ähnlichkeit, da in beiden die Größe $\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma}$ eine Rolle spielt.

3.

In diesem Abschnitte möchte ich noch einige Bemerkungen über den Wert des Strahlungsdruckes machen.

Der gesamte Druck, der auf einer der Flächen A oder B lastet, gleichgültig, ob dieselbe schwarz oder spiegelnd gedacht ist, hat den Wert

$$P = 2\pi(p_1+p_2)\cos\psi\sin\psi\,d\psi$$
$$= 4\pi i_0 \frac{\cos^2\psi\sin\psi\,d\psi}{\mathfrak{V}(1-\sigma^2)\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}.$$

Wir wollen nun hierin die Dichte der Strahlung ρ einführen, welche etwa auf B fällt. Es ist

$$\rho = \frac{2\pi i\sin\psi\,d\psi}{\mathfrak{V}_-} = \frac{2\pi i_0\sin\psi\,d\psi\,.\,\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_-^2\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}$$

(es ergibt sich dies aus (5)).

[1] Siehe M. Abraham, Drude's Ann., X, p. 151, 1903.

Es ist also

$$P = 2\rho \frac{\mathfrak{V}_-^2 \cos^2 \psi}{\mathfrak{V}^2(1-\sigma^2)}.$$

Wollen wir nun hierin wieder die absolute Strahlenrichtung einführen, so benützen wir die sich aus Fig. 2 sofort ergebende Relation

$$\mathfrak{V}_- \cos \psi = \mathfrak{V} \cos \varphi - c = \mathfrak{V}(\cos \varphi - \sigma).$$

Und es wird

$$P = 2\rho \frac{(\cos \varphi - \sigma)^2}{1-\sigma^2},$$

ein Ausdruck, der ebenfalls schon von Abraham[1] angegeben wurde.

Es läßt sich nun durch Verallgemeinerung eines Gedankens, den zuerst Larmor[2] ausgesprochen hat, dasselbe Resultat vom Standpunkt der elastischen Lichttheorie ableiten, was ich in Kürze hier zeigen möchte.

Wir betrachten eine Lichtwelle, welche sich unter dem (absoluten) Winkel i gegen die X-Achse bewegt. Dieselbe ist gegeben durch

$$\zeta = A \cos m(x \cos i + y \sin i + \mathfrak{V}t).$$

Fällt diese Welle auf einen Spiegel, der senkrecht zur X-Achse liegt, so bildet sich eine reflektierte Welle, die durch

$$\zeta' = A' \cos m'(x \cos r - y \sin r - \mathfrak{V}t)$$

gegeben ist. Hierin ist r der Reflexionswinkel.

An der Oberfläche des Spiegels muß $\zeta + \zeta' = 0$ sein. Bewegt sich derselbe mit der Geschwindigkeit c in der Richtung seiner Normalen, also in der Richtung der positiven X-Achse, so muß also für

$$x = ct, \quad \zeta + \zeta' = 0$$

sein.

---

[1] Boltzmann-Festschrift, p. 91, Gl. 9.

[2] Larmor. Report of British Association, 1900.

Dies liefert

$$A\cos m[t(\mathfrak{V}+c\cos i)+y\sin i]+$$
$$+A'\cos m'[t(c\cos r-\mathfrak{V})-y\sin r]=0.$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle Werte von y und t erfüllt sein, wenn

$$A=-A',$$
$$m(\mathfrak{V}+c\cos i)=m'(\mathfrak{V}-c\cos r),$$
$$m\sin i=m'\sin r.$$

Diese Gleichungen liefern uns das Reflexionsgesetz

$$\frac{\sin i}{1+\sigma\cos i}=\frac{\sin r}{1-\sigma\cos r} \tag{10}$$

und den Dopplereffekt

$$\frac{m'}{m}=\frac{1+\sigma\cos i}{1-\sigma\cos r}$$

in voller Übereinstimmung mit Abraham. Gleichung (10) ergibt sich übrigens auch leicht aus Gleichung (12) meiner frühern Abhandlung.[1]

Um nun daraus den Wert des Druckes abzuleiten, müssen wir annehmen, daß die Energiedichte einer Lichtwelle bei gleicher Amplitude der —2. Potenz der Wellenlänge, also der Größe m^2 proportional ist. Wenn wir also mit ρ die Dichte der einfallenden Welle, mit ρ' die der reflektierten bezeichnen, so ist

$$\frac{\rho'}{\rho}=\left(\frac{m'}{m}\right)^2=\left(\frac{1+\sigma\cos i}{1-\sigma\cos r}\right)^2.$$

Nun ist die Energie, welche in der Zeiteinheit auf den Spiegel auffällt, im Raume $\mathfrak{V}\cos i+c$ enthalten; die reflektierte Energie im Raume $\mathfrak{V}\cos r-c$. Es ist also der Betrag der in einer Sekunde einfallenden Energie

$$\rho(\mathfrak{V}\cos i+c)=\rho\mathfrak{V}(\cos i+\sigma)$$

[1] Diese Sitzungsber., CXIII, p. 489.

und der Betrag der in der gleichen Zeit reflektierten Energie

$$\rho'(\mathfrak{B}\cos r - c) = \rho'\mathfrak{B}(\cos r - \sigma).$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke muß der Arbeit des Strahlungsdruckes pro Zeiteinheit gleich sein. Es muß also

$$Pc = \rho'\mathfrak{B}(\cos r - \sigma) - \rho\mathfrak{B}(\cos i + \sigma)$$

sein. Oder

$$cP = \mathfrak{B}\rho(\cos i + \sigma)\left[\left(\frac{1+\sigma\cos i}{1-\sigma\cos r}\right)^2 \frac{\cos r - \sigma}{\cos i + \sigma} - 1\right].$$

Mit Hilfe der leicht ableitbaren, bereits von Abraham gegebenen Beziehung:[1]

$$\frac{1+\sigma\cos i}{1-\sigma\cos r} = \frac{\sigma+\cos i}{\sigma-\cos r} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

und der Gleichung:[2]

$$\sin r = \frac{\sin i(1-\sigma^2)}{1+\sigma^2+2\sigma\cos i}$$

wird

$$cP = \mathfrak{B}\rho(\cos i + \sigma)\left[\frac{1+\sigma^2+2\sigma\cos i}{1-\sigma^2} - 1\right]$$

und

$$P = 2\rho\frac{(\cos i + \sigma)^2}{1-\sigma^2}.$$

Die Übereinstimmung mit dem von Abraham gegebenen Wert ist also eine vollständige (σ hat hier das entgegengesetzte Vorzeichen wie früher).

Natürlich kann man auf dieser Grundlage auch die einzelnen Werte p_1 und p_2 berechnen, wenn man annimmt, daß ein bewegter Körper Wellen aussendet, deren Amplitude dieselbe ist, wie im ruhenden Zustande, während die Dichte der Strahlungsenergie dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional ist.

---

[1] L. c. Gl. 7 *c*.

[2] Siehe F. Hasenöhrl, l. c. p. 489, Gl. 12.

Die Werte von p_1 und p_2 sind übrigens auch von Poynting[1] durch eine eigentümliche Betrachtung gewonnen worden. Allerdings beschränkt sich Poynting auf den Fall senkrechter Emission. Setzt man dementsprechend in die hier angegebenen Ausdrücke $\cos\varphi = \cos\psi = 1$, so wird die Übereinstimmung vollständig.

4.

Wir haben nun noch den Beweis der in § 1 gemachten Behauptung nachzutragen.

Unser durch Fig. 1 gegebenes System soll zu Beginn in Ruhe sein. Dann befindet sich im Raume R die Energiemenge

$$E_0 = \frac{4\pi i_0}{\mathfrak{V}} \cdot D.$$

Es fragt sich nun, was mit dieser Energie geschieht, wenn das System plötzlich auf die Geschwindigkeit c gebracht wird. Von vornherein könnte man annehmen, daß nur ein Teil von ihr absorbiert wird, ein andrer Teil dagegen in mechanische Arbeit verwandelt wird.

Wir haben nun vor allem zu beachten, daß diese Energie nach den absoluten Richtungen gleichmäßig verteilt ist. Wenn wir also unsere frühere Bezeichnungsweise beibehalten, so ist die Dichte der Energie, deren absolute Fortpflanzungsrichtung mit der Normalen einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ einschließt,

$$\frac{2\pi i_0}{\mathfrak{V}} \sin\varphi\, d\varphi.$$

Sobald das System in Bewegung ist, kommt es auf die Verteilung bezüglich der relativen Fortpflanzungsrichtung an. Dann ist offenbar die Dichte der Energie, deren relative Fortpflanzungsrichtung mit der Normalen einen Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ einschließt:

$$\frac{2\pi i_0}{\mathfrak{V}} \sin\varphi \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi = -\frac{2\pi i_0}{\mathfrak{V}} \frac{d\cos\varphi}{d\psi} d\psi.$$

[1] L. c. p. 551.

Dies wird durch Differentiation von Gleichung (3):

$$= \frac{2\pi i_0}{\mathfrak{B}} \sin\psi\, d\psi \frac{(\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi} - \sigma\cos\psi)^2}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} =$$

$$= \frac{2\pi i_0}{\mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{B}_-^2}{\mathfrak{B}^2\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \sin\psi\, d\psi .$$

Da diese Energie in einem Zylinder von der Höhe D befindlich ist, ist die in dieser Richtung auf B fallende Energiemenge gleich:

$$\frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \cdot \frac{\mathfrak{B}_-^2}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \sin\psi\, d\psi .$$

Wir sahen nun früher (§ 1), daß von der auffallenden Strahlung $2\pi i \cos\psi \sin\psi d\psi$ der Teil $2\pi i_0 \cos\psi \sin\psi d\psi$ absorbiert wird, während der Teil $2\pi p_1 c \cos\psi \sin\psi d\psi$ in Arbeit verwandelt wird. Es wird also von der Einheit der auffallenden Energiemenge der Bruch $\frac{i_0}{i}$ absorbiert und der Bruchteil $\frac{p_1 c}{i}$ in Arbeit verwandelt.

Also wird von der jetzt auffallenden Energiemenge der Teil

$$\frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \frac{\mathfrak{B}_-^2}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \sin\psi\, d\psi \cdot \frac{i_0}{i}$$

absorbiert; der Teil

$$\frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \frac{\mathfrak{B}_-^2}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \sin\psi\, d\psi \cdot \frac{p_1 c}{i}$$

in Arbeit verwandelt.

Auf analoge Weise erkennt man, daß auf A die Energiemenge

$$\frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \frac{\mathfrak{B}_+^2}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} \sin\psi\, d\psi$$

auffällt und daß wir diese Energiemenge mit $\frac{i_0}{i'}$, respektive mit $-\frac{p_2 c}{i'}$ zu multiplizieren haben, um die Teile derselben

zu erhalten, die absorbiert, respektive in Arbeit verwandelt werden.

Es wird also in Summe von den beiden Körpern die Energiemenge

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi}} \left(\mathfrak{B}_-^2 \frac{i_0}{i} + \mathfrak{B}_+^2 \frac{i_0}{i'}\right) = M$$

absorbiert, während die Energiemenge

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi}} \left(\mathfrak{B}_-^2 \frac{p_1 c}{i} - \mathfrak{B}_+^2 \frac{p_2 c}{i'}\right) = N$$

in Arbeit verwandelt wird. Und zwar kann man sich auch überzeugen, daß genau dieselben Ausdrücke gültig sind, wenn z. B. die schwarze Fläche B durch einen Spiegel ersetzt wird. Es wird nämlich dann die von A nach B gelangende Strahlung in B nicht absorbiert, sondern zum Teil reflektiert und zwar wird von der Einheit der in B auffallenden Energie dann der Bruchteil $\frac{i'}{i}$ reflektiert; derselbe gelangt nach A zurück und dort wird der Bruchteil $\frac{i_0}{i'}$ davon absorbiert, so daß endlich wieder der Bruchteil $\frac{i'}{i} \cdot \frac{i_0}{i'} = \frac{i_0}{i}$ der sich anfangs in der Richtung von A nach B fortpflanzenden Strahlung absorbiert wird. Es bleibt also M und daher auch N ungeändert.

Benützt man nun die Gleichungen (4), (5), (7) und (8), so wird

$$M = \frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^4} \int_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi (\mathfrak{B}_-^3 + \mathfrak{B}_+^3)$$

und

$$N = \frac{2\pi i_0 D}{\mathfrak{B}^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi}}$$

$$\cdot [\sigma^2 \sin^2\psi (\mathfrak{B}_-^2 + \mathfrak{B}_+^2) + \sigma \cos\psi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2\psi} (\mathfrak{B}_-^2 - \mathfrak{B}_+^2)].$$

Durch Ausführung dieser Integrationen überzeugt man sich nun, daß ganz exakt

$$M = \frac{4\pi i_0 D}{\mathfrak{B}} = E_0; \quad N = 0$$

ist.

Es wurde also die gesamte, ursprünglich in R vorhandene Energie absorbiert. Es werden also die frühern Behauptungen über die zur Beschleunigung notwendige Arbeit bestätigt. Andrerseits sehen wir auch ein, daß vom Energieinhalt eines bewegten Hohlraumes, also im Ausdruck (1) nur der erste Bestandteil vom Wärmeinhalt der strahlenden Körper geliefert wird. Es ist dies eine Annahme, von der ich in meiner zitierten Abhandlung über die Dimensionsveränderungen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther[1] ausgegangen bin und welche dort vielleicht nicht genügend begründet war.

[1] L. c. p. 474, Fußnote.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen II.

Über die Strahlung des Uran

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1904.)

I. Urannitratlösung.

Die Verwendung metallischen Urans als Standard für radioaktive Messungen hat den Nachteil, daß die Art der Oberflächenbeschaffenheit nicht definiert ist und die Herstellung einer gleichmäßigen Schichtdicke auf Schwierigkeiten stößt. So beziehen sich das Ehepaar Curie und Rutherford auf die Größe der bestreuten Oberfläche, während H. Becquerel unter Berücksichtigung der Rauheiten auf die wahre Oberfläche reduziert.[1]

Von diesen Nachteilen wäre die Verwendung einer Lösung, die in bestimmter Konzentration leicht hergestellt werden kann, frei und wir haben daher, um die Benützung einer Urannitratlösung als Standardmedium zu erleichtern, einige quantitative Messungen in Bezug auf die Abhängigkeit der Strahlung von der Oberflächengröße, Schichtdicke und Konzentration angestellt.

Die Versuchsanordnung war wesentlich dieselbe wie die in einer früheren Abhandlung[2] als Anordnung I beschriebene.

[1] Vergl. H. Becquerel, Recherches sur une propriété nouvelle de la matière. Paris, 1903, p. 103.

[2] Diese Sitzungsber., CXIII (IIa), p. 764 (1904). — Vergl. auch Phys. Zeitschr., V, p. 319 (1904).

Der aufgestülpte Topf hatte den Durchmesser von 18 *cm* und die Höhe von 15 *cm*.

Die Lösung befand sich in flachen, zylindrischen Kristallisierschalen, die, um eventuelle störende Einflüsse des nichtleitenden Glases zu vermeiden, außen versilbert oder mit Stanniol überzogen waren. Die Außenfläche des Gefäßes war durch einen Platindraht leitend mit der Lösung verbunden.

1. Abhängigkeit von der Größe der Oberfläche.

Die Lösung erfüllte ein Gefäß mit Kreisquerschnitt vom Durchmesser $d = 9 \cdot 6$ *cm* und der Höhe von $2 \cdot 6$ *cm* bis etwa 2 *mm* vom Rande. Zur Veränderung der wirksamen Oberfläche wurde dasselbe mit Kreisringen aus $0 \cdot 75$ *mm* dickem Zinkblech abgestuften lichten Durchmessers, analog wie sie bei Wasserbädern Verwendung finden, bedeckt.

Gegenüber der Anwendung mehrerer gleich hoher Gefäße verschiedenen Durchmessers hat dies den Vorteil, daß die Kapazität der Anordnung konstant bleibt. Die eventuell durch so dickes Zinkblech noch durchdringende Strahlung bildet jedenfalls einen so geringen Prozentsatz der Gesamtstrahlung, daß ihr Einfluß vollkommen vernachlässigt werden kann.

Es ergaben sich die folgenden Werte für eine Lösung vom spezifischen Gewichte $\rho = 1 \cdot 652$ bei Zimmertemperatur:

Größe der Oberfläche in Quadratzentimetern	Strahlung in $\frac{\text{Volt}}{\text{Sekunde}}$
72·4	0·50
46·6	0·35$_5$
29·2	0·23
13·8	0·12
3·5	0·04$_5$

Wie aus Fig. 1 zu ersehen ist, liegen alle Punkte bis auf den für die unbedeckte Oberfläche auf einer Geraden, welche die Abszissenachse bei einem Punkte schneidet, der 3 cm^2 vor dem Anfangspunkte liegt. Diese Verschiebung der Geraden $O'A'$ von der zu erwartenden, welche durch den Anfangspunkt und den für die gesamte freie Oberfläche erhaltenen Punkt A gelegt ist, darf wohl darauf zurückgeführt werden, daß infolge des

kleinen Abstandes (2 *mm*) der Flüssigkeitsoberfläche von der Ringblende die Oberfläche, welche Strahlen in den Entladungsraum aussendet, etwas größer ist als der Flächeninhalt des Loches. Der Wert der erforderlichen Korrektion von ungefähr 3 cm^2 stimmt der Größenordnung nach mit dieser Deutung überein.

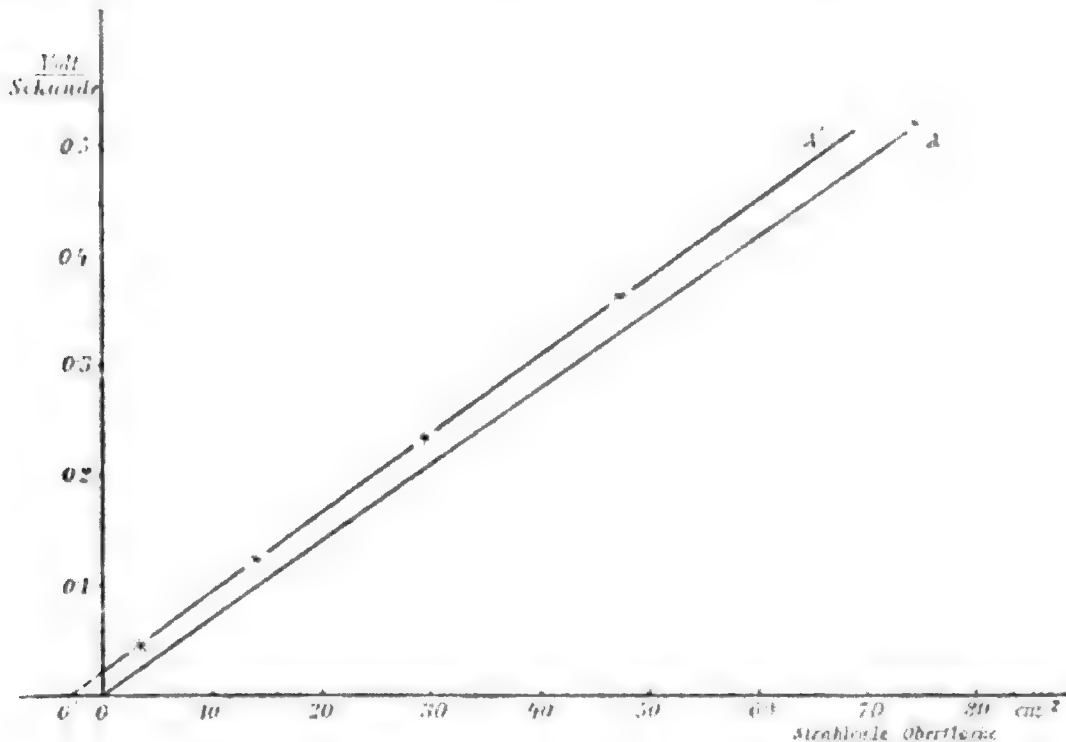


Fig. 1.

Wir dürfen daher sagen, daß die von vornherein anzunehmende Proportionalität zwischen Strahlung und Oberfläche experimentell bestätigt ist.[1]

2. Abhängigkeit von der Schichtdicke.

Wäre die Strahlung homogen, charakterisiert durch den Absorptionskoeffizienten λ, so zwar, daß für dieselbe gälte

$$J = J_0 e^{-\lambda x},$$

so würde das Gesetz der Abhängigkeit von der Schichtdicke (h) für die Gesamtstrahlung S ergeben

[1] Die von P. Besson angeführten Abweichungen dürften auf störende Einflüsse (Schichtdicke, unregelmäßige Lagerung der Teilchen) zurückführbar sein (P. Besson, Le Radium et la radioactivité, Paris, 1904, p. 32).

$$S = \int_0^h J_0 e^{-\lambda x} dx = \frac{J_0}{\lambda}[1 - e^{-\lambda h}].$$

Infolge des Umstandes aber, daß die Strahlung inhomogen ist, ist der Verlauf nicht theoretisch vorauszusehen und bedarf einer experimentellen Untersuchung.

Die folgenden Zahlen und Fig. 2, welche sich auf eine Lösung vom spezifischen Gewichte $\rho = 1 \cdot 652$ beziehen, enthalten die gewonnenen Resultate.

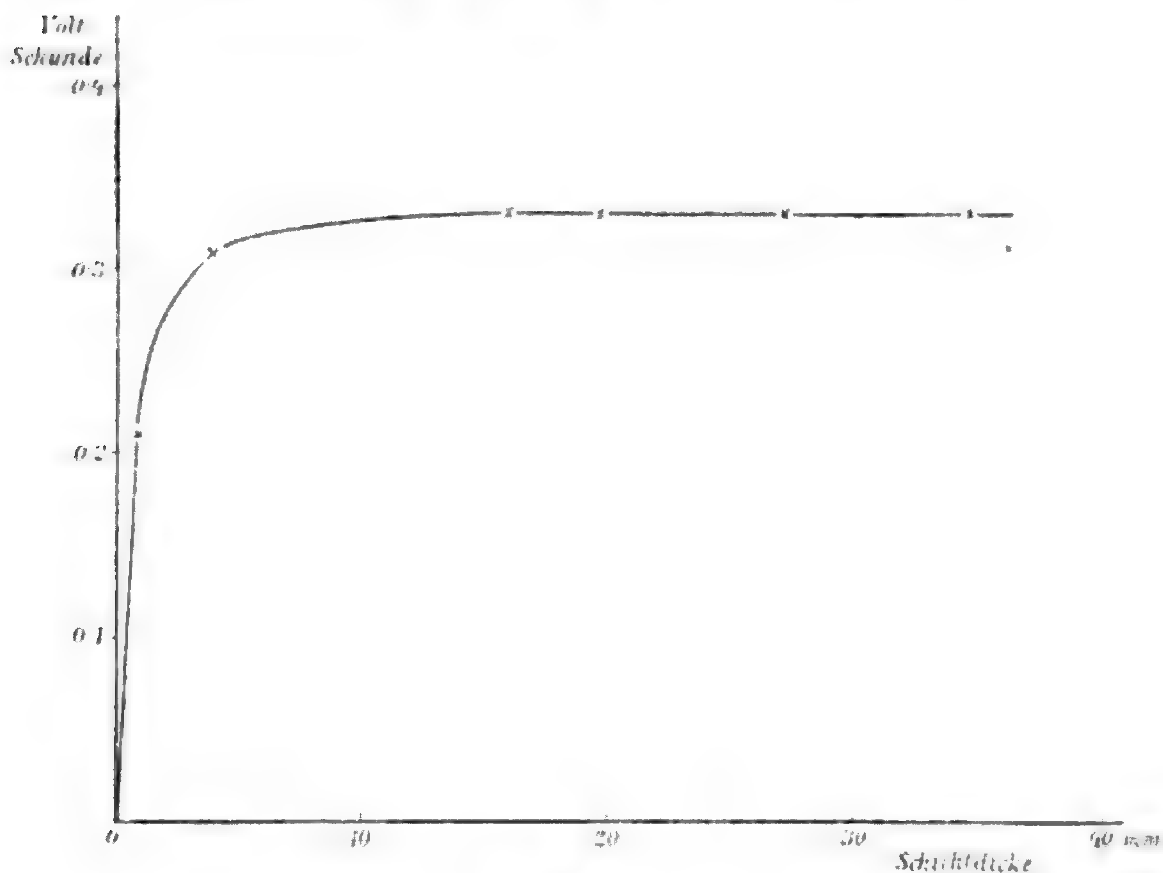


Fig. 2.

Schichtdicke h in Zentimetern	Strahlung in $\frac{\text{Volt}}{\text{Sekunde}}$
3·47	0·33
2·7	0·33
1·95	0·33
1·59	0·33
0·4	0·315
0·1	0·21

Es ist ungünstig, ein Gefäß mit Lösung bis zu verschiedener Höhe anzufüllen oder bis zum Rande gefüllte Gefäße

verschiedener Eigenhöhe zu verwenden, das erste wegen der Schirmwirkung des vorstehenden Randes, falls das Gefäß nicht voll ist, das letztere wegen der Verschiedenheit der Kapazität.

Wir haben daher unter Anwendung eines und desselben Gefäßes (Durchmesser = 7·0, Höhe = 4·4 *cm*) die gesamte Versuchsreihe derart durchgeführt, daß dasselbe stets bis zum Rande gefüllt blieb, was dadurch erreicht wurde, daß wir sukzessive von der Lösung eine bestimmte Menge abheberten und jedesmal das ursprüngliche Niveau durch Einfüllung von kleinem Porzellanschrot wiederherstellten. Quecksilber ist zur Nachfüllung nicht verwendbar, weil es chemisch auf die Lösung einwirkt.

Man ersieht aus dem Verlaufe der Kurve (Fig. 2), daß von 1·0 *cm* Schichtdicke aufwärts die Strahlung praktisch konstant bleibt.

3. Abhängigkeit von der Konzentration.

Auch in dieser Beziehung ist infolge der Inhomogeneität der Strahlung und der Veränderung des Absorptionsvermögens der Lösung mit der Dichte eine experimentelle Untersuchung der Relation zwischen Konzentration und Strahlung notwendig.

Sie wurde ausgeführt mit Urannitratlösungen vom Gehalte 2·06 Grammatomen Uran im Liter (ρ = 1·652) bis zu 0·18$_3$ Grammatomen Uran im Liter (ρ = 1·055).

Die Dimensionen des Gefäßes, das immer bis zum Rande gefüllt war, betrugen: Durchmesser 9·6 *cm*, Höhe 2·6 *cm*, so daß die Schichtdicke, wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde, für die Konstanz der Strahlung reichlich genügte.

Nummer der Lösung	Dichte $\rho_{20°}$	Relativer Gehalt in gleichem Volum		Strahlung in $\frac{\text{Volt}}{\text{Sekunde}}$
1	1·652	1·000 ∾	2·06 *g* Atom Uran im Liter	0·49
2	1·491	0·750	1·54	0·38$_2$
3	1·360	0·563	1·16	0·30$_5$
4	1·266	0·422	0·87	0·239
5	1·200	0·317	0·65	0·197
6	1·149	0·238	0·48	0·148
7	1·109	0·178	0·37	0·114
8	1·055	0·089	0·18	0·064

In Fig. 3 ist das Verhalten der Strahlung graphisch dargestellt. Die gestrichelte Gerade zeigt die Werte der zugehörigen spezifischen Gewichte an.

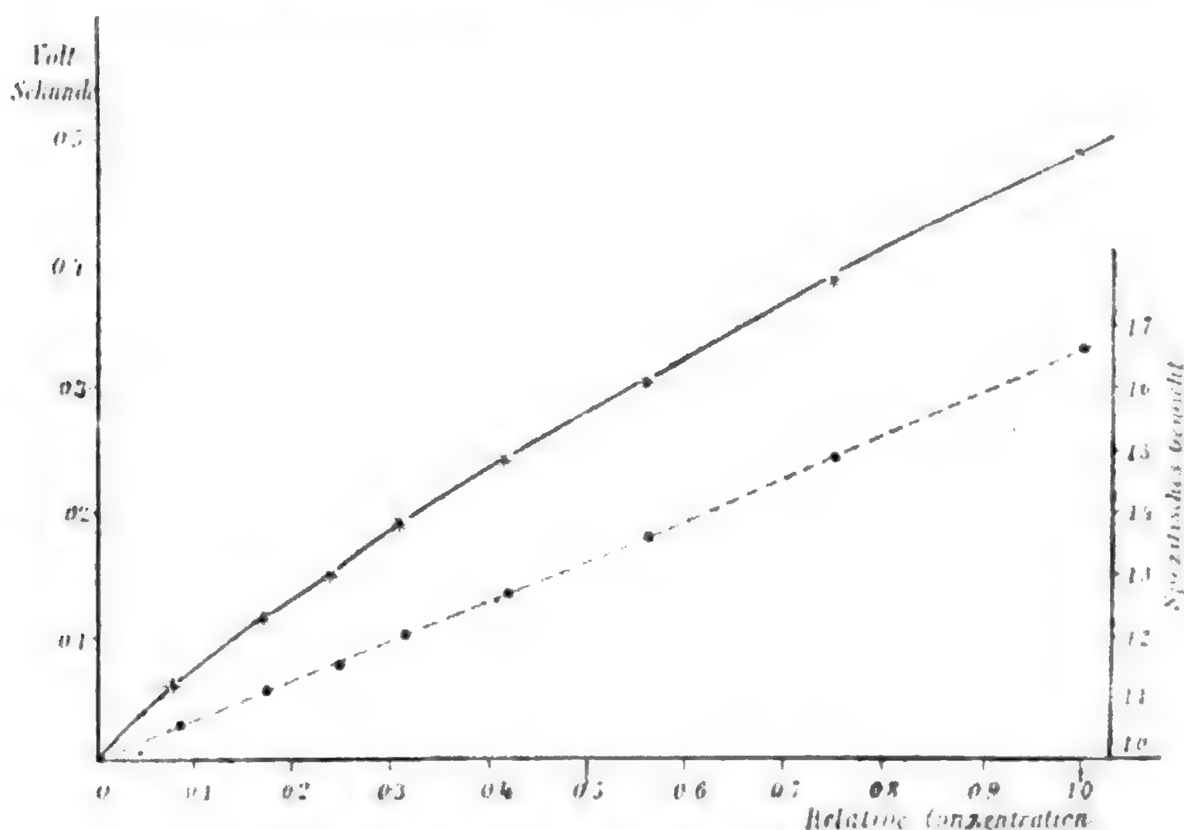


Fig. 3.

4. Absolute Werte.

Um eine Vergleichung auf eine solche Lösung bezogener Werte mit den in der bisher üblichen Weise auf metallisches Uran reduzierten Angaben zu ermöglichen, haben wir vergleichende Bestimmungen an Urannitratlösung und metallischem Uran in Pulverform ausgeführt und auf Grund einer angenäherten Kapazitätsbestimmung absolute Werte des Sättigungsstromes zu geben versucht.

Die Kapazitätsbestimmung erfolgte nach der Methode der Ladungsteilung unter Verwendung einer Kugel von 5 *cm* Radius als Standard der Kapazität und ist, wie es von dieser Methode bekannt ist, nicht so exakt, daß wir den Differenzen unserer Absolutwerte gegenüber Resultaten Curie's, Rutherford's und Mc Clung's[1] besonderes Gewicht beilegen könnten. Die

[1] Vergl. J. J. Thomson, Conduction of electricity through Gases, p. 282.

relativen Werte der Strahlung von Urannitratlösung zu der metallischen Urans sind dadurch natürlich nicht beeinflußt.

Es ergab sich:

a) Für metallisches Uran von $2\cdot 7\,g$ auf $13\cdot 1\,cm^2$ verteilt, ein Sättigungsstrom

$$J = 5\cdot 04 \,.\, 10^{-12} \text{ Amp.},$$

also bei $0\cdot 2\ \frac{g}{cm^2}$ die Stromdichte

$$i = 0\cdot 363 \,.\, 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}.$$

b) $2\cdot 66\,g$ auf $2\cdot 56\,cm^2$ verteilt, ergaben

$$J = 0\cdot 989 \,.\, 10^{-12} \text{ Amp.},$$

also bei $1\cdot 04\ \frac{g}{cm^2}$

$$i = 0\cdot 386 \,.\, 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}.$$

Die entsprechenden Werte der zitierten Autoren sind $i = 0\cdot 47$ beziehungsweise $0\cdot 46 \,.\, 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}$.

Eine Urannitratlösung vom spezifischen Gewichte $\rho = 1\cdot 652$, d. i. $35\cdot 2\,\%$ Gehalt an Ur_3O_8, einer Gehaltsbestimmung, die wir der Freundlichkeit des Herrn L. Haitinger verdanken, ergab bei einer Schichtdicke $h = 2\cdot 4\,cm$, also einem Werte, bei dem sicher (vergl. p. 1060) Unabhängigkeit von der Schichtdicke erreicht war, bei einer Oberfläche von $28\cdot 3\,cm^2$

$$J = 2\cdot 50 \,.\, 10^{-12} \text{ Amp.},$$

also

$$i = 0\cdot 088 \,.\, 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}.$$

Eine andere Lösung, aus Kristallen anderer Provenienz gebildet, vom spezifischen Gewichte $\rho = 1\cdot 332$, d. i. $23\cdot 5\,\%$ Gehalt an Ur_3O_8, lieferte

$$J = 1\cdot 63 \,.\, 10^{-12} \text{ Amp.},$$

$$i = 0\cdot 057 \,.\, 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}.$$

Das beobachtete Verhältnis dieser Werte der beiden Lösungen (1·54) steht in genügender Übereinstimmung mit dem aus der Kurve für die Konzentrationen ermittelten (1·60).

Die erste der beiden Lösungen, die einer bei Zimmertemperatur nahezu gesättigten entspricht, hat also, auf metallisches Uran bezogen, die Aktivität von 0·23, eine Größenordnung, die speziell mit Rücksicht darauf, daß man bei den leicht beschaffbaren Lösungen relativ große Oberflächen verwenden kann, dieselben als Standardmedium mindestens als ebenso geeignet erscheinen lassen wie metallisches Uran.

II. Variationen der Strahlung.

1. Verhalten von aus Äther und aus Wasser auskristallisiertem Urannitrat.

Es hat Crookes[1] zuerst gezeigt, daß durch Auflösung von Urannitratkristallen in Äthyläther das aus der ätherischen Lösung erhaltene Kristallprodukt von dem im Kristallwasser zurückgebliebenen Teile wesentlich verschiedene Strahlungseigenschaften besitzt. Seine Annahme, daß der im Äther lösliche Teil inaktiv sei, wurde von Soddy[2] und dann Rutherford und Grier[3] dahin modifiziert, daß diese Fraktion bloß α-Strahlen, hingegen der Rest die gesamte β-Strahlung enthalte. Becquerel[4] hat einen verwandten Versuch ausgeführt, bei dem durch Fällung eines Niederschlages mit diesem die β-strahlende Partie abgetrennt werden konnte, wobei es sich aber zeigte, daß im Verlauf einiger Monate die Aktivität des Niederschlages abnahm, während der andere in Bezug auf β-Strahlung inaktiv gewordene Teil allmählich diese Strahlung wieder erhielt.

Rutherford und Grier haben an einem analogen Versuche die zeitlichen Änderungen quantitativ verfolgt und sind zu dem Resultat gelangt, daß die β-Strahlung des einen Teiles

[1] Proc. Roy. Soc., 66, p. 409 (1900).
[2] Chem. Soc. Journ., 81, 82, p. 860 (1902).
[3] Phil. mag. (6), 4, p. 315 (1902).
[4] C. R. 131, p. 137 (1900); 133, p. 977 (1901).

nach einer Funktion $e^{-\lambda t}$ verschwindet, die des andern Teiles nach einer gleichartigen $1-e^{-\lambda t}$ sich erholt, wobei λ in beiden Gleichungen identisch ist.

Die Zeit, in welchen $e^{-\lambda t}$ auf die Hälfte absinkt, ist nach diesen Versuchen etwa 22 Tage.

Wir sind auf das ursprüngliche Crookes'sche Verfahren zurückgegangen und haben von dem in Äther und dem in Wasser gelösten Teile die zeitlichen Veränderungen verfolgt. Eine kleine Abweichung der Trennungsoperation bestand darin, daß eine wässerige Lösung von Urannitrat mit Äther geschüttelt wurde und wir aus den hierauf getrennten Flüssigkeiten auskristallisieren ließen.

Es wurde in gleicher Anordnung wie im vorigen Abschnitte bei den Lösungen beobachtet und sowohl die Gesamtstrahlung als die durch ein Stanniolblatt von der Dicke 0·09 *mm* filtrierte Strahlung gemessen.

Die Untersuchung erstreckte sich über drei Substanzproben: Probe *A* besteht aus Urannitratkristallen, die aus ätherischer Lösung gewonnen wurden; doch sind durch ein Versehen auch Kristalle der wässerigen Lösung beigemischt worden, auch beginnt die Messung einige Tage (zirka 10) nach Vornahme der Fraktionierung.

Probe *B* sind aus einer reinen ätherischen Lösung abgeschiedene Kristalle, Probe *B'* der zugehörige Teil aus der wässerigen Lösung. Bei beiden beginnt die Messung an dem Tage der Fraktionierung.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen wiedergegeben; dabei bezeichnet t die Zeit in Tagen, von der Fraktionierung an gerechnet; $\alpha+\beta$ die Gesamtstrahlung des unbedeckten Präparates, durch die Entladungsgeschwindigkeit in Volt pro Minute ausgedrückt, β' die durch ein Blatt Stanniol filtrierte Strahlung, in denselben Einheiten gemessen; aus dem Ergebnisse, daß diese Strahlung β' durch ein zweites Blatt Stanniol um 7% geschwächt wurde, ist unter der Annahme, daß die β-Strahlung in erster Annäherung als homogen betrachtet werden kann, der Wert $\beta = 1\cdot07\,\beta'$ für die wahre Intensität der β-Strahlung des Präparates berechnet und in der dritten Kolumne angeführt. Aus der Differenz von $\alpha+\beta$ und β ist

dann ferner α und endlich der Quotient $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ in Prozenten berechnet.

Die Resultate bezüglich der Proben *B* und *B'* sind dann noch durch Kurven (Fig. 4 und 5) graphisch dargestellt.

Probe *A*.

t	$\alpha+\beta$	β'	β	α	$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$
t_0	19·6	2·10	2·24	17·4	11·4%
t_0+4	21·3	2·90	3·11	18·2	14·6
t_0+6	21·8	2·90	3·11	18·7	14·2
t_0+11	22·0	3·25	3·47	18·5	15·8
t_0+18	23·3	3·70	3·96	19·3	17·0
t_0+27	23·9	4·19	4·48	19·4	18·8
t_0+32	23·6	4·23	4·52	19·1	19·2

Probe *B*.

t	$\alpha+\beta$	β'	β	α	$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$
0	(34·0)	0	0	—	0 %
3	40·0	0·2	0·2	39·8	0·5
6	40·0	0·40	0·43	39·6	1·1
9	41·6	0·50	0·53	41·1	1·2
13	41·5	0·68	0·73	40·8	1·8
18	41·2	0·91	0·98	40·2	2·4
27	42·1	1·15	1·23	40·9	2·9
33	42·4	1·34	1·43	41·0	3·4
125	43·6	2·10	2·25	41·3	5·1

Probe *B'*.

t	$\alpha+\beta$	β'	β	α	$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$
0	—	7·6	8·1	—	—
1	22·5	6·8	7·3	15·2	32·4%
3	20·7	5·4	5·8	14·9	27·5
6	19·9	4·55	4·9	15·0	24·4
11	19·7	4·2	4·5	15·2	22·8
18	19·9	4·0	4·3	15·6	21·6
27	19·7	4·1	4·4	15·3	22·0
33	19·8	4·0	4·3	15·5	21·6
125	19·6	3·93	4·2	15·4	21·5

Der eingeklammerte Wert 34·0 wurde beobachtet, während das frisch auskristallisierte Präparat noch von einer dünnen flüssigen Schicht bedeckt war, wobei jedenfalls ein Teil der α-Strahlung absorbiert wurde.

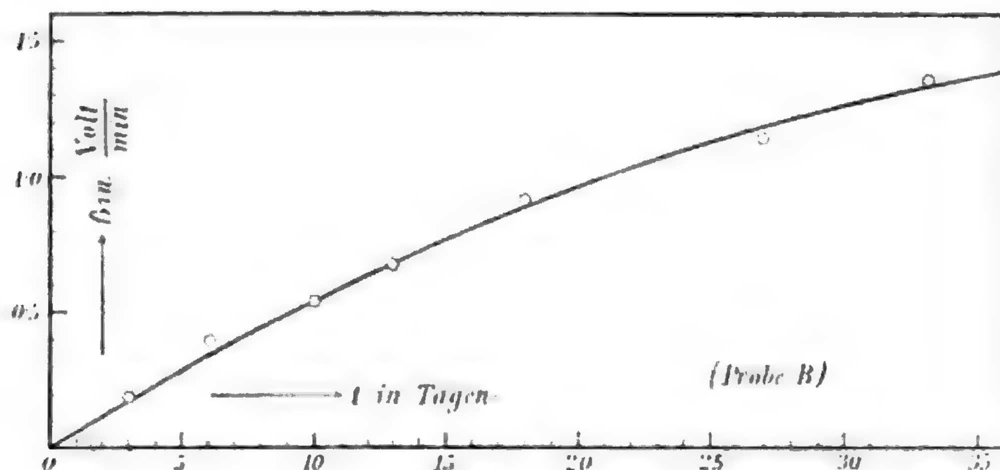


Fig. 4.

Qualitativ zeigt sich also das Resultat der Abtrennung eines β-aktiven, aber mit der Zeit verschwindenden Bestandteiles und eines α-aktiven im Laufe der Zeit seine β-Aktivität regenerierenden Bestandteiles bestätigt. Quantitativ in Bezug

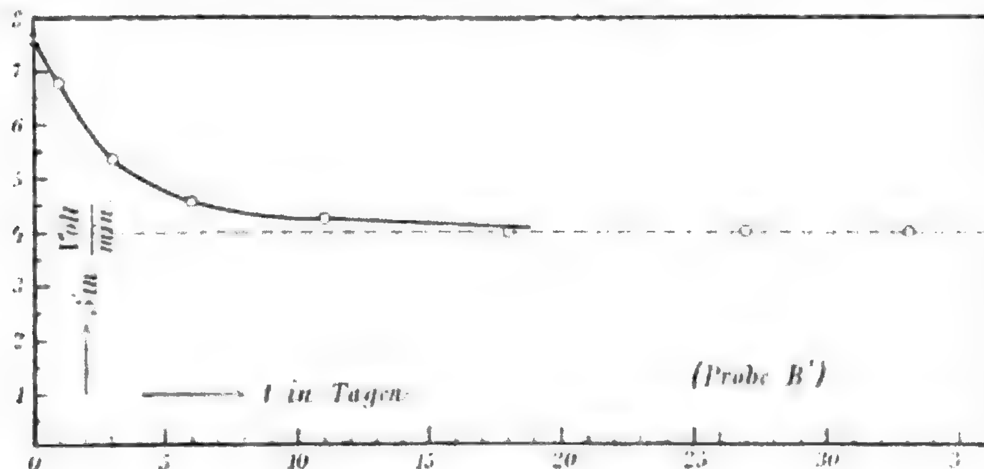


Fig. 5.

auf den zeitlichen Verlauf treten aber Abweichungen auf. Die Zunahme der Aktivität der ätherischen Fraktion schließt sich allerdings der Rutherford-Grier'schen Kurve sehr gut an, wie sich aus Fig. 4 ergibt; es ist nämlich die ausgezogene Kurve die aus der Zeitkonstante 22 Tage berechnete, die Abweichungen der beobachteten Punkte von dieser theoretischen Kurve sind

gering. Das Abfallen der β-Aktivität in der Probe B' zu einem konstanten Endwerte dagegen zeigt einen ganz andern Verlauf; der Überschuß über den stationären Endwert (der offenbar dadurch bedingt ist, daß nicht bloß der hypothetische instabile Bestandteil Uran X, sondern auch eine beträchtliche Quantität normalen Urans in der wässerigen Lösung vorhanden ist) sinkt in einer Kurve, die in erster Annäherung durch eine Funktion $e^{-\lambda' t}$ darstellbar ist, wobei $e^{-\lambda' t}$ in zirka 2 Tagen statt in 22 Tagen auf die Hälfte seines Anfangswertes fällt.

Dieses Auftreten zweier verschiedener Werte λ und λ' deutet darauf hin, daß entweder die einfache Annahme von der Bildung und dem Zerfall eines einzigen »Metabolons« Uran X[1] nicht ausreicht oder daß Variationen anderer Natur sich superponieren.

Derartige Vorgänge haben wir in der Tat an aus gewöhnlicher wässeriger Lösung auskristallisiertem Urannitrat beobachtet und wir teilen die Resultate im folgenden mit.

2. Verhalten aus wässeriger Lösung frisch auskristallisierten Urannitrates.

Die Kristalle wurden in flachen Schalen (Durchmesser zirka 8 *cm*, Höhe zirka 1 *cm*) aus heißer Lösung auskristallisiert und bildeten kompakte Platten kristallischer Struktur vom Habitus der normalen kristallwasserhaltigen Urannitratkristalle. Die Beobachtungen wurden begonnen, nachdem die Platten vollkommen trocken und einige Zeit schon auf Zimmertemperatur waren (Zeitpunkt $t = 0$).

Es wurde durch eine lange Zeit wieder die Gesamtstrahlung und die durch ein Aluminiumblech (Dicke 0·31 *mm*) filtrierte Strahlung gemessen.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten die gefundenen Werte der Strahlung in Volt pro Sekunde für sechs Platten (I bis VI) neben der in Stunden angegebenen Zeit t, die seit Beginn der Beobachtung verflossen war, und dem Datum.

Alle in den Tabellen eingetragenen Werte für $\frac{dV}{dt}$ sind als Mittel aus je vier Einzelbeobachtungen und unter Korrektur

[1] Vergl. Rutherford, Radioaktivity, p. 326 (1904).

der gewöhnlichen Zerstreuung bei gleicher Kapazität, welche mehrmals während jeder längeren Beobachtungsreihe gemessen wurde, zu verstehen.

Was die in Tabelle I gegebene Gesamtstrahlung anbelangt, so zeigt sich ein nicht stark ausgesprochener, aber immerhin deutlich merklicher Gang, der in einem Absinken zu einem Minimum und allmählichem Wiederansteigen besteht, ein Gang, der nicht auf äußere störende Einflüsse zurückführbar sein kann, da er in analoger Weise bei verschiedenen Substanzen in verschiedener absoluter Zeitlage auftritt (z. B. Platten I, II, VI).

Die durch Aluminiumblech filtrierte β-Strahlung (Tabelle II) ist zwar infolge ihrer Größe prozentuell weniger genau bestimmbar, zeigt aber einen ausgesprochenen Gang in gleichem Sinne. Derselbe ist graphisch in Fig. 6 wiedergegeben und es ist überraschend, wie nahe die Werte der zeitlich um sechs Tage auseinanderliegenden Platten I∘ und II× und VI• zusammenfallen.

Mit aller Reserve möchten wir darauf hinweisen, daß diese drei Platten I, II, VI, welche nahezu den gleichen Gang haben, ziemlich dünn (3 bis 4 *mm*) waren, während III und IV, welche das Minimum erst viel später erreichen, etwas dicker (8 bis 9 *mm*) waren und V diesbezüglich in der Mitte liegt, so daß ein Zusammenhang zwischen der Schichtdicke und dem Gange bestehen kann.

An den Stellen, an denen in den Tabellen Sternchen angegeben sind und in den Kurven der Linienzug durch Punkte ersetzt ist, wurden Änderungen an den Platten vorgenommen, und zwar bedeutet:

*, daß eine Einwirkung durch Erwärmung mittels Bestrahlung stattgefunden hat, so daß die Oberfläche in die entwässerte Kristallmodifikation überging, wobei natürlich auch die gesamte Größe der strahlenden Oberfläche ein wenig verändert wurde;

** besagt, daß zu dieser Zeit die Oberfläche mit wassernasser Watte abgerieben wurde, was den Sturz in der Kurve III zur Folge hat;

*** meldet, daß die Platte direkt in die Sonne gestellt wurde, wodurch die Oberfläche teilweise bezüglich des Kristallwassers entwässert wurde. Die Unregelmäßigkeiten, die von da an eintraten, können darin ihren Grund haben.

Tabelle I.

Gesamtstrahlung.

Datum	t	I	II	Datum	t	III	IV	VI	Datum	t	V
1904											
19. Mai	6	0·75	0·86	25. Mai	0	0·96	0·84	0·81	25. Mai	0	1·02
20. »	20	0·73	0·83	25. »	4	1·01	0·92	0·97	25. »	4	1·05
20. »	29	0·83	0·85	26. »	20	0·97	0·84	0·91	25. »	8	1·02
21. »	49	0·78	0·84	26. »	26	0·95	0·84	0·86	26. »	21	0·98
22. »	68	0·76	0·81	27. »	44	0·93	0·82	0·79	26. »	28	0·96
22. »	76	0·76	0·80	27. »	51	0·92	0·82	0·83	27. »	46	0·93
22. »	84	0·74	0·80	28. »	68	0·90	0·80	0·81	27. »	53	0·94
23. »	95	0·72	0·77	29. »	92	0·83	0·77	0·78	28. »	70	0·88
24. »	118	0·78	0·80	30. »	117	0·85	0·77	0·76	29. »	95	0·86
25. »	152	0·81	0·85	31. »	140	0·87	0·78	0·80	30. »	121	0·86
31. »	287	0·81	0·85	31. »	146	** 0·80			31. »	142	0·85
		*		2. Juni	190	0·78	0·76	0·77	2. Juni	192	0·83
1. Juni	312	0·94		3. »	213	0·77	0·77	0·80	3. »	216	0·82

2. Juni	337	0·84	0·82
3. »	361	0·85	0·85
5. »	408	0·86	0·86
6. »	433		0·86
6. »	435	0·84	
7. »	455	0·84	0·87
8. »	479	0·87	0·87
9. »	505	0·84	0·86
10. »	528	0·86	0·87
12. »	576	0·89	0·87
14. »	623	0·89	0·88
17. »	695	0·86	0·87
19. »	752	0·89	0·92
22. »	815		0·92
22. »	820	0·91	
30. »	1009	0·94	0·96

5. Juni	260	0·80	0·78	0·83
6. »	287	0·78	0·76	0·81
7. »	307	0·77	0·77	0·82
8. »	332	0·79	0·79	0·85
9. »	358	0·77	0·77	0·84
10. »	381	0·78	0·76	0·83
12. »	429	0·78	0·77	0·84
14. »	475	0·77	0·75	0·87
17. »	548	0·76	0·77	0·86
19. »	604	0·77	0·76	0·89
22. »	669	0·78	0·76	0·87
30. »	860	0·80	0·84	0·93

5. Juni	263	0·86
6. »	276	0·85
7. »	310	0·85
8. »	333	0·85
9. »	359	0·84
10. »	382	0·84
12. »	431	0·85
14. »	476	0·85
17. »	549	0·86
19. »	606	0·94
22. »	670	0·84
23. »	695	0·96 ***
23. »	700	0·93
30. »	863	0·99

Tabelle II.

Durch Aluminiumblech filtrierte Strahlung.

Datum	*t*	I	II	Datum	*t*	III	IV	VI	Datum	*t*	V
1904											
19. Mai	6	0·11	0·20	25. Mai	0	0·227	0·227	0·192	25. Mai	0	0·283
20. »	20	0·10	0·14	25. »	4	0·249	0·219	0·180	25. »	4	0·248
20. »	29	0·107	0·126	26. »	20	0·230	0·187	0·136	25. »	8	0·238
21. »	49	0·092	0·108	26. »	26	0·220	0·183	0·124	26. »	21	0·205
22. »	68	0·092	0·108	27. »	44	0·205	0·168	0·108	26. »	28	0·194
22. »	76	0·085	0·096	27. »	51	0·199	0·166	0·105	27. »	46	0·177
22. »	84	0·081	0·097	28. »	68	0·189	0·160	0·098	27. »	53	0·176
23. »	95	0·079	0·093	29. »	92	0·171	0·151	0·096	28. »	70	0·160
24. »	118	0·084	0·097	30. »	117	0·175	0·151	0·091	29. »	95	0·149
25. »	152	0·089	0·106	31. »	140	0·170 **	0·150	0·097	30. »	121	0·147
31. »	287	0·096	0·112	31. »	146	0·151			31. »	142	0·144
		*		2. Juni	190	0·143	0·144	0·096	2. Juni	192	0·140
1. Juni	312	0·103		3. »	213	0·141	0·144	0·100	3. »	216	0·139

2. Juni	337	0·107	0·110	5. Juni	260	0·145	0·147	0·113	5. Juni	263	0·149
3. »	361	0·110	0·116	6. »	287	0·142	0·144	0·112	6. »	276	0·147
5. »	408	0·119	0·121	7. »	307	0·142	0·143	0·110	7. »	310	0·144
6. »	433		0·124	8. »	332	0·144	0·146	0·116	8. »	333	0·143
6. »	435	0·119		9. »	358	0·142	0·146	0·112	9. »	359	0·140
7. »	455	0·122	0·127	10. »	381	0·143	0·141	0·113	10. »	382	0·143
8. »	479	0·126	0·127	12. »	429	0·143	0·143	0·118	12. »	431	0·146
9. »	505	0·123	0·122	14. »	475	0·141	0·139	0·128	14. »	476	0·149
10. »	528	0·126	0·125	17. »	548	0·137	0·141	0·125	17. »	549	0·154
12. »	576	0·132	0·125	19. »	604	0·141	0·136	0·130	19. »	606	0·175
14. »	623	0·133	0·129	22. »	669	0·136	0·136	0·129	22. »	670	0·174
17. »	695	0·134	0·135	30. »	860	0·140	0·138	0·147	23. »	695	*** 0·197
19. »	752	0·139	0·145						23. »	700	0·197
22. »	815		0·141						30. »	863	0·202
22. »	820	0·140									
30. »	1009	0·154	0·150								

Fig. 6.

Der anfänglich ansteigende Teil in Kurve III ist möglicherweise darauf zurückzuführen, daß hier zu Beginn noch Spuren von Feuchtigkeit vorhanden gewesen sein könnten.

Unregelmäßigkeiten, die mit den Beobachtungsfehlern zusammenhängen, fallen zum Teile heraus, wenn der Prozentsatz zwischen filtrierter (β) Strahlung und der Gesamtstrahlung wiedergegeben wird. Tabelle III enthält diese Daten und in Fig. 7 sind sie graphisch aufgetragen. Die Punkte der Platten I$^{\circ}$, II$^{\times}$ und VI$^{\bullet}$ vereinigen sich schließlich so, daß eine einzige Kurve zur Darstellung ausreicht, ebenso die Punkte von IV^{+} und III$^{\triangle}$.

Bezüglich der Deutung dieses Verhaltens ist zunächst die Möglichkeit gegeben, daß es sich um Änderungen der Aktivität selbst handelt oder daß durch physikalische Zustandsänderungen der Kristallplatten ihr Absorptionsvermögen beeinflußt wird. Eine definitive Entscheidung darüber zu geben, wäre verfrüht.

Nimmt man an, daß es sich um Änderungen der Aktivität handelt, so sieht man, daß der erst fallende und dann wieder steigende Gang eine Übereinanderlagerung von Vorgängen mit verschiedenen Zeitkonstanten (λ) darstellt. Was den steigenden Teil anbelangt, so erscheint es nicht ausgeschlossen, daß derselbe die Rutherford-Grier'sche Zeitkonstante von 22 Tagen enthält, worüber erst über längere Zeiträume ausgedehnte Beobachtungen entscheiden werden.

Tabelle III.

Verhältnis der filtrierten Strahlung zur Gesamtstrahlung $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ in Prozenten.

Datum	t	I	II	Datum	t	III	IV	VI	Datum	t	V
1904											
19. Mai	6	15	23·3	25. Mai	0	23·5	27	23·7	25. Mai	0	27·8
20. »	20	13·7	17·0	25. »	4	24·7	23·6	18·5	25. »	4	23·6
20. »	29	12·9	14·8	26. »	20	23·8	22·2	14·7	25. »	8	23·3
21. »	49	11·8	12·9	26. »	26	23·1	21·9	14·5	26. »	21	20·8
22. »	68	11·3	12·2	27. »	44	22·0	20·5	13·3	26. »	28	20·2
22. »	76	11·1	12·0	27. »	51	21·5	20·2	12·7	27. »	46	19·1
22. »	84	10·9	12·1	28. »	68	21	20·0	12·1	27. »	53	18·7
23. »	95	10·8	12·1	29. »	92	20·6	19·7	11·8	28. »	70	18·2
24. »	118	10·8	12·1	30. »	117	20·2	19·5	12·0	29. »	95	17·4
25. »	152	11	12·4	31. »	140	19·7	19·3	12·1	30. »	121	17·5
31. »	287	12*	13·2	31. »	146	19·0**			31. »	142	17·0
				2. Juni	190	18·4	18·9	12·5	2. Juni	192	16·9

1. Juni	312	11		3. Juni	213	18·3	18·6	12·5	3. Juni	216	17·0
2. »	337	12·7	13·4	5. »	260	18·1	18·9	13·5	5. »	263	17·3
3. »	361	13	13·6	6. »	287	18·3	18·9	13·8	6. »	276	17·2
5. »	408	13·7	14·1	7. »	307	18·4	18·6	13·4	7. »	310	17·0
6. »	433		14·5	8. »	332	18·2	18·5	13·6	8. »	333	17·0
6. »	435	14·1		9. »	358	18·4	18·6	13·4	9. »	359	16·7
7. »	455	14·5	14·6	10. »	381	18·4	18·5	13·6	10. »	382	17·0
8. »	479	14·4	14·5	12. »	429	18·4	18·5	14·0	12. »	431	17·1
9. »	505	14·6	14·2	14. »	475	18·3	18·5	14·7	14. »	476	17·5
10. »	528	14·7	14·4	17. »	548	18·0	18·3	14·6	17. »	549	18·0
12. »	576	14·7	14·3	19. »	604	18·3	17·9	14·5	19. »	606	18·6
14. »	623	15·0	14·7	22. »	669	17·4	18	14·8	22. »	670	20·7 ***
17. »	695	15·5	15·5	30. »	860	17·5	16·5	15·8	23. »	695	20·5
19. »	752	15·6	15·7						23. »	700	21·2
22. »	815		15·3						30. »	863	20·4
22. »	820	15·3									
30. »	1009	16·4	15·6								

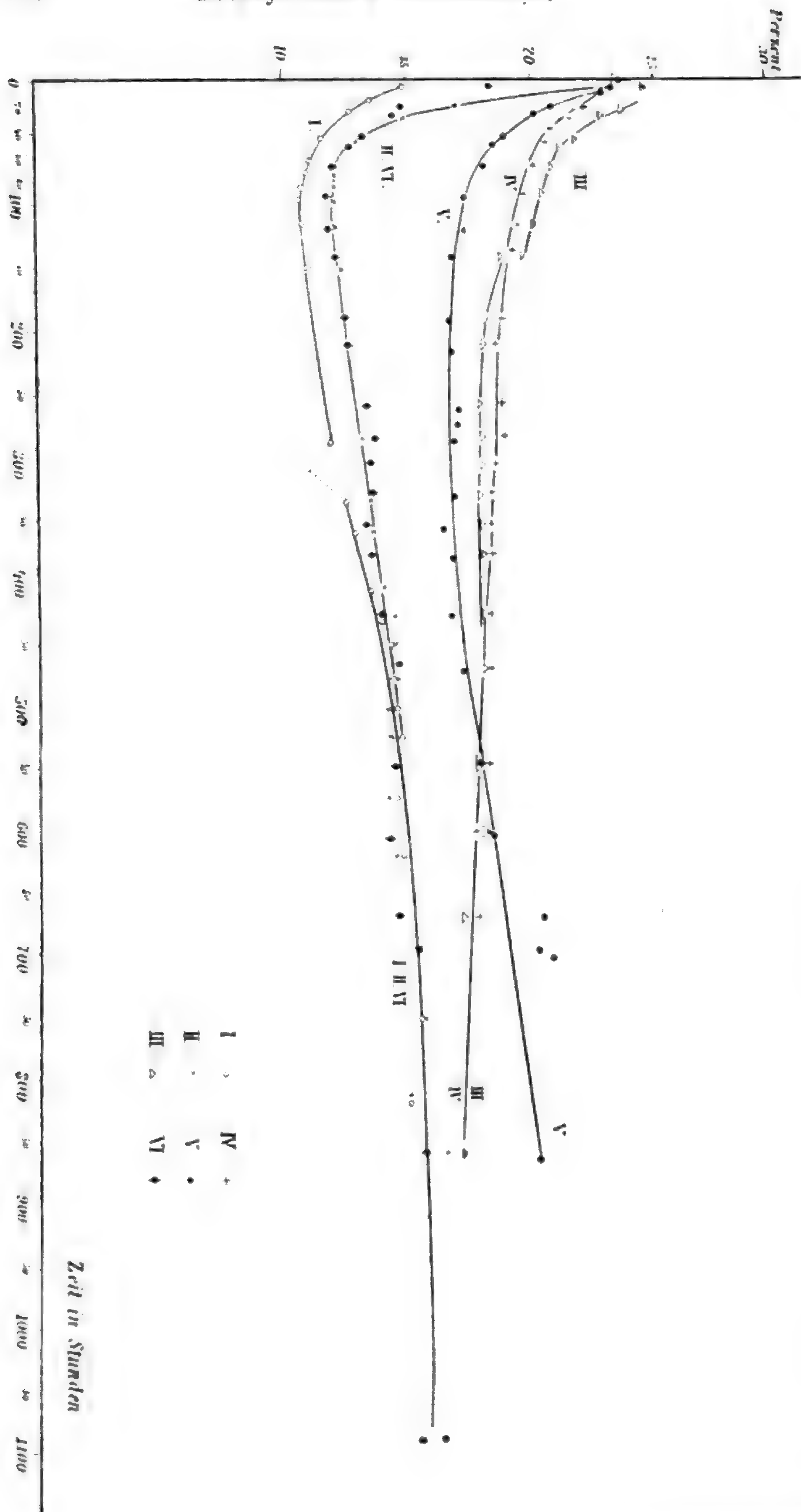

Percent
10
20
30
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
Zeit in Stunden
I
II
III
IV
V
VI

Fig. 7.

Zusammenfassung der Resultate.

I. Es wurde versucht, die Verwendung von Urannitratlösung als Standard für Aktivitätsbestimmungen vorzubereiten. Dabei wurde das Bestehen von Proportionalität der Strahlung mit der Größe der Oberfläche und die in einfachen Kurven dargestellte Abhängigkeit derselben von Schichtdicke und von Konzentration ermittelt. Von einer Schichtdicke von zirka 1 *cm* aufwärts ist dabei Unabhängigkeit der Strahlung von derselben erreicht.

Daran anschließend wurde ein annähernder Wert in absoluten Einheiten gegeben, der für eine gesättigte Lösung $88 . 10^{-15} \frac{\text{Amp.}}{cm^2}$ beträgt.

II. Die von Crookes angegebene Trennung zweier verschieden aktiver Bestandteile im Urannitrat durch Auskristallisieren aus ätherischer Lösung wurde wiederholt und quantitativ verfolgt. Dabei ergab sich qualitativ eine Bestätigung der Resultate, die Soddy, Rutherford und Grier erhalten haben.

Quantitativ liefert die Erholung der β-inaktiven ätherischen Fraktion die Rutherford-Grier'sche Konstante von 22 Tagen in guter Übereinstimmung. Der Abfall bei dem wasserlöslichen Teile dagegen lieferte die wesentlich verschiedene Zeitkonstante von zirka zwei Tagen.

Ferner wurden spontane Änderungen insbesondere der β-Strahlung bei aus gewöhnlichen wässerigen Lösungen frisch auskristallisierten Urannitratkristallen festgestellt.

Der Gang zeigt sich bei verschiedenen Proben etwas verschieden, vielleicht im Zusammenhange mit der Dicke der Schicht. Er besteht, wo er am ausgesprochensten ist, in einem Absinken zu einem Minimum in zirka vier Tagen und allmählichem Wiederansteigen, welches nach mehreren Wochen noch nicht zum Stillstande gelangt war.

Über die lineare Vektorfunktion als binäre doppeltquadratische Form

von

Emil Waelsch,

Professor an der technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1904.)

In früheren Arbeiten[1] hat der Verfasser der vorliegenden Abhandlung versucht, eine Binäranalyse zur Geometrie des dreidimensionalen Raumes unter Zugrundelegung der Gruppe der Drehstreckungen um einen Punkt oder anders ausgedrückt: des Arbeitsgebietes der Quaternionentheorie und der Vektoranalysis zu begründen. Im folgenden wird anschließend die lineare Vektorfunktion[2] durch eine binäre doppeltquadratische Form,[3] eine »Duploquadrik«, $r_x^2 s_y^2$ dargestellt und es werden die Elementarkomitanten $r_x^2 s_x^2$, $(rs) r_x s_x$, $(rs)^2$ der letzteren zur Charakterisierung der speziellen Gestalten (gerade, schiefe, orthogonale) der Funktion verwendet, die mit der

[1] Siehe »Über Binäranalyse«, diese Sitzungsber., Bd. CXII, 1903, I. Mitteilung vom 7. Mai, II. Mitteilung vom 18. Juni, III. Mitteilung vom 17. Dezember (welche im folgenden mit B. I, II, III zitiert werden sollen) sowie die voraufgehenden vorläufigen Mitteilungen: »Binäranalyse zur Rotation eines starren Körpers« und »Binäranalyse zur Mechanik deformierbarer Körper« im Anzeiger der Wiener kaiserl. Akademie vom 20. Februar respektive 13. März.

[2] S. u. a. Gibbs-Wilson, »Vectoranalysis«, New-York, 1901.

[3] Bezüglich der Invariantentheorie der doppeltquadratischen Form siehe Arbeiten von Cayley, Rosanes und Pasch, Zeuthen, Clebsch-Lindemann »Vorlesungen über Geometrie«, p. 952, Capelli, »Sopra la corrispondenza (2, 2)«, Giorn. di mat., t. 17, und Frobenius, »Theorie der biquadratischen Formen«, Crelle's Journal, t. 106, sowie bezüglich der Formensysteme Arbeiten von Gordan, Peano, Savio (siehe später).

Funktion verknüpfte Korrelation und Fläche zweiter Ordnung behandelt sowie die Bedingungen für die Realität der Funktion angegeben. Ferner wird auf die Invarianten, das Zerfallen und die Darstellung der Funktion durch ein Produkt einer geraden und einer orthogonalen Funktion eingegangen.

Es mögen an dieser Stelle die Beziehungen der gewählten Darstellung zu der des Buches von Gibbs-Wilson dargelegt werden. Nach Gibbs-Wilson ist die lineare Vektorfunktion gegeben durch eine »Dyadik Φ«. Die konjugierte Dyadik Φ_c hat nun die Duploquadrik $s_x^2 r_y^2$; der »Idemfaktor« hat die Duploquadrik $(xy)^2$; die Symbole $\Phi . a$, $a . \Phi$, welche aus Φ und dem Vektor a gebildet sind, geben, falls a_x^2 die Quadrik des Vektors a ist, die Vektoren mit den Quadriken $(ar)^2 s_x^2$ respektive $(as)^2 r_x^2$; das Produkt $\Phi . \Psi$ zweier Dyadiken, von welchen die zweite durch die Duploquadrik $\rho_x^2 \sigma_y^2$ gegeben ist, ist dargestellt durch die Duploquadrik $(s\rho)^2 r_x^2 \sigma_y^2$. Überhaupt sowie bei Vektoren die Gordan'sche Faltung allein deren invariante Bildungen gab (skalares Produkt: halbe zweite Überschiebung, vektorisches Produkt: negative erste Überschiebung der zugehörigen Quadriken), so gibt sie auch hier die sämtlichen invarianten Bildungen der linearen Vektorfunktion. So ist $\Phi_s = (rs)^2$ die erste Invariante derselben. Das von Gibbs eingeführte »double-dot-« respektive »double-cross-product« der Φ, Ψ ist gegeben durch

$$\Phi : \Psi = (r\rho)^2 (s\sigma)^2 \text{ respektive } 2(r\rho)(s\sigma) r_x \rho_x s_y \sigma_y,$$

so daß die Dyadik Φ die invariante Dyadik hat:

$$\Phi_2 = {}^1/_2 \Phi \overset{\times}{\times} \Phi \text{ mit der Duploquadrik } (rr')(ss') r_x r'_x s_y s'_y$$

und die Invariante:

$$\Phi_3 = {}^1/_6 \Phi \overset{\times}{\times} \Phi : \Phi = {}^1/_6 (rr')(rr'')(r'r'')(ss')(ss'')(s's'').$$

1. Ist die Duploquadrik

$$f = r_x^2 s_y^2 \qquad 1)$$

gegeben, so erhält man, wenn a die Quadrik eines Vektors a ist (B. I, Art. 1), vermöge der Gleichung

$$a' = (ar)^2 s_x^2 \qquad 1)$$

die Quadrik a' eines Vektors a'.

Diese Beziehung repräsentiert eine lineare Transformation des Raumes oder eine lineare Vektorfunktion L; denn sie ist linear und wenn a verschwindet oder unendlich wird, so auch a' entsprechend.

Die Form f hat die Elementarkomitanten A, B, C mit:

$$A = r_x^2 s_x^2, \quad B = (rs) r_x s_x, \quad 3C = (rs)^2,$$

welche als »Formen von f oder L« bezeichnet werden sollen; sie enthalten zusammen, falls sie allgemein und voneinander unabhängig sind, die neun Konstanten von L. Nach der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwicklung hat man:

$$f = A_x^2 A_y^2 + B_x B_y (xy) + C(xy)^2, \tag{2}$$

so daß Gleichung I) auch übergeht in:

$$a' = (Aa)^2 A_x^2 + (Ba) B_x a_x + C a_x^2 = (A, a)^2 + (B, a)^1 + Ca.^1 \tag{II}$$

Die Quadrik B ist die eines Vektors B, der als »Vektor von f oder L« bezeichnet werden kann.[2]

Die Form

$$\bar{f} = s_x^2 r_y^2$$

soll »konjugiert« zu f heißen. Sie bestimmt die zu L konjugierte Transformation; ihre Formen sind: A, $-B$, C, so daß gilt:

$$a' = (A, a)^2 - (B, a)^1 + Ca.$$

Diese Form $\bar{f}$ gehört zur Transformation der Ebenen, die durch L gegeben ist. Denn ist a ein Punkt der Ebene α und a' ein Punkt der entsprechenden Ebene α', so ist, wenn $\alpha_x'^2$ die Quadrik der Ebene α' ist (B. III, Art. 22):

$$(a'\alpha')^2 = (ar)^2 (\alpha' s)^2 = 2.$$

Daher ist:

$$(\alpha' s)^2 r_x^2 = \alpha_x^2,$$

weshalb zu der Transformation, die aus der Ebene α' die Ebene α liefert, die Form $\bar{f}$ gehört.

[1] Vergl. Waelsch, »Über binäre Formen und die Korrelationen mehrdimensionaler Räume«. Wiener Monatshefte, Bd. VI, p. 261 und 375.

[2] Bei Gibbs-Wilson der Vektor $-\frac{1}{2}\Phi_\times$ der Dyadik Φ.

Ist f symmetrisch in x und y, also

$$r_x^2 s_y^2 = r_y^2 s_x^2,$$

so heiße L »gerade« (selbstkonjugiert). Hiezu muß $B = 0$ sein, also wird II) zu:

$$a' = (A, a)^2 + Ca.$$

Ist hingegen $A = 0$, $C = 0$, so ist

$$a' = (B, a)^1;$$

dann heiße L »schief«.[1]

Ist $A = 0$, $B = 0$, so ist

$$a' = Ca$$

und L ist eine Streckung mit der Größe C.

Vermöge II) kann die allgemeine L mit den Formen A, B, C demnach dargestellt werden als Summe der geraden L mit den Formen A, C und der schiefen mit der Form B.

2. Die orthogonale L. Eine orthogonale L oder (B. I. Art. 8 ff.) eine Transformation **S** des Raumes hat eine Duploquadrik f, die das Quadrat einer doppeltlinearen Form:[2]

$$\rho_x \sigma_y = u_x u_y + \varkappa(xy) \qquad 3)$$

ist (B. I, Art. 13), wo u eine Quadrik und $\varkappa$ eine Konstante ist. Die zu dieser orthogonalen L gehörige Gleichung II) lautet dann [B. I, Art. 8, Formel 13)]:

$$a' = (u^2, a)^2 + 2\varkappa(u, a)^1 + (\varkappa^2 - {}^1/_3\,\mathfrak{u})a, \qquad 4)$$

wo $\mathfrak{u} = (u, u)^2$ 2 ist. Demnach gilt für die Formen der orthogonalen L:

$$A = u^2, \quad B = -2\varkappa u, \quad C = \varkappa^2 - {}^1/_3\,\mathfrak{u}. \qquad 5)$$

Statt der beiden ersten dieser Gleichungen kann, falls $A \neq 0$ oder $\varkappa \neq 0$ ist, gesetzt werden: $(A, B)^1 = 0$; denn dann

---

[1] Anti-self-conjugate bei Gibbs-Wilson.

[2] Über die hiehergehörige Aufgabe der binären Invariantentheorie vergl. Giordano, Sulle condizioni per l'esprimibilità della forma $F(x^2, y^2)$ per mezzo di un quadrato esatto. Giorn. di mat., vol. 37.

ist, wenn die letzte Gleichung erfüllt ist, A von dem Quadrat von B nur um einen konstanten Faktor verschieden. Ferner hat man:

$$(A, A)^4 = 2g_2 = (u^2, u^2)^4 = {}^8/_3\,\mathfrak{u} \qquad 6)$$

$$(B, B)^2 = 2\mathfrak{b} = 8\varkappa^2\mathfrak{u}, \qquad 7)$$

so daß sich vermöge der dritten Gleichung 5) ergibt:

$$^1/_4\, g_2^2 - (\mathfrak{b} + 3C^2) g_2 + \mathfrak{b}^2 = 0. \qquad 8)$$

Ist aber $A = u^2 = 0$, also auch $B = -2\varkappa u = 0$, so ist $C = \varkappa^2$ und die Gleichung II) lautet $a' = \varkappa^2 a$; daher ist L eine reine Streckung mit dem Zentrum O und der Größe $\varkappa^2$.

Ist $\varkappa = 0$, also $B = 0$, so ist $\rho_x \sigma_y = u_x u_y$; demnach ist **S** (B. I, Art. 10) eine Wendestreckung.[1] Die Gleichungen 5) lauten hier:

$$A = u^2, \quad C = -{}^1/_3\,\mathfrak{u};$$

zu deren Bestehen ist notwendig und hinreichend:

$$3g_3 H - g_2 A = 0, \quad 12C^2 - g_2 = 0,$$

wobei

$$H = (A, A)^2, \quad 6g_3 = (A, H)^4.$$

Die jetzt durch die Gleichung

$$a' = (u^2, a)^2 - {}^1/_3\,\mathfrak{u}\, a$$

gegebene orthogonale L ist eine Wendestreckung um den Vektor u mit der Größe $\mathfrak{u}$, bei welcher der Vektor u aus seinem reziproken Vektor hervorgeht.

3. Die Korrelation C und die F_2 der L. Dem Punkte a', der vermöge L dem a entspricht, entspricht als Polarebene bezüglich der Einheitskugel eine Ebene, die seine Quadrik a' hat (B. III, Art. 22). Daher stellt Gleichung I) auch die zu f gehörige Korrelation C dar, die aus L durch Zufügung der Polarität bezüglich der Einheitskugel entsteht. Vermöge C entspricht einem unendlich fernen Punkte a eine durch O gehende Ebene a'.

[1] Ist $\mathfrak{u}$ negativ, eine Wendestreckinversion (B. I, Art. 10).

Ist b ein Punkt der Ebene a', so muß sein (B. III, Art. 22):

$$(ar)^2(bs)^2 = 2$$

oder nach Gleichung II)

$$(A, a)^2 b)^2 + (B, a)^1 b)^2 + C(ab)^2 =$$
$$= (Aa)^2(Ab)^2 + (ab)(Ba)(Bb) + C(ab)^2 = 2. \qquad 9)$$

Ist demnach f symmetrisch, also $B = 0$, so ist C eine Polarität bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung F_2 mit dem Mittelpunkte O und umgekehrt ist jede Polarität mit dem Mittelpunkte O in der Form darstellbar:

$$a' = (A, a)^2 + Ca. \qquad 10)$$

Ist weiter $A = 0$, so ist C die Polarität bezüglich der Kugel mit dem Radiusquadrat $1/C$.

Ist f schief, so wird die Gleichung 9) zu

$$(ab)(Ba)(Bb) = 2;$$

diese stellt eine C dar, bei der dem Punkte a diejenige zu den Vektoren a und B parallele Ebene entspricht, die mit diesen Vektoren einen Spat vom Volumen 1 begrenzt (B. I, Art. 5).

Die Gleichung der durch 10) gegebenen F_2 lautet:

$$(A, a)^2 a)^2 + C(a, a)^2 = 2 \quad \text{oder} \quad (A, a^2)^4 + C(a,a)^2 = 2. \qquad 10')$$

Hier gibt die Form A die Schnittpunkte der F_2 mit dem absoluten Kegelschnitte. Denn ist $\mathfrak{a}$ Linearfaktor von $A = \mathfrak{a}A'$, so wird die letzte Gleichung durch den unendlich fernen Punkt mit der Quadrik $\infty\mathfrak{a}^2$ befriedigt; denn es ist

$$(A, \mathfrak{a}^4)^4 = (\mathfrak{a}A', \mathfrak{a}^4)^4 = 0.$$

Jede Quadrik, die Faktor von A ist, gehört demnach zu einer Kreisschnittebene von F_2. Sind demnach p, q zwei Quadriken und $A = pq$, so kann 10), weil

$$(pq, a)^2 = {}^1/_2(ap)^2 q + {}^1/_2(aq)^2 p - {}^1/_3(pq)^2 a$$

ist, auch geschrieben werden in der Gestalt:

$$a' = {}^1/_2(ap)^2 q + {}^1/_2(aq)^2 p + Ka = a\,.\,pq + a\,.\,qp + Ka. \qquad 11)$$

wo

$$K = C - {}^1/_3 (pq)^2 = C - {}^2/_3 p \cdot q.$$

4. Reelle L. Soll L reell sein, d. h. den reellen Vektor a in einen reellen a' überführen, so muß, wenn a die Form (B. I, Art. 1)

$$a = (x+iy)x_1^2 + 2izx_1x_2 + (x-iy)x_2^2 \qquad 12)$$

besitzt, a' die Form haben

$$a' = (x'+iy')x_1^2 + 2iz'x_1x_2 + (x'-iy')x_2^2. \qquad 12')$$

Um die zu einer reellen L zugehörige f in allgemeinster Weise zu finden, mögen symbolische komplexe Koeffizienten eingeführt werden. Es sei r_x^2 eine Quadrik, deren erster und letzter Koeffizient konjugiert komplex sind und deren mittlerer rein imaginär ist; s_y^2 sei eine Quadrik derselben Eigenschaft. Erst das Produkt zweier Koeffizienten dieser Formen habe unsymbolische Bedeutung.

Es ist dann, wenn a die Form 12) hat, $(ar)^2$ reell und demnach hat $(ar)^2 s_x^2$ die Form 12'); daher ist das Produkt $r_x^2 s_y^2$ der obigen komplexen symbolischen Quadriken die Duploquadrik f einer reellen L.

Man kann die Quadrik r_x^2 der angegebenen Gestalt auch erhalten, indem man zwei symbolische Linearformen $r_x, \bar{r}_x$, die konjugiert sind (B. III, Art. 24) multipliziert, so daß die f der reellen L die Gestalt erhält:

$$r_x \bar{r}_x s_y \bar{s}_y.$$

Die Elementarinvariante C einer reellen L ist reell; die Kovariante B hat die Form 11) und ist daher die Quadrik eines reellen Vektors. Die Form A ist das symbolische Produkt der Formen r_x^2 und s_x^2 und kann auch als wirkliches Produkt der Quadriken p, q zweier reeller Vektoren dargestellt werden (siehe Art. 3), wobei p bis auf einen reellen Faktor bestimmt ist.

5. Weiteres über F_2. Nach Art. 3 kann die Gleichung der F_2 in die Gestalt gesetzt werden:

$$(a, p)^2 (a, q)^2 + K (a, a)^2 = 1 \qquad 12)$$

oder

$$2a.pa.q+Ka.a = 1. \qquad 12')$$

Nun können in $A = pq$ die Faktoren p, q so gewählt werden, daß sie dieselbe Diskriminante haben[1] oder daß die Vektoren p, q gleich lang sind; denn setzt man $A = p'q'$, wo $p' = \rho p$, $q' = q/\rho$ ist, so kann ρ so bestimmt werden, daß $(p', p')^2 = (q', q')^2$.

Setzt man nun

$$p \cdot p = q \cdot q = \alpha^2, \quad p \cdot q = \gamma^2,$$

so ist:

$$A = pq, \quad g_2 = \alpha^4 + {}^1/_3\gamma^4, \quad g_3 = \gamma^2(9\alpha^4 - \gamma^4)/27,$$
$$H = {}^1/_2\alpha^2(q^2+p^2) - {}^1/_3\gamma^2 pq,$$
$$t = (A, H)^1 = \alpha^2(q^2-p^2)(p, q)^1.$$

Die Invariante g_2 kann für eine reelle F_2 nicht verschwinden, da α^2, γ^2 reell sind. Verschwindet g_3, so stehen die beiden Kreisschnittebenen der F_2 mit den Quadriken p, q aufeinander senkrecht[2] oder ein anderes Paar von Kreisschnittebenen, welche die vier Wurzelpunkte von A enthalten.

Setzt man in Gleichung 11) a respektive gleich einem der Faktoren a_x von t, also:

$$a_{1,2} = \alpha(q \pm p), \quad a_3 = (p, q)^1,$$

so ergeben sich die Quadriken der Polarebenen dieser Punkte als

$$a_x.pq + a_x.qp + Ka_x = \nu_x a_x, \qquad 13)$$

wobei, da $K = C - {}^2/_3\gamma^2$ ist:

$$\nu_{1,2} - C = {}^1/_3\gamma^2 \pm \alpha^2 = 2\mu_{1,2}, \quad \nu_3 - C = -{}^2/_3\gamma^2 = 2\mu_3. \qquad 13')$$

Daher ist:

$$\Sigma\mu_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\mu_2 = -g_2/4, \quad \mu_1\mu_2\mu_3 = -g_3/4 \qquad 14)$$

[1] Der Fall, daß eine dieser beiden Diskriminanten verschwinde, die andere nicht, sei ausgeschlossen; er tritt bei reellen F_2 nicht auf.

[2] Siehe Waelsch, »Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlenkongruenzen und Flächen«. Diese Sitzungsber., t. 100, p. 218.

und folglich μ_x Wurzel der kubischen Resolvente der Gleichung $A = 0$:

$$4\mu^3 - g_2\mu - g_3 = 0. \tag{15}$$

Aus Gleichung 13) folgt, daß die Polarebene des Punktes a_x die Quadrik $\nu_x a_x$ hat; daher ist diese Ebene senkrecht auf dem Vektor a_x, der folglich auf einer der Hauptachsen der F_2 liegt. Es ist ρa_x die Quadrik eines beliebigen Punktes dieser Hauptachse und $\rho^2 a_x . a_x$ das Quadrat seines Abstandes von O. Soll dieser Punkt auf F_2 liegen, so muß eine Quadrik $s_x = \rho_x a_x$ die Gleichung 12′) befriedigen; es muß sein:

$$2\rho_x^2 a_x . p a_x . q + \rho_x^2 K a_x . a_x = 1.$$

Nun ist nach Gleichung 13)

$$2 a_x . p a_x . q + K a_x . a_x = \nu_x a_x . a_x,$$

so daß

$$\rho_x^2 \nu_x a_x . a_x = 1$$

oder: Wenn $\mathfrak{a}_x$ die entsprechende Halbachse der F_2 ist, so ist

$$\mathfrak{a}_x^2 = 1/\nu_x = 1/(2\mu_x + C). \tag{16}$$

Nach der ersten Gleichung 14) ergibt sich

$$\Sigma 1/\mathfrak{a}_1^2 = 3C = (rs)^2$$

oder: Die Elementarinvariante der F_2 ist gleich der Summe der reziproken Hauptachsenquadrate der Fläche.

Es ist ferner vermöge der Gleichungen 13′) $\mu_x = {}^1/_2((1/\mathfrak{a}_x^2) - C)$, demnach folgt aus 15), daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x^2$ der Gleichung genügt:

$$(C^3 - Cg_2 + 2g_3)\mathfrak{a}^3 - (3C^2 - g_2)\mathfrak{a}^2 + 3C\mathfrak{a} - 1 = 0,$$

weshalb

$$\Sigma 1/\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2 = 3C^2 - g_2$$
$$1/\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2 = C^3 - Cg_2 + 2g_3.$$ [1]

[1] Man kann zu dem Obigen auch gelangen, ohne A in die Faktoren p, q zu zerlegen [wozu die Lösung von 15) nötig ist], indem man beachtet, daß, wenn die Polarebene a' auf dem Vektor a senkrecht stehen soll, nach 10):

$$a' = (A, a)^2 + Ca = \nu a$$

Der Einheitsvektor $a_x/\bar{a}_x$ übergeht vermöge der Gleichungen 10) und 13) in der geraden L zu der F_2, gehört in den Vektor $\nu_x a_x/\bar{a}_x$; deshalb sind die ν_x die Halbachsen der Fläche zweiter Ordnung (Deformationsellipsoid), die an der Einheitskugel vermöge L entsteht.

Ist $p = q = u$, also $A = u^2$, so ist F_2 eine Rotationsfläche mit der Rotationsachse u. Dann ist $\alpha^2 = \gamma^2 = \mathfrak{u}$ und

$$g_2 = {}^1/_3 \mathfrak{u}^2, \quad g_3 = {}^8/_{27} \mathfrak{u}^3, \quad H = {}^2/_3 \mathfrak{u} u^2.$$

Die Resolvente 14) lautet:

$$\mu^3 - {}^1/_3 \mathfrak{u}^2 \mu - {}^2/_{27} \mathfrak{u}^3 = 0$$

und hat die einfache Wurzel $\mu_1 = {}^2/_3 \mathfrak{u}$ und die Doppelwurzel $\mu_{2,3} = -\mathfrak{u}/3$.

Nach Formel 16) ist dann

$$h^2 = \mathfrak{a}_1^2 = 1/(K+2\mathfrak{u}) = 1/(C+{}^4/_3 \mathfrak{u})$$
$$r^2 = \mathfrak{a}_{2,3}^2 = 1/K = 1/(C-{}^2/_3 \mathfrak{u}),$$

wo h der Achsenhalbmesser und r der Äquatorradius der Fläche ist. Es folgt auch:

$$2\mathfrak{u} = (h^2+r^2)/h^2 r^2, \quad 3C = (2h^2+r^2)/h^2 r^2.$$

sein muß oder wenn $\nu - C = 2\mu$ gesetzt wird,

$$(A, a)^2 = 2\mu a.$$

Demnach gibt es (siehe Hilbert, Lettre adressé à M. Hermite, Liouv. J (4), IV, p. 249, und Waelsch, »Zur Geometrie der linearen algebr. Differentialgleichungen«, Mitteilungen der deutschen mathem. Gesellsch. zu Prag, 1892) im allgemeinen drei Werte μ_x von μ, die Wurzeln von 15) sind, und jedem dieser μ_x entspricht eine Form $a = a_x$, welche die letzte Gleichung befriedigt (ein Lamé'sches Polynom der Form A) und die Quadrik eines Punktes einer der Achsen der F_2 ist. Für einen Scheitel s_x dieser Achse ist dann nach der letzten Gleichung:

$$(A, s_x)^2 s_x)^2 = 4\mu_x s_x . s_x;$$

anderseits ist nach 10'):

$$\mathfrak{a}_x^2 = s_x . s_x = (1 - (A, s_x)^2 s_x)^2) C,$$

so daß sich 16) ergibt.

Ist $C = 0$, so ist die F_2, da die Summe ihrer reziproken Halbachsenquadrate verschwindet, »gleichseitig«,[1] es liegen die Kanten eines und somit unendlich vieler rechtwinkliger Sechsecke auf derselben.[2]

Hat A unendlich große Koeffizienten und ist auch C unendlich groß von gleicher Ordnung, so übergeht Gleichung 10′) in

$$(A, a^2)^4 + C(a, a)^2 = 0,$$

die, wenn für a, auch für ρa befriedigt ist, somit einen Kegel darstellt, der O zum Scheitel hat, den Asymptotenkegel der F_2. Ist $C = 0$, so hat man in $(A, a^2)^4 = 0$ die Gleichung eines gleichseitigen Kegels, dem unendlich viele rechtwinklige Dreikante eingeschrieben sind.

Man kann eine L, deren Invariante C verschwindet, »gleichseitig« nennen; sie hat in Cartesischen Koordinaten die Gleichungen:

$$x' = \mathfrak{a}x, \quad y' = \mathfrak{b}y, \quad z' = \mathfrak{c}z \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 0;$$

die ihr zugehörige Form A kann dann (wenn vorausgesetzt wird, daß letztere keinen dreifachen oder nur **einen** doppelten Linearfaktor hat) in die kanonische Gestalt gesetzt werden:

$$\vartheta(x_1^4 + x_2^4) + 6e\,x_1^2 x_2^2 \quad \text{mit} \quad \vartheta = {}^1\!/_2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}),$$

so daß

$$\mathfrak{a} = e+\vartheta, \quad \mathfrak{b} = e-\vartheta, \quad \mathfrak{c} = -2e.$$

[1] Siehe H. Vogt, »Über das gleichseitige Hyperboloid«, Crelle's Journal, Bd. 84.

[2] Aus dem Obigen ergibt sich die folgende **geometrische Darstellung des Formensystems einer biquadratischen Form** A: Es ist $(A, a^2)^4 = 2$ die Gleichung einer gleichseitigen F_2, die den absoluten Kegelschnitt in den Wurzelpunkten der Form A schneidet; es ist $(H, a^2)^4 - {}^1\!/_3\, g_2 (a, a)^2 + 4 g_3 = 0$ die Gleichung dieser F_2 in Ebenenkoordinaten, so daß die Linearfaktoren von H zu Minimalebenen gehören, die auch F_2 berühren. Es ist $g_2 = -S^2/4V^2$, $g_3 = -1/V^2$, wo V das Volumen eines der rechteckigen Spate bedeutet, von welchen 6 Kanten auf F_2 liegen, und S die Länge der Diagonale dieses Spates. Die quadratischen Faktoren der Kovariante t, die sich paarweise harmonisch trennen, sind die Quadriken von Punkten der Hauptachse der F .

6. Invarianten der L. Werden die Veränderlichen der x und y der Form f derselben unimodularen linearen Transformation unterworfen, so wird L gedreht. Eine beliebige lineare Transformation der x und y gibt eine orthogonale **S** der L.

Die bei **S** invarianten Skalare respektive Vektoren der L sind demnach binäre Invarianten, respektive haben zu Quadriken Kovarianten der Form f. Die höheren bei **S** invarianten Gebilde der L sind gegeben durch weitere Komitanten der f.

Da bekanntlich jede Invariante der f Simultaninvariante der Elementarkomitanten von f ist, so sind zunächst für eine symmetrische f, also eine gerade L, die bei **S** invarianten Skalare Funktionen von C und den beiden Invarianten g_2 und g_3 von A.[1] Es gibt keine rationalen invarianten Vektoren; es gibt die drei irrationalen invarianten Vektoren a_x (siehe Art. 5), deren Quadriken Faktoren der Kovariante t sind.

Für das System der allgemeinen L kommen zu den soeben für die gerade angegebenen diejenigen hinzu, die das System[2] der Quadrik B und der biquadratischen Form A außerdem liefert. Das sind

1. die Vektoren ψ, χ mit den respektiven Quadriken $(A, B)^2$, $(H, B)^2$ und die Vektoren

$$\Psi = B \times \psi, \quad X = B \times \chi, \quad \tau = \chi \times \psi;$$

2. die Skalare

$$\mathfrak{b} = B . B,$$

$$\mathrm{A} = \psi . B, \quad \mathrm{B} = \chi . B, \quad \Gamma = \tau . B = [B \psi \chi] \quad \text{(B. I, Art. 5):}^3$$

[1] Vergl. W. Voigt, »Über eine anscheinend notwendige Erweiterung der Elastizitätstheorie«, Gött. Nachrichten, 1895, p. 33, in welcher Herr Stickelberger diesen Satz für Rotationen aufstellt und beweist. Das »erweiterte elastische Potential« ist demnach die allgemeinste Invariante dritten Grades der f.

[2] Siehe bezüglich des Systems einer Quadrik und einer biquadratischen Form Clebsch, »Binäre Formen«, p. 212.

[3] Um die Lage der Vektoren ψ, χ gegen das Hauptachsentrieder der F_2 anzugeben und die Bedeutung der invarianten Skalare **A**, **B**, **Γ**, sei A in der kanonischen Gestalt des letzten Artikels vorausgesetzt; dann ist

$$H = \vartheta'(x_1^4 + x_2^4) + 6 e' x_1^2 x_2^2, \text{ wobei } \vartheta' = 2 \vartheta e, \; e' = {}^1\!/_3 \vartheta^2 - e^2.$$

Hat dann der Vektor B die Koordinaten l, m, n für das Trieder, so sind die Koordinaten der Vektoren $\psi, \chi, \tau, \Psi, X$ respektive:

3. die gleichseitigen L mit den biquadratischen Formen:

$$\mathrm{L} = (A, B)^1, \quad M = (H, B)^1, \quad N = (\psi, H)^1.$$

Man kann L auch typisch darstellen. Ist nämlich $\Gamma \neq 0$ und ist

$$B' = \tau/\Gamma, \quad \psi' = X/\Gamma, \quad \chi' = -\Psi/\Gamma$$

das reziproke System zu B, ψ, χ (B. I, Art. 6), so hat man[1]

$$-2A = \psi B' + (\chi + {}^2/_3\, g_3)\chi' + ({}^1/_3\, g_2 \psi + 2 g_3 B)\psi'.$$

Drückt man nun B', ψ', χ' durch B, ψ, χ aus und die hiebei auftretenden skalaren Produkte der letzteren Vektoren durch die Invarianten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{b}$, so hat man die »typische« Darstellung von A durch die drei bei **S** invarianten Vektoren B, ψ, χ der L mit Koeffizienten die invariante Skalare der L sind.

Im Falle $\Gamma = 0$ (Clebsch, l. c., p. 437) (wo B in einer der Ebenen des Hauptachsentrieders der F_2, aber in keiner Kante desselben liegt) läßt sich A als Form in B und ψ allein darstellen mit invarianten Skalaren als Koeffizienten.

Die Fälle, in welchen eine typische Darstellung durch invariante Vektoren nicht möglich ist (siehe hiezu Clebsch, l. c., p. 431) sind:

1. Eine Minimalebene wird durch L in sich transformiert.
2. Der Vektor B liegt in einer Hauptachse der F_2 der L.

$$(\mathfrak{e}+\vartheta)l, \quad (\mathfrak{e}-\vartheta)m, \quad -2\mathfrak{e}n$$
$$(\mathfrak{e}'+\vartheta')l, \quad (\mathfrak{e}'-\vartheta')m, \quad -2\mathfrak{e}'n$$
$$\mathfrak{s}mn, \quad \mathfrak{s}nl, \quad \mathfrak{s}lm, \quad \text{mit } \mathfrak{s} = 2(\mathfrak{e}\vartheta' - \mathfrak{e}'\vartheta)$$
$$(\vartheta - 3\mathfrak{e})mn, \quad (\vartheta + 3\mathfrak{e})nl, \quad -2\vartheta lm$$
$$(\vartheta' - 3\mathfrak{e}')mn, \quad (\vartheta' + 3\mathfrak{e}')nl, \quad -2\vartheta' lm.$$

Verschwindet $\mathfrak{A}$ respektive $\mathfrak{B}$, so stehen die Vektoren ψ, χ auf B senkrecht oder anders ausgedrückt: B liegt auf dem Asymptotenkegel der gleichseitigen F_2, die zu der Form A respektive H gehört.

Es ergibt sich $\Gamma = 3\delta lmn$. Verschwindet Γ, so liegt B in einer der Ebenen des Trieders oder, wenn $\delta = 0$ ist, wird A ein volles Quadrat, so daß F_2 Rotationsfläche ist.

[1] Siehe Clebsch, l. c., p. 435, Formel 8).

3. Die F_2 der L ist Rotationsfläche, zu deren Achse der Vektor B senkrecht ist; in den beiden letzten Fällen kann L auch Null sein (siehe Art. 4).

Man kann ferner nach den Invarianten der L fragen für voneinander unabhängige Rotationen oder allgemeiner für orthogonale L der a respektive a'. Diese sind gegeben durch die Komitanten der Duploquadrik f für inkongruente lineare Transformationen der x, respektive y. Es ist bekannt,[1] daß sich hier ein System von 18 Formen ergibt mit den drei Skalaren (in den Bezeichnungen von Savio, l. c.)

$$A = (rr')^2(ss')^2, \quad B = (rr')(rr'')(r'r'')(ss')(ss'')(s's''),$$
$$C = (tt')^2(\vartheta\vartheta')^2,$$

wobei eine zu L invariante lineare Vektorfunktion gegeben ist durch

$$\theta = t_x^2\vartheta_y^2 = (rr')r_x r'_x(ss')s_y s'_y.$$

Auch die Frage[2] nach den Invarianten zweier oder mehrerer L bei allgemeinen S oder orthogonalen **S** kann hier erörtert werden. Zwei Transformationen L haben für unabhängige S der a und a' die binären Simultaninvarianten ihrer Duploquadriken für inkongruente lineare Transformationen der x und y, das sind $2.9-1-6 = 11$ invariante Skalare (siehe Joly, l. c.).

Für zwei gerade L erhält man für kongruente S der a und a' aus den 8 Invarianten und 8 Quadriken des Systems der biquadratischen Formen A und A' (siehe Gordan, d'Ovidio) mit den Invarianten C, C' der L im ganzen 10 invariante Skalare und 8 invariante Vektoren, durch welche sich alle rationalen invarianten Skalare und Vektoren rational ausdrücken lassen.

[1] Siehe Arbeiten von Gordan, Peano und in letzter Zeit Savio, »Sulle formazioni invariantive della corrispondenza binaria (2, 2)«. Giorn. di mat., t. 40 (1902).

[2] Siehe Joly, »Scalar invariants of two linear vector functions«. Dublin Trans., XXX.

7. Die Transformation LL_1. Nach L, gegeben durch die Duploquadrik $r_x^2 s_y^2$ mit den Formen A, B, C, werde die Transformation L_1 des Raumes angewendet, die gegeben ist durch die Duploquadrik $r_{1x}^2 s_{1y}^2$ mit den Formen A_1, B_1, C_1. Dann übergeht der Vektor a vermöge L in a' und a' vermöge L_1 in a''; zwischen den Quadriken dieser Vektoren bestehen die Beziehungen:

$$a' = (ar)^2 s_x^2 = (A, a)^2 + (B, a)^1 + Ca \tag{18}$$

$$a'' = (a' r_1)^2 s_{1x}^2 = (ar)^2 (sr_1)^2 s_{1x}^2 = \\ = (A_1, a')^2 + (B_1, a')^1 + C_1 a'. \tag{19}$$

Die Transformation $L_2 = LL_1$ hat demnach die Duploquadrik

$$r_{2x}^2 s_{2y}^2 = (sr_1)^2 r_x^2 s_{1y}^2$$

mit den Formen

$$A_2 = (sr_1)^2 r_x^2 s_{1x}^2, \qquad B_2 = (sr_1)^2 (rs_1) r_x s_{1x}, 3C_2 = (sr_1)^2 (rs_1)^2,$$

so daß auch

$$a'' = (A_2, a)^2 + (B_2, a)^1 + C_2 a.$$

Aus 18) und 19) folgen dann, da

$$(A_1(A, a)^2)^2 = (A, A_1)^2 a)^2 + (A, A_1)^3 a)^1 + {}^1/_3 (A, A_1)^4 a$$
$$(A_1(B, a)^1)^2 = -(B, A_1)^1 a)^2 - {}^1/_2 (B, A_1)^2 a)^1$$
$$(B_1(A, a)^2)^1 = -(A, B_1)^1 a)^2 - {}^1/_2 (A, B_1)^2 a)^1$$
$$(B_1(B, a)^1)^1 = {}^1/_2 (BB_1, a)^2 - {}^1/_2 (B, B_1)^1 a)^1 - {}^1/_3 (B, B_1)^2 a:$$

ist, die Gleichungen:

$$A_2 = (A, A_1)^2 - (B, A_1)^1 - (A, B_1)^1 + {}^1/_2 BB_1 + AC_1 + CA_1$$
$$B_2 = (A, A_1)^3 - {}^1/_2 (B, A_1)^2 - {}^1/_2 (A, B_1)^2 - {}^1/_2 (B, B_1)^1 + BC_1 + CB_1$$
$$C_2 = {}^1/_3 (A, A_1)^4 - {}^1/_3 (B, B_1)^2 + CC_1.$$

Ist $L_1 = L$, so hat man als Formen von L^2:

$$H + {}^1/_2 B^2 + 2AC, \quad -\psi + 2BC, \quad {}^2/_3 g_2 - {}^2/_3 b + C^2.$$

Ist L gerade, so übergehen diese, wegen $B = 0$, in

$$H + 2AC, \quad 0, \quad {}^2/_3\, g_2 + C^2.$$

8. Die Reziproke von L. Die Transformation L besitzt die Invariante (siehe Art. 6)

$$\delta = (rr')(rr'')(r'r'')(ss')(ss'')(s's''),$$

die invariante Transformation θ, gegeben durch die Duploquadrik

$$\theta = t_x^2 \vartheta_y^2 = (rr')(ss')r_x r_x' s_y s_y',$$

und die zu dieser konjugierte $\bar{\theta}$, gegeben durch die Duploquadrik

$$\bar{\theta} = \vartheta_x^2 t_y^2 = (rr')(ss')s_x s_x' r_y r_y'.$$

Nun ist nach dem letzten Artikel $L\bar{\theta}$ gegeben durch

$$(s\vartheta)^2 r_x^2 t_y^2 = r_x''^2 (s_x''^2 . (rr')(ss')s_x s_x')^2 r_y r_y' =$$
$$= (rr')(ss')(ss'')(s's'')r_x''^2 r_y r_y'. \qquad 20)$$

Da aber nach der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwicklung

$$r_x''^2 r_y r_y' = (r_x''^2 r_x r_x')_{y^2} + {}^1/_2 \{(r''r) r_x'' r_x' + (r''r') r_x'' r_x\}_y (xy) +$$
$$+ {}^1/_3 (r''r)(r''r')(xy)^2,$$

so folgt, indem man in 20) r, r', r'' und gleichzeitig s, s', s'' zyklisch vertauscht und addiert, da dann rechts die von der ersten und zweiten Polare herrührenden Glieder verschwinden:

$$3(s\vartheta)^2 r_x^2 t_y^2 = \delta (xy)^2. \qquad 21)$$

Demnach kann gesetzt werden:

$$3\bar{\theta}/\delta = L^{-1};$$

denn die Transformation $3\theta/\delta$ nach L angewendet gibt nach Gleichung 21) die durch $(xy)^2$ gegebene Identität. Folglich: Die Duploquadrik der zu L reziproken Transformation L^{-1} ist $3\theta/\delta$.

Um die Formen von L^{-1} zu bestimmen, falte man die Formen:

$$r_x^2 s_y^2 = A_x^2 A_y^2 + B_x B_y (xy) + C(xy)^2$$
$$\rho_u^2 \sigma_v^2 = a_u^2 a_v^2 + b_u b_v (uv) + c(uv)^2$$

einmal bezüglich x und u und hierauf bezüglich y und v, so erhält man, wenn noch $u = x$, $v = y$ gesetzt wird:

$$(r\rho)(s\sigma)r_x\rho_x s_y\sigma_y = A'^2_x A'^2_y + B'_x B'_y(xy) + C'(xy)^2,$$

wobei:

$$\begin{aligned} A' &= (A, a)^2 - {}^1/_2 Bb - {}^1/_2 Ac - {}^1/_2 Ca \\ 2B' &= (A, b)^2 + (B, a)^2 + Cb + Bc \\ C' &= -{}^1/_6 (A, a)^4 + {}^1/_6 (B, b)^2 + Cc. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\rho = r'$, $\sigma = s'$, so erhält man, weil $a = A$, $b = B$, $c = C$ wird, die Formen von θ:

$$\left.\begin{aligned} A_\theta &= H - {}^1/_2 B^2 - AC \\ B_\theta &= \psi + BC \\ C_\theta &= -{}^1/_3 g_2 + {}^1/_3 b + C^2 \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Ist speziell L gerade, so folgt hieraus:

$$A_\theta = H - AC, \quad B_\theta = 0, \quad C_\theta = -{}^1/_3 g_2 + C^2.$$

Daher hat die reziproke L^{-1} der allgemeinen L die Formen:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= 3A_\theta/\delta = 3(H - {}^1/_2 B^2 - AC)/\delta \\ B^{-1} &= 3B_\theta/\delta = 3(\psi + BC)/\delta \\ C^{-1} &= 3C_\theta/\delta = (-g_2 + b + 3C^2)/\delta \end{aligned}$$

und der geraden L die Formen

$$3(H - AC)/\delta, \quad 0, \quad (-g_2 + 3C^2)/\delta.$$

9. Bestimmung von δ. Die zweite Überschiebung von

$$\theta = (rr')(ss')r_x r'_x s_y s'_y = A^2_{\theta x} A^2_{\theta y} + B_{\theta x} B_{\theta y}(xy) + C_\theta (xy)^2$$

über $r''^2_x s''^2_y$ bezüglich x und bezüglich y ergibt:

$$\begin{aligned} \delta &= (A_\theta r'')^2 (A_\theta s'')^2 + (B_\theta r'')(B_\theta s'')(r''s'') + C_\theta (r''s'')^2 \\ &= (A_\theta A)^4 + (B_\theta B)^2 + C_\theta C, \end{aligned}$$

also vermöge der Formeln 22)

$${}^1/_3 \delta = \Lambda + 2g_3 - g_2 C + bC + C^3,$$

wo Λ die Invariante ${}^1/_2 (\psi B)^2$ ist (Art. 6).

Ist L gerade, so hat man, da $B = 0$ ist:

$$\tfrac{1}{3}\delta = 2g_3 - g_2 C + C^3 = 1/\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2.$$

10. Speziell für eine Rotationsfläche zweiter Ordnung F_2 folgt nach Art. 5:

$$A_0 = (\tfrac{2}{3}\mathfrak{u} - C)u^2 = -Ku^2 = -u^2/r^2, \quad B_0 = 0$$
$$C_0 = (C - \tfrac{2}{3}\mathfrak{u})(C + \tfrac{2}{3}\mathfrak{u}) = K(2C - K) = (h^2 + \tfrac{2}{3}r^2)/r^4h^2$$
$$\tfrac{1}{3}\delta = \tfrac{16}{27}\mathfrak{u}^3 - \tfrac{4}{3}\mathfrak{u}^2C + C^3 = (\tfrac{2}{3}\mathfrak{u} - C)^2(\tfrac{4}{3}\mathfrak{u} + C) = 1/r^4h^2$$

und die reziproke L^{-1}, die zu dieser Rotationsfläche gehört hat, die Duploquadrik:

$$3[(\tfrac{2}{3}\mathfrak{u} - C)(u^2)_{y^2} + (C^2 - \tfrac{4}{9}\mathfrak{u}^2)(xy)^2]/\delta =$$
$$= [(u^2)_{y^2} - (\tfrac{2}{3}\mathfrak{u} + C)(xy)^2]/(\tfrac{2}{3}\mathfrak{u} - C)(\tfrac{4}{3}\mathfrak{u} + C) =$$
$$= -h^2r^2(u^2)_{y^2} + (h^2 + \tfrac{2}{3}r^2)(xy)^2.$$

11. Reduzible f. *a)* Die Duploquadrik f kann einen unveränderlichen Faktor haben, so daß etwa:

$$f = \varphi l_y,$$

wobei φ eine quadratisch-lineare Form ist:

$$\varphi = \rho_x^2 \sigma_y = (\alpha)_y + \tfrac{2}{3}\beta(xy)$$

mit den Elementarkomitanten

$$\alpha = \rho_x^2\sigma_x, \quad \beta = (\rho\sigma)\rho_x.$$

Dann ist

$$f = \varphi l_y = (\alpha)_y l_y + \tfrac{2}{3}\beta l_y(xy).$$

Da nun

$$(\alpha)_y l_y = \alpha_x^2 \alpha_y l_y = (\alpha l)_{y^2} + \tfrac{1}{2}(\alpha, q)_y^1(xy)$$
$$\beta l_y(xy) = (\beta l)_y(xy) + \tfrac{1}{2}(\beta l)(xy)^2,$$

so sind die Elementarkomitanten der jetzigen f:

$$A = \alpha l, \quad B = \tfrac{1}{2}(\alpha l)^1 + \tfrac{2}{3}\beta l, \quad C = \tfrac{1}{3}(\beta l).$$

Die zugehörige L transformiert die Vektoren a in die Vektoren derselben durch O gehenden Minimalebene, deren Linearform l ist.

Ist $f = m_x \psi$ mit $\psi = \rho_x \sigma_y^2$, so entsprechen den Ebenen a' Ebenen, die denselben Nullvektor enthalten.

b) Dyadische f. Es wäre, wenn p_x^2, q_x^2 unveränderliche Quadriken sind:

$$f = {}^1/_2 p_x^2 q_y^2;$$

dann ist für diese Duploquadrik, die als »dyadische« bezeichnet werden möge:

$$A = {}^1/_2 p_x^2 q_x^2, \quad B = {}^1/_2 (pq) p_x q_x, \quad 3C = {}^1/_2 (pq)^2.$$

Es kann hier f als Produkt der beiden Vektoren p, q aufgefaßt werden und hiedurch ist die binäre Bedeutung des sogenannten »unbestimmten Produktes zweier Vektoren p, q« und der aus ihm abgeleiteten »Dyade«[1] gegeben. Vermöge dieser Dyade übergeht der Vektor a in den Vektor mit der Quadrik

$$a' = {}^1/_2 (ap)^2 q_x^2 = a \cdot pq.$$

Die Darstellung einer beliebigen L als »Dyadik«[2] ergibt sich aus der Darstellung ihrer Duploquadrik als Summe dyadischer Duploquadriken. Jede f läßt sich, wenn $\delta \neq 0$, aus drei solchen dyadischen Formen linear ableiten und es können noch ihre Quadriken p_x zueinander ebenso wie die q_x paarweise zueinander harmonisch sein. Verschwindet δ und ist $\theta \neq 0$, so läßt sich f aus zwei dyadischen Formen linear ableiten und ist auch $\theta = 0$, so ist f dyadisch.

c) Ist die Duploquadrik der L_1:

$$f_1 = r_x s_y \rho_x \sigma_y,$$

wo $r_x s_y$, $\rho_x \sigma_y$ respektive zu den orthogonalen Transformationen **S**, **S'** gehören und die Elementarkomitanten $u, \varkappa$ respektive v, ν haben, so folgt:

$$\begin{aligned} f_1 &= (u)_y (v)_y + (\nu u + \varkappa v)_y (xy) + \varkappa \nu (xy)^2 \\ &= (uv)_{y^2} + (\nu u + \varkappa v)_y (xy) + (\varkappa \nu - {}^1/_6 (uv)^2)(xy)^2 \\ &= (uv)_{y^2} + (u, v)_y^1 (xy) + {}^1/_3 (uv)^2 (xy)^2 \\ &+ \{[\nu u + \varkappa v + (v, u)_y^1 + (\varkappa \nu - (uv)^2/2)(xy)](xy) = \text{nach } b) \\ &= u_x^2 v_y^2 + \mu_x \nu_y (xy), \end{aligned}$$

---

[1] Gibbs-Wilson, l. c., p. 265.

[2] Ib., p. 265.

wobei $\mu_x \nu_y$ die doppeltlineare Form der Transformation $\mathbf{SS}'$ ist (B. I, Art. 16).

Es ist f_1 symmetrisch, wenn $\nu u + \varkappa v = 0$ ist.

Ist $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$ also $f_1 = (r_x s_y)^2$, so ist L_1 orthogonal (Art. 2).

c') Ist die Duploquadrik der L_2 noch spezieller

$$f_2 = \mu_x \nu_y (xy)$$

mit $\mu_x \nu_y = (\alpha)_y + \beta(xy)$, das zur Transformation Σ gehöre, so wende man nach L_2 die orthogonale Transformation Σ' mit den Elementarkomitanten α', β' an. Dann übergeht f_2 (B. I. Art. 16) in:

$$\{(\beta\alpha' + \beta'\alpha + (\alpha', \alpha)^1)_y + (\beta\beta' - \alpha.\alpha')(xy)\}\{(\alpha')_y + \beta'(xy)\}.$$

Diese Form wird nach *c)* symmetrisch,

α) wenn $\beta' = 0$, $\alpha.\alpha' = 0$,

β) wenn $\alpha' = \rho\alpha$, $\beta' = \rho(-\beta \pm \sqrt{\Delta})$,

wo Δ die Determinante von Σ ist (B. I, Formel 13). Dann ist $L_2 \Sigma' = L_g$, wo L_g gerade ist, oder $L_2 = L_g \Sigma'^{-1}$. Folglich kann L auf unendlich viele Weisen ersetzt werden durch das Produkt einer geraden und einer orthogonalen L. Und zwar ist im Falle α) Σ'^{-1} eine Wendestreckung (Wendestreckinversion) um die Achse α von Σ; im Falle β) gibt es unendlich viele von dem Parameter ρ abhängige Σ'^{-1}, die ebenfalls um die Achse α drehen.

Man kann auch L_1 aus *c)* auf diesen Fall der L_2 zurückführen. Denn ist f_1 das Produkt der doppeltlinearen Formen der Transformationen S, S', so nimmt die Duploquadrik von $L_1 \mathbf{S}^{-1}$ die Form f_2 an; demnach ist $L_1 \mathbf{S}^{-1} = L_2$ und $L_1 = L_2 \mathbf{S} = L_g \Sigma'^{-1} \mathbf{S} = L_g \mathbf{S}''$, weshalb sich L_1 ebenfalls auf unendlich viele Weisen als Produkt einer geraden und einer orthogonalen L darstellen läßt.

12. Die Verzweigungsformen der L. In der zweideutigen Korrespondenz, die $f = r_x^2 s_y^2$ auf dem absoluten Kegelschnitte k bestimmt, entspricht den »Verzweigungspunkten in x'', d. i. den Wurzelpunkten der Kovariante

$$V = (ss')^2 r_x^2 r_x'^2.$$

die als »Verzweigungsform in x« bezeichnet werden möge, ein »Doppelpunkt in y«. Umgekehrt entspricht einem Verzweigungspunkt in y, d. i. einem Wurzelpunkt der Verzweigungsform in y:

$$W = (rr')^2 s_x^2 s_x'^2$$

ein Doppelpunkt in x.

Ist a ein Vektor, dem vermöge L ein Einheitsvektor a' entspricht, so ist

$$((ar)^2 s_x^2, (ar)^2 s_x^2) = 2;$$

also ist

$$(ar)^2 (ar')^2 (ss')^2 = 2$$

die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung F_2^v, der vermöge L die Einheitskugel entspricht. Die Formen dieser F_2^v sind dann $V, 3C_v = (rr')^2(ss')^2$. Die Form V hat als Wurzelpunkte auf dem absoluten Kegelschnitte k dessen Schnittpunkte mit F_2^v (siehe Art. 3), die demnach vermöge L wieder in Punkte von k übergehen.

Da die Konjugierte zu f die mit L verbundene Transformation der Ebenen des Raumes gibt, so ist ebenso

$$(r_x^2(\alpha s)^2, r_x^2(\alpha s')^2)^2 = 2 \quad \text{oder} \quad (\alpha s)^2(\alpha s')^2(rr')^2 = 2$$

die Ebenengleichung der Fläche zweiter Ordnung, welcher die Einheitskugel vermöge L entspricht. Ihre Formen sind $W, C_w = C_v$. Die Polarfläche F_2^w dieser Fläche bezüglich der Einheitskugel hat die Gleichung

$$(as)^2(as')^2(rr')^2 = 2$$

und diese hat dieselben Formen W, C_v. Die Form W ist das Produkt der Linearformen von Minimalebenen, die L aus Minimalebenen transformiert.

Da nun V und W bekanntlich entsprechend gleiche Invarianten g_2 und g_3 haben,[1] also durch unimodulare lineare

[1] Man kann auch umgekehrt aus der bekannten (im allgemeinen möglichen) Ersetzung einer L durch eine reine Deformation und darauffolgende Drehung die Gleichheit der Invarianten der Verzweigungsformen V, W erweisen. Denn sind x, y, z die Cartesischen Koordinaten eines Punktes a bezüglich eines rechtwinkligen Trieders T und $x' = lx$, $y' = my$, $z' = nz$ die Cartesischen

Transformation ineinander übergeführt werden können; außer, wenn die eine Form identisch verschwindet, die andere nicht, also im Fall einer Dyade, deren ein vektorischer Faktor Nullvektor ist, der andere nicht (Art. 11 *b)*) oder wenn die eine Form das Quadrat einer Quadrik ist, die andere aber nicht, also im Falle *a)* des Art. 11.[1] Diese Ausnahmsfälle können bei einer reellen L nicht auftreten.

13. Identität der Verzweigungsformen. Um die Verzweigungsformen der L durch die Formen A, B, C der L auszudrücken, werde bestimmt, wie sich das skalare Produkt zweier Vektoren a, b oder die zweite Überschiebung ihrer Quadriken vermöge L transformiert. Es ist

$$(a', b')^2 = 2a'.b' = (ar)^2(br')^2(ss')^2$$
$$= (Va)(Vb)+C_v(ab)^2 = (Va)(Vb)+2C_v a.b =$$
$$= \text{(nach Formel II)}$$
$$= ((A, a)^2+(B, a)^1+Ca, (A, b)^2+(B, b)^1+Cb)^2.$$

Da nun aber ist

$$((A, a)^2, (A, b)^2)^2 = (H, ab)^4+{}^2/_3 g_2(ab)^2$$
$$((A, a)^2, (B, b)^1)^2 = (\mathrm{L}, ab)^4+(\psi(a, b)^1)^2$$
$$((B, a)^1, (B, b)^1)^2 = -{}^1/_2(B^2, ab)^4+{}^2/_3 b(a, b)^2,$$

Koordinaten eines Punktes bezüglich des Trieders T', das aus T durch die Drehung um O hervorgeht, so ist $l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2=1$ die Gleichung der Fläche F_2^v und $x'^2/l^2+y'^2/m^2+z'^2/n^2=1$ die Gleichung der Fläche, die vermöge L der Einheitskugel entspricht. Daher ist die Gleichung ihrer Polarfläche F_2^w bezüglich der Einheitskugel in Ebenenkoordinaten $u'^2/l+v'^2/m+$ $+w'^2/n=1$, also in Punktkoordinaten $l^2x'^2+m^2y'^2+n^2z'^2=1$. Die Flächen F_2^v und F_2^w sind demnach kongruent und ihre Gleichungen

$$(V, a^2)^4+C_v(a, a)^2=2, \quad (W, a^2)^4+C_w(a, a)^2=2$$

müssen demnach durch unimodulare lineare Transformation ineinander übergeführt werden können, weshalb die Formen V, W dieselben Invarianten haben und $C_v=C_w$ ist.

[1] Vergl. hiezu und im folgenden Capelli, Frobenius, l. c.

so ergibt sich:

$$V = H - 2L - {}^1/_2 B^2 + 2CA.$$

Ebenso ist

$$(ab)^2 = (Wa)^2(Wb)^2 + C_w(ab)^2$$
$$W = H + 2L - {}^1/_2 B^2 + 2CA.$$

Für eine gerade L ist $V = W$. Ist dies umgekehrt der Fall, so muß $L = (A, B)^1$ identisch verschwinden. Dies geschieht, wenn *a)* $B = 0$, *b)* $A = 0$, *c)* $A = cB^2$ ist. Wenn also *a)* die L gerade ist, *b)* der Fall L_2 des Art. 11, *c)* der Fall eintritt, daß

$$f = [(A)_{y^2} + (B)_y(xy) + C(xy)^2][(A)_{y^2} + (B)_y(xy) + C'(xy)^2]$$

ist, siehe Fall *a)* des Art. 11.

14. $L = L_g S$. Transformiert man in f vermöge einer unimodularen linearen Transformation S die Veränderliche y, so erhält man eine neue Duploquadrik f' mit der Verzweigungsform V in x und der Verzweigungsform W' in y, die aus W durch S hervorgeht. Man kann nun, da V und W (die Ausnahmsfälle des Art. 12 ausgeschlossen) infolge der Gleichheit ihrer Invarianten in bekannter Weise durch unimodulare Transformation ineinander übergeführt werden können, die obige S so bestimmen, daß $W' = V$ wird. Dann gehört f' zu einer Transformation LS, die nach Art. 13

a) gerade ist, wo dann $LS = L_g$, also $L = L_g S^{-1}$;

b) eine verschwindende Form A hat, also nach Art. 11 eine L_2, die auf unendlich viele Weisen $= L_g \Sigma'^{-1}$ ist, wo dann $LS = L_g \Sigma'^{-1}$, also $L = L_g \Sigma'^{-1} S^{-1} = L_g S$;

c) eine Form $A = cB^2$ hat, also eine Form f_1 (Art. 11, *a*) hat, wo dann auf unendlich viele Weisen

$$LS = L_1 = L_g S'', \quad \text{also} \quad L = L_g S'' S^{-1} = L_g S'''.$$

15. Über das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich der durch O gehenden Achsen. Wird ein starrer Körper um eine Achse, die durch O geht, gedreht mit einer Geschwindigkeit, die durch den Vektor p dieser Achse

gegeben ist, so ist das Trägheitsmoment M des Körpers bezüglich dieser Achse eine quadratische Form der Koordinaten dieses Vektors, dividiert durch das Quadrat der Geschwindigkeit $p.p$.

Die allgemeinste quadratische Form in den Koordinaten von p ist aber auch die allgemeinste quadratische Form in den Koeffizienten der Quadrik p_x^2 des Vektors p. Ist daher $r_x^2 s_y^2$ eine symmetrische Duploquadrik mit den Formen A, C, so ist:

$$M = 2(pr)^2(sp')^2/(pp')^2 = 2[(A, p^2)^4 + C]/(pp')^2.$$

Die lebendige Kraft des Körpers ergibt sich demnach als:

$$T = (pr)^2(p's)^2 = (Ap^2)^4 + C(pp')^2 \quad {}^1$$

Aus 1) folgt, daß M unendlich groß wird für jeden Nullvektor. Denn ist p_x^2 gleich dem Quadrate der Linearform π_x, so ist $(pp')^2 = (\pi\pi')^2 = 0$. Daher: Für einen Nullvektor als Geschwindigkeitsvektor, dessen Linearform π_x ist, wird das Trägheitsmoment unendlich groß von zweiter Ordnung, und zwar wie

$$[2(A\pi')^4/(\pi\pi')^2]_{\pi'=\pi}.$$

Ist aber $\pi_x = \mathfrak{a}_x =$ einem der Faktoren von A, so daß $A = m_x^3 \mathfrak{a}$ ist, dann ist

$$(A, \mathfrak{a}^4)^4 = (m_x^3 \mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_x'^4)^4 = (m\mathfrak{a}')^3(\mathfrak{a}\mathfrak{a}').$$

Demnach wird für den Nullvektor mit der Linearform $\mathfrak{a}$ das Trägheitsmoment unendlich groß von erster Ordnung wie

$$[2(m\mathfrak{a}')^3/(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')]_{\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}}.$$

Ist ferner $\mathfrak{a}$ zweimal Linearfaktor von A, also $A = m_x^2 \mathfrak{a}_x^2$, so ist

$$(m_x^2 \mathfrak{a}_x^2, \mathfrak{a}_x'^4)^4 = (m\mathfrak{a}')^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^2$$

und das Trägheitsmoment wird endlich gleich $2(m\mathfrak{a})^2$.

[1] Vergl. Waelsch, »Binäranalyse zur Rotation etc.«, l. c.

Wenn demnach der Körper symmetrisch ist, um die Achse mit der Quadrik $u_x^2 = \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x$, wo dann $A = \mathfrak{a}_x^2 \mathfrak{b}_x^2$ ist, so wird das Trägheitsmoment desselben für beliebige Nullvektoren unendlich groß von zweiter Ordnung, endlich für die Nullvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, nämlich

$$2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 = -4(u, u)^2 = -8u.u$$

und für keinen Nullvektor unendlich von erster Ordnung.

Ist der Vektor u reell, also $u = i\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}$ (B. III, Art. 26), so sind die Trägheitsmomente um die Nullvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ gleich -8 mal dem Quadrat der Länge des Vektors u.

Über die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen

von

Emil Waelsch,

Professor an der technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Juni 1904.)

Im folgenden sollen Vektorgrößen höherer Ordnung[1] (»Polyadics« nach Gibbs-Wilson[2]) vom Gesichtspunkte der Binäranalyse[3] betrachtet werden.

Ist eine Polyquadrik (mehrfach-quadratische binäre Form)

$$a_x^2 b_y^2 c_z^2 \ldots$$

gegeben und sind $p, q, r, \ldots$ die Quadriken von Vektoren, so ist

$$(ap)^2 (bq)^2 (cr)^2 \ldots$$

eine in diesen Vektoren lineare skalare Größe.

Die Polyquadrik bestimmt eine Vektorgröße höherer Ordnung; so $a_x^2 b_y^2$ eine lineare Vektorfunktion[4] oder eine Dyadik, $a_x^2 b_y^2 c_z^2$ eine Vektorgröße dritter Ordnung oder Triadik u. s. w.

Die Koeffizienten der Polyquadrik können als Binärparameter der Vektorgröße bezeichnet werden. Ist eine Vektorgröße gegeben, so kann man ihre Polyquadrik und damit ihre

---

[1] Siehe W. Voigt, »Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung.« Gött. Nachr., 1900, p. 355. »Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristallelastizität«, l. c., p. 117.

[2] Siehe Gibbs-Wilson, »Vektoranalysis«. New-York, 1901.

[3] Siehe »Über Binäranalyse«, diese Sitzungsber., Bd. CXII, und die vorläufige Mitteilung: »Binäranalyse zur Mechanik deformierbarer Körper«, Wiener Anzeiger vom 13. März 1902.

[4] Siehe »Über die lineare Vektorfunktion als binäre doppeltquadratische Form«. Diese Sitzungsber., Sitzung vom 9. Juni 1904.

Binärparameter leicht bestimmen. Man setze hiezu die Cartesischen Koordinaten des in ihr auftretenden Vektors p:

$$x = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}, \quad y = \frac{x_1^2-x_2^2}{2i}, \quad z = \frac{x_1 x_2}{i}$$

und drücke analog die Koordinaten der Vektoren $q, r, \ldots$ durch die respektiven binären Veränderlichen $y_1, y_2;\ z_1, z_2; \ldots$ aus; dann übergeht die in den Koordinaten der Vektoren lineare Größe in die gesuchte Polyquadrik.

Entwickelt man die Polyquadrik nach der Clebsch-Gordan'schen Reihe nach Polaren ihrer Elementarkomitanten, so sind diese Komitanten Formen gerader (auch nullter) Ordnung, die sich aus der Polyquadrik durch den Polaren- und Ω-Prozeß ableiten lassen. Diese Formen können dann als Parameterformen der Vektorgröße bezeichnet werden.

Diese Parameterformen vereinigen auch physikalisch zusammengehörige Parameter der Vektorgröße; im folgenden sind für die Vektorgrößen dritter und vierter Ordnung die Prozesse angegeben, welche sie in einfacher Weise bestimmen lassen.[1]

Damit die Vektorgröße reell sei, müssen die symbolischen Faktoren $a_x^2, b_y^2, c_z^2, \ldots$ ihrer Polyquadrik Quadriken reeller Vektoren sein (siehe »Binäranalyse«, I. Mitteilung, l. c., Art. 1), also symbolische Quadriken mit komplexen Koeffizienten (siehe »Über die lineare Vektorfunktion etc.«, l. c., Art. 4) sein, d. h. die Gestalt haben:

$$(x+iy)x_1^2+2izx_1x_2+(x-iy)x_2^2.$$

Dann sind auch die Parameterformen Produkte solcher symbolischer Quadriken und sie können auch als wirkliche Produkte von Quadriken reeller Vektoren angesehen werden. Die Parameterform vierter Ordnung einer reellen Vektorgröße bestimmt also z. B. zwei reelle Vektoren; die Träger dieser beiden Vektoren sind dann gegeben und ihr Längenprodukt

---

[1] Vergl. die Bemerkung des Herrn Voigt, p. 368, für die zu der im folgenden mit $\mathfrak{F}'$ bezeichneten dreifachen Quadrik gehörigen Vektorgröße: »Man kann die in ihren Komponenten auftretenden Konstanten nur auf ziemlich umständliche und künstliche Weise von den andern sondern.«

auch. Man kann die beiden Vektoren als gleich lang annehmen und sagen, daß sie einen zweifachen Vektor bilden. Ebenso bestimmt eine Form $2n^{ter}$ Ordnung, die als Parameterform einer reellen Vektorgröße auftritt, sowie jede Form dieser Ordnung, einen n-fachen Vektor, der aus n gleichlangen Vektoren besteht, deren Träger durch die Form gegeben sind, oder der durch n Richtungen und eine skalare Größe gegeben ist.

Hiernach gibt die binäre Invariantentheorie in dem Überschiebungsprozeß ein Mittel, um aus mehreren solchen mehrfachen Vektoren andere abzuleiten. Sind z. B. zwei einfache Vektoren gegeben, so ist (siehe »Binäranalyse«, l. c.) ihr vektorisches respektive skalares Produkt (bis auf konstante Faktoren) durch die erste respektive zweite Überschiebung ihrer Quadriken gegeben. Durch Überschiebung der Formen mehrfacher Vektoren erhält man wieder Formen mehrfacher Vektoren. Eine höhere Vektorgröße ist demnach auch durch die mehrfachen Vektoren ihrer Parameterformen bestimmt.

Die Frage nach den für die verschiedenen Kristallsysteme spezialisierten Vektorgrößen ist nach dem Obigen identisch mit der nach Polyquadriken, die bei einer Gruppe linearer Transformationen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ automorph sind. Da dann aber auch die Elementarkomitanten dieser Formen automorph sind, so ist dies auch die Frage nach den Systemen von Formen gerader (höchstens achter) Ordnung, die diese Gruppe gestatten, also auch nach den Systemen von mehrfachen Vektoren, welche simultan durch eine Gruppe von Rotationen, Inversionen und Streckungen in sich übergehen.

1. Bezeichnungen. Der Prozeß der ersten Polare an einer Form in x für den Pol ξ werde mit $x.$ bezeichnet, so daß, wenn ν die Ordnung dieser Form ist, sei

$$x. = \frac{1}{\nu}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

der Prozeß der zweiten Polare sei dann mit $x.^2$ bezeichnet.

Dann sei aber auch, wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, $x.$ der Prozeß der ersten Polare für den Pol x an einer Form in ξ.

Ferner sei $\bar{x}.$ der Ω- oder Faltungsprozeß, der an einer doppeltbinären Form in ξ und x angewendet wird, z. B. an $\rho_\xi^m \sigma_x^n$:

$$\bar{x}.\rho_\xi^m \sigma_x^n = \Omega_{\xi x} \rho_\xi^m \sigma_x^n = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial x_1}\right)\rho_\xi^m \sigma_x^n =$$
$$= (\rho\sigma)\rho_\xi^{m-1}\sigma_x^{n-1}.$$

Dann ist z. B., wenn noch $a, b, c, \ldots$ statt respektive $a_\xi, b_\xi, c_\xi, \ldots$ geschrieben wird:

$$z.\bar{z}.y.\bar{y}.x^2(a_x^2 b_y^2 c_z^2) = z.\bar{z}.y.\bar{y}.a^2 b_y^2 c_z^2 = (ab)z.\bar{z}.y.ab_y c_z^2$$
$$= (ab)z.\bar{z}.abc_z^2 = {}^1\!/_2(ab)z.((ac)b+(bc)a)c_z$$
$$= {}^1\!/_2(ab)((ac)bc+(bc)ac) =$$
$$= {}^1\!/_2(ab)((ac)_, (bc)_,),$$

wo noch die hinter die Produkte der Klammerfaktoren gesetzten Beistriche andeuten sollen, daß diese Produkte durch Hinzufügung von Faktoren erster Art a, b, c zu unsymbolischer Bedeutung ergänzt und dann addiert werden sollen.

2. Der Φ-Prozeß. Es soll ferner z. B. mit:

$$\Phi.(ab)((ac)_, (bc)_,)$$

die Form bezeichnet werden, die entsteht, wenn an der Form in ξ:

$$(ab)((ac)_, (bc)_,)$$

der ihr entsprechende Φ-Prozeß:

$$\Phi. = (xy)((xz)_, (yz)_,) = (xy)((xz)y.z.+(yz)x.z.)$$

angewendet wird, so daß ist

$$\Phi.(ab)((ac)_, (bc)_,) =$$
$$= (xy)((xz)y.z.+(yz)x.z.)(ab)((ab)bc+(bc)ac) =$$
$$= (ab)[(xy)y.z.((ac)bc+(bc)ac)+$$
$$+(yz)x.z.((ac)bc+(bc)ac)] =$$
$$= {}^1\!/_2(ab)[(xy)((ac)(b_y c_z+b_z c_y)+(bc)(a_y c_z+a_z c_y))$$
$$+(yz)((ac)(b_x c_z+b_z c_x)+(bc)(a_x c_z+a_z c_x))].$$

Allgemein gibt jeder symbolische Ausdruck A in $a, b, c, d, \ldots$ für die mehrfache Quadrik $a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_u^2 \ldots$ einen ihm entsprechenden Φ.-Prozeß in $x, y, z, u, \ldots$; das Resultat der Anwendung dieses Prozesses an A soll mit

$$\Phi . A = {}^{\cdot}A$$

bezeichnet werden.

3. Die Duploquadrik $\mathfrak{F} = [22]$ gibt, nach der Clebsch-Gordan'schen Reihe entwickelt, unter Anwendung der obigen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = [22] &= a_x^2 b_y^2 = \\ &= x^2_{\cdot} y^2_{\cdot} a^2 b^2 + (xy) x . y . (ab) ab + {}^1/_3 (xy)^2 (ab)^2 \qquad 1) \\ &= {}^{\cdot}V + {}^{\cdot}Z + {}^1/_3 {}^{\cdot}C, \end{aligned}$$

wobei V, Z, C die Elementarkomitanten von F sind, die Parameterformen respektive vierter, zweiter, nullter Ordnung, die im allgemeinen voneinander unabhängig sind, die 9 Parameter von F enthalten und aus F durch Anwendung des Polaren- und Ω-Prozesses hervorgehen wie folgt:

$$V = y^2_{\cdot} x^2_{\cdot} F = a^2 b^2, Z = y . \bar{y} . x^2_{\cdot} F = (ab)_{\prime}, \quad C = \bar{y}^2_{\cdot} x^2_{\cdot} F = (ab)^2.$$

Ist F eine symmetrische Duploquadrik, also gleich

$$F' = [2/2] = a_x^2 b_y^2 = a_y^2 b_x^2,$$

so ist $(ab)_{\prime} = (ba)_{\prime} = 0$, folglich ist $Z = 0$ und

$$F' = {}^{\cdot}V + {}^1/_3 {}^{\cdot}C.$$ [1]

Ist F schief, also gleich

$$F^{\backslash} = [2/2] = a_x^2 b_y^2 = -a_y^2 b_x^2,$$

so muß $V = 0$, $C = 0$ sein; daher ist:

$$F^{\backslash} = {}^{\cdot}Z.$$

Vermöge Formel 1) ist demnach F additiv zusammengesetzt aus einem Tensortripel und einem Vektor.

---

[1] Die Form F' bestimmt ein Tensortripel (Terminologie von H. W. Voigt, l. c., p. 357.

4. Die dreifache Quadrik $\mathfrak{F} = [222]$. Man erhält nach Gordan, indem man Gleichung 1) mit c_z^2 multipliziert und rechts die sich ergebenden doppeltbinären Formen

$$c_z^2 V, c_z^2 Z, c_z^2 C$$

nach der Clebsch-Gordan'schen Reihe entwickelt mit Hilfe der obigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= [222] = a_x^2 b_y^2 c_z^2 \\ &= \dot{\mathfrak{S}} + {}^4/_3 \dot{\mathfrak{V}}_1 + \dot{\mathfrak{V}}_2 + {}^1/_3 \dot{\mathfrak{Z}}_1 + {}^3/_5 \dot{\mathfrak{Z}}_2 + \dot{\mathfrak{Z}}_3 + {}^1/_3 \dot{\mathfrak{C}}, \end{aligned} \qquad 2)$$

wobei die Elementarkomitanten der $\mathfrak{F}$ die im allgemeinen voneinander unabhängigen Formen $\mathfrak{S}$ von sechster, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ von vierter, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ von zweiter und $\mathfrak{C}$ von nullter Ordnung sind, die zusammen die 27 Parameter der $\mathfrak{F}$ enthalten. Sie werden aus $\mathfrak{F}$ wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= z^2.y^2.x^2.\mathfrak{F} = a^2 b^2 c^2, \\ \mathfrak{V}_1 &= z.\bar{z}.y^2.x^2.\mathfrak{F} = {}^1/_2[(ac)_t (bc)_t], \\ \mathfrak{V}_2 &= z^2.y.\bar{y}.x^2.\mathfrak{F} = (ab)_t, \\ \mathfrak{Z}_1 &= z^2.\bar{y}^2.x^2.\mathfrak{F} = (ab)_t^2, \\ \mathfrak{Z}_2 &= \bar{z}^2.y^2.x^2.\mathfrak{F} = {}^1/_6[(ac)_t^2 (bc)_t^2 4(ac)(bc)], \\ \mathfrak{Z}_3 &= z.\bar{z}.y.\bar{y}.x^2.\mathfrak{F} = {}^1/_2(ab)[(ac)_t (bc)_t], \\ \mathfrak{C} &= \bar{z}^2.y.\bar{y}.x^2.\mathfrak{F} = (ab)(ac)(bc). \end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{F}$ symmetrisch in x und y, also gleich $\mathfrak{F}' = [2/22]$, so ist

$$(ab)_t = (ba)_t = 0, \quad (ac)_t = (bc)_t, \quad (ac)_t^2 = (bc)_t^2,$$
$$(ab)(ac)_t = (ba)(bc)_t, \quad (ab)(ac)(bc) = (ba)(bc)(ac) = 0.$$

Daher ist dann:

$$\mathfrak{V}_2 = 0, \quad \mathfrak{Z}_3 = 0, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

so daß, weil sich vermöge der letzten Formeln auch die Φ-Prozesse entsprechend reduzieren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' &= [2/22] = a_x^2 b_y^2 c_z^2 = a_y^2 b_x^2 c_z^2 = \\ &= \dot{\mathfrak{S}}' + {}^4/_3 \dot{\mathfrak{V}}' + {}^1/_3 \dot{\mathfrak{Z}}_1' + {}^3/_5 \dot{\mathfrak{Z}}_2' \end{aligned}$$

ist, wobei

$$\mathfrak{S}' = z^2.y^2.x^2.\mathfrak{F}' = a^2b^2c^2,$$
$$\mathfrak{V}' = z.\bar{z}.y^2.x^2.\mathfrak{F}' = (ac)_{,},$$
$$\mathfrak{Z}_1' = z^2.\bar{y}^2.x^2.\mathfrak{F}' = (ab)^2_{,},$$
$$\mathfrak{Z}_2' = \bar{z}^2.y^2.x^2.\mathfrak{F}' = {}^1/_3(ac)[(ac)_{,} 2(bc)_{,}].$$

Diese im allgemeinen voneinander unabhängigen Formen hängen von den 18 Parametern der $\mathfrak{F}'$ ab.

Die doppeltsymmetrische dreifache Quadrik. Ist $\mathfrak{F}'$ auch symmetrisch in y und z, also gleich $\mathfrak{F}'' = [2/2/2]$, so ist

$$(ac)_{,} = (bc)_{,} = 0,$$
$$(ac)(bc)_{,} = (ab)(cb)_{,} = {}^1/_2(bc)[(ac)_{,}(ba)] =$$
$$= {}^1/_2(bc)[(bc)_{,}] = {}^1/_2(bc)^2;$$

daher ist jetzt:

$$\mathfrak{V}' = 0, \quad \mathfrak{Z}_2' = {}^1/_3[(ac)^2_{,}(bc)^2] = {}^2/_3(ac)^2_{,} = {}^2/_3\mathfrak{Z}_1'$$

und es folgt

$$\mathfrak{F}'' = [2/2/2] = \mathfrak{S}'' + {}^{11}/_{15}\,\mathfrak{Z}'',$$

wo

$$\mathfrak{S}'' = z^2.y^2.x^2.\mathfrak{F}'' = a^2b^2c^2,$$
$$\mathfrak{Z}'' = z^2.\bar{y}^2.x^2.\mathfrak{F}'' = (ab)^2_{,}.$$ [1]

5. Die vierfache Quadrik F = [2222]. Multipliziert man Gleichung 2) mit d_u^2 und entwickelt die rechts entstehenden doppeltbinären Formen

$$d_u^2\mathfrak{S}, \ldots d_u^2\mathfrak{C}$$

nach der Clebsch-Gordan'schen Reihe, so erhält man die folgende Formel, in der die 19 Parameterformen von F auftreten, und zwar A von achter Ordnung, S_1, S_2, S_3 von sechster, $V_2, \ldots V_6$ von vierter, $Z_1 \ldots Z_6$ von zweiter und C_1, C_2, C_3 nullter Ordnung, welche zusammen die 81 Parameter von F aufweisen.

[1] Diese Form $\mathfrak{F}'$ bestimmt (in der Voigt'schen Terminologie, siehe l. c., p. 358) ein Trivektorsystem; sie gibt die vollgemischte Polare einer ebenen Kurve dritter Ordnung.

Es ergibt sich so:

$$F = [2222] = a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_u^2 =$$
$$= {}^{\cdot}A + {}^{3}/_{2}\,{}^{\cdot}S_1 + {}^{4}/_{3}\,{}^{\cdot}S_2 + {}^{\cdot}S_3 +$$
$$+ {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}V_1 + {}^{3}/_{5}\,{}^{\cdot}V_2 + {}^{16}/_{9}\,{}^{\cdot}V_3 + {}^{5}/_{7}\,{}^{\cdot}V_4 + {}^{4}/_{3}\,{}^{\cdot}V_5 + {}^{\cdot}V_6 +$$
$$+ {}^{4}/_{5}\,{}^{\cdot}Z_1 + {}^{3}/_{5}\,{}^{\cdot}Z_2 + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}Z_3 + {}^{3}/_{5}\,{}^{\cdot}Z_4 + {}^{\cdot}Z_5 + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}Z_6 +$$
$$+ {}^{1}/_{9}\,{}^{\cdot}C_1 + {}^{1}/_{5}\,{}^{\cdot}C_2 + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}C_3,$$

wobei:

$$A = u^2.\, z^2.\, y^2.\, x^2.\, F = a^2 b^2 c^2 d^2,$$
$$S_1 = u.\, \bar{u}.\, z^2.\, y^2.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{3}[(ad)_{,}(bd)_{,}(cd)_{,}],$$
$$S_2 = u^2.\, z.\, \bar{z}.\, y^2.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{2}[(ac)_{,}(bc)_{,}],$$
$$S_3 = u^2.\, z^2.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F = (ab)_{,},$$
$$V_1 = u^2.\, z^2.\, \bar{y}^2.\, x^2.\, F = (ab)_{,}^2,$$
$$V_2 = u^2.\, \bar{z}^2.\, y^2.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{6}[(ac)_{,}^2 (bc)_{,}^2\, 4(ac)(bc)_{,}],$$
$$V_3 = u.\, \bar{u}.\, z.\, \bar{z}.\, y^2.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{8}[(ac)((ad)_{,}(cd)_{,}2(bd)_{,}) +$$
$$+ (bc)((bd)_{,}(cd)_{,}2(ad)_{,})],$$
$$V_4 = \bar{u}^2.\, z^2.\, y^2.\, x^2.\, F =$$
$$= {}^{1}/_{15}[(ad)_{,}^2 (bd)_{,}^2 (cd)_{,}^2\, 4((ad)(bd)_{,}(bd)(cd)_{,}(cd)(ad)_{,})],$$
$$V_5 = u.\, \bar{u}.\, z^2.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{4}(ab)((ad)_{,}(bd)_{,}2(cd)_{,}),$$
$$V_6 = u^2.\, z.\, \bar{z}.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{3}(ab)((ac)_{,}(bc)_{,}),$$
$$Z_1 = \bar{u}^2.\, z.\, \bar{z}.\, y^2.\, x^2.\, F =$$
$$= {}^{1}/_{12}[(ac)((ad)(cd)_{,}(bd)_{,}^2\, 2(bd)(cd)_{,}2(ad)(bd)_{,})$$
$$+ (bd)((bd)(cd)_{,}(ad)_{,}^2\, 2(ad)(cd)_{,}2(bd)(ad)_{,})],$$
$$Z_2 = u.\, \bar{u}.\, \bar{z}^2.\, y^2.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{6}[(ac)(bd)((ac)_{,}2(bc)_{,}) +$$
$$+ (bc)(ad)((bc)_{,}2(ac)_{,})],$$
$$Z_3 = u.\, \bar{u}.\, z^2.\, \bar{y}^2.\, x^2.\, F = (ab)^2 (cd)_{,},$$
$$Z_4 = \bar{u}^2.\, z^2.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F =$$
$$= {}^{1}/_{6}(ab)((ad)(bd)_{,}(cd)_{,}^2\, 2(ad)(cd)_{,}2(bd)(cd)_{,}),$$
$$Z_5 = u.\, \bar{u}.\, z.\, \bar{z}.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F =$$
$$= {}^{1}/_{4}(ab)((ac)(bd)_{,}(ac)(cd)_{,}(bc)(ad)_{,}(bc)(cd)_{,}),$$
$$Z_6 = u^2.\, \bar{z}^2.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F = (ab)(ac)(bc)_{,},$$
$$C_1 = \bar{u}^2.\, z^2.\, \bar{y}^2.\, x^2.\, F = (ab)^2 (cd)^2,$$
$$C_2 = \bar{u}^2.\, \bar{z}^2.\, y^2.\, x^2.\, F =$$
$$= {}^{1}/_{6}[(ac)^2 (bd)^2 + (bc)^2 (ad)^2 + 4(ac)(bc)(ad)(bd)],$$
$$C_3 = \bar{u}^2.\, z.\, \bar{z}.\, y.\, \bar{y}.\, x^2.\, F = {}^{1}/_{2}(ab)(cd)((ac)(bd) + (bc)(ad)).$$

Die einfach-symmetrische vierfache Quadrik $F' = [2/222]$. Ist F symmetrisch in x und y, so ist

$$(ac)_{,} = (bc)_{,}, \quad (ad)_{,} = (bd)_{,}, \quad (ab)_{,} = -(ab)_{,} = 0,$$
$$(ab)(ac)(bc) = -(ab)(ac)(bc) = 0.$$

Deshalb verschwinden von den 19 Parameterformen der F diejenigen, die den Faktor (ab) in erster Potenz haben und die übrigbleibenden 12 und die ihnen entsprechenden Φ-Prozesse vereinfachen sich teilweise, so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned} F' = [2/222] &= a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_u^2 = a_y^2 b_x^2 c_z^2 d_u^2 = \\ &= {}^{\cdot}A' + {}^{3}/_{2}\,{}^{\cdot}S_1' + {}^{4}/_{3}\,{}^{\cdot}S_2' \\ &\quad + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}V_1' + {}^{3}/_{5}\,{}^{\cdot}V_2' + {}^{16}/_{9}\,{}^{\cdot}V_3' + {}^{5}/_{7}\,{}^{\cdot}V_4' \\ &\quad + {}^{4}/_{5}\,{}^{\cdot}Z_1' + {}^{8}/_{5}\,{}^{\cdot}Z_2' + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}Z_3' + {}^{1}/_{9}\,{}^{\cdot}C_1' + {}^{1}/_{5}\,{}^{\cdot}C_2', \end{aligned} \qquad 3)$$

wobei

$$\begin{aligned} A' &= u^2.\ z^2.\ y^2.\ x^2.\ F' = a^2 b^2 c^2 d^2, \\ S_1' &= u.\,\bar{u}.\,z^2.\,y^2.\,x^2.\,F' = {}^{1}/_{3}[2(ad)_{,}(cd)_{,}], \\ S_2' &= u^2.\,z.\,\bar{z}.\,y^2.\,x^2.\,F' = (ac)_{,}, \\ V_1' &= u^2.\ z^2.\ \bar{y}^2.\ x^2.\ F' = (ab)_{,}^2, \\ V_2' &= u^2.\ \bar{z}^2.\ y^2.\ x^2.\ F' = {}^{1}/_{3}(ac)((ac)_{,}2(bc)_{,}), \\ V_3' &= u.\bar{u}.z.\bar{z}.y^2.x^2.F' = {}^{1}/_{4}(ac)((ad)_{,}(cd)_{,}2(bd)_{,}), \\ V_4' &= \bar{u}^2.\ z^2.\ y^2.\ x^2.\ F' = {}^{1}/_{15}[2(ad)_{,}^2(cd)_{,}^2 8(ad)(cd)_{,}4(ad)(bd)_{,}] \\ Z_1' &= \bar{u}^2.z.\bar{z}.y.\bar{y}.x^2.F' = \\ &\qquad = {}^{1}/_{6}(ac)((ad)(cd)_{,}(bd)_{,}^2 2(bd)(cd)_{,}2(ad)(bd)_{,}) \\ Z_2' &= u.\,\bar{u}.\,\bar{z}^2.\,y^2.\,x^2.\,F' = {}^{1}/_{3}(ac)(bd)((ac)_{,}2(bc)_{,}), \\ Z_3' &= u.\,\bar{u}.\,z^2.\,\bar{y}^2.\,x^2.\,F' = (ab)^2(cd)_{,}, \\ C_1' &= \bar{u}^2.\ z^2.\ y^2.\ x^2.\ F' = (ab)^2(cd)^2 \\ C_2' &= \bar{u}^2.\ \bar{z}^2.\ y^2.\ x^2.\ F' = {}^{1}/_{3}(ac)(bd)((ac)(bd)+2(bc)(ad)). \end{aligned}$$

Die 12 Formen $A' \ldots C_2'$ haben die 54 Konstanten von F'.

Die doppeltsymmetrische vierfache Quadrik $F'' = [2/22/2]$. Ist F' auch in z, u symmetrisch, so hat man zunächst:

$$(cd)_{,} = 0, \quad (ac)_{,} = (ad)_{,};$$

daher ist

$$S_1' = {}^{2}/_{3}S_2' = S''.$$

Ferner ist:

$$0 = (ab)((ab)_l(bd)_l(da)_l) = (ab)_l^2\, 2(ba)(ad)_l,$$
$$0 = (cd)((cd)_l(da)_l(ac)_l) = (cd)_l^2\, 2(cd)(da)_l,$$
$$0 = (ad)((ad)_l(dc)_l(ca)_l) = (ad)_l^2 (ad)(dc)_l (ad)(ca)_l,$$
$$0 = (ad)((ad)_l(dc)_l(ba)_l) = (ad)_l^2 (ad)(db)_l (ad)(ba)_l,$$
$$0 = (ad)((ab)_l(bc)_l(ca)_l) = (ad)(ab)_l (ad)(bc)_l (ad)(ca)_l.$$

Aus diesen Gleichungen folgt der Reihe nach, wenn

$$(ab)_l^2 = V_1^0, \quad (ad)_l^2 = (ac)_l^2 = V_2^0, \quad (cd)_l^2 = V_3^0$$

gesetzt wird:

$$(ab)(ad)_l = {}^1/_2 V_1^0,$$
$$(ad)(cd)_l = (ac)(dc)_l = {}^1/_2 V_3^0,$$
$$(ac)(ad)_l = V_2^0 - {}^1/_2 V_3^0$$
$$(ad)(bd)_l = (ac)(bc)_l = V_2^0 - {}^1/_2 V_1^0$$
$$(ad)(bc)_l = (ac)(bd)_l = V_2^0 - {}^1/_2 V_3^0 - {}^1/_2 V_1^0,$$

so daß V_1', V_2', V_3', V_4' übergehen in:

$$V_1'' = V_1^0$$
$$V_2'' = {}^1/_3 (3V_2^0 - V_1^0)$$
$$V_3'' = {}^1/_4 (3V_2^0 - V_1^0 - 2V_3^0)$$
$$V_4'' = {}^1/_{15} (2(3V_2^0 - V_1^0) + 5V_3^0).$$

Es sind demnach hier nur die drei unabhängigen Formen V_1^0, V_2^0, V_3^0 vorhanden. Da weiter ist:

$$(ab)^2(cd)_l = 0, \quad (ac)(ad)(cd)_l = (ad)(ac)(dc)_l = 0,$$
$$(ac)(bd)_l^2 = (bd)(ac)_l^2,$$
$$(ac)(cd)(bd)_l = (bd)(dc)(ac)_l = 0,$$
$$(ac)(ad)(bd)_l = (ad)(ac)(bc)_l,$$

so ist hier:

$$Z_3' = 0, \quad Z_1' = 2Z_2' = Z'' = {}^1/_3 (ac)(bd)((bd)_l\, 2(ad)_l).$$

Die Formen A', S', C_1', C_2' bleiben unverändert und sollen mit A'', S'', C_1'', C_2'' bezeichnet werden. Es ist dann

$$F'' = [2/22/2] = a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_u^2 = a_y^2 b_x^2 c_z^2 d_u^2 =$$
$$= a_x^2 b_y^2 c_u^2 d_z^2 = a_y^2 b_x^2 c_u^2 d_z^2 =$$
$$= {}^{\cdot}A'' + 3\,{}^{\cdot}S'' + {}^{1}/_{3}\,{}^{\cdot}V_1'' + {}^{3}/_{5}\,{}^{\cdot}V_2'' + {}^{16}/_{9}\,{}^{\cdot}V_3'' + {}^{5}/_{7}\,{}^{\cdot}V_4'' +$$
$$+ {}^{4}/_{5}\,{}^{\cdot}Z'' + {}^{1}/_{9}\,{}^{\cdot}C_1'' + {}^{1}/_{5}\,{}^{\cdot}C_2''.$$

Die Formen A'' bis C_2'' hängen von den 36 Konstanten der F'' ab.

Man kann aber auch statt der Formen $V_1'' \ldots V_4''$ drei unabhängige Formen $\overline{V_1''}, \overline{V_2''}, \overline{V_3''}$ einführen in der Weise, daß

$$F'' = {}^{\cdot}A'' + 3\,{}^{\cdot}S'' + {}^{1}/_{6}\,{}^{\cdot}\overline{V_1''} + {}^{5}/_{14}\,{}^{\cdot}\overline{V_2''} + {}^{4}/_{5}\,{}^{\cdot}\overline{V_3''} +$$
$$+ {}^{4}/_{5}\,{}^{\cdot}Z'' + {}^{1}/_{9}\,{}^{\cdot}C_1'' + {}^{1}/_{5}\,{}^{\cdot}C_2';$$

denn die Formen $V_1'' \ldots V_4''$ geben in der letzten Gleichung:

$$ {}^{1}/_{21}[(11(xy)_i^2 - 12(xu)_i^2 4(zu)_i^2).V_1^0 +$$
$$+(-12(xy)^2 + 36(xu)^2 - 12(zu)_i^2).V_2^0 +$$
$$+(4(xy)^2 - 12(xu)^2 + 11(zu)_i^2).V_3^0] =$$
$$= {}^{1}/_{6}((xy)_i^2 - (zu)_i^2)((ab)_i^2 - (cd)_i^2)$$
$$+ {}^{5}/_{14}((xy)_i^2(zu)_i^2 - {}^{8}/_{5}(xu)_i^2).((ab)_i^2(cd)_i^2 - {}^{8}/_{5}(ad)_i^2)$$
$${}^{4}/_{5}(xz)_i^2.(ad)_i^2.$$

Es ist also zu setzen:

$$\overline{V_1''} = (ab)_i^2 - (cd)^2$$
$$\overline{V_2''} = (ab)_i^2(cd)_i^2 - {}^{8}/_{5}(ad)^2$$
$$\overline{V_3''} = (ad)_i^2.$$

Die dreifach-doppelsymmetrische vierfache Quadrik $F''' = [2/2//2/2]$ entsteht aus F'', wenn noch Symmetrie vorhanden ist, bei gleichzeitiger Vertauschung von x mit z und y mit u. Dann ist

$$(ac)_i = (ca)_i = 0, \quad (ab)_i^2 = (cd)_i^2$$
$$(ac)^2(bd)_i = (ac)^2(db)_i = 0, \quad (ac)(bc)(ad)_i = (ca)(da)(cb) = 0,$$

so daß wird:

$$S'' = 0, \quad V'' = 0, \quad Z_1'' = 0$$

und

$$\overline{V_2''} = 2(ab)_i^2 - {}^8/_5(ad)^2 = 2V_1'''$$
$$\overline{V_3''} = (ad)_i^2 = V_2'''$$

und es gilt, wenn noch statt A'', C_1'', C_2'' geschrieben wird respektive A''', C_1''', C_2''':

$$F''' = {}^{\cdot}A''' + {}^{10}/_7 {}^{\cdot}V_1''' + {}^4/_5 {}^{\cdot}V_2''' + {}^1/_9 {}^{\cdot}C_1''' + {}^1/_5 {}^{\cdot}C_2'''.$$

Diese Form des »elastischen Potentials« hängt von 21 Konstanten ab.

Die Formen, welche sie zu F'' ergänzen, bilden eine vierfache Quadrik $F''^{\diagdown}$, welche symmetrisch ist, wenn x mit y, z mit u vertauscht wird, aber ihr Zeichen ändert, wenn x mit z und gleichzeitig y mit u vertauscht wird. Es ist

$$F''^{\diagdown} = [2/2 \diagdown 2/] = {}^4/_3 {}^{\cdot}S''^{\diagdown} + {}^1/_6 {}^{\cdot}V''^{\diagdown} + {}^4/_5 {}^{\cdot}Z''^{\diagdown};$$

diese Form hängt von 15 Konstanten ab und es sind ihre Formen respektive identisch mit S''', $\overline{V_1'''}$, Z_1''.

Ist die Form F''' auch für die alleinige Vertauschung von x mit z, so ist sie für alle Vertauschungen der x, y, z, u symmetrisch oder eine vollsymmetrische vierfache Quadrik F''''. Dann ist noch

$$(ac)(bd)(bc)(ad) = 0$$
$$(ab)_i^2 = (cd)_i^2, \quad (ab)^2(cd)^2 = (ac)^2(bd)^2.$$

Es wird hiernach:

$$V_1''' = {}^1/_5(ab)_i^2 = {}^1/_5 V'''', \quad V_2''' = V'''';$$
$$C_2''' = {}^1/_3 C_1''' = {}^1/_3(ab)^2(cd)^2,$$

so daß

$$F'''' = {}^{\cdot}A'''' + {}^6/_7 {}^{\cdot}V'''' + {}^2/_{15} {}^{\cdot}C''''.$$

Diese Form hängt demnach von 15 Konstanten ab.[1]

---

[1] Sie bestimmt ein Bitensorsystem (siehe Voigt, l. c., p. 358) und die vollgemischte Polare bezüglich einer ebenen Kurve vierter Ordnung.

Berichtigungen und Zusätze

zu der Arbeit: »Über Binäranalyse«, diese Sitzungsber., Bd. CXII.

I. Mitteilung.

p. 650, statt: $\frac{i}{2}(pq)$ lies: $\frac{1}{2}(pq)$;

p. 659, Z. 4 statt: $-2\varkappa$ lies: $+2\varkappa$;
Z. 10, 13, 15 füge respektive hinzu: $-(au)^2 a$, $-\varkappa(au)^2 a$, $+2\varkappa a.ua$;
Z. 19 statt: $\mathfrak{u}u$ lies: $2\mathfrak{u}u$.

p. 660, Z. 6, statt: h^2 lies $\varkappa^2$;
Z. 15 und 16 statt: eine lies: eine und dieselbe;
Z. 19 statt: $-\beta = \xi + i\eta$ lies: $-\beta = \xi - i\eta$.

Zu Art. 16 ist noch hinzuzufügen, daß H. Study in der Abhandlung: »On irrational Covariants of certain Binary Forms«, Amer. Jour., t. 17, p. 198, die Identität der »Composition« doppeltlinearer binärer Formen mit der Multiplikation der Quaternionen behandelt.

II. Mitteilung.

p. 1097, Z. 3, statt: 2 lies: -2;
Z. 3 von unten, statt: div v lies: div $v - v$ div u.

III. Mitteilung.

p. 1543, Z. 4 von unten, statt: Streckung lies: Streckung und Rotation.

Zur Theorie des photoelektrischen Stromes

von

Dr. Egon R. v. Schweidler.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1904.)

I.

Zwei parallele, ebene Platten in der Distanz d seien auf konstanten Potentialen gehalten; an der Kathode sei $v = 0$, an

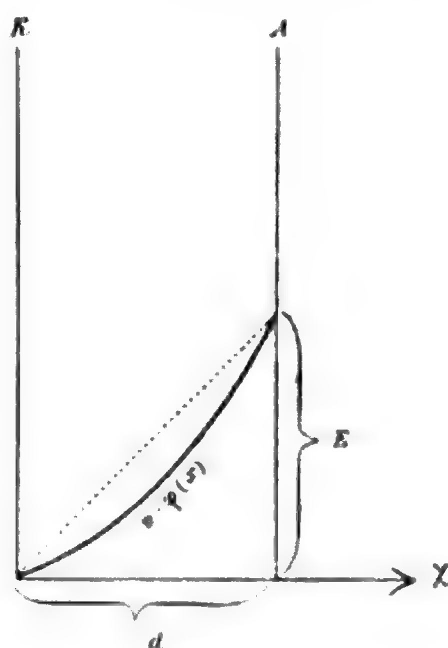


Fig. 1.

der Anode $v = +E$. Zwischen den beiden Platten werde durch ein unipolar leitendes Gas ein stationärer Strom von der Intensität i pro Flächeneinheit unterhalten und zwar sei im speziellen angenommen, daß nur negative Ionen, denen die

spezifische Geschwindigkeit u zukommt, den Elektrizitätsübergang vermitteln.

Dann folgt aus der Poisson'schen Gleichung:

$$v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -4\pi\sigma = +4\pi n e, \tag{1}$$

wobei n die Ionenzahl pro Volumeinheit, e ihre Ladung ist, und aus der Gleichung:

$$i = neu \frac{\partial v}{\partial x} = neuv' \tag{2}$$

die das Potential v als Funktion von x (Entfernung von der Kathode) definierende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{4\pi} uv'v'' = i = \text{const. bezügl. } x. \tag{3}$$

Daraus ergibt sich durch Integration:

$$v = a[(1+bx)^{3/2}-1], \tag{4}$$

wo a und b aus den Grenzbedingungen noch zu bestimmende Konstanten sind. Hieraus erhält man nun noch die folgenden Gleichungen:

$$v' = \frac{3ab}{2}(1+bx)^{1/2}, \tag{5}$$

$$v'' = \frac{3ab^2}{4}(1+bx)^{-1/2}, \tag{6}$$

$$v'v'' = \frac{9a^2b^3}{8} = \frac{4\pi i}{u}. \tag{7}$$

Die Ableitung dieser Gleichungen habe ich bereits in einer früheren Arbeit[1] gegeben; zu analogen Formeln gelangten unabhängig hievon J. J. Thomson und einige seiner Schüler.[2]

---

[1] Schweidler, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIa., p. 899, 1899.

[2] J. J. Thomson, Electricity through Gases, p. 170 und 220. — E. Rutherford, Phys. Rev. Bd. 13, p. 321, 1901.

Unter Berücksichtigung, daß für $x = d$, $v = E$ und unter Einführung der neuen Variabeln $\xi = \frac{x}{d}$ und der Konstanten $B = bd$ können die obigen Gleichungen in die bequemeren Formen gebracht werden:

$$v = \frac{(1+B\xi)^{3/2}-1}{(1+B)^{3/2}-1} \cdot E, \tag{4a}$$

$$v'v'' = \frac{9B^3}{8[(1+B)^{3/2}-1]^2} \cdot \frac{E^2}{d^3} = \omega \frac{E^2}{d^3} \tag{7a}$$

und daraus

$$i = \frac{1}{4\pi} \omega u \frac{E^2}{d^3}. \tag{8}$$

Hierin ist für alle Größen elektrostatisches Maß vorausgesetzt. Wird i in $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$, E in Volt und u in $\frac{cm}{\text{sec}}$ pro $1\,\frac{\text{Volt}}{cm}$ ausgedrückt, so ist noch der Zahlenfaktor $1 \cdot 11 . 10^{-12}$ in die Formel einzuführen und man erhält

$$i = 1 \cdot 11 . 10^{-12} \frac{u}{4\pi} \omega \frac{E^2}{d^3}. \tag{8a}$$

II.

Es soll zunächst die abgeleitete Gleichung verwendet werden zur Vervollkommnung der Methode der Berechnung von u aus Messungen der Stromstärke und des Potentialverlaufes. H. Buisson[1] hat nach dieser Methode für die spezifische Ionengeschwindigkeit im photoelektrischen Strome (in Luft bei Atmosphärendruck) den Wert $2 \cdot 2$ bis $2 \cdot 5 \, \frac{cm^2}{\text{Volt.sec}}$ gefunden, während E. Rutherford[2] nach zwei anderen, auf wesentlich verschiedenen Prinzipien gegründeten Methoden (Ablenkung durch Luftstrom, elektrisches Wechselfeld) für

[1] H. Buisson, C. R. Bd. 127, p. 224, 1898.

[2] E. Rutherford, Proc. Cambr. Soc., Bd. 9, p. 401, 1898.

dieselbe Größe die Werte zirka 1·5 beziehungsweise 1·45 erhielt[1] — wie man sieht, eine nur recht rohe Übereinstimmung der Größenordnung. Buisson hat seine Berechnung unter der Annahme durchgeführt, daß der Potentialverlauf im belichteten Kondensator durch eine Funktion zweiten Grades:

$$v = Mx + Nx^2$$

darstellbar sei, was aber nach obiger Ableitung nicht strenge richtig, sondern nur eine erste Annäherung ist. Das Hinzufügen von Gliedern höherer Ordnung würde zwar die Übereinstimmung mit der theoretischen Kurve verbessern, aber zugleich die Bestimmung von v an mehreren Punkten notwendig machen, wobei wegen der verhältnismäßig geringen Genauigkeit des mittels einer Tropfelektrode bestimmten v-Wertes die Koeffizienten der höheren Glieder sehr ungenau würden.

Die Anwendung der Formel (4*a*) dagegen, die nur eine Konstante B enthält, gestattet den Verlauf des Potentials aus einer einzigen Messung von $v = v_1$ für $x = x_1$ exakt zu bestimmen. Freilich ist diese Möglichkeit zunächst nur eine rein theoretische, denn in der Gleichung:

$$\frac{v}{E} = \eta = \frac{(1+B\xi)^{3/2}-1}{(1+B)^{3/2}-1}$$

wird zwar durch ein gegebenes Wertepaar ξ_1, η_1 ein Wert von B eindeutig bestimmt, doch eine explizite Auflösung nach B und numerische Auswertung ist nicht möglich. Um nun die empirische Auswertung möglichst einfach und bequem zu machen, habe ich daher eine Tabelle angefertigt, in der für verschiedene angenommene Werte von B berechnet sind:

1. der Ausdruck

$$\eta_1 = \frac{\left(1+\frac{B}{2}\right)^{3/2}-1}{(1+B)^{3/2}-1},$$

also der Wert, den η für $\xi = 0·5$ oder $x = \frac{d}{2}$ annimmt;

[1] Vergl. hiezu J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, p. 244, 1902.

2. der Ausdruck

$$\omega = \frac{9}{8} \cdot \frac{B^3}{[(1+B)^{3/2}-1]^2},$$

der in der Endformel (8) oder (8*a*) zur Bestimmung von *u* enthalten ist.

Auf Grund dieser Tabelle kann dann die Funktion

$$\omega = F(\eta_1)$$

durch eine graphische Darstellung wiedergegeben werden und es ergibt sich eine nahezu lineare Beziehung. (Vergl. Fig. 2.)

B	η_1	$2\eta_1$	ω
0	0·5000	1·0000	0·0000
1	0·4578	0·9156	0·3367
2	0·4347	0·8694	0·5111
4	0·4122	0·8244	0·6948
6	0·3996	0·7992	0·7916
10	0·3860	0·7720	0·8935
20	0·3726	0·7452	0·9992
100	0·3582	0·7164	1·0940
∞	0·35355	0·7071	1·1250

Die Ermittlung von *u* geschieht dann in folgender Weise: Es werden experimentell gemessen die Stromdichte *i*, die Distanz *d* und die Potentialdifferenz *E* der Platten; mittels einer Tropfelektrode wird in der Mitte, also für $x = d/2$ der Wert des Potentials v_1 bestimmt; zu dem gefundenen Wert $\eta_1 = \frac{v_1}{E}$ wird in der Tabelle durch Interpolation oder in der graphischen Darstellung der zugehörige Wert ω aufgesucht und damit sind alle erforderlichen Größen bekannt.

Wie aus obiger Gleichung hervorgeht, variiert ω zwischen den Grenzen 0 und 9/8, wenn B von 0 bis ∞ wächst; im Grenzfalle wird die Potentialverteilung durch die Gleichung gegeben:

$$\eta = \xi^{3/2}$$

und in diesem Falle wird für

$$x = d/2, \quad v = 0\cdot 7071 \frac{E}{2},$$

d. h. der Potentialwert in der Mitte beträgt zirka 70% des Wertes, der bei linearem Potentialgefälle (wie im unbelichteten Kondensator) erhalten wird.

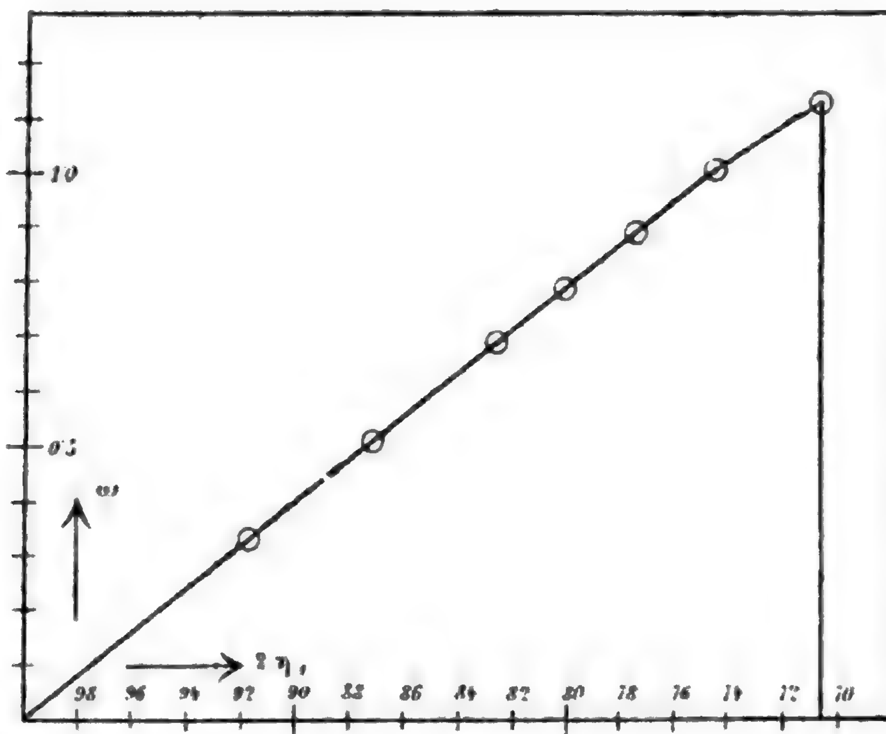


Fig. 2.

Für die Genauigkeit des Resultates ist es günstig, diesem Falle möglichst nahe zu kommen, da der prozentuelle Fehler in der Bestimmung von η_1 um so weniger den Wert von ω beeinflußt, je größer ω ist. Im günstigsten Falle, bei $2\eta_1$ nahe gleich 0·7, ist der relative Fehler von ω zirka das $2^1/_2$fache des relativen Fehlers von η_1. Da nun mittels einer Tropfelektrode und eines Blattelektroskopes der Wert v bei einer

Größenordnung von 150 Volt auf zirka ± 1 Volt, d. i. $0 \cdot 7\%$ genau gemessen werden kann, ist ω auf ungefähr 2% genau leicht bestimmbar.

Eine experimentelle Bestimmung der spezifischen Geschwindigkeit der Ionen im photoelektrischen Strom unter Verwendung der hier ausgeführten theoretischen Erwägungen ist im Gange.

III.

Aus der Gleichung ($8a$):

$$i = 1 \cdot 11 . 10^{-12} . \frac{u}{4\pi} \, \omega \frac{E^2}{d^3},$$

in der ω selbst wieder von E, d, ferner von der Lichtintensität und der Lichtempfindlichkeit der Kathode abhängig ist, ergeben sich einige Konsequenzen, die teils durch bereits vorliegende empirische Resultate bestätigt werden, teils zu manchen bisher allgemein üblichen Annahmen in Widerspruch stehen.

Wie schon oben erwähnt, kann ω im Maximum (für $B = \infty$) den Wert 9/8 annehmen; damit ist bei gegebenem E und d auch ein Maximalwert von i bestimmt, der durch beliebige Steigerung der Lichtintensität nicht überschritten werden kann; bei hinreichend hoher Lichtintensität kann also zwischen dieser und der Stromstärke eine Proportionalität, wie sie allgemein angenommen wird, nicht mehr bestehen.

Analog wie bei gegebener Lichtintensität durch Steigerung der elektromotorischen Kraft der Strom nur bis zu einem gewissen Grenzwerte, dem der betreffenden Lichtintensität zukommenden Sättigungsstrome, gesteigert werden kann — abgesehen von dem durch Ionenstoß bedingten sekundären Ionisationsvorgang bei sehr hohen Feldintensitäten — kann man auch bei gegebenem E und d von einem Grenzstrome bezüglich Lichtintensität sprechen, der durch E und d bedingt ist und bei ins Unendliche wachsender Belichtung asymptotisch erreicht wird. Je nach den bei der gewählten Versuchsanordnung gerade kombinierten Werten von E und d und der Lichtintensität L, die in diesem Falle mit E_0, d_0, L_0 bezeichnet

werden sollen, kann der eine oder der andere der beiden Grenzwerte, die ich durch die Symbole:

$$J_{E=\infty}^{L_0, d_0} \quad \text{und} \quad J_{L=\infty}^{E_0, d_0}$$

bezeichnen will, höher liegen; der tatsächlich beobachtete Strom wird unterhalb des kleineren der beiden Grenzwerte liegen. Wird L immer so hoch gehalten, daß bei allen E- und d-Werten einer Versuchsreihe der Grenzstrom $J_{L=\infty}$ nahe erreicht ist, so steigt die Stromstärke bei Variation von E und d proportional $\frac{E^2}{d^3}$, ein Fall, der bei den analogen unipolaren Entladungsvorgängen an glühenden Körpern und in speziellen Versuchsanordnungen bei Leitung in Flammengasen experimentell realisiert wurde.[1]

Auf dem Gebiete der photoelektrischen Ströme fand ich nur zwei Angaben, die auf das Eintreten dieses Falles hindeuten. Stoletow[2] gibt an, daß in manchen Fällen (bei höherem Drucke des Gases) die Funktion $i = \varphi\left(\frac{E}{d}\right)$ erst rascher, dann nach Überschreitung eines Wendepunktes langsamer als ihr Argument ansteige. Dufour, Dutoit und Hofer[3] finden, daß die Entladungsgeschwindigkeit einer belichteten, negativ geladenen Zinkkugel von 50 Volt an rascher wächst als es einer Proportionalität von Strom und Spannung entspricht. In beiden zitierten Fällen ist der dem gewöhnlichen Verhalten eines Stromes in einem ionisierten Gas entgegengesetzte Verlauf der »Charakteristik«, d. i. der (i, E) Kurve, bei niedrigen Werten der Spannung beobachtet worden, so daß der bekannte analoge Verlauf, der durch sekundäre Ionisation infolge Ionenstoßes bedingt ist, hier nicht zur Erklärung herangezogen werden kann.

Eine nähere Betrachtung der Verhältnisse unter Einführung numerischer Werte zeigt auch, warum diese Erscheinung

[1] Vergl. E. Rutherford, l. c. Ferner E. Riecke, Lehrbuch der Physik, II. Bd., p. 367, 1902.

[2] Stoletow, J. de phys. (2) Bd. 9, p. 468, 1890.

[3] Dufour, Dutoit und Hofer, Arch. de Gen., Bd. 34, p. 294, 1895.

bei photoelektrischen Strömen so selten beobachtet wurde. Der Grenzstrom $J_{L=\infty}$ wächst proportional $\frac{E^2}{d^3}$; nur bei geringer Spannung oder großer Distanz erhält man Werte, die mittels praktisch herstellbarer Lichtintensitäten erreichbar sind; bei höherem E und kleinerem d wächst $J_{L=\infty}$ so rapid an, daß es den Wert $J^{L_0}_{E=\infty}$, den man mit der maximalen, praktisch erreichbaren Lichtintensität L_0 erzielen kann, bald übertrifft. Der Sättigungsstrom, der unter Anwendung einer Bogenlampe in zirka 1 bis 2 *dm* Distanz als Lichtquelle und frisch amalgamierten Zinkes als lichtempfindlicher Kathode erreicht werden kann, ist nach älteren Messungen von mir von der Größenordnung $10^{-9}\ \frac{\text{Amp.}}{cm^2}$.

Der Grenzstrom $J_{L=\infty}$ für verschiedene Werte von E und d ergibt sich aus folgender Tabelle, die berechnet ist unter der Annahme, daß die spezifische Ionengeschwindigkeit $1 \cdot 8\ \frac{cm^2}{\text{sec . Volt}}$ betrage (Mittelwert aus den Resultaten Buisson's und Rutherford's für Luft von 1 Atm. Druck).

E (Volt)	J (Amp./cm^2) für $d =$			
	1 *mm*	10 *mm*	50 *mm*	100 *mm*
1	18.10^{-11}	18.10^{-14}	14.10^{-16}	18.10^{-17}
10	18.10^{-9}	18.10^{-12}	14.10^{-14}	18.10^{-15}
100	18.10^{-7}	18.10^{-10}	14.10^{-12}	18.10^{-13}
1000	18.10^{-5}	18.10^{-8}	14.10^{-10}	18.10^{-11}

Man sieht hieraus, daß z. B. bei 1 *cm* Distanz der Platten und 100 Volt Potentialdifferenz der Grenzstrom nicht mehr erreichbar ist.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. VIII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Einige Messungen, betreffend die spezifische Ionengeschwindigkeit bei lichtelektrischen Entladungen

von

Rudolf Grošelj.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1904.)

Die vorliegende Arbeit stellt eine Wiederholung der Messungen dar, die zuerst von Buisson[1] und später durch Rutherford[2] ausgeführt wurden. Da jedoch die Werte, die Buisson für die spezifische Ionengeschwindigkeit findet, mit denen, die Rutherford einmal mit der Blasmethode, das anderemal mit Hilfe eines elektrischen Wechselfeldes gewonnen hat, nicht übereinstimmen, so war es angezeigt, eine Wiederholung dieser Messungen vorzunehmen und das um so mehr, da in letzter Zeit von E. v. Schweidler[3] die Theorie der lichtelektrischen Entladungen verbessert und erweitert wurde, wobei sich zeigte, daß die Theorie, nach der Buisson seine Messungen ausgeführt hat, nicht einwandfrei ist.

Die Messungen selbst wurden nach derselben Methode wie bei Buisson ausgeführt, nur wurde der lichtelektrische Strom direkt mit Hilfe eines Spiegelgalvanometers und nicht wie beim ersteren mit Hilfe einer bekannten Kapazität und Bestimmung der Entladungsgeschwindigkeit gemessen.

[1] Buisson, C. R. Bd. 127, p. 224, 1898.

[2] Rutherford, Cambr. Soc. Bd. 9, p. 401, 1898.

[3] Schweidler, Zur Theorie des photoelektrischen Stromes. Diese Sitzungsber., Abt. IIa, 1904.

Die Vorrichtung, mit der die ersten Versuchsreihen ausgeführt wurden, bestand aus einer quadratischen Zinkplatte *Zn*, deren Seite eine Länge von 15 *cm* hatte. An dieser war in einer Entfernung von 4·8 *cm* durch vier Ebonitstäbe eine Messingplatte *M* von derselben Größe isoliert befestigt. Die Ebonitstäbe wurden, um eine bessere Isolation zu erzielen, mit einer Paraffinschichte überzogen. Die Messingplatte hatte eine kreisrunde Öffnung von $r = 6$ *cm*, die mit einem grobmaschigen Netze *N* verdeckt war. Dieses machte einerseits das elektrische Feld zwischen den Elektroden homogen und ließ andrerseits genug Licht auf die Zinkplatte auftreffen. Die Zinkplatte wurde

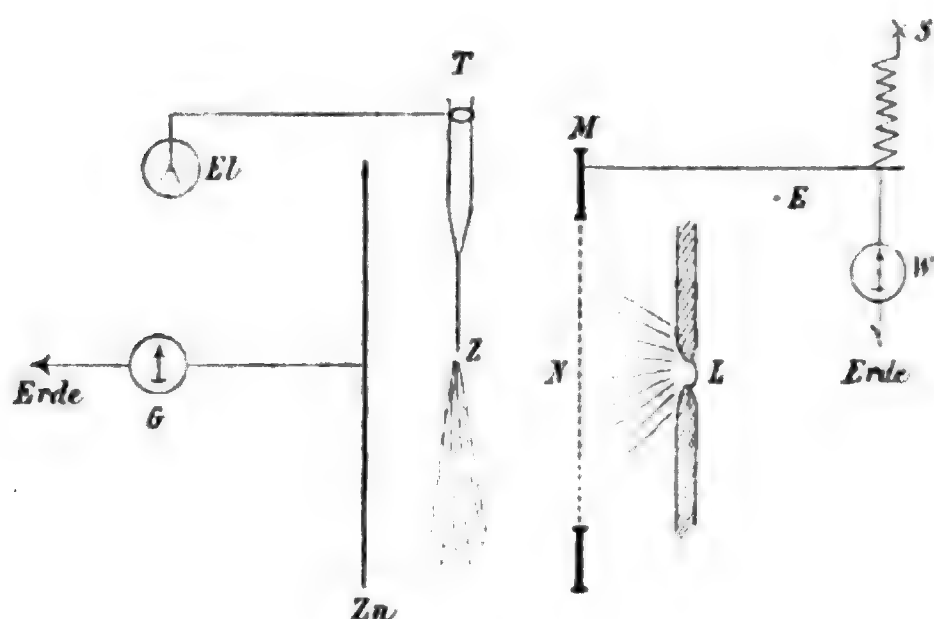


Fig. 1.

durch ein Spiegelgalvanometer *G* (1 *mm* $= 3 \cdot 1 . 10^{-10}$ Amp.) zur Erde abgeleitet. Das Messingnetz wurde mit einem Punkte der positiven Gleichstromleitung *S* verbunden, von dem eine Abzweigung durch ein Westonvoltmeter *W* zur Erde führte. Durch einen veränderlichen Vorschaltwiderstand konnte man die Spannung am Netze beliebig unter 320 Volt variieren und am Westonvoltmeter ablesen. Die Spannung im Raume zwischen der Zinkplatte und dem Netze wurde mit Hilfe einer Wassertropfelektrode *T*, die mit einem Exner'schen Elektroskope *El* verbunden war, gemessen. Der Zerreißungspunkt *Z* des Wasserstrahles lag in der Achse der ganzen Vorrichtung. Das ab-

fließende Wasser wurde in einem zur Erde abgeleiteten Gefäße gesammelt. Als Lichtquelle diente ein elektrisches Bogenlicht L mit einem Handregulator. Es wurde auch der Versuch gemacht, statt gewöhnlicher Kohlen die sogenannten blauen Kohlen, wie sie bei der Finsenlampe gebraucht werden und die besonders stark ultraviolette Strahlen emittieren, anzuwenden. Es wurde zwar dadurch der lichtelektrische Strom verstärkt, doch konnten wegen zu starker Lichtschwankungen, die beim Gebrauche dieser Kohlen sich einstellen, keine genauen Messungen ausgeführt werden. Die Größe der beleuchteten Fläche wurde für jede Versuchsreihe aus der Entfernung der Lichtquelle und den Dimensionen der Elektroden bestimmt. Der Schatten, den das Netz auf die Zinkplatte wirft, wurde dabei nicht berücksichtigt, da er jedenfalls denselben Effekt hervorbringt wie eine bloße Schwächung der Lichtintensität. Die Zinkplatte wurde immer vor den Messungen frisch amalgamiert.

Die Messungen wurden nach der von E. v. Schweidler in der oben angegebenen Abhandlung aufgestellten Theorie ausgewertet. Bezeichnet nämlich E die Spannung am Netze, d die Entfernung der Elektroden, V_x das Potential in irgend einem Punkte mit der Entfernung x von der Zinkplatte, i die Stromstärke des lichtelektrischen Stromes pro Flächeneinheit, u die spezifische Ionengeschwindigkeit, so ist im belichteten Zustande:

$$V_x = \frac{\left(1+\frac{Bx}{d}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{(1+B)^{\frac{3}{2}}-1}\cdot E,$$

$$V'_x = \frac{3B\left(1+\frac{Bx}{d}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left[(1+B)^{\frac{3}{2}}-1\right]}\,\frac{E}{d},$$

$$V''_x = \frac{9B^2\left(1+\frac{Bx}{d}\right)^{-\frac{1}{2}}}{8\left[(1+B)^{\frac{3}{2}}-1\right]}\,\frac{E}{d^2},$$

wobei B eine von der Lichtintensität abhängige Größe darstellt, die alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann. Die Stromstärke ist gegeben durch:

$$i = \frac{1}{4\pi} v'.v''.u = \frac{9}{8} \frac{B^3}{[(1+B)^{\frac{3}{2}}-1]^2} \cdot u \cdot \frac{E^2}{d^3} = \frac{\omega}{4\pi} \frac{E^2}{d^3} \cdot u,$$

wenn man

$$\frac{9}{8} \frac{B^3}{[(1+B)^{\frac{3}{2}}-1]^2} = \omega$$

setzt. Macht man die Messungen mit der Tropfelektrode in der Mitte zwischen der Zinkplatte und dem Messingnetze, so ist für $x = \frac{d}{2}$:

$$V_{\frac{d}{2}} = \frac{\left(1+\frac{B}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{(1+B)^{\frac{3}{2}}-1} \cdot E = \eta . E.$$

Bestimmt man den Quotienten zwischen dem Potentiale im unbelichteten Zustande $\frac{E}{2}$ und dem bei der Belichtung der Zinkplatte $V_{\frac{d}{2}}$, so ist:

$$\frac{V_{\frac{d}{2}}}{E/2} = \frac{2\left[\left(1+\frac{B}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{(1+B)^{\frac{3}{2}}-1} = 2\eta$$

und man kann aus diesem Quotienten einen Schluß auf die Größe B ziehen. Durch die Größe B ist schließlich ein bestimmter Wert von ω gegeben.[1]

Aus der Gleichung

$$i = \frac{1}{4\pi} u . \omega \frac{E^2}{d^3}$$

kann nun, da ω bestimmt wurde, u berechnet werden, und zwar:

[1] Schweidler, Zur Theorie des photoelektrischen Stromes. Diese Sitzungsber., Abt. IIa, 1904.

$$u = \frac{4\pi d^3}{1\cdot 1} \cdot \frac{i}{E^2 \omega},$$

wenn man d in Zentimetern, i in Ampère, E in Volt ausdrückt.

Die Tropfelektrode wurde mit Hilfe eines Schlittens in die Mitte zwischen die Elektroden gesetzt, wobei das Elektroskop die Hälfte der am Netze vorhandenen Spannung zeigte. Wurde die Zinkplatte beleuchtet, so sanken die Blätter des Elektroskopes und zugleich zeigte das Spiegelgalvanometer einen Ausschlag. Da jedoch die Intensität der Lichtquelle sich fortwährend änderte, so bewegte sich die Skala des Spiegelgalvanometers als auch die Blätter des Elektroskopes in oft ziemlich großen Intervallen. Doch stellte sich nach einiger Zeit fast immer für einige Momente eine konstante Belichtungsintensität ein, wobei sowohl das Spiegelgalvanometer als auch das Elektroskop einen fixen Ausschlag zeigten. Solche Momente wurden zur Ablesung von i, E und $V_{\frac{d}{2}}$ benützt. Aus E und $V_{\frac{d}{2}}$ wurde ω bestimmt, aus ω, i, E und d fand man den Wert von u.

Mit der oben beschriebenen Vorrichtung wurden drei Versuchsreihen in verschiedenen Entfernungen von der Lichtquelle ausgeführt. Die Zahlenwerte, die dabei gefunden wurden, sind folgende:

Erste Versuchsreihe.

Distanz der Zinkplatte von der Lichtquelle 21 *cm*.
Größe der belichteten Zinkplatte 194·8 cm^2.
Distanz der Elektroden 7·8 *cm*.

E in Volt	$V_{\frac{d}{2}}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.\,Volt}$
284	101	71·1%	1·11	192·2	1·39
240	81	71·6	1·09	133·3	1·38
202	72	71·28	1·1	96·1	1·39
230	88	75·2	0·98	111·6	1·396
234	85·5	73·08	1·05	130·2	1·46

Zweite Versuchsreihe.

Entfernung der Zinkplatte von der Lichtquelle 28 *cm*.
Größe der belichteten Fläche 167·6 cm^2.
Distanz der Elektroden 7·8 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
286	117	81·8%	0·72	108·5	1·387
302	125	82·7	0·685	117·8	1·42
302	138	91·95	0·34	58·9	1·43
300	131	87·3	0·5	86·8	1·45
300	128	85·3	0·58	108·5	1·348
244	105	86	0·55	65·1	1·46
194	80	82·4	0·70	55·8	1·37

Dritte Versuchsreihe.

Entfernung der Zinkplatte von der Lichtquelle 33·5 *cm*.
Größe der belichteten Fläche 156·3 cm^2.
Distanz der Elektroden 7·8 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
298	137	91·9%	0·32	49·6	1·41
286	129	90·2	0·385	55·8	1·43
286	130	90·9	0·355	52·7	1·46
230	97	84·3	0·62	56·4	1·39
200	83·5	83·5	0·655	43·4	1·32
204	84·5	82·8	0·68	47·1	1·35

J bedeutet in diesen sowie in den folgenden Versuchsreihen den ganzen Strom, i den Strom pro Flächeneinheit.

Diese Versuchsreihen zeigen, daß eine genaue Bestimmung der spezifischen Ionengeschwindigkeit nach dieser Methode möglich ist. Man sieht auch, daß der Wert von 2η mit der Entfernung zunimmt, während ω und J abnehmen. Aus allen Messungen folgt ein Wert $u = 1 \cdot 4 \frac{cm^2}{\text{sec.Volt}}$. Es zeigte jedoch die oben beschriebene Vorrichtung gewisse Mängel, welche die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigten, so daß allen diesen Versuchsreihen ein gemeinsamer Fehler anhaften könnte. Es traten nämlich an der Zinkplatte Biegungen ein, welche eine genaue Messung der Entfernung beider Elektroden unmöglich machten, ein Umstand, der schwer bei der Berechnung der Geschwindigkeit in das Gewicht fällt, da die Distanz in der Gleichung von u in dritter Potenz vorkommt. Der Wert $7 \cdot 8\, cm$, der oben angegeben ist, ist eben ein Durchschnittswert. Ebenso war die Bestimmung der Größe der belichteten Fläche aus der Entfernung der Lichtquelle und den Dimensionen der Elektroden eine ungenaue. Es wurden deshalb diese Messungen als Vorversuche betrachtet und eine zweite Vorrichtung konstruiert, bei der die oben erwähnten Fehler wegfielen. Es wurde nämlich in die quadratische Zinkplatte *Zn* (Fig. 2) eine kreisrunde Öffnung von $r = 6\, cm$ geschnitten. In diese Öffnung wurde eine Zinkscheibe K ($r = 5 \cdot 55\, cm$), die auf einem Schlitten mit Millimeterteilung befestigt war, hineingeschoben. Die Zinkscheibe wurde wie oben durch das Galvanometer, die quadratische Zinkplatte direkt zur Erde abgeleitet. Dadurch war es einerseits möglich, mit Hilfe des Schlittens die Entfernung der Elektroden genau zu bestimmen, da jetzt keine Biegungen an der Zinkplatte vorkamen und andrerseits fiel die Berechnung der Größe der belichteten Fläche weg, weil dieselbe bei allen Entfernungen konstant war. Als Tropfelektrode diente eine einfache zugespitzte Glasröhre, die durch einen Kautschukschlauch mit einem auf eine Paraffinplatte gestellten Gefäße in Verbindung war. Die Glasröhre wurde, durch einen Draht isoliert, an einem Schlitten befestigt, so daß man sie leicht in jede beliebige Lage bringen konnte. Dadurch

war es möglich, den Wasserstrahl genau vertikal zu bekommen, den Zerreißungspunkt genau in die Achse der Vorrichtung und die Tropfelektrode in die Mitte zwischen Netz und Zinkscheibe.

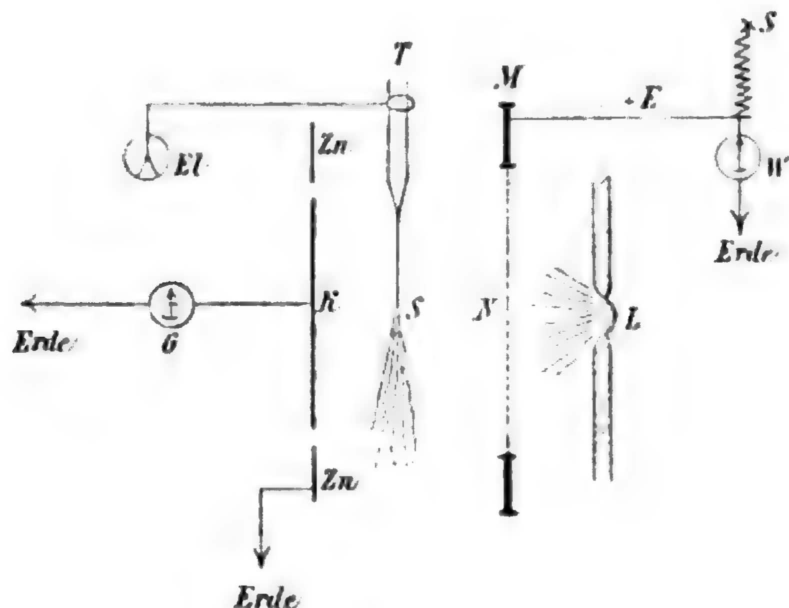


Fig. 2.

Mit dieser Vorrichtung wurden mehrere Versuchsreihen ausgeführt, ihr Resultat ist folgendes:

Erste Versuchsreihe.

Radius der belichteten Fläche betrug in dieser wie in folgenden Reihen 5·55 *cm*.

Entfernung der Elektroden 4·6 *cm*.

E in Volt	$V_{\frac{d}{2}}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
280	110·5	78·9%	0·835	99·2	1·74
276	109·5	79·5	0·815	93	1·72

Zweite Versuchsreihe.

(Größere Entfernung der Lichtquelle.)
Entfernung der Elektroden 4·6 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
284	121·5	85·5%	0·57	74·09	1·89
254	106	83·5	0·65	65·1	1·77
252	105	83·3	0·655	71·3	1·92

Dritte Versuchsreihe.

Entfernung der Elektroden 4·52 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
287	110	76·6%	0·915	119·35	1·72
284	105	73·9	1·02	127·1	1·68
280	112	80·0	0·8	96·1	1·67
280	122	87·1	0·51	58·9	1·61
228	92·5	81·1	0·725	55·3	1·61

Vierte Versuchsreihe.

(Kleinere Spannungen.)
Entfernung der Elektroden 4·52 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
224	93	76·8%	0·925	86·8	1·75
234	90	76·9	0·92	86·8	1·88

Folgende Versuchsreihen wurden mit einem Elektroskop ausgeführt, das eine genauere Ablesung des Potentials gestattete und das mit einer Bernsteinisolation versehen war.

Erste Versuchsreihe.

Entfernung der Elektroden 4·50 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
277	113·5	81·9%	0·715	96·1	1·88
278	120	86·3	0·54	71·3	1·83
280	118·5	84·6	0·61	77·5	1·74

Zweite Versuchsreihe.

(Andere Entfernung des Lichtes.)
Entfernung der Elektroden 4·50 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
280	119	85·0%	0·59	75·02	1·73
280	131	93·5	0·255	31·0	1·67

Dritte Versuchsreihe.

Entfernung der Elektroden 4·55 *cm*.

E in Volt	$\frac{V_d}{2}$ in Volt	2η	ω	J in 10^{-10} A.	u in $\frac{cm^2}{sec.Volt}$
320	126	78·7%	0·845	134·23	1·72
320	139	86·6	0·52	82·15	1·71
320	152	95·0	0·195	34·1	1·90

Aus diesen Versuchsreihen folgt, wenn man den betreffenden Beobachtungen, die bei hoher Spannung und großer Belichtungsintensität ausgeführt wurden, mehr Gewicht beilegt, ein Wert

$$u = 1 \cdot 7 \frac{cm^2}{\text{sec. Volt}},$$

ein Wert, der in der Mitte liegt zwischen den Werten 2·3 und 1·5, die von Buisson und Rutherford gefunden wurden.

Die Werte der ersten vier Versuchsreihen sind durchschnittlich etwas kleiner als die der letzten drei. Es kommt das von der besseren Isolation des Elektroskopes, der bei den letzten Versuchsreihen gebraucht wurde. Wenn nämlich die Isolation des Elektroskopes mangelhaft ist, so zeigt es ein zu kleines $V_{\frac{d}{2}}$ an, daraus folgt ein zu kleines 2η, ein zu großes ω und daraus ein zu kleines u. Die spezifische Ionengeschwindigkeit ist im untersuchten Gebiete, d. i. unterhalb 320 Volt, konstant und unabhängig von der Spannung der Elektroden, ebenso unabhängig von der Belichtungsintensität und der Beschaffenheit der Zinkplatte. Auch die Ermüdung der Lichtempfindlichkeit, die sich mit der Zeit bei der Zinkplatte einstellt, hat auf die Geschwindigkeit keinen Einfluß, da sie sowohl die Stromstärke i als auch ω um den gleichen Prozentgehalt erniedrigt, so daß der Wert $\frac{i}{\omega}$ bei konstantem E eine von der Lichtintensität unabhängige Größe ist. Die Feuchtigkeit betrug im Zimmer, wo die Messungen ausgeführt wurden, durchschnittlich 50%. Ihr Einfluß auf die spezifische Geschwindigkeit konnte wegen der Anwendung der Tropfelektrode nicht ermittelt werden.

Die Temperatur zwischen den Elektroden schwankte um 29° C. Der Barometerstand betrug bei den letzten drei Versuchsreihen 740 *mm*.

Berechnet man den Wert von u aus den Gleichungen von Buisson, so kommen, so lange 2η größer ist als 80%, dieselben Werte heraus wie aus obigen Gleichungen; bei kleineren Werten von 2η sind die Werte von u nach Buisson etwas

kleiner, weil das ω größer wird; bei $2\eta = 71\,\%$ beträgt der Unterschied beiläufig $0 \cdot 1 \frac{cm^2}{\text{sec. Volt}}$.

Aus den obigen Versuchsreihen ist es auch ersichtlich, daß der Wert von 2η nie unter $70\,\%$ sinkt, obwohl die verschiedensten Spannungen und Lichtintensitäten angewendet wurden, es ist das der Wert, dem sich der Bruch

$$2\eta = \frac{2\left(1+\frac{B}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{(1+B)^{\frac{3}{2}}-1}$$

für $B = \infty$, d. h. bei unendlich starker Belichtungsintensität asymptotisch nähert.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XVI.

Über den täglichen Gang der elektrischen Zerstreuung auf dem Sonnblick

von

Dr. **Viktor Conrad.**

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. Juni 1904.)

Bereits im Sommer 1902 wurden auf dem Sonnblick-Observatorium Zerstreuungsmessungen angestellt, die jedoch durch die Ungunst des Wetters keine nennenswerten Resultate lieferten; daher wurden dieselben in der Zeit vom 8. August bis zum 6. September 1903 wieder aufgenommen. Gleichzeitig schien es geboten, die Beobachtungen des Potentialgefälles zu wiederholen, da die Registrierungen im Vorjahre[1] das unerwartete Resultat ergeben hatten, daß sich noch in der Höhe des Sonnblick-Gipfels eine deutlich ausgeprägte doppelte Periode zeigt.

Das Instrumentarium bestand aus einem Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel von Günther in Braunschweig und einem Benndorf'schen Potentialregistrierapparat,[2] der alle 15 Minuten Kontakt gab.

Der Zerstreuungsapparat wurde auf eine Konsole vor das Ostfenster des Hauses gestellt. Da die Befürchtung auf Grund der Messungen im Vorjahre nahelag, daß das Schutzdach den Apparat nicht genügend vor dem sehr starken elektrischen Felde schützen würde, wurde der ganze Apparat in ein großes

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 112, Abt. II a, Mai 1903.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 111, Abt. II a, 1902.

Drahtnetz gestellt — freilich mußte dadurch auf die Vergleichbarkeit der so gefundenen Werte mit jenen anderer Beobachter verzichtet werden. Das Drahtnetz sowohl wie das Gestell des Elektroskopes samt Schutzdach waren an die Blitzableitung angeschaltet, die in einen 2 *km* vom Gipfel entfernten See einmündet. Der Isolationsverlust wurde einer konstanten Kontrolle unterzogen und überstieg bei ständiger Anwendung von Natrium bei den hier verwendeten Beobachtungen nie die Fehlergrenze der Ablesung (zirka 0·2 Teilstriche in 30 Minuten). Als Expositionsdauer wurde ein Zeitraum von 5 Minuten gewählt, der, wie aus den im folgenden mitgeteilten Beobachtungen hervorgeht, vollkommen genügte. Die Verkürzung der Expositionsdauer war notwendig, um stündliche Messungen vornehmen zu können; die ganze Doppelmessung dauerte samt Umpolarisation 20 Minuten. Die Messung begann 10 Minuten vor der vollen Stunde und endete 10 Minuten nach derselben. Die negative Messung ging der positiven immer voraus. Es wäre noch hinzuzufügen, daß die Messungen bei Nacht mit Hilfe einer Azetylenlampe ausgeführt wurden, die so weit vom Apparat entfernt war, daß man noch gerade gut ablesen konnte. Vergleichsmessungen bei Tageslicht mit und ohne Lampe ergaben keine Beeinflussung der Zerstreuungswerte durch dieselbe.

Das Benndorf'sche Elektrometer war in derselben Weise aufgestellt wie es in der bereits zitierten Abhandlung beschrieben wurde. Es braucht deshalb hier nicht näher auf die Aufstellung eingegangen zu werden. Zu bemerken wäre nur, daß als Elektrode diesmal ein Marckwald'sches Poloniumstäbchen in Verwendung kam. Das Stäbchen war in einen Blechtrichter eingeschraubt, der wiederum an einem Paraffinklotze befestigt war. Der Paraffinklotz wurde an einen dünnen Kupferdraht gehängt, der senkrecht zur Nordwand des Hauses gegen den Nordabsturz gespannt war. Während im Vorjahre die Abstände der Elektrode vom Boden und der Hauswand 175 *cm* respektive 75 *cm* betrugen, wurden sie nun auf 175 *cm* und 220 *cm* vergrößert; das Elektrometer mußte natürlich dementsprechend unempfindlicher gemacht werden, was durch Vergrößerung der Distanz zwischen den beiden Bifilar-Aufhängepunkten geschah.

Die Änderungen wurden vorgenommen, um eine rein formale Übereinstimmung der neu gewonnenen Registrierungen mit denen des Vorjahres zu vermeiden.

Es erübrigt noch, einige Worte über die Möglichkeit einer Beeinflussung der Zerstreuungsmessungen durch das Poloniumstäbchen, welches als Elektrode diente, zu sagen. Eine solche Beeinflussung scheint meiner Meinung nach ziemlich ausgeschlossen zu sein. Die Elektrode hing, wie bereits erwähnt wurde, an der Nordseite, die Messungen der Zerstreuung wurden an der Ostseite des Hauses vorgenommen. Von der Elektrode bis zur Nordostecke des Hauses war eine Distanz von zirka 8 *m*, von der Nordostecke bis zu dem Ostfenster ungefähr $2^1/_2$ *m*. Gerade für die westlichen Winde, die ionisierte Luft hätten herbeiführen können, lag das Ostfenster im Windschatten und von den andern Windrichtungen war ohnedies nichts zu fürchten. Als Tatsache kann konstatiert werden, daß die höchsten Zerstreuungswerte bei Ost- und Nordostwind gefunden wurden, deren Luft sicherlich nicht an der Elektrode vorbeigestrichen sein konnte. Wenn auch die radioaktive Infizierung durch Polonium sehr unwahrscheinlich ist, so wurde vorsichtshalber jedenfalls strenge darauf geachtet, daß das Poloniumstäbchen nie in den Raum gebracht werde, wo sich der Zerstreuungsapparat befand.

Die folgenden Tabellen I und II enthalten die Werte für die negative beziehungsweise positive Zerstreuung. Die Zahlen bedeuten die Differenz der Potentiale des Zerstreuungskörpers vor und nach der Exposition von 5 Minuten. Die Messungen gingen sämtlich von einem Anfangspotential von zirka 220 Volt aus.

Von den 300 Doppelmessungen, die während des einmonatlichen Aufenthaltes auf dem Sonnblick gewonnen wurden, sind hier nur 85 Beobachtungen verwendet. Da es sich um die Auffindung des normalen täglichen Ganges der Zerstreuung handelt, wurden eben nur jene Messungen herangezogen, die einer ziemlich geschlossenen stündlichen Beobachtungsreihe angehören und auf nahezu gänzlich wolkenlose Tage fallen. Diesen Bedingungen entsprachen die Beobachtungen vom 1., 2., 4. und 5. September 1903. Auf eine gewitterreiche, mit Sturm, Schneefällen und Regengüssen ziemlich reich

Tabelle I.

Negative Zerstreuung.

Stunde	1. Sept.	2. Sept.	4. Sept.	5. Sept.	Mittel	Abweichungen
0h a.	25·7	(22·4)	27·3	24·5	24·9	−0·6
1 »	(29·2)	21·0	34·0	31·9	29·0	+3·5
2 »	32·8	19·6	40·7	40·7	33·4	+7·9
3 »	30·0	18·1	(40·7)	44·8	33·4	+7·9
4 »	32·2	21·0	40·7	46·2	**35·5**	+9·5
5 »	17·6	25·8	(34·5)	48·8	31·7	+6·2
6 »	15·7	22·6	28·4	47·3	28·5	+3·0
7 »	18·3	25·2	23·7	43·9	27·8	+2·3
8 »	20·9	27·8	(20·2)	41·5	27·6	+2·1
9 »	26·2	29·0	16·8	39·0	27·7	+2·2
10 »	21·8	(27·8)	25·2	26·9	25·4	−0·1
11 »	28·9	26·6	20·9	18·4	23·7	−1·8
12	26·5	32·7	26·7	25·9	27·9	+2·4
1h p.	26·9	26·7	24·2	24·0	25·4	−0·1
2 »	19·4	26·7	17·0	25·9	22·2	−3·3
3 »	17·7	29·8	(21·0)	23·3	22·9	−2·6
4 »	14·3	28·2	25·0	15·7	20·8	−4·7
5 »	15·1	26·9	17·9	(15·4)	18·8	−6·7
6 »	16·0	25·6	(14·6)	15·2	17·9*	−7·6
7 »	22·3	24·4	11·3	17·9	19·0	−6·5
8 »	29·8	27·6	(11·2)	16·0	21·1	−4·4
9 »	20·6	32·2	11·1	18·5	20·6	−4·9
10 »	16·0	29·8	21·5	28·1	23·9	−1·6
11 »	(19·2)	30·0	17·0	(25·3)	22·8	−2·7
Mittel	22·6	26·1	23·8	29·3	25·5	

Tabelle II.

Positive Zerstreuung.

Stunde	1. Sept.	2. Sept.	4. Sept.	5. Sept.	Mittel	Abweichungen
0^h a.	16·1	(27·8)	11·0	(16·0)	17·7	+2·6
1 »	(15·3)	14·7	30·0	16·0	19·0	+3·9
2 »	15·3	13·3	32·1	22·8	20·9	+5·8
3 »	13·6	12·0	(24·4)	31·0	20·4	+5·3
4 »	17·9	6·1	16·8	34·3	18·8	+3·7
5 »	13·7	15·2	(18·8)	42·1	**22·4**	+7·3
6 »	19·3	11·3	20·8	31·3	20·7	+5·6
7 »	(12·4)	11·7	15·2	29·8	17·3	+2·2
8 »	5·6	12·1	(12·7)	18·6	12·2	−2·9
9 »	11·4	10·5	10·2	21·5	13·4	−1·7
10 »	14·5	(12·4)	21·5	11·3	14·9	−0·2
11 »	11·8	14·4	18·7	15·3	15·0	−0·1
12	14·6	16·3	12·6	14·5	14·5	−0·6
1^h p.	(9·7)	9·8	11·3	8·0	9·7	−5·4
2 »	4·8	16·9	5·8	7·2	8·7*	−6·4
3 »	13·9	12·9	7·8	8·9	10·9	−4·2
4 »	12·0	16·0	11·3	9·6	12·2	−2·9
5 »	8·1	9·3	10·2	(16·5)	11·0	−4·1
6 »	9·8	(13·9)	(9·1)	13·9	11·7	−3·4
7 »	8·6	18·6	8·0	(12·5)	11·9	−3·2
8 »	16·2	19·4	(8·0)	11·1	13·7	−1·4
9 »	16·0	24·7	8·1	10·3	14·8	−0·3
10 »	12·1	23·4	5·4	16·2	14·3	−0·8
11 »	(14·1)	25·6	6·0	(14·7)	15·1	−0·0
Mittel	12·8	15·3	14·0	18·1	15·1	

bedachte Periode in der zweiten Hälfte des August folgten die selten schönen ersten Tage des September, in denen sich ein Luftdruckmaximum über den Alpen ausbreitete, das (auf das Meeresniveau reduziert) 765 bis 770 *mm* betrug. Mit Ausnahme der Stunden von 1^h p. bis 4^h p. am 3. September, wo einige Kumuluswolken aufstiegen, waren diese Tage wolkenlos bis auf wenige Wölkchen am äußersten Horizont. Die Fernsicht war immer sehr gut und erreichte stets in den Morgenstunden eine Art Maximum, bei dem man nach Süden hin die vom Sonnblick zirka 120 *km* entfernten Ketten der Julischen Alpen sehen konnte. Die Nächte waren von außerordentlicher Schönheit und Klarheit. Der Wind war im allgemeinen schwach und verstärkte gegen Sonnenaufgang. Am 4. und 5. September trat morgens eine ziemlich frische Ostbrise ein, die wohl die hohen Zerstreuungswerte, namentlich der negativen Zerstreuung, verschuldete.

Wenn man die Zahlenreihen betrachtet, die das Mittel der Zerstreuungswerte an den vier Septembertagen darstellen, so ergibt sich vor allem ein deutlich ausgesprochener täglicher Gang. Das Maximum der negativen Zerstreuung fällt auf 4^h a., jenes der positiven auf 5^h a.; das Minimum der negativen auf 6^h p., das Minimum der positiven auf 2^h p.

Da zufälligerweise die Messungen auf dem Sonnblick gleichzeitig mit jenen von A. Gockel auf dem Brienzer Rothorn (2300 *m*) angestellt wurden, lag es nahe, die Resultate beider Arbeiten zu vergleichen. Dieselben stimmen im wesentlichen auch überein. Das Maximum der negativen Zerstreuung liegt nach Gockel ebenfalls vor Sonnenaufgang. Das Maximum der positiven Zerstreuung ist auf dem Rothorn auf 7^h a. vorgeschoben. Während auch bei der Eintrittszeit des Minimums für die positive Zerstreuung, das bei Gockel[1] auf 1^h p. fällt, eine wohl genügende Übereinstimmung herrscht, ist bei der Eintrittszeit des Minimums für die negative Zerstreuung ein wesentlicher Unterschied zu verzeichnen. Auf dem Rothorn fällt dasselbe auf 3^h p., auf dem Sonnblick dagegen auf 6^h p. Es mag dies dem von Gockel erwähnten Umstande

[1] Arch. de scienc. ph. et nat., 1904, p. 1.

zuzuschreiben sein, daß in den ersten Nachmittagsstunden stets Wolkenbildung eintrat, während auf dem Sonnblick die herangezogenen Tage beinahe völlig wolkenlos waren. Bemerkenswert ist ein schwaches Ansteigen der Zerstreuung um die Mittagszeit. Vielleicht hat man es hier mit einem Überbleibsel des Hauptmaximums in der Ebene zu tun, das B. Zölss[1] aus den Beobachtungen in Kremsmünster findet. Auf dem Sonnblick ist das Mittagsmaximum beinahe verschwunden und das Hauptmaximum dezidiert in den ersten Morgenstunden gelegen. Es scheint also der Grund des mittäglichen Maximums in den unteren Luftschichten zu liegen. Vergleicht man die Beobachtungen auf dem Sonnblick in Bezug auf die Gesamtamplitude mit den Kremsmünsterer Messungen, so ergibt sich, daß die Amplitude der Tagesschwankung mit der Höhe abnimmt. Während sie in Kremsmünster im Mittel (des ganzen Jahres) 62% des Maximalwertes beträgt, beläuft sich dieselbe bei den Sonnblickmessungen nur auf 45%. Dabei sagt Zölss, daß die Amplitude in manchen Monaten bis zu 118% beträgt.

Um die Beobachtungen übersichtlicher zu machen, wurde der tägliche Gang der Zerstreuung mittels der harmonischen Analyse in die einfache und doppelte Tageswelle zerlegt. Da die Koeffizienten der dritten Glieder nur zirka ein Zehntel der Koeffizienten der zweiten Glieder betrugen, konnten dieselben ohneweiters weggelassen werden. Die Formeln lauten:

$$Z_{-} = 25\cdot5+5\cdot9\sin(12\cdot5^\circ+x)+2\cdot3\sin(21\cdot0^\circ+2x)$$
$$Z_{+} = 15\cdot1+4\cdot7\sin(40\cdot5^\circ+x)+0\cdot7\sin(347\cdot5^\circ+2x).$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, daß die Zerstreuung auf dem Sonnblick noch immer eine doppelte Periode aufweist. Die Amplitude der einfachen Periode verhält sich zu der doppelten

bei Z_{-} zirka wie 25 : 10,

bei Z_{+} zirka wie 67 : 10.

Während also die negative Zerstreuung eine noch stark ausgeprägte doppelte Periode zeigt, findet sich dieselbe bei der

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 112, Abt. IIa, Juli 1903.

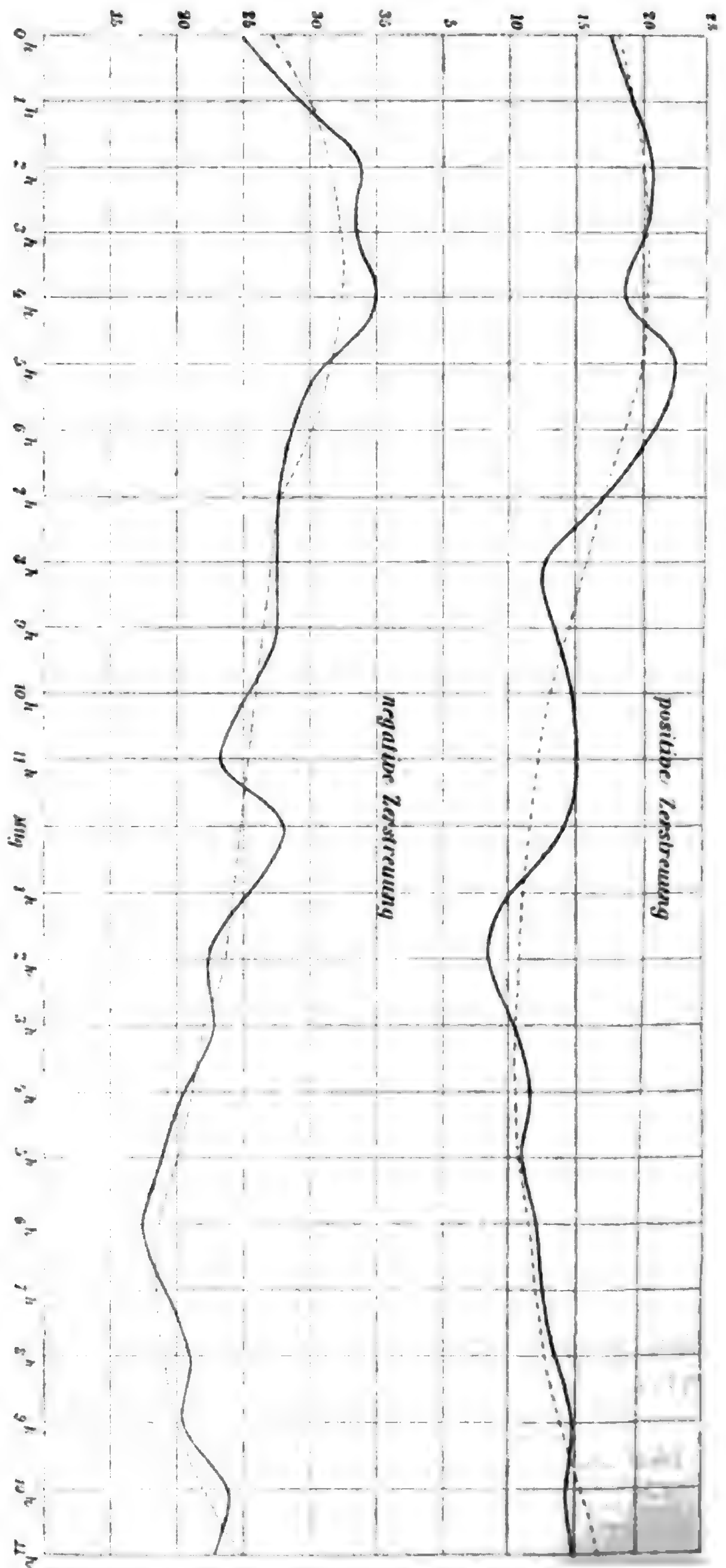


Fig. 1 und 2.

positiven Zerstreuung nur mehr in sehr geringem Maße vor. Auch hier kann konstatiert werden, daß die Intensität der doppelten Periode mit der Höhe abnimmt. Zölss berechnet nämlich das Verhältnis der Koeffizienten des ersten und des zweiten Gliedes wie 4 : 25. In Kremsmünster übersteigt also die Amplitude der doppelten Periode jene der einfachen um mehr als das Sechsfache.

Fig. 1 und Fig. 2 stellen den täglichen Gang der positiven und der negativen Zerstreuung dar. Die ausgezogenen Kurven bedeuten die beobachteten, die strichlierten die aus der Sinusreihe gerechneten Werte.

Das Verhältnis der negativen zur positiven Zerstreuung stellt sich natürlich zu Gunsten der negativen; doch spricht es nicht für ein so eminentes Vorherrschen der positiven Ionen, wie es z. B. von Le Cadet[1] auf dem Montblanc gefunden wurde. Die Verhältniszahlen q wurden aus den Mitteln der Stundenwerte der Zerstreuung gebildet und es ergibt sich ein Gesamtmittel

$$q = 1 \cdot 75.$$

Das mittlere Maximum beträgt 2·62, das mittlere Minimum 1·40. In den Einzelwerten kommen freilich bei verschiedenen Wetterlagen sehr große Schwankungen von zirka 0·4 bis 8·0 vor.

Der tägliche Gang von q ist durch die folgende Tabelle III und die Fig. 3 dargestellt. In der Tabelle stellt die erste Reihe die Quotienten der wirklichen Mittel dar, während die zweite Reihe das Verhältnis der mittels der harmonischen Analyse berechneten Stundenwerte der Zerstreuung enthält. Der ersteren Reihe entspricht die voll ausgezogene Kurve, der letzteren die strichlierte.

Der tägliche Gang der Größe q weist ein kräftig ausgeprägtes Vormittagsmaximum um 8^h a. und ein Hauptmaximum zwischen 1^h p. und 2^h p. dar. Zwischen die beiden Maxima schiebt sich eine tiefe Depression knapp vor der Mittagszeit. Die Eintrittszeit der Depression stimmt recht gut mit den Resultaten der Beobachtungen von Gockel und Le Cadet. Auch

[1] Compt. rend., 135.

Tabelle III.

0h	1h a.	2h a.	3h a.	4h a.	5h a.	6h a.	7h a.	8h a.	9h a.	10h a.	11h a.	12h	1h p.	2h p.	3h p.	4h p.	5h p.	6h p.	7h p.	8h p.	9h p.	10h p.	11h p.	Mittel
1·40	1·52	1·59	1·63	1·86	1·41	1·38	1·60	2·27	2·07	1·70	1·58	1·92	**2·62**	2·55	2·10	1·72	1·71	1·53	1·60	1·54	*1·33	1·67	1·51	1·75
1·52	1·56	1·58	1·59	1·59	1·60	1·62	1·69	1·70	1·80	1·90	2·02	**2·20**	2·16	2·15	2·04	1·91	1·89	1·63	1·50	1·45	*1·43	1·45	1·48	1·72

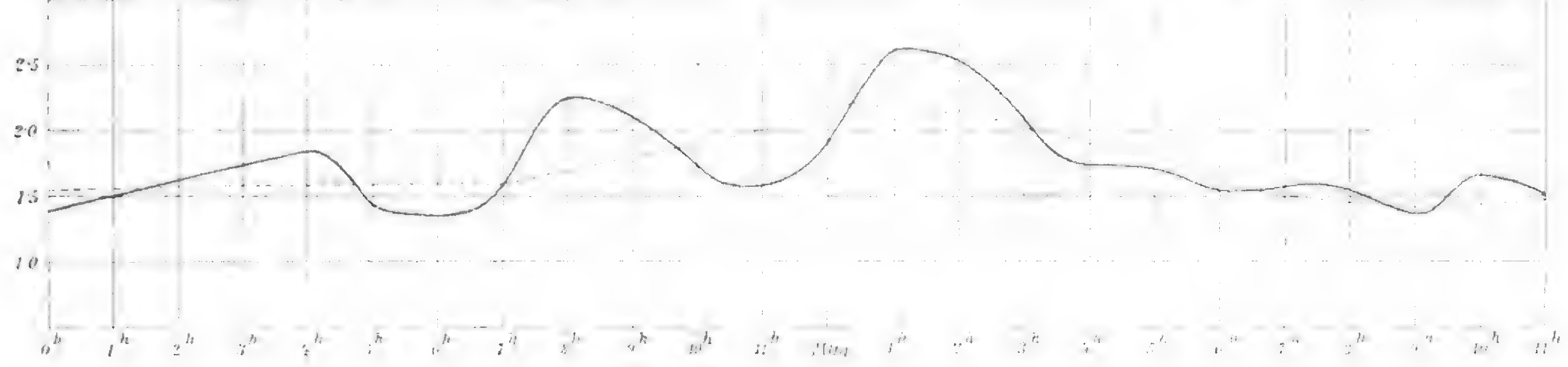


Fig. 3.

Le Cadet findet ein Maximum in den ersten Nachmittagsstunden. Es möge noch auf die wesentlichen Ähnlichkeiten der q-Kurve auf dem Sonnblick mit jener, die E. v. Schweidler[1] in Mattsee (in der Ebene) gefunden hat, hingewiesen werden; eine Vergleichbarkeit mit der von W. Saake (Arosa) gezeichneten Kurve konnte nicht konstatiert werden.

Einen ziemlich überraschenden Anblick gewährt die strichlierte Kurve. Freilich bleibt es zweifelhaft, ob derselben ein reeller physikalischer Wert zukommt. Nach dieser ausgeglichenen Kurve bleibt q während der ganzen Nacht konstant, beginnt, nachdem sich die Sonne einigermaßen über die Dunstmassen des Horizontes erhoben hat, zu steigen, erreicht sein Maximum mit dem Hochstande der Sonne und sinkt in derselben Weise wieder ab, um nach Sonnenuntergang wieder konstant zu werden.

Zum Schlusse sei noch eine kleine Tabelle IV angefügt, die die Eintrittszeiten der Extreme für die ganz- und halbtägige Periode der Zerstreuung sowie des Potentials (nach den Registrierungen im Jahre 1902 und jenen im Jahre 1903) enthält.

Tabelle IV.

	Ganztägige Periode		Halbtägige Periode			
	Maximum	Minimum	Maximum		Minimum	
Negative Zerstreuung..	$5^h\,10^m$ a.	$5^h\,10^m$ p.	$2^h\,15^m$ a.	$2^h\,15^m$ p.	$8^h\,15^m$ a.	$8^h\,15^m$ p.
Positive Zerstreuung..	$3^h\,20^m$ a.	$3^h\,20^m$ p.	$3^h\,30^m$ a.	$3^h\,30^m$ p.	$9^h\,30^m$ a.	$9^h\,30^m$ p.
Potential 1902.....	$6^h\,30^m$ p.	$6^h\,30^m$ a.	$10^h\,20^m$ a.	$10^h\,20^m$ p.	$4^h\,20^m$ a.	$4^h\,20^m$ p.
Potential 1903.....	$5^h\,45^m$ p.	$5^h\,45^m$ a.	$10^h\,5^m$ a.	$10^h\,5^m$ p.	$4^h\,5^m$ a.	$4^h\,5^m$ p.

Wie man aus obiger Tabelle ersieht, zeigen die ganztägige und die halbtägige Periode ein verschiedenes Verhalten. Bei

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 112, Abt. IIa, Dez. 1903.

der ganztägigen Welle gehen die Extreme der positiven Zerstreuung jenen der negativen voraus, während bei der halbtägigen Welle das Gegenteil eintritt. Die Extreme beider Zerstreuungsarten eilen den Extremen des Potentials voraus.

Zusammenfassung.

1. Sowohl die positive wie die negative Zerstreuung zeigen in Sonnblickhöhe noch eine doppelte tägliche Periode, die bei der ersteren viel schwächer ausgeprägt ist als bei der letzteren.

2. Das Amplitudenverhältnis der einfachen und der doppelten Periode nimmt mit der Erhebung in der Atmosphäre ab, und der tägliche Gang der Zerstreuung scheint einer einfachen Periode zuzustreben.

3. Das Hauptmaximum der Zerstreuung fällt auf die ersten Morgenstunden vor Sonnenaufgang, das Hauptminimum in die Nachmittagsstunden. Das in der Ebene beinahe allgemein beobachtete Mittagsmaximum tritt in Sonnblickhöhe nur mehr rudimentär auf.

4. Der Wert von q weist zwei Maxima um 8^h a. und zirka $1^h\ 30^m$ p. auf. Zwischen diese Maxima ist eine tiefe Depression eingeschoben, die um zirka 11^h a. ihren niedrigsten Wert erreicht.

Die in dieser Arbeit nicht verwendeten Zerstreuungsmessungen, die während eines einmonatlichen Aufenthaltes auf dem Sonnblick bei allen möglichen Wetterlagen gewonnen wurden, werden zu einer Diskussion des Einflusses der meteorologischen Elemente auf die Zerstreuung verwendet werden.

Anhang.

Potentialregistrierungen.

Bei der geringen Zahl von Potentialregistrierungen, die meines Wissens in Sonnblickhöhe vorgenommen und publiziert wurden, wird es vielleicht nicht unangemessen sein, die Stundenmittel der Potentialregistrierungen am 1., 4. und 5. September wiederzugeben (Tabelle V). Es sind dies jene wolkenlosen Tage, an denen die vorher besprochenen Zerstreuungs-

Tabelle V.

	1. Sept.	4. Sept.	5. Sept.	Mittel	Ab-weichungen
0h a......	18·1	17·5	13·1	16·2	—1·7
1 »	16·2	15·2	13·7	15·0	—2·9
2 »	15·2	14·1	11·0	13·4	—4·5
3 »	13·9	12·7	10·2	12·3	—5·6
4 »	6·3	13·0	9·7	9·7*	—8·2
5 »	13·1	12·2	10·9	12·1	—5·8
6 »	17·7	14·5	11·3	14·5	—3·4
7 »	19·5	15·7	12·5	15·9	—2·0
8 »	20·8	16·7	12·4	16·6	—1·3
9 »	22·4	19·3	12·3	18·0	+0·1
10 »	22·9	17·8	13·7	18·1	+0·2
11 »	27·9	17·7	12·4	19·3	+1·4
12 »	27·3	20·1	11·9	19·8	+1·9
1h p......	28·5	19·1	13·4	20·3	+2·4
2 »	28·5	18·2	13·8	20·2	+2·3
3 »	27·1	18·3	13·8	19·7	+1·8
4 »	21·9	17·8	16·9	18·9	+1·0
5 »	25·6	15·8	17·4	19·6	+1·7
6 »	24·6	19·2	18·8	20·9	+3·0
7 »	23·2	25·0	24·2	24·1	+6·2
8 »	23·1	28·1	23·0	**24·7**	+6·8
9 »	20·6	28·2	23·0	23·9	+6·0
10 »	16·4	19·7	21·4	19·2	+1·3
11 »	13·4	16·5	19·2	16·6	—1·5
Mittel	20·6	18·0	15·0	17·9	

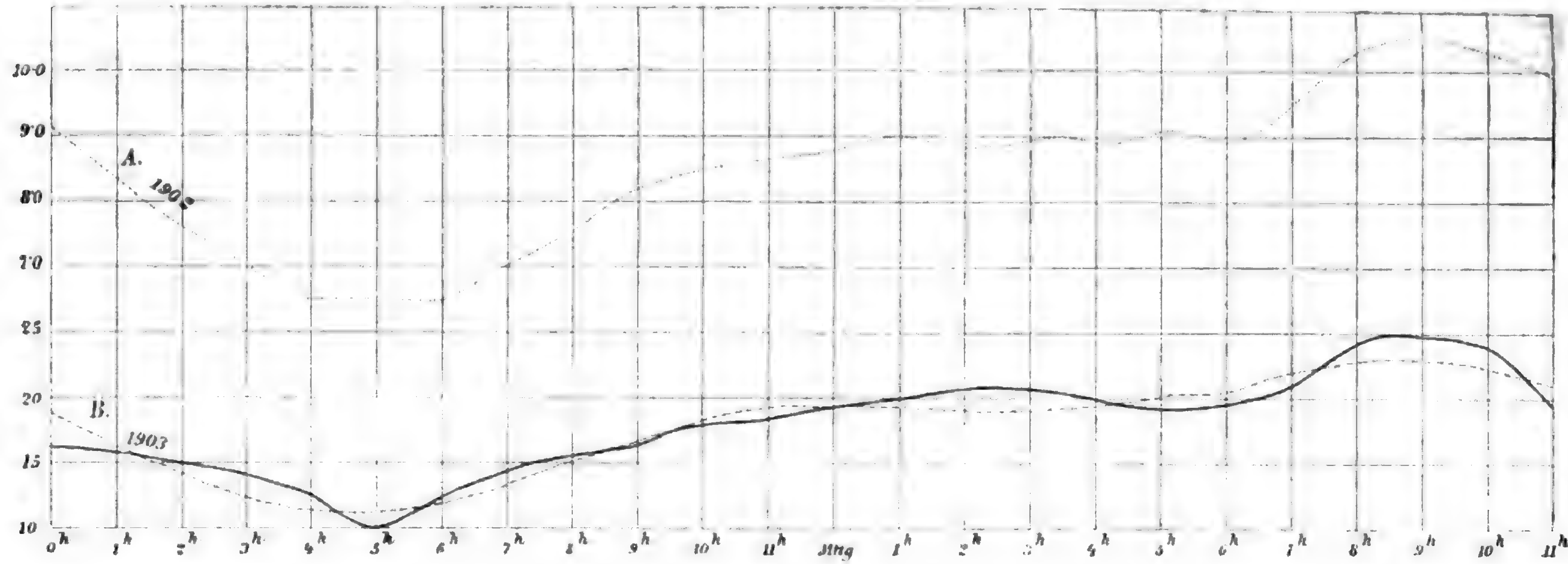


Fig. 4.

Die Reihen lauten:

Für den täglichen Gang des Potentials an 19 Tagen im Jahre 1902:

$$E = 8\cdot 5 + 1\cdot 4 \sin(173° + x) + 0\cdot 9 \sin(142° + 2x);$$

an 3 Tagen im Jahre 1903:

$$E' = 17\cdot 9 + 4\cdot 5 \sin(184° + x) + 2\cdot 4 \sin(149° + 2x).$$

[1] Die 1902-Kurve ist in einem viel größeren Maßstabe wie die 1903-Kurve gezeichnet.

messungen vorgenommen wurden. Der 2. September mußte leider ausgelassen werden, da die Registrierung an diesem Tage durch eine Isolationsstörung unvollständig ist.

Das Bemerkenswerteste an den Kurven in Fig. 4 ist ihre gute Übereinstimmung, wenn man noch dazu bedenkt, daß diese beiden Kurven aus einem so kurzen Beobachtungszeitraume hervorgegangen sind. Noch auffallender wird diese Übereinstimmung, wenn man die Darstellung der beiden Kurven durch eine Sinusreihe betrachtet, die beim zweiten Glied abgebrochen ist, da die Koeffizienten des dritten Gliedes keinen namhaften Betrag mehr beisteuern.

Die Koeffizienten der beiden Formeln sind nicht vergleichbar, da ja die Apparate in den verschiedenen Jahren verschiedene Empfindlichkeit hatten und die gewonnenen Registrierstreifen willkürlich mit einer Millimeterteilung ausgemessen wurden, da bei der Konfiguration des Sonnblickgipfels eine Reduktion auf absolute Werte über der Ebene ohnehin nicht möglich ist.

Wenn es überhaupt erlaubt ist, aus einer so kurzen Beobachtungsreihe Schlüsse zu ziehen, so muß gesagt werden, daß die Registrierungen auf dem Sonnblick der Chauveau'schen Hypothese über den Ursprung der doppelten Periode nicht entsprechen. Wie bemerkt, waren diesmal die Entfernungen der Elektrode von der Erdoberfläche bedeutend größer gehalten wie bei der früheren Messungsreihe — man hätte also eine ausgesprochene Abnahme der doppelten Periode erwarten müssen.

Das Verhältnis der Amplitude der einfachen zu jener der doppelten Periode war:

Im Jahre 1902 zirka .... 16 : 15,
» » 1903 » .... 19 : 15.

Jedenfalls kann man aus dem Vergleiche der Registrierungen in den beiden Jahren den Schluß ziehen, daß auch **nicht** kontinuierlich registrierende Instrumente recht gut im stande sind, über nicht allzu schnelle Variationen des Potentials Aufschluß zu geben.

Wien, im Juni 1904.

K. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Theorie der Kolloide, II.

von

Dr. **Jean Billitzer.**

Aus dem II. chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Vorgelegt in der Sitzung am 30. Juni 1904.

Das rege Interesse, das man gegenwärtig allerorts dem speziellen Studium der Kolloide entgegenbringt, ist in der besonderen Bedeutung des kolloidalen Zustandes für alle Prozesse gelegen, in welchen, wie im lebenden Organismus, eine kolloidale Grundsubstanz den Träger aller zeitlichen Veränderungen bildet. Läßt die allgemeine Verbreitung solcher kolloidaler Grundsubstanzen die Wichtigkeit derartiger Untersuchungen hervortreten, so trägt die Mannigfaltigkeit des Gehabens und der Einwirkung, die Kolloiden eigen ist, manches dazu bei, die Erforschung ihres vielseitigen, wenig übersichtlichen Verhaltens zu erschweren und den Zusammenhang, den die Erscheinungen wohl aufweisen, zu verdecken.

Trotz der Schwierigkeit der Untersuchung, die in vielen Fällen noch durch die Unkenntnis der chemischen Natur der kolloidalen Grundsubstanzen erhöht wird, scheinen mir aber die neueren, sehr zahlreichen und ausgedehnten Studien sowie einige eigene Untersuchungen genügendes Tatsachenmaterial gefördert zu haben, daß eine Ordnung desselben, die eine einheitliche Darstellung der typischesten Eigenschaften aller Kolloide im Zusammenhange ermöglicht, nicht zu gewagt erscheinen dürfte, zumal eine solche Darstellung keiner weiteren Annahmen bedarf, als der Voraussetzung, daß die Kolloide eine Art besonders feiner Suspension vorstellen und daß ihre

Wanderung im elektrischen Stromgefälle den Sinn der Ladung, den die schwebenden Teilchen darin gegen die umgebende Flüssigkeit annehmen, zu erkennen gestatten — zwei Thesen, die auf gesichertem experimentellen Boden fußen.[1] Liegt darin ein Vorzug der neuen Theorie vor allen denen, die sich auf neuen Hypothesen gründeten, so wird man sehen, daß ihre Konsequenzen einer Prüfung durch das Experiment zugänglich sind und in diesem eine Stütze finden, während alle andern dann versagen und endlich, daß sie viel weiter reicht als alle übrigen.

Von früheren Theorien sind hier die von Hardy, Bredig, Whetham, Spiro und Freundlich anzuführen, die ich nochmals kurz besprechen muß, um das Bedürfnis, das ich nach einer neuen Darstellung empfand, zu motivieren und den Unterschied meiner Darstellungsweise schärfer zu kennzeichnen, um Mißverständnissen und Verwechslungen vorzubeugen.

Hardy sucht bekanntlich[2] die Salzwirkung durch die Annahme zu erklären, daß ein Elektrolytzusatz die Potentialdifferenz zwischen den schwebenden Partikeln des Kolloids und der umgebenden Lösung immer vermindert oder geradezu aufhebt. Seine Annahme gründet sich auf der Beobachtung, daß koagulierte Kolloide in keinem elektrischen Gegensatze zu der Lösung mehr stehen. An kolloiden Eiweißstoffen hat er nämlich beobachtet, daß sie in saurer Lösung elektropositiv, in alkalischer Lösung elektronegativ sind (daß sie also im ersten Falle kathodische, im zweiten anodische Konvektion aufweisen) und ferner, daß sich koagulierte Eiweißstoffe nur dann wieder in »Lösung« bringen lassen, wenn diese ausgesprochen sauer oder alkalisch ist, also nur dann, wenn der Eiweißstoff eine elektrische Ladung erlangt, hingegen sind die Suspensionen besonders labil, wenn das Eiweiß keine Ladung trägt. Hardy nimmt nun (fälschlich) an, daß die Kolloide ebensowenig wie die wiederaufgelösten Gele stabil

[1] cf. Bredig, anorgan. Fermente, Leipzig, 1901. Billitzer, Drude's Ann. 11, p. 902 (1903), Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 45, p. 327.

[2] Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 33, p. 385; 1900.

sein können, wenn sie in keinem elektrischen Gegensatze zur Lösung stehen, die sie umgibt. Seine Ausführungen stützt er auf die Überlegung, daß mit dem Ausgleiche der Potentialdifferenz auch die elektrische Arbeit verschwindet, die bei einer Bewegung der Teilchen zu leisten ist, daß diese nunmehr unbehindert den Gravitationskräften Folge leisten, sich senken, sich sammeln und in Flocken ausfallen können.

Nicht viel später hat Bredig[1] in seiner schönen Monographie etwas speziellere Vorstellungen über den Vorgang der Koagulation entwickelt. Auch seine Ausführungen nehmen ihren Ausgang von den Beobachtungen, die Hardy mitgeteilt hat, sie schreiben das Movens der Ausflockung aber einer Wirkung von Oberflächenkräften zu. In Analogie mit der Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen, die bis vor kurzem auf der Annahme fußte, daß die Oberflächenspannung polarisierten Quecksilbers dort am größten sei, wo die Doppelschicht verschwindet, sollen auch in Kolloiden die Oberflächenspannungen der suspendierten Korpuskeln dort am größten sein, wo die Potentialdifferenz gegen die Flüssigkeit verschwindet, d. h. die Tendenz zur Bildung größerer Teile soll im Hardy'schen »isoelektrischen« Punkte besonders groß, die Stabilität des Hydrosoles dort besonders klein werden.

Leider finden beide Theorien im Experimente keine gute Stütze und lassen Einwände zu.[2] So kann gegen die Hardy'sche Theorie geltend gemacht werden, daß Teilchen von der Dichte der Eiweißstoffe schon durch die bloße Flüssigkeitsreibung schwebend erhalten werden und sich nicht in abseh-

[1] Anorgan. Fermente, Leipzig 1901.

[2] Von anderen Theorien sind noch die von Whetham, Spiro und Freundlich zu erwähnen. — Whetham versucht (Phil. Mag. *48*, 474) die Salzwirkung durch die des elektrischen Feldes zu erklären, welche die Ionen erzeugen. In dieses Feld werden die Körper mit größter Dielektrizitätskonstante hineingezogen, während die Stoffe mit kleinerer Dielektrizitätskonstante daraus verdrängt werden. Der Unterschied zwischen den Dielektrizitätskonstanten kolloidaler Substanzen tritt aber in Wirklichkeit nicht hervor. Kolloidale Metalle verhalten sich ebenso wie kolloidales $As_2 S_3$ etc. (vergl. auch Bredig, Zeitschr. für angew. Chem. 1898, p. 951). — Spiro vergleicht (Hofmeister, Beitr., 4, p. 300) das Aussalzen von Kolloiden, dem von Nichtelektrolyten,

barer Zeit senken, wenn ihr Durchmesser das Ausmaß von rund 10^{-6} *cm* nicht überschreitet und mit Teilchen dieser Größenordnung haben wir es ja in Kolloiden, nach allem was man darüber weiß, zu tun (allerdings aber nicht in Hardy's Gelen!). Auch gegen die Bredig'sche Theorie erheben sich Bedenken, ist es doch nicht ersichtlich, wie eine allseitig wirkende Oberflächenspannung die diskreten Teilchen veranlassen sollte, zu größeren zusammenzutreten. Oberflächenkräfte, die zwischen festen Körpern wirken, sind uns nur aus dem Bestreben feiner Niederschläge, sich zusammenzuballen etc., bekannt; hier handelt es sich aber um die Wirkung zwischen Teilchen, die sich berühren, oder es kommt die Erhöhung der Löslichkeit mit der Krümmung der Oberfläche zur Geltung, indem kleinere Teilchen sich auflösen, um sich auf größere niederzuschlagen, ein Vorgang, welcher Ähnlichkeiten mit der Sublimation aufweist. Beide Vorgänge sind aber bei Kolloiden durch die Umstände, unter denen die Fällung erzielt wird, ausgeschlossen.

Neuere Untersuchungen[1] haben aber gezeigt, daß polarisiertes Quecksilber seine maximale Oberflächenspannung gar nicht dort erreicht, wo seine Potentialdifferenz gegen die Lösung verschwindet, sondern, wie es sich durch eine Reihe von Experimentaluntersuchungen und auch aus theoretischen Darstellungen ergibt,[2] wohl bei einem Potential, das um etwa $^3/_4$ Volt davon entfernt sein dürfte.

Wirft dies einen Schatten auf die Analogie mit den kapillarelektrischen Erscheinungen (denn Hardy's »isoelektrischer«

---

also einer Bildung von zwei Phasen, in welchen je drei Körper vertreten sind. Daß ein Gel alle Körper enthalten muß, die sich in der Lösung, mit der es in Berührung steht, vorkommen, folgt naturgemäß aus dem Grundgesetze der allgemeinen Chemie. Die Kolloidausfällung unterscheidet sich aber in so vielen Punkten von der gewöhnlichen Aussalzung, daß der Vergleich nur ein ganz loser sein kann. — Freundlich sucht (Zeitschr. für phys. Chem.) hauptsächlich die Rolle, welche die ungleiche Beweglichkeit der anwesenden Ionen spielt, hervorzukehren, er vermag aber damit allein die zahlreichen Eigentümlichkeiten der Kolloide nicht zu deuten.

[1] Billitzer, Drude's Ann. Bd. 11, 902 (1903). — Diese Sitzungsber., Bd. 112, 95 (1903); 112, 1553; 156 (1903).

[2] Idem, Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 45, 327.

Punkt fällt durchaus nicht mit jenem zusammen, an welchem polarisiertes Quecksilber die maximale Oberflächenspannung erlangt) und damit auf die Wahrscheinlichkeit, daß es sich in erster Linie um eine Wirkung von Oberflächenkräften hier handelt (kolloidales Hg wird ebensowohl durch Elektrolytzusätze ausgefällt, welche die Oberflächenspannung des Hg erniedrigen, als durch solche, die sie erhöhen!), so verlieren die Theorien von Bredig und Hardy noch an Boden, seitdem es sich gezeigt hat,[1] daß die fällende Wirkung, die ein Elektrolytzusatz auf Kolloide ausübt, gar nicht daran gebunden ist, daß bestehende Potentialdifferenzen der Teilchen gegen die Lösung aufgehoben oder auch nur vermindert werden, daß zugesetzte Elektrolyte ein Kolloid vielmehr auch dann ausfällen, wenn ihr Zusatz den elektrischen Gegensatz ganz unbeeinflußt läßt, ja wenn er die Potentialdifferenzen zwischen Teilchen und Lösung sogar erhöht!

Es kann also die Hardy'sche Voraussetzung, daß Elektrolytzusatz die Potentialdifferenz aufhebt, nicht richtig sein, während die Bredig'sche Annahme von der Wirkung der Oberflächenkräfte doch hypothetisch bleibt und es müßte auch ganz wunderbar erscheinen, daß die Oberflächenspannung, die erfahrungsgemäß eine Funktion der Potentialdifferenz ist, bei jedem Elektrolytzusatz, ungeachtet der Änderungen, die die Potentialdifferenz dabei erfährt, einem maximalen Werte zustrebte! Überdies werden wir bald sehen, daß es Kolloide gibt, die gerade im »isoelektrischen« Punkte am stabilsten sind!

Von den Beobachtungen Hardy's und Bredig's ist die experimentell bestätigte Erfahrung zu bewahren, daß ein Coagulum in keinem elektrischen Gegensatze mehr zur Flüssigkeit steht (wenigstens niemals in so großem, daß er den Gravitationskräften gegenüber in Kraft treten könnte), daß also das Kolloid nach der Fällung so viel wie elektrisch neutralisiert ist. Ferner ist aus dem frühern zu schließen, daß den Ionen des Elektrolyten die Fähigkeit zukommen dürfte, schwebende Kolloidteilchen zu sammeln und zu größern Komplexen zu vereinen,

[1] Cf. die erste Mitteilung und Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 45, p. 313 (1903).

denn nur dann kann man sich erklären, daß die Ionen eine Ausflockung herbeiführen, wenn die Teilchen, die an sich zu klein sind, um auszufallen, unter ihrem Einfluß eine Größe erlangen, bei der dies erfolgen kann.

Beachtet man noch, daß nach den Versuchen von Picton und Linder, Spring und andern[1] das maßgebende Ion für die Fällung immer das ist, welches die entgegengesetzte Ladung trägt, wie das Kolloid, daß von diesem Ione nach Spring[2] immer ein bestimmter Anteil mit in das Coagulum gerissen wird, der sich durch Waschen nicht daraus entfernen läßt, daß von diesem Ione nach Whitney und Ober[3] immer äquivalente Mengen mitgerissen werden, ob es nun $Ba^{\cdot\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$, $Sr^{\cdot\cdot}$, $K^{\cdot}$ etc. ist,[4] so muß sich uns die in der ersten Mitteilung entwickelte Meinung aufdrängen, daß dieses fällende Ion in Mengen mitgerissen wird, die eben zur elektrischen Neutralisation der geladenen Kolloidteilchen hinreichen. Weil aber ein Ion mit einer Ladung behaftet ist, welche die der einzelnen schwebenden Partikeln erheblich übertrifft, so kann eine elektrische Neutralisation der Kolloidpartikeln nur dann erfolgen, wenn sich viele Kolloidteilchen um ein Ion scharen, seine Ladung neutralisieren, dabei Komplexe mit größerem Durchmesser bilden und mit ihm ausfallen, wenn dabei das kritische Ausmaß überschritten wird, bei welchem die Gravitationskräfte in ihr Recht treten. Die Ionen bilden gleichsam Kondensationskerne, um die sich die schwebenden Teilchen scharen.[5]

Daß entgegengesetzt geladene Ionen Anziehungswirkungen aufeinander ausüben, wird ja allgemein angenommen und bildet

[1] Journal of chem. Soc., Bd. 61, 137, 148 (1892); Bd. 67, 63 (1895).

[2] Arch. des sciences phys. et natur. (IV), 10, 305.

[3] Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 39, 630 (1902).

[4] In seiner während der Korrektur erschienenen Thèse de doctorat, Paris 1904, bestreitet Duclaux diese Tatsache auf Grund einiger Versuche, die er angestellt hat. Da bei diesen aber das jeweilige Kolloid von der Zusammensetzung der Lösung beeinflußt wurde, ist es selbstverständlich, daß diese einfachen Gesetze nicht zum Ausdrucke kamen und die vom Autor erhobenen Einwände werden wesenlos. Vergl. dazu Fußnote, p. 1198.

[5] Duclaux wendet sich in einer während der Korrektur erschienenen Monographie (thèse de doctorat, Paris 1904, p. 33) gegen diese Vorstellung. Er nimmt fälschlich (cf. p. 11 f.) an, daß die Ladung der Kolloidpartikeln ebenso

die Grundidee der Nernst-Drude'schen Darstellung der Elektrostriktion.[1] Finden die Ionen andere geladene Teilchen in der Lösung vor, so müssen sie auf diese anziehende und abstoßende Kräfte ausüben und in einer solchen Wirkung sehe ich die maßgebende Rolle, welche die Ionen für die Koagulation eines Kolloides spielen.

Muß man darnach annehmen, daß es die elektrostatische Anziehung des fällenden Iones ist, welche die Kolloidteilchen zusammenführt, so ergeben sich daraus bestimmte Folgerungen betreffs der Stabilität eines Kolloides.

Zunächst läßt sich allgemein sagen, daß die Stabilität eines Kolloides um so größer ist, je kleiner cet. par. seine Teilchen sind, denn ihr Trieb, sich zu senken und die Wahrscheinlichkeit, daß eine große Zahl von Teilchen zusammengeführt werden kann, wird um so kleiner, je größer diese Zahl ist. Bei gleicher Teilchengröße wird die Stabilität eines Kolloides von der Größe der Ladung abhängen, welche die Teilchen tragen. Allzu schwach und sehr stark geladene Kolloide werden relativ am stabilsten sein; die ersten, weil abermals die Zahl der zu sammelnden Teilchen eine sehr große ist; die zweiten, weil sie sehr klein bleibt, die entladenen Aggregate mithin noch einen kleineren als den kritischen Durchmesser besitzen können. Bei mittelgroßer Ladung kann also ein Minimum der Stabilität durchlaufen werden. Handelt es sich um ein Kolloid, das je nach der Zusammensetzung der Lösung positiv oder negativ ist, so werden zwei Minima der Stabilität auftreten können (können, nicht müssen, weil der Ladung des Kolloides praktisch eine Grenze gesetzt ist), dazwischen wird es aber ein Maximum der Stabilität geben, nämlich im isoelektrischen Punkte (daß diese Auffassungsweise mit den Hardy'schen Versuchen nicht im Widerspruche steht, weil Hardy eben die Umstände untersucht hat, unter denen sich

groß sein muß, wie die des fällenden Ions und hält es für unwahrscheinlich, daß sich die größeren Kolloidpartikeln um ein kleineres Ion scharen. Den Grund hiefür sehe ich zwar nicht ein, doch kommt es auch gar nicht auf die Art der Gruppierung an, sondern nur darauf, daß eine Gruppierung überhaupt statt hat. Auf einen anderen Einwand desselben Autors komme ich noch zurück.

[1] Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 15, 79 (1894).

Gele wieder in Lösung bringen lassen und nicht die Stabilität der Kolloide, wird p. 1198 noch ausführlicher gezeigt werden).

Diese Auffassungsweise, welche im Widerspruch zu denen von Hardy und Bredig steht, findet in einer Untersuchung, die Flemming[1] über die Gerinnungsgeschwindigkeit kolloidaler Kieselsäure angestellt hat, eine gute Stütze. Durch Überführungsversuche (von denen einige im folgenden angeführt werden)[2] habe ich ermitteln können, daß kolloidale Kieselsäure in sehr schwachsaurer Lösung elektronegativ ist, mit der Zunahme des Säuretiters aber elektropositiv wird. Der Zeichenwechsel findet nach meinen Versuchen in etwa 0·5- bis 0·1-normaler Salzsäurelösung statt. Ist die Gerinnungsgeschwindigkeit, wie es von vornherein anzunehmen ist, der Stabilität umgekehrt proportional, so dürfte sie also hier ein Minimum aufweisen und zu beiden Seiten davon möglicherweise je ein Maximum besitzen. Und so findet Flemming denn wirklich die Gerinnungszeiten (l. c. p. 447):

NaOH	Zeit in Minuten	HCl	Zeit in Minuten
0·225 normal....	25	0·00 normal....	855
0·115 »	9·5	0·015 »	9900
0·05 »	2	0·02 »	25920
0·025 »	1	0·075 »	28680
0·005 »	4	0·138 »	25920
0·000 »	855	0·325 »	17280
		0·890 »	4200
		1·830 »	1320

Die Gerinnungsgeschwindigkeit hat also ein Minimum in der Nähe des »isoelektrischen Punktes« und geht (0·025 NaOH) auf einer Seite durch ein Maximum, ohne ein solches auf der andern Seite zu erreichen.

Die Fällung wird endlich um so rascher erfolgen können, je größer die Konzentration des Kolloides ist; dies läßt sich unmittelbar einsehen, denn mit der Konzentration wächst die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens und daraus geht

[1] Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 44, 427 (1902).

[2] Die ausführlichere Publikation dieser Versuche soll im Anschlusse an einige andere, noch nicht abgeschlossene erfolgen.

hervor, daß verdünntere Kolloide eine verhältnismäßig größere Fällungsgrenze haben wie konzentriertere.

Daß sich endlich eine Reihe andrer Eigentümlichkeiten der Fällung voraussehen lassen, wie die ausnehmend große Fällungskraft sehr beweglicher sowohl wie mehrwertiger Ionen die Wirkung gewisser Nichtelektrolyte etc. etc., habe ich schon in der ersten Abhandlung namhaft gemacht. Während dort aber nur die Eigenschaften der Suspensionen und der typischen oder echten Kolloide ins Auge gefaßt wurden, soll es hier gezeigt werden, daß es mit Anwendung derselben Prinzipien gelingt, auch die viel zahlreicheren und weniger übersichtlichen Eigentümlichkeiten der unechten Kolloide zu beschreiben und deren innern Zusammenhang hervortreten zu lassen.

Vor den typischen oder echten Kolloiden zeichnen sich die unechten durch eine viel größere Mannigfaltigkeit ihres Gehabens und der Einwirkung, die sie erfahren, aus. Fallen typische Kolloide beim Zusatze geringer Mengen fast jedes Elektrolyten aus (von dem sie freilich je nach seiner Natur größere oder kleinere Mengen dazu erfordern), so gibt es bei den unechten Kolloiden neben Ionen, die eine Fällung hervorrufen, auch solche, welche fällungshemmend wirken, so daß man die Ionen nach dieser ihrer Wirkung auf ein Kolloid in eine Reihe gruppieren kann, in welcher die fällende Wirkung von Glied zu Glied abnimmt, so zwar, daß die Endglieder dieser Reihe geradezu entgegengesetzte oder »antagonistische« Wirkungen ausüben, um uns des Ausdruckes zu bedienen, den Pauli[1] dafür wählt, der sich neben Hofmeister[2] um die Feststellung und Klarlegung dieser Verhältnisse besonders verdient gemacht hat.

Eine weitere Eigentümlichkeit der unechten Kolloide liegt in den Schutzwirkungen, die sie auf echte Kolloide auszuüben vermögen. So erhöht bekanntlich schon ein kleiner Zusatz von Gelatine die Stabilität typischer Kolloide, z. B. der kolloidalen Metalle in so hohem Grade, daß Zsigmondy[3] darauf eine

---

[1] Pflüger's Archiv, Bd. 78, 315; Hofmeister's Beiträge, Bd. 3, 225; Bd. 5, 27.

[2] Hofmeister's Archiv für exper. Pathol. und Pharmakol., Bd. 27, 395 (1890); Bd. 28, 210. Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 7, 431 (1891).

[3] Zeitschr. für analyt. Chem., Bd. 40, 697 (1901).

Methode gründen konnte, äußerst kleine Mengen unechter Kolloide durch diese Wirkung zu erkennen, ja, daß solche Metallsole jetzt selbst durch größere Mengen zugesetzter Elektrolyte keine Ausfällung mehr erfahren. Aber auch hier finden wir wieder ein doppelseitiges Verhalten, denn es zeigt sich, daß dasselbe Kolloid, welches so energische schützende Wirkungen auszuüben vermag, in bestimmten Konzentrationen auch eine Ausfällung herbeiführen kann.

Vor allem dürfte aber die viel größere Stabilität der unechten Kolloide in die Augen fallen, die sie deutlich, wenn auch nicht ausnehmend scharf vor den typischen kennzeichnet und eine ebensolche Scheidung durchzuführen gestattet, wie man sie zwischen mechanischen Suspensionen und echten Kolloiden vornehmen kann. Ist auch hier eine Trennung zwischen Suspensionen, die äußerst langsam oder kaum mehr von selbst ausfallen, und zwischen Kolloiden, die sehr unbeständig sind, unscharf und nicht ganz ohne Willkür, so liegt es nur an der Definition, wo wir die Grenze zwischen echten und unechten Kolloiden verlegen wollen. Charakteristisch ist es für die unechten Kolloide, daß sie aus noch viel kleineren Teilen gebildet werden als die typischen Kolloide und demgemäß eine größere Diffusionsfähigkeit an den Tag legen, meßbaren osmotischen Druck besitzen, meßbare Gefrierpunktsdepressionen etc. herbeiführen. So kann man denn auch Molekulargewichtsbestimmungen an ihnen vornehmen und Sabanejew schlägt vor,[1] diejenigen als unechte Kolloide zu bezeichnen, welche kleinere Molekulargewichte aufweisen als 30000. Ist eine solche Einteilung natürlich willkürlich, so scheint sie mir in dem vorliegenden Falle nicht recht zweckmäßig zu sein, einerseits weil wir es in Kolloiden oft mit Gemischen zu tun haben, deren Bestandteile in speziellen Fällen recht wohl Molekulargrößen besitzen können, die zu beiden Seiten der festgelegten Grenze liegen, hauptsächlich aber darum, weil es unzweckmäßig erscheint, eine scharfe Grenze dort zu ziehen, wo kein eigentümlicher Gegensatz zu tage tritt, und so will ich unter typischen Kolloiden solche verstehen, deren Fällung durch ganz geringfügige Elektrolyt-

[1] Journ. d. russ. chem. Ges., 1891, I, 80; Zentralbl. 1891, I, 10.

zusätze bewirkt werden kann, als unechte aber diejenigen, deren Fällung nur durch viel konzentriertere Lösungen erfolgt. Typische Kolloide, wie die kolloidalen Metalle, Koll. $Fe(OH)_3$, As_2S_3, Sb_2S_3 etc., werden durch geeignete Elektrolyte schon in Konzentrationen von rund 0·001- bis 0·05normal fast momentan ausgeflockt, unechte Kolloide, wie Eiweiß, Gelatine etc., beanspruchen aber meist etwa normale Lösungen hiezu.

Auch von den unechten Kolloiden zu kristalloiden Lösungen findet nur ein stufenweiser Übergang statt, viele Körper, besonders hochmolekulare organische Verbindungen, so unter andern eine ganze Reihe von Farbstoffen, die sich vom Triphenylmethan ableiten, der Phenazingruppe angehören etc.), die man von vornherein unbedingt als Kristalloide ansprechen möchte, weisen Eigenschaften auf, die Kolloiden eigen sind, sie werden durch Salze ausgefällt und erfahren, mit Kolloiden von entgegengesetztem elektrischen Charakter vereinigt, dieselben Schutzwirkungen, oder flocken mit denselben geradeso aus, wie Kolloide, sie diffundieren nur sehr langsam, üben Schutzwirkungen aus u. s. f.

Fragen wir uns denn auch, worin der kolloidale Charakter begründet ist, so dürften wir das kennzeichnende Moment hierfür zunächst in der Größe der schwebenden Teilchen zu suchen haben. Sind dieselben nicht geladen, so liegt die Lösung eines Nichtelektrolyten vor, sind sie aber durch einen noch so geringfügigen Dissoziationsvorgang elektrisch geladen, so müssen entgegengesetzt geladene Ionen die sammelnde Wirkung auf sie ausüben, die wir Kondensationskernwirkung genannt haben und sie bewirken eine Ausflockung, sobald die Anhäufung der Teilchen um ein Ion bei erfolgter elektrischer Neutralisation soweit geht, daß der ganze Komplex die »kritische« Größe überschreitet, bei welcher eine spontane Ausfällung erst statthaben kann, d. h. wenn die Ladung der schwebenden Teilchen nicht zu groß, die Teilchen selbst nicht zu klein sind.[1] Werden die Teilchen allzu klein, wird ihre Ladung eine allzu geringfügige, so gestalten sich

[1] Sind die Teilchen groß (wie bei mechanischen Suspensionen etc.), so vermögen die Gravitationskräfte auch eine Elektrizitätstrennung zu bewirken. Die Fällung der Kolloide erfolgt also nicht immer notwendig unter vollständiger

die Bedingungen für eine Ausflockung um so ungünstiger, je größer die Zahl der Teilchen ist, die zur Erreichung der kritischen Größe oder zur Erzielung der elektrischen Neutralisation vereint werden muß. Damit sind aber sämtliche Lösungen, Kolloide und Suspensionen einheitlich zusammengefaßt, indem Elektrolytlösungen sich dadurch kennzeichnen, daß ihre Teilchen am kleinsten sind und zugleich die größten Ladungen tragen, die Kolloide sehr schwache Elektrolyte vorstellen, in denen ein Ion besonders groß ist und welche mit der zunehmenden Größe dieses »Iones« den Charakter der typischen Kolloide, endlich der mechanischen Suspensionen annehmen. In diesen Fällen wäre es zwar unstatthaft, von Ionen in gewöhnlichem Sinne zu sprechen, niemand wird ja unter einer schwebenden Partikel einer mechanischen Suspension, die eine kleine elektrische Ladung trägt, ein Ion verstehen wollen und es ist daher näher zu erläutern, was wir unter einer solchen Ladung verstehen wollen.

Die Lösung eines binären, vollständig dissoziierten Elektrolyten stellt uns den einfachsten Fall vor, jedes Ion trägt darin die Ladung eines elektrochemischen Äquivalentes. Betrachten wir aber die Lösung eines unvollständig dissoziierten binären Elektrolyten, dann hängt es schon von unserer Wahl ab, welche Ladungen wir ihren einzelnen Teilchen zuerkennen wollen. Fassen wir den dissoziierten Teil getrennt von dem undissoziierten ins Auge, wie es üblich ist, so ist für die Ladung der Teilchen wieder dieselbe anzugeben, fassen wir aber den Elektrolyten AB als Ganzes ins Auge, suchen also die Elektrizitätsmenge anzugeben, die etwa auf das gesamte in der Lösung enthaltene A fällt (ohne Rücksicht darauf zu nehmen, daß A teilweise als Ion $A^{\cdot}$, zum Teil aber in der gelösten Verbindung AB enthalten ist), so haben wir dafür die Ladung α-Äquivalent anzugeben, wenn α uns den Dissoziationskoeffizienten angibt. Von unserer Definition hängt es also lediglich ab, welche Ladung wir in Rechnung ziehen, für die Betrachtungen der Elektrochemie ist die erste Defini-

elektrischer Neutralisation, wenn dies auch im allgemeinen wohl statt hat; denn es kann vorkommen, daß die gebildeten Komplexe dem Einflusse der Gravitationskräfte folgen, noch ehe die elektrische Neutralisation gänzlich erfolgt ist.

tion beiweiten die zweckmäßigere, für die Betrachtungen, die wir hier anstellen wollen, bietet aber die zweite Definition gewisse Vorteile.

Denken wir uns nämlich, daß in einem, übrigens sehr schwachen, binären Elektrolyten AB das Ion B' außerordentlich viel kleiner sei wie A', so ist das Bild der Dissoziation etwas verschoben, denn nun sieht es so aus als würde AB eine gewisse Anzahl α von Ionen B' in die Lösung senden, AB gleicht dann weit eher einer Elektrode als einem Elektrolyten und dies um so mehr, je kleiner α ist und wenn jedes der schwebenden Teilchen gar wie bei den meisten Kolloiden aus mehreren Molekülen AB durch Assoziation hervorgegangen ist. Die zweite Definition gibt uns nun auch in diesem Fall an, daß die Ladung, welche die einzelnen Aggregate tragen, dem Dissoziationskoeffizienten α proportional ist. Denn der Dissoziationsvorgang kann darin erblickt werden, daß jedes Molekül AB während jeder Sekunde α Sekunden lang dissoziiert ist oder daß unter $^1/_\alpha$ Teilchen jeweilig eines in Ionen gespalten ist, was auf dasselbe hinauskommt, als trüge jede Partikel α der Äquivalentladung. Nun aber das Ion B' in der Lösung enthalten ist, erscheint uns der geladene Rest $[AB(\frac{1}{\alpha} - 1) + A']$ als fester Körper, gleichsam als Elektrode, die aus AB bestünde, ein B'-Ion entsandt und dafür die Äquivalentladung erlangt hat.

Der Vorteil dieser Definition (die übrigens bloß in der kurzen Ausdrucksweise »Ladung eines Kolloides« benützt werden soll) liegt darin, daß wir die Ladung jeder Suspension oder jedes Kolloides angeben können, wenn wir den Dissoziations- (und den Assoziations-[1]) koeffizienten kennen und weiter vornehmlich darin, daß die Grenze verschwindet, wo ein Elektrolyt mit dem Anwachsen eines seiner Ionen in ein Kolloid, eine Suspension, endlich eine Elektrode übergeht, daß also Suspensionen nun wie Elektrolyte behandelt werden können. Und im Sinne dieser Definition können wir aussagen, daß jeder schwache Elektrolyt die Eigenschaft eines Kolloides

[1] In unechten Kolloiden hat sie vielleicht oft die übliche Bedeutung, wenn nämlich keine Assoziation vorliegt; in typischen Kolloiden ist darunter dasselbe zu verstehen, was ich bisher die Dissoziation der Doppelschicht genannt habe.

annehmen muß, sobald eines seiner »Ionen« genügend groß wird und daß seine typischen Eigenschaften von seiner Größe und seiner »Ladung« bestimmt sein werden.[1]

Im folgenden soll es gezeigt werden, daß die Schutzwirkungen, die Kolloide aufeinander ausüben, die gegenseitige Fällung von Kolloiden, die Eigentümlichkeit der Reversibilität und der Irreversibilität des Koagulationsvorganges, die lösende Wirkung, welche gewisse Ionen auf Coagula ausüben und weitere Eigentümlichkeiten, welche unechte Kolloide aufweisen und die bisher jeder Erklärung entbehrten, nunmehr mit Hilfe der angeführten Prinzipien in einfachster und ungezwungener Weise gedeutet und vorausgesehen werden können. Wir beginnen mit der Beschreibung der Wirkungen, welche Kolloide aufeinander ausüben.

Es ist schon länger bekannt, daß sich elektropositive und elektronegative Kolloide gegenseitig ausfällen, wenn dies auch nicht ohne Widerspruch geblieben ist (Spring) und erst jüngere Untersuchungen von Bechold, Neisser und Friedemann,[2] dann von W. Biltz[3] dartun, daß eine Ausfällung nur dann zu erzielen ist, wenn man die Hydrosole in bestimmten Mengenverhältnissen mischt. Es gibt ein Optimum für die Fällung, überschreitet man es nach einer oder der andern Richtung, so wird die Fällung unvollständig und bleibt endlich ganz aus. Erklärt diese Beobachtung das Widersprechende der Angaben mancher Autoren, so nimmt die Erscheinung selbst ein besonderes Interesse in Anspruch. Linder und Picton[4] beobachteten schon, daß Hydrosole, die sich ausfällen, entgegengesetzte Wanderungsrichtungen im elektrischen Strom-

[1] Will man sich konkretere Vorstellungen über den Vorgang der Kolloidfällung bilden, so hat man sich darnach zu denken, daß für den Dissoziationskoeffizienten $\alpha = 0{\cdot}01$ das fällende Ion in jeder Sekunde 0·01 Sekunden lang auf umgebende Kolloidteilchen wirkt, sie heranzieht, endlich 99 undissoziierte und das Ion eines dissoziierten Teilchens in den Niederschlag reißt. Natürlich ist auch die Dissoziation der fällenden Elektrolyten von Wichtigkeit, ist dieselbe nicht vollständig, so fällt auch Neutralsalz aus.

[2] Münchner med. Wochenschr., 1904, Nr. 11. Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 48, 394 (1904).

[3] Ber., 1904, Nr. 5.

[4] Journ. chem. Soc. Bd. 71, 572 (1897).

gefälle aufweisen, eine Beobachtung, die Hardy (l. c.) und Lottermoser[1] bestätigen konnten.

In meiner ersten Mitteilung habe ich dann wohl zuerst darauf hingewiesen, daß nur entgegengesetzt geladene Kolloide sich gegenseitig ausfällen, und daß gleichgeladene Kolloide in der Regel aber ohne Wirkung aufeinander bleiben dürften (mit Ausnahme gewisser amphoterer, vergl. p. 1194); seitdem hat Biltz[2] diese Erscheinung an einer größern Zahl von Hydrosolen geprüft und diesen Satz in 132 Versuchen bestätigt gefunden. Die gegenseitige Fällung von Kolloiden scheint also der Fällung, die sie durch Salze erfahren, an die Seite gestellt werden zu können. Ist dies der Fall, so muß die gegenseitige Fällung von Kolloiden eben dann vollständig sein, wenn das Mengenverhältnis der einzelnen Kolloide in der Mischung im umgekehrten Verhältnisse der Ladung steht, welche die einzelnen Kolloide tragen, sofern die elektrostatische Anziehung der Kolloidteilchen wirklich das Movens zu ihrer Vereinigung bildet.

Nun gibt uns die Menge von bei der Fällung mitgerissenen Ionen, die Titeränderung, die dabei erfolgt, etc. Aufschluß über die Größe der Ladung eines Kolloides (weil die Fällung unter elektrischer Neutralisation erfolgt; vergl. die erste Mitteilung) und dies setzt uns in den Stand, die Richtigkeit jener Vermutung zu prüfen.[3]

Diese Prüfung vorzunehmen, habe ich die Mengen Ba, welche As_2S_3 und Sb_2S_3 bei ihrer Fällung durch $BaCl_2$ mitreißen, sowohl, wie die Titeränderung, die bei der Fällung kolloidalen Eisenhydroxyds durch Chlorbaryum statthat, bestimmt, indem ich von einer kolloidalen Schwefelarsenlösung (bereitet nach der Vorschrift von Freundlich[4]), die 2·07 *g* As_2S_3 im Liter, einer Schwefelantimonlösung (bereitet nach der Vorschrift von Biltz, l. c.), die 2·06 *g* im Liter, und einem

[1] Anorgan. Kolloide, Ahrens'sche Sammlung, p. 76 (1901).

[2] Berl. Ber. Bd. 38, 1096 (1904).

[3] Biltz findet nur eine Ausnahme beim elektronegativen kolloidalen Selen und glaubt, daß hier bei der Gelabscheidung mit kolloidalem Gold eine chemische Verbindung gebildet worden sei; es erscheint mir nicht unwahrscheinlich zu sein, daß in der jedenfalls sauren kolloidalen Selenlösung das Gold elektropositiv geworden ist.

[4] Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 44.

Hydrosol von Eisenhydroxyd (bereitet durch Verdünnen des käuflichen Produktes) ausging, das 3·036 *g* Fe_2O_3 im Liter enthielt. Da ich die Beobachtung machte, daß die Entfernung des SH_2-Gases bei den erstgenannten Kolloiden durch nachträgliches Durchleiten von Wasserstoff nur sehr unvollkommen gelingt, habe ich diesen Prozeß unter sehr vermindertem Druck (etwa 5 bis 10 *mm*) durchgeführt. Nachdem die Kolloide noch durch Dialyse gereinigt waren, wurden je 100 cm^3 der Hydrosole durch 50 cm^3 einer etwa einprozentigen Chlorbaryumlösung gefällt, im Filtrate Chlor und Baryum bestimmt, daneben aber die bei der Fällung erfolgte Titeränderung beobachtet; so fand ich:

Cl gefunden	Ba berechnet	Ba gefunden	Differenz (gebund. Ba)	Cl als freie Säure
		As_2S_3		
0·2880 *g*	0·5582 *g*	0·5470 *g*	0·0112 *g*	0·0058 *g*
0·2862	0·5546	0·5432	0·0114	0·0058
0·2880	0·5582	0·5466	0·0116	0·0057
		Sb_2S_3		
0·2882 *g*	0·5586 *g*	0·5415 *g*	0·0171 *g*	0·0081 *g*
0·2794	0·5415	0·5251	0·0164	0·0079
0·2800	0·5428	0·5253	0·0175	0·008

Ba gefunden	Cl berechnet	Cl gefunden	Differenz (gebund. Cl)	Ba als freie Base
		$Fe(OH)_3$		
0·5416 *g*	0·27945 *g*	0·2699 *g*	0·0096 *g*	0·010 *g*
0·5406	0·2790	0·2688	0·0102	0·011

Die Ladungen der drei Kolloide verhalten sich also wie

114 : 170 : 234.

Ist die gegenseitige Fällung dann eine vollständige, wenn sie unter völliger elektrischer Neutralisation vor sich geht, so ist die günstigste Bedingung für die Fällung dann zu erwarten, wenn die in die Mischung eingeführten Volumina im umgekehrten Verhältnisse der Ladungen beider Kolloide stehen. Folgende Beobachtungen bildeten das Meßergebnis von Fällungsversuchen:

Fällung Koll. As_2S_3 durch Koll. Eisenhydroxyd.

(Die Volumina der zugesetzten Kolloide wurden immer so bemessen, daß 10 *cm*³ Mischung daraus hervorgingen.)

Milligramme in der Mischung		Volumverhältnis in der Mischung		Beobachtung
Fe_2O_3	As_2S_3	$Fe(OH)_3$:	S_3As_2	
5·4	17·8	1·6	8·4	Keine Fällung
6	16	2	8	Schwache Trübung
7·5	15	2·5	7·5	Feine Trübung
12	12	4	6	Feine Trübung, nach einiger Zeit unvollständige Fällung
10·5	13	3·5	6·5	Dicke Trübung, später unvollständige Fällung
9	14	3	7	Dicke Trübung, dann aber vollständige Fällung
10·5	13	3·5	6·5	Dicke Trübung, dann aber unvollständige Fällung
12	12	4	6	Dicke Trübung, dann aber unvollständige Fällung
15	10	5	5	Trübung, dann unvollständige Fällung

Das Optimum der Fällung wird also erreicht, wenn die Volumina sich wie 1:2 verhalten, dies weicht vom erwarteten

Verhältnisse 11·4 : 23·4 nur wenig ab, im ersten Fall ist der Quotient 0·5, im zweiten 0·488.

Es steht darnach zu erwarten, daß die gegenseitige Fällung von kolloidalem Eisenhydroxyd und Schwefelantimon ihr Optimum beim Zusammenmischen von Voluminas im Verhältnisse von 234 : 170 erreichen wird. Die folgende Tabelle zeigt, daß auch dies mit genügender Annäherung erfüllt wird.

Fällung Koll. Sb_2S_3 durch Koll. Eisenhydroxyd.

(Die Mischung wie in voriger Tabelle vorgenommen.)

Milligramme in der Mischung		Volumverhältnis in der Mischung		Beobachtung
Fe_2O_3	Sb_2S_3	$Fe(OH)_3 : Sb_2S_3$		
9·6	13·6	3·2	6·8	Unvollständige Fällung
10·5	13·0	3·5	6·5	» »
11·4	12·4	3·8	6·2	» »
12·3	11·8	4 1	5·9	Vollständige Fällung
13·2	11·2	4·4	5·6	Unvollständige Fällung
14·1	10·6	4·7	5·3	» »
15·0	10·0	5·0	5·0	» »

Das Optimum wird beim Volumverhältnis 4·1/5·9 erreicht, sein Quotient ist 0·695, während sich 0·73 berechnet; die Übereinstimmung ist eine genügende und es lehren diese Versuche, daß man mit Hilfe der Ermittlung günstigster Fällungsgrenze die Ladung eines beliebigen Kolloides berechnen kann, wenn nur die Ladung eines einzigen Hydrosoles bekannt ist oder bei Kenntnis der Ladungen der Kolloide die günstigsten Bedingungen für die gegenseitige Fällung voraussagen kann.

Zu beiden Seiten des Optimums ist eines der beiden Kolloide im Überschusse vorhanden; doch bleibt es zunächst unbeantwortet, ob in der gefärbten Flüssigkeit, die nach unvollständiger Fällung mit dem Gele in Berührung steht, nur das

Es gibt also Fälle, in denen eine Vereinigung der Kolloide stattfindet und solche, in denen eine Spur ungefällten Kolloides noch neben dem fällenden in der Lösung verbleibt. Was das erste belangt, läßt es sich anführen, daß viele Kolloide und Suspensionen aufeinander einwirken, selbst dann, wenn sie gleiche Ladungen tragen. So habe ich finden können, daß Mastixemulsionen (die man durch Eintragen einer kleinen Menge alkoholischer Mastixlösung in viel Wasser als milchige, weiße Suspensionen erhält, die sich viele Tage unverändert aufbewahren lassen) bei der Mischung mit kolloidalem Schwefelarsen, Schwefelantimon etc. ganz klar und durchsichtig werden, während sie bei noch so weitgehender Verdünnung immer trüb erscheinen. Mit dem elektropositiven Eisenhydroxyd zusammengebracht, fällt das elektronegative Mastix aber aus.

Dieselbe Erscheinung kann man an vielen Farbstoffen etc. beobachten. Eine trübe Lösung von Benzopurpurin (elektronegativ) wird ganz klar und erfährt eine Farbenänderung, wenn es mit kolloidalem Schwefelarsen, Schwefelantimon etc. zusammengebracht wird, wobei es eine schmutzigbraune Farbe annimmt, während es durch Eisenhydroxyd ebenso wie Mastix gefällt wird, und solcher Beispiele könnte ich noch mehrere anführen. Ein besonders merkwürdiges habe ich bei der Untersuchung kolloidalen Goldes gefunden. Dieses wird bekanntlich durch Schütteln mit Quecksilber nicht aus der »Lösung« genommen. Ich vermutete, daß der Grund hiefür in der gleichnamigen Ladung beider Metalle zu suchen sei (eine Vermutung, deren Richtigkeit sich, wie schon hier erwähnt sein möge, bestätigt hat) und setzte der Lösung eine Spur Quecksilbersalz zu, um das Hg-Metall umzuladen, dabei schlug die Farbe des Goldes in Braun um und wurde der des kolloidalen Quecksilbers sehr ähnlich, das Kolloid ließ sich abermals durch Quecksilber nicht ausschütteln, aber es wanderte nun auch zur Kathode! Es enthielt sowohl Quecksilber als Gold. Schüttelte man es jetzt mit Platinmoor, das in der Versuchslösung negativ war, aus, so erlangte es abermals die Farbe des kolloidalen Goldes, wanderte wieder zur Anode und enthielt kein Quecksilber mehr.

Ist es aus alledem ersichtlich, daß Kolloide in der verschiedensten Weise mit anderen Kolloiden, mit Suspensionen, mit Bestandteilen der Lösung etc. zusammentreten können, ohne auszufallen, so hat der Umstand, daß eine kleine Menge ungefällten neben dem fällenden Kolloid in der Lösung bestehen kann, gleichfalls nichts Auffälliges an sich. Ist nämlich die gegenseitige Fällung von Kolloiden mit der Fällung, die sie durch Elektrolytzusatz erfahren, vergleichbar, so ist es nur zu erwarten, daß auch hier der Eintritt der Fällung an eine Minimalkonzentration, den »Schwellenwert«, gebunden ist, unterhalb derer es zu keiner Koagulation kommt. Wir wollen darum noch prüfen, ob dieser »Schwellenwert« in Analogie zu der Salzfällung ebenfalls mit der Verdünnung zunimmt. Dazu sind die Volumina der Kolloide ermittelt worden, bei deren Zusatz eben eine Trübung zu beobachten ist:

Trübung von $Fe(OH)_3$ durch Zusatz von As_2S_3, Sb_2S_3.

	Kubikzentimeter	
	As_2S_3	Sb_2S_3
Zu 10 *cm*³ $Fe(OH)_3$	0·2—0·3	0·1
dto., alle Lösungen auf das Zweifache verdünnt....................	0·3—0·4	0·2
dto., auf das Vierfache verdünnt	0·7—0·8	0·4—0·5
dto., auf das Zehnfache verdünnt.....	1·0—1·1	0·7—0·8

Auch die Abhängigkeit des Schwellenwertes von der Konzentration findet also hier ihr Analogon, es ist demnach die Gegenwart fällbaren neben fällendem Kolloide der Stabilität kolloidaler Lösungen zu vergleichen, denen eine zur Fällung nicht genügende Menge eines Elektrolyten zugesetzt wurde.

Aber diese einfachen Verhältnisse werden unübersichtlich, sobald man unechte Kolloide zum Versuche heranzieht. So ist es wohlbekannt, daß geringe Mengen von Gelatine, Agar-Agar u. a. m. die Ausfällung echter Kolloide durch Elektrolyte verhindern können und trotzdem weisen Gelatine, Agar-Agar etc. neben dieser schützenden auch fällende Wirkungen auf dieselben Kolloide und Suspensionen aus, wenn sie ihnen in kleiner Menge zugesetzt werden. Dies gibt sich darin zu

im Überschuß angewandte Kolloid vertreten ist, ob von beiden Kolloiden darin ein Anteil zurückgelassen wird.

Es erschien mir nicht unmöglich, diese Frage durch die Beobachtung der elektrischen Überführung der flüssigen Schichte zu beantworten, ihre Wanderungsrichtung im elektrischen Stromgefälle muß ja wohl ausgeprägt sein, wenn sie nur den Überschuß des einen Kolloides trägt, sind aber beide Kolloide in ihr enthalten, so könnte man erwarten, daß sie unter dem Einflusse des elektrischen Potentialgefälles voneinander getrennt werden dürften, weil das eine zur Anode, das andre zur Kathode geführt wird.

$Fe(OH)_3$ und As_2S_3.

Die Mischung (10 *cm³*) wurde wie bisher zusammengesetzt.

Nr.	In 10 *cm³* Mischung Kubikzentimeter $Fe(OH)_3$	 As_2S_3	Beobachtung
1	9	1	Keine Änderung, die Mischung wandert zur Kathode
2	8	2	Nach einiger Zeit feine Trübung, wandert zur Kathode
3	7	3	Sofort Trübung, dann Fällung, Fällung wandert zur Kathode
4	5	5	Sofort Fällung, Rest wandert zur Kathode
5	3	7	Nahezu vollständige Ausfällung
6	2	8	Sofort Fällung, Rest wandert langsam zur Anode
7	1	9	Sofort Fällung, Rest wandert langsam zur Anode
8	0·2	9·8	Trübung wandert zur Anode
9	10 *cm³* einer 20-fach verdünnten Lösung	10	Die klare Mischung besitzt einen deutlichen Stich ins Rötliche, wandert zur Anode

Die Wanderung wurde in einer U-förmigen Röhre beobachtet, welche einen kapillaren Ansatz trug, der das Überschichten zweier Flüssigkeiten gestattete. Wurde die Wanderung der Kolloide ohne Elektrolytzusatz beobachtet, so bildete destilliertes Wasser die obere Schicht in der U-Röhre. Es gelingt sehr leicht, eine scharfe Trennungsschicht zwischen Kolloid und Wasser herzustellen und ist dabei die Beobachtung der Überführung recht augenfällig und scharf, so werden viele Fehlerquellen vermieden, denen man ausgesetzt ist, wenn die Elektroden direkt in das Kolloid tauchen, welches sie in ihrer Umgebung mit den Produkten der Elektrolyse verunreinigen, von denen Spuren ja oft genügen, die Wanderung umzukehren.

Zu den Versuchen der letzten Tabelle ist zu bemerken, daß die Flüssigkeit zwar in allen Fällen als Ganzes die bezeichnete Wanderungsrichtung einschlug (daß also beide Grenzschichten gegen Wasser sich gleichmäßig nach einer Seite bewegten), daß aber gewisse Veränderungen dabei zu beobachten waren. So trennten sich im ersten Versuche Flocken von $Fe(OH)_3$ und wanderten voraus, während sich im Anodenschenkel die Trennungsschichte zwar nach der Seite der Kathode verschob, in der Grenzschichte selbst aber gelblich angehaucht war. In allen andern Versuchen blieb das Kolloid aber ganz homogen, nur trug bei längerer Einwirkung des Stromes die Trennungsschichte im Anodenschenkel meist einen ganz feinen, gelben Flaum. Daraus geht wohl hervor, daß beide Kolloide in der Flüssigkeit vertreten sind, wenn auch jeweilig von dem einen nur eine Spur darin enthalten ist. Im letzten Versuche (Nr. 9) hatte das Kolloid nicht die Farbe eines seiner Bestandteile und bei der Wanderung trat nicht die Spur einer Entmischung zu tage, hier scheint sich das überschüssige Kolloid mit dem verdünnteren vereint zu haben unter Bildung von Komplexen, welche den Überschuß der Ladung des vorherrschenden Kolloides tragen.

Ich habe ganz analoge Versuchsreihen mit kolloidalem Schwefelantimon, endlich mit mehreren kolloidalen Metallen ausgeführt, da sie aber nichts neues lehrten, verzichte ich auf ihre Wiedergabe.

Kubikzentimeter		
1% Gelatine	0·1% As_2S_3	
5	5	Bleibt klar, wandert zur Kathode
3	7	Kaum merkliche Trübung
2	8	Ganz feine Trübung, wandert zur Anode
1	9	Ganz feine Trübung, wandert zur Anode

größerer Konzentration angewandt, dieselbe hintanzuhalten, sondern daß die Gelatine für sich allein schon einen Einfluß auf diese Kolloide ausübt, der aber wieder an bestimmte Konzentrationen gebunden ist, wie es die nebenstehenden Tabellen illustrieren mögen.

Auf kolloidales Eisenhydroxyd übt Gelatine keine andere als schützende Wirkungen aus. Sie gibt in kleinen Mengen oder im großen Überschusse zugesetzt, keine Trübung und verändert auch nicht die Wanderungsrichtung dieses Kolloides, auch setzt sie die Fällungsgrenze des kolloidalen $Fe(OH)_3$ nicht herab, sondern erhöht immer dieselbe. Da die Gelatine, wie wir gleich sehen werden, gleichsinnige Ladung wie $Fe(OH)_3$ trägt, ist daraus zu ersehen, daß auch die Fällungsbegünstigung, welche Gelatine und andere unechte Kolloide ausüben, sich nur entgegengesetzt geladenen Suspensionen und Hydrosolen gegenüber geltend macht, wohl in der Weise, daß Gelatinepartikeln mit Mastix-, Sb_2S_3- etc. Teilchen zusammentreten und zur Bildung von Partikeln führen, die zwar größer sind wie die ursprünglichen Kolloidteilchen (wie es die auftretende Trübung wohl anzeigt), aber noch immer schweben können. Erst auf Elektrolytzusatz flocken sie aus, und zwar hat ihre Größenzunahme (wohl auch der teilweise Ausgleich der Ladungen der positiven Gelatine und des negativen Sols) der Koagulation schon vorgearbeitet, d. h. die Fällungsgrenze ist jetzt eine niederere als vor dem Gelatinezusatz.

Bei der Wanderung im elektrischen Stromgefälle trübte sich in den beiden letzten Versuchen der Tabelle die Flüssig-

keit im Kathodenschenkel. Solche Erscheinungen sind mir öfters begegnet, wenn ein Gemisch entgegengesetzt geladener Kolloide zu Wanderungsversuchen herangezogen wurde, desgleichen nach längerer Stromeinwirkung auf Kolloide, die in saurer Lösung die entgegengesetzte Ladung annehmen, welche ihnen in alkalischer Lösung zukommt. Zu beiden Seiten besitzt dann das Kolloid verschiedene Ladung, wandert von beiden Seiten gegen die Mitte und fällt dort aus oder erfährt eine Trübung (je nachdem die Wanderung in einem oder anderen Sinne schneller erfolgt und je nach der Ausbreitung von Säure und Alkali kann sich der Punkt, wo dies eintritt, von der Mitte aus mehr nach der Anode oder Kathode verschieben).

Einen der zahlreichen Kolloide, die in saurer Lösung elektropositiv, in alkalischer Lösung elektronegativ sind, stellt auch die Gelatine, wie ich durch eine Reihe von Überführungsversuchen konstatieren konnte, vor. Zirka 0·1 prozentige Gelatinelösung, die von Haus aus eine Spur Säure enthielt (welche sich durch Dialyse nicht entfernen ließ), wurde in drei oder vier kleine Bechergläser verteilt, die durch Heber miteinander verbunden waren. In die zwei äußern Bechergläser tauchten Platindrähte als Elektroden, durch die der Strom der Straßenleitung geschickt wurde. Nach zirka 24 stündiger Stromeinwirkung ließen je 10 cm^3 Lösung beim Eindampfen und nachträglichem Erwärmen bis zur Gewichtskonstanz bei 100° an Rückstand:

10 cm^3	Lösung	Anodengefäß	0·0825 g
10	»	Zwischengefäß	0·1371
10	»	Kathodengefäß	0·1926

Wurde die Säure durch den Zusatz einer minimalen Spur von NH_3 möglichst genau abgestumpft, so war das Versuchsresultat:

10 cm^3	Lösung	Anodengefäß	0·1368 g	Rückstand.
10	»	Zwischengefäß	0·1374	»
10	»	Kathodengefäß	0·1378	»

Sobald Ammoniak in Überschuß zugegen war, kehrte sich die Wanderungsrichtung aber deutlich um. Wanderte die Gelatine im ersten Falle deutlich zur Kathode, war das Ver-

erkennen, daß der Schwellenwert von Elektrolyten durch geringe Zusätze von Gelatine merklich herabgesetzt werden kann. So wird eine Mastixemulsion, der eine Spur Gelatine zugesetzt wurde, nach Bechold, Neisser und Friedemann (l. c.) viel leichter durch NaCl ausgefällt, als ohne diesen Zusatz, wie folgende der zitierten Abhandlung entnommene Tabelle veranschaulicht.

In jedes Röhrchen kommt 1 cm^3 Mastix ($^1/_{10}$-Originalemulsion). Alles auf 3 cm^3 aufgefüllt.

NaCl 10%		Zusatz zweiprozentiger Gelatine, davon 0·0001 cm^3
1	Fällung	Fällung
0·5	keine Fällung	Fällung
0·25	keine Fällung	Fällung
0·125	keine Fällung	Fällung
0·005	keine Fällung	keine Fällung
0·025	keine Fällung	keine Fällung

Ich habe diesen Versuch mit demselben Ergebnisse wiederholt und auch an einer Reihe von elektronegativen Kolloiden dieselben Beobachtungen anstellen können. Auf elektropositive Kolloide übte aber die Gelatine keinen fällungsbefördernden Einfluß aus, wenn in saurer oder neutraler Lösung gearbeitet wurde. Was die Fällungshemmung durch Gelatine betrifft, habe ich keine gradmäßige Abhängigkeit derselben von der Konzentration auffinden können, vielmehr scheint es, als träte die Schutzwirkung erst dann in ihr Recht, wenn die Konzentration an Gelatine eine bestimmte Grenze überschritten hat. Sobald dies erfolgt ist, hält die Schutzwirkung auch größern Elektrolytzusätzen stand. Die fällungshemmende Kraft der Gelatine ist von ihrer Vorgeschichte abhängig; es ist nicht gleichgültig, ob man eine frische oder eine alte Lösung verwendet, noch weniger, ob man die Gelatine erst in der Kälte aufquellen läßt und dann durch gelindes Erwärmen in Lösung bringt oder ob man die Lösung kocht und so geben die einzelnen Versuche keine genau übereinstimmenden Zahlen.

Es kann leicht gezeigt werden, daß die Wirkung der Gelatine sich nicht allein darauf beschränkt, bei geringfügigem Zusatze die Fällung elektronegativer Kolloide zu befördern, in

Einwirkung einprozentiger Gelatine auf Koll. Sb_2S_3.

Kubikzentimeter		
Gelatine	koll. Sb_2S_3	
5	5	Bleibt klar, wandert langsam zur Kathode
3	7	Wird opak
2	8	Opak, undurchsichtig
1	9	Opak, undurchsichtig

Gelatine und As_2S_3.

Kubikzentimeter		
Gelatine	As_2S_3	
7	3	Durchsichtig, trübt sich aber nach einiger Zeit
5	5	Undurchsichtig, wandert zur Anode (langsam)
3	7	Undurchsichtig, wandert zur Anode (langsam)
1	9	Undurchsichtig, wandert zur Anode

Kubikzentimeter		
0·1% Gelatine	0·1% As_2S_3	
7	3	Ganz schwache Trübung
5	5	Ganz schwache Trübung
3	7	Bleibt klar
9	1	Trübung
1	9	Bleibt klar

die gleichgeladenen Ionen nun besonders groß wird und einer Anhäufung der Teilchen entgegenwirken muß.

Bei der Untersuchung kolloidaler Metalle gibt sich dies durch eine entsprechende Erhöhung der Konzentration, bei welcher eine Fällung durch den Elektrolyten erzielt wird, durch die Erhöhung des »Schwellenwertes« zu erkennen, direkt fällungshemmende oder gar lösende Wirkungen, wie wir sie in den eben angeführten und in weiter folgenden Versuchen beobachten, konnte ich bei Metallsolen allein niemals finden, dies liegt wohl zum Teile darin, daß den Teilchen dieser Kolloide wegen ihres viel höhern spezifischen Gewichtes eine viel niederere kritische Größe gesetzt ist, bei der sie der Gravitation folgen, auch sind ihre Teilchen von Haus aus größer wie die unechter Kolloide und auch die vieler echter Kolloide, beispielsweise die kolloidaler Kieselsäure (die erst im Ultravioletten eine Lichtabsorption aufweist). In der Tat ist kolloidale Kieselsäure dementsprechend, so lange sie neutral oder nur ganz schwach sauer reagiert (und nahe isoelektrisch ist), gegen Elektrolytzusätze wenig empfindlich und wird z. B. durch viel $BaCl_2$, HCl, aber auch durch K_2SO_4 oder NH_3 nur ganz langsam (meist erst innerhalb mehrerer Stunden) ausgefällt, sie wird aber momentan niedergeschlagen, wenn man ihr neben $BaCl_2$ ganz wenig Ammoniak zusetzt (und dadurch ihre negative Ladung erhöht); mit Salzsäure kann die Fällung aber wieder aufgehoben werden.

Hier erfolgt eine Rückversetzung eines einheitlichen Gels in den kolloidalen Zustand!

Die Wirkung der Salzsäure beruht auf ihrer Fähigkeit, den Ladungssinn der Kieselsäure umzukehren (derselben positive Ladung zu erteilen), setzt man kolloidaler Kieselsäure neben K_2SO_4 etwas Salzsäure zu, so erfolgt wieder die Fällung momentan und kann nun durch Ammoniak rückgängig gemacht werden; HCl mit $BaCl_2$ oder NH_3 mit K_2SO_4 wirken aber nur außerordentlich träge ein.

Aus diesem Versuche kann man zweierlei entnehmen:

1. Kolloidale Kieselsäure ist in alkalischen und sehr schwach sauren Lösungen elektronegativ, wird aber mit der Zunahme des Säuretiters elektropositiv (das Verhalten gegen

mehrwertige Anionen und Kationen ist so charakteristisch, daß es in vielen Fällen zur Erkennung des Ladungssinnes benützt werden kann. In dem vorliegenden Falle habe ich mich aber auch durch Überführungsversuche, wie auf p. 1184 von dem Wechsel des Ladungssinnes überzeugt).

2. Erfolgte eine »Auflösung« des Gels immer dann, wenn seine Bestandteile (SiO_2 und das mitgerissene Ion) durch Elektrolytzusatz vermöge der Umladung des SiO_2 gleichen Ladungssinn erlangten, gerade wie in den früher besprochenen Kolloidmischungen. Auf diesem Momente dürfte wohl ein großer Teil der »lösenden« Wirkungen von Elektrolytzusätzen beruhen, wie wir noch des weitern sehen werden.

Ad 1 möchte ich noch erwähnen, daß die Empfindlichkeit eines Kolloides gegen mehrwertige Ionen respektive ihre Abhängigkeit vom Ladungssinne des Kolloides, selbst an einem so »unechten« und darum schwer fällbaren Kolloide wie Gelatine, demonstriert werden kann. Setzt man ihr nämlich eine ammoniakalische $BaCl_2$-Lösung zu, so erfolgt eine feine Trübung, die auf Salzsäurezusatz wieder verschwindet (die Gelatine wird durch Säure elektropositiv), setzt man der Gelatinelösung aber $BaCl_2$ und Säure zu oder viel K_2SO_4 und Ammoniak, so erfährt sie keine Trübung, dieselbe tritt aber ein, wenn man ihr neben K_2SO_4 etwas Säure zufügt.

Ist früher schon (p. 1169) die Vermutung ausgesprochen worden, daß schwache Elektrolyte mit genügend großem Ione kolloidähnliche Eigenschaften besitzen dürften, so lassen sich tatsächlich alle hier angeführten Versuche mit solchen Elektrolyten wiederholen. Einige Beispiele seien zum Beleg angeführt.

Methylorange, die wir zuerst besprechen wollen, weist in wässeriger Lösung anodische Konvektion auf, sie wird dementsprechend durch $BaCl_2$, $Mg(NO_3)_2$, $FeCl_3$ etc. momentan ausgeflockt, die Fällung kann aber durch Säurezusatz rückgängig gemacht werden. In saurer Lösung ist Methylorange aber elektropositiv, wird durch mehrwertige Anionen nicht gefällt, wohl aber fein getrübt.

Bismarckbraun zeigt kathodische Konvektion, wird durch kolloidales As_2S_3, Sb_2S_3, durch Mastixemulsion, durch Alkalien.

suchsergebnis im zweiten Falle zweifelhaft, so zeigte sich nunmehr eine entschiedene Überführung zur Anode, denn jetzt ergab die Wägung:

10 cm^3	der Lösung	Kathodengefäß	0·0954 g	Rückstand.
10	» »	Zwischengefäß	0·1373	»
10	» »	Anodengefäß	0·1786	»

Es versprach die nähere Untersuchung der Schutzwirkungen an der Gelatine leicht Aufschluß über den Einfluß, den der Ladungssinn dabei ausübt, geben zu können. Schon bei früherer Gelegenheit hatte ich beobachten können, daß die schützende Wirkung, welche Gelatine auf kolloidale Metalle ausübt, kleiner ist, wenn die Metallsole sich in saurer Lösung befinden und elektropositive Ladungen erlangt haben, wiewohl eine Wirkung auch da noch besteht. Desgleichen übt Gelatine auf kolloidales Eisenhydrat, das selbst auch einen amphoteren Elektrolyten vorstellt und das darum in saurer oder neutraler Lösung elektropositiv, in alkalischer oder ammoniakalischer Lösung aber elektronegativ wird, beim Zusatze von NH_3 nur in gewissen Fällen eine schützende Wirkung aus, und zwar zeigt es sich sowohl bei Metallsolen, wie beim kolloidalen Eisenhydroxyd, daß eine Schutzwirkung besteht, wenn erst die Gelatinelösung und dann der Elektrolyt zugesetzt wird, nicht aber, wenn dem Sol ein Gemisch der Gelatine mit dem Elektrolyten auf einmal zugesetzt wird oder wenn gar die Gelatine nach dem Elektrolyten eingetragen wird.

Es erfährt also kolloidales $Fe(OH)_3$ eine Fällung durch ein Gemisch von Gelatine und Ammoniak, während ein Gemisch von Gelatine und kolloidalem Eisenhydroxyd (das zur Kathode wandert) auf den Zusatz von Ammoniak ganz klar bleibt und nach dem Zusatz zur Anode wandert; im ersten Falle fügt man einem elektropositiven Hydrosol [$Fe(OH)_3$] ein elektronegatives zu (Gelatine, Ammoniak) und erhält einen Niederschlag, im zweiten Falle kehrt man bloß durch einen Zusatz die Ladung eines kolloidalen Gemisches um und dabei erfolgt keine Fällung.

Nicht viel anders stellen sich solche Erscheinungen bei echten Kolloiden dar. So wird kolloidales Gold (elektronegativ)

wohl durch kolloidales Eisenhydroxyd (elektropositiv), nicht aber durch ein Gemisch von kolloidalem $Fe(OH)_3$ mit Gelatine und Ammoniak (elektronegativ) gefällt.

Kolloidales Eisenhydrat fällt kolloidales As_2S_3, Sb_2S_3 etc. aus. Löst man die letztgenannten Kolloide aber in Ammoniak auf und setzt sie nun dem kolloidalen Eisenhydroxyd zu, so erfolgt keine Fällung mehr, gleichzeitig ist das $Fe(OH)_3$ elektronegativ geworden.

Das Gel, welches beim Zusammentreffen kolloidalen Eisenhydroxyds mit kolloidalem Sb_2S_3, As_2S_3 entsteht, geht auf den Zusatz einer genügenden Menge Ammoniaks oder Alkalis wieder in Lösung und wandert zur Anode, fällt man aber das kolloidale $Fe(OH)_3$ erst durch Ammoniak aus und setzt ihm dann kolloidales Sb_2S_3 oder As_2S_3 bei beliebigem Überschuß von NH_3 oder KOH zu, so geht es nicht in Lösung; auch das Gel, welches aus kolloidalem $Fe(OH)_3$ und kolloidalem Gold entsteht, wird durch Ammoniakzusatz nicht mehr in Lösung gebracht, HCl kann aber die Fällung rückgängig machen und nun wandert die gefärbte Lösung zur Kathode.

In der ersten Abhandlung war die schon länger bekannte Tatsache, daß elektronegative Kolloide oder Suspensionen durch mehrwertige Kationen weitaus leichter gefällt werden als durch einwertige, daß die Säuren auf sie gleichfalls eine weitaus größere fällende Kraft ausüben als es den Alkalien eigen ist, näher besprochen worden; es zeigte sich, daß diese Eigentümlichkeit vorauszusehen ist, wenn man die elektrostatische Wirkung der Ionen auf die Kolloidteilchen berücksichtigt und einer Rechnung von Whetham folgt, ferner die Verschiedenheit der Beweglichkeit der Ionen des Elektrolytes ins Auge faßt. Wird die Fällung elektronegativer Sole und Suspensionen aber durch die Gegenwart mehrwertiger Kationen und durch $H^{\cdot}$-Ionen besonders begünstigt, so wird sie durch die Ionen, welche die Fällung elektropositiver Hydrosole und Suspensionen befördern, also durch mehrwertige Anionen, OH'-Ionen etc. erschwert und vice versa; auch diese Eigentümlichkeit läßt sich versinnlichen, wenn man beachtet, daß die elektrostatische Abstoßung der Kolloidteilchen durch

Sb_2S_3 löst sich nicht durch Zusatz von Eosin, es ist aber auch nicht zu erwarten, daß Eosin eine Umladung des Methylenblaus hervorzurufen im stande ist, vielmehr dürften hier ähnliche Verhältniss beestehen wie beider p. 1182 beschriebenen Einwirkung von Gelatine auf die kolloidalen Sulfide des Arsens und des Antimons. Daß die einzelnen Teilchen des Methylenblaus aber klein sind, erkennt man daran, daß sie unter Einwirkung des Stromes Membranen zu durchdringen vermögen, an welchen Kolloide sich abscheiden (tierische Blase, Pergament etc.).

Fuchsin trägt, seinem basischen Charakter entsprechend, eine positive Ladung, weist kathodische Konvektion auf, fällt elektronegative Kolloide, wie die des Schwefelarsens und Antimons. Es liefert mit diesen ein Gel, das ebenfalls durch Ammoniak wieder in Lösung gebracht werden kann u. s. f.

In diesen Beispielen, die leicht vermehrt werden könnten, zeigt es sich also allgemein, daß Ionen schwacher Elektrolyte kolloidähnlichen Charakter erlangen, wenn sie genügende Größe besitzen. Da die Molekulargröße dieser Körper meines Wissens in wässeriger Lösung noch nicht ermittelt worden sind, läßt sich freilich hieraus noch nicht sagen, wie groß die Ionen sein müssen, um solche Eigenschaften anzunehmen, doch ist das abgestufte Verhalten der einzelnen Glieder und die Funktion, welche die elektrische Ladung dabei spielt, daraus ersichtlich geworden.[1]

Diese Beobachtungen, welche ich aus meinen Versuchsprotokollen noch erheblich vermehren könnte, sind von einiger Bedeutung für das Verständnis eines der interessantesten und wichtigsten Kapitel der Kolloidchemie, der reversiblen und der irreversiblen Eiweißfällung, um deren Erforschung sich

[1] Molekulargewichte, die in andern Lösungsmitteln ermittelt wurden, liefern für die Molekulargröße in Wasser keinen sichern Anhaltspunkt, denn die allgemeine Regel, daß die Assoziation von Molekülen in Medien mit geringerer Dielektrizitätskonstante begünstigt ist, scheint nach Paterno's Versuchen zu urteilen (Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 4, p. 457, 1889) auf Kolloide nicht ohneweiters anwendbar zu sein, so hätte die Gallussäure in Eisessig normale MolekulArgröße, in wässeriger Lösung aber scheint sie etwa 100 mal so große Komplexe zu bilden.

neben Hardy und Posternak[1] W. Pauli[2] besonders verdient gemacht hat.

Natives Eiweiß (elektronegativ) wird durch Alkalisalze erst bei größeren Konzentrationen gefällt und das abgeschiedene Gel löst sich beim Verdünnen der Lösung wieder auf. Mit der geringen Fällungskraft der Ionen der Leichtmetalle geht eine deutliche Abhängigkeit des Fällungsvermögens ihrer Salze von der Natur des Anions einher, und zwar ordnet sich diese Wirkung nach der Reihe:

Fällungsvermögen: Li > Na > K > NH_4 > Mg.

Von den Salzen desselben Metalles ist das Fällungsvermögen:

Fluorid > Sulfat > Phosphat > Citrat > Acetat > Chlorid > Nitrat > Bromid > Jodid > Rhodanid.

(Es ist interessant, daß sich dieselbe Reihe hinsichtlich der Fähigkeit von Natriumsalzen die Quellung von Leimplatten zu verhindern herstellt (Hofmeister) und daß auch die Schmelzpunktserhöhung, die Gelatine durch Salzzusatz erfährt, von Salz zu Salz in der nämlichen Reihenfolge abnimmt [Pauli]).

Eine viel größere fällende Kraft, als sie die Kationen der Alkalimetalle aufweisen, kommt denen der Metalle Zn, Fe, Cu, Ag, Hg, Pb zu. Sehr geringe Salzkonzentrationen rufen hier schon eine Ausflockung hervor, die durch Verdünnen nicht mehr zurückgeht (irreversible Fällung), zugleich wird die Salzwirkung soviel wie unabhängig von der Natur des Anions.

Hardy hat nun, wie eingangs bemerkt, darzutun gewußt, daß die elektrischen Eigenschaften von koaguliertem Eiweiß sich umkehren, sobald es aus alkalischer in saure Lösung gebracht wird, indem es in letzterer elektropositive (kathodische) Konvektion erlangt. Es ist nun äußerst bemerkenswert, daß es Posternak[3] gelungen ist, den Nachweis zu führen, daß mit der Umkehr der elektrischen Eigenschaften auch die Reihenfolge des Fällungsvermögens der Salze verkehrt wird, denn jetzt ist statt der frühern die Reihe:

---

[1] Ann. de l'inst. Pasteur.

[2] L. c.

[3] Ann. de l'inst. Pasteur, Bd. 15, 85 (1901).

mehrwertige Anionen etc., momentan gefällt durch kolloidales $Fe(OH)_3$, durch kolloidales Gold, dem durch entsprechende Zusätze positive Ladung erteilt wurde, etc., gar nicht verändert. Mit der elektronegativen Methylorange gibt es eine Trübung, welche verschwindet, sobald man die Flüssigkeit ansäuert und so die Methylorange umladet.

Eosin ist elektronegativ, fällt $Fe(OH)_3$-Sol, läßt As_2S_3, Sb_2S_3 unverändert, klärt die Mastixemulsion vollständig, erfährt auf Zusatz von Säuren, von mehrwertigen Kationen etc. eine momentane Ausfällung, ist gegen Alkali und gegen mehrwertige Anionen unempfindlich und fällt (wie schon Bechold, Neisser und Friedemann, l. c., beobachten konnten) Bismarckbraun innerhalb bestimmter Konzentrationsgrenzen momentan aus, Gelatine verhindert die Fällung. Methylorange wirkt auf Eosin nicht, Säurezusatz vermittelt aber eine Fällung, die durch Alkali wieder aufgehoben wird.

Bringt man die Trübung, die beim Mischen von Methylorange mit Bismarckbraun entsteht, durch HCl in Lösung und setzt ihr Eosin zu, so tritt keine Änderung mehr ein. Methylorange wirkt hier schützend (ohne sie fällt Bismarckbraun und Eosin bei Gegenwart von Säure in den gewählten Verhältnissen immer aus).

Eine durchgreifende Analogie mit dem Verhalten der Kolloide gibt sich also kund, daneben zeigt es sich hier und im folgenden, daß eine Wiederauflösung der Gele auf Elektrolytzusatz immer wieder dann erfolgt, wenn der Zusatz zur Folge hat, daß die im Gele vertretenen Bestandteile gleichen Ladungssinn annehmen.

Auch die Schutzwirkungen, die Gelatine ausübt, entsprechen hier denen, die wir früher beobachtet haben. Mit Gelatine versetzte Bismarckbraunlösung wird durch Alkali nicht gefällt, gießt man aber eine Lösung von Bismarckbraun in Gelatine, die mit Alkali oder mit NH_3 versetzt wurde, so fällt ein Niederschlag aus. Eine Ausflockung tritt also ein, wenn man die beiden Körper zusammenbringt, während sie entgegengesetzte Ladungen tragen.

Ganz entsprechend verhält sich Eosin. Fügt man ihr Gelatine zu, so fällt sie auf Zusatz von Säure nicht aus, trägt

man aber Eosin in salzsaure Gelatine ein, so scheidet sich momentan ein Niederschlag ab.

Behandelt man Eosin, das durch Gelatine vor der Ausflockung geschützt wurde, mit einer Säure, so schlägt seine Farbe in Orangegelb um und nun hat es kathodische Konvektion erlangt.

Brasileïn, das durch etwas Ammoniak in Lösung gebracht wurde, hat anodische Konvektion, es gibt mit kolloidalem $Fe(OH)_3$ eine Trübung, wird langsam durch $BaCl_2$, schnell durch $FeCl_3$ gefällt, bleibt auf Zusatz von Sulfationen aber in Lösung.

Hämatoxylin, das in schwach ammoniakalischer Lösung mit der bekannten tiefvioletten Farbe gelöst ist, wandert zur Anode und fällt mit $BaCl_2$, $FeCl_3$ momentan aus, bleibt hingegen auf den Zusatz von Sulfationen in Lösung. Zusatz von Gelatine oder von Bismarckbraun bleibt ohne Wirkung, auch das kolloidale $Fe(OH)_3$ ruft keine Trübung hervor. Bei Gegenwart ammoniakalischen Hämoglobins fällt aber kolloidales $Fe(OH)_3$ auch nicht kolloidales As_2S_3, Sb_2S_3, hier liegt also wieder eine Schutzwirkung vor. Fällt aber Hämatoxylin auch weder Gelatine noch Bismarckbraun, so gibt sich ein Einfluß auf diese entgegengesetzt geladenen Kolloide darin kund, daß das Gemisch mit einem derselben durch Säure niedergeschlagen wird, während Gelatine, Bismarckbraun oder Hämatoxylin für sich allein durch Säure nicht gefällt werden (die Farbe des ammoniakalischen Hämatoxylins schlägt bei Säurezusatz um, die Lösung bleibt aber vollständig klar).

Methylenblau hat kathodische Konvektion, konnte durch Elektrolytzusätze nicht koaguliert werden, fällt aber mit kolloidalem As_2S_3, Sb_2S_3 etc. sofort mit grünlichbrauner Farbe aus. Eosin ruft aber keine Ausflockung hervor, sondern die Lösung wird schön purpurrot, das Gemisch beider Kolloide wandert aber zur Anode. Es hat also eine Vereinung stattgefunden, in der das Eosin das Übergewicht der Ladung trägt. Dies spricht mit der Unfällbarkeit durch Elektrolyte und entsprechend der chemischen Konstitution des Methylenblaus dafür, daß seine Teilchen klein sind und nur eine geringfügige Ladung tragen. Das Gel von Methylenblau und As_2S_3 oder

Fällungsbefördernde Anionen:



$$CNS > J > Br > NO_3 > Cl > C_2H_3O_2,$$

hemmende Kationen:



$$Mg > NH_4 > K > Na$$

zu schreiben. Die Ordnung hat sich gerade umgekehrt.

Pauli hat dann gezeigt, daß es gelingt, Salze zu kombinieren, bei denen die fällungslösende Wirkung der Anionen die fällende der Kationen übertrifft oder wenigstens sehr weit herabsetzt, und zwar erfolgt dies beim Zusammenwirken der Endglieder der Anionenreihe mit den Anfangsgliedern der Kationenreihe, ferner hat er beobachtet, daß die Verschiebung des Fällungsvermögens gradweise mit der Zunahme des Säuretiters erfolgt. So findet beim Zusatz 0·01- bis 0·02normaler HCl noch keine Verschiebung der Fällungsgrenze der Leichtmetallsalze statt und es ist nur eine geringe Beschleunigung der Fällung zu beobachten, dagegen erfahren die Endglieder der Anionenreihe dadurch schon eine starke Beeinflussung, indem sie jetzt zu irreversibler Fällung führen (J und CNS), zugleich kehrt sich gegenüber dem Verhalten bei nativer Reaktion die Reihenfolge der Kationen um, da das Fällungsvermögen für dasselbe Anion (J, CNS) jetzt nach der Ordnung Mg, NH_4, K, Na abnimmt. Erst in 0·03normaler HCl gewinnen sonst fällungsbegünstigende Salze aber ein mehr oder minder bedeutendes Hemmungsvermögen.

Recht eigentümlich ist das Gehaben der Eiweißlösung gegen Erdalkalisalze. Die Chloride und Acetate von Ca, Ba, Sr fällen erst in weit höhern Konzentrationen als die entsprechenden Verbindungen der Alkalimetalle, hingegen besitzen die Rhodanide, Jodide und Bromide ein sehr hohes Fällungsvermögen. Da zeigt es sich aber, daß der Zusatz eines Erdalkalisalzes zu nativer Eiweißlösung mit dem Auftritt einer sauren Reaktion verbunden ist, zugleich hat die Empfindlichkeit gegen Salze dieselbe Reihenfolge angenommen, die Posternak für saure Lösungen beschrieben hat!

Diese von Pauli (l. c.) mitgeteilten Beobachtungen habe ich durch Überführungsversuche ergänzt, dabei zeigte es sich,

daß natives Eierklar oder Eiweiß in wässerigen Lösungen mit Alkalizusatz oder ohne jeden Zusatz zur Anode wandern und daß die Konvektion von Eiweißlösungen beim Zusatze von Erdalkalisalzen eine kathodische wird. Das Eiweiß wird durch diesen Zusatz also umgeladen und damit kehrt sich die Fällungskraft von Anionen und Kationen um. Die etwas spezifischen Eigenschaften der einzelnen Ionen, die es mit sich zieht, daß die Umkehr nicht sofort beim Auftreten sauren Titers, sondern erst gradweise statthat, dürfte ebenfalls in ihrer Wirkung auf die Ladung des Eiweiß begründet sein.[1]

Ganz ähnlich wie Hühnereiweiß verhalten sich Globulin, Leim, Serumeiweiß, Hausenblase etc. (Hofmeister), ganz ähnlich verhalten sich endlich Bakterien bei der Serumagglutination, wie es in letzter Zeit schon mehrfach hervorgehoben wurde.[2] In der Tat ist es nur zu erwarten, daß sämtliche Eiweißstoffe als durchwegs amphotere Elektrolyte ein analoges Verhalten aufweisen und die Mannigfaltigkeit ihres Gehabens wird sich genau wie in den bisher angeführten Fällen auf ihrer Eigentümlichkeit gründen, durch die geringsten Zusätze eine Änderung ihrer Ladung zu erfahren. An und für sich gleichgeladene Kolloide werden sich gegenseitig ausfällen können, wenn sich die Ladung des einen von ihnen beim Zusammenbringen mit dem zweiten umkehrt, gerade dies wird aber bei so schwachen amphoteren Elektrolyten häufig eintreten können und Spuren einer sauren oder alkalischen Reaktion werden

[1] Ob die Eiweißfällung durch Alkohol, Formaldehyd etc. einer chemischen Wirkung zuzuschreiben ist oder ebenfalls einer Beeinflussung der Ladung zuzuschreiben ist, bleibt eine noch offene Frage. Möglicherweise handelt es sich hier um eine Art Aussalzung (allerdings durch einen Nichtelektrolyten).

[2] Auf die Analogie dieser Erscheinungen mit dem Verhalten anorganischer Kolloide wies zuerst Landsteiner hin, namentlich auf Ähnlichkeiten des quantitativen Ablaufes der Reaktion bei der Agglutininabsorption und bei der Absorption von Salzen durch anorganische Kolloide (Münchner med. Wochenschrift, 1903). Die Vorstellung, daß es sich bei Immunitätsreaktionen um Absorptionen handelt, wurde dann auch von Biltz (Zeitschr. für phys. Chem., 1904) und Nernst (Zeitschr. für El. 1904) angenommen. Erscheinungen, die Analogie mit der Agglutination aufwiesen, hat Landsteiner auch mit Hilfe anorganischer Kolloide, so mit kolloidaler Kieselsäure, realisieren können. (Wiener klin. Wochenschrift, 1904.)

sehr wirksam sein, sobald es sich um die Kuppelung so schwacher Elektrolyte handelt.[1]

Von der gewöhnlichen Gelabscheidung unterscheidet sich der Vorgang der Agglutination aber bis zu gewissem Grade dadurch, daß die Bakterien, wie Bordet[2] gezeigt hat, durch das Agglutinin allein nicht ausgeflockt werden, sondern daß dazu die Gegenwart von Salz notwendig ist. Die Agglutininbakterien (die man durch Ausfällung von Bakterien mit Serum erhalten kann), lassen sich nun nach mehrfachem Zentrifugieren und Waschen in destilliertem Wasser wieder aufschwemmen, sind wieder meist elektronegativ, lassen sich durch geringfügige Elektrolytzusätze wieder niederschlagen und sind zwar empfindlicher gegen diese Zusätze geworden als die nichtagglutinierten Bakterien. So ist die Fällungsgrenze nach einer während der Abfassung dieser Zeilen erschienenen zweiten Mitteilung von Neisser und Friedemann:[3]

Normallösungen der Salze	Bakterienaufschwemmung 1 *cm*	Agglutininbakterien 1 *cm*
	(alle Röhrchen auf 2 cm^3 aufgefüllt)	
$NaCl$	∞	0·025
$NaNO_3$	∞	0·025
$MgSO_4$	∞	0·025
$ZnSO_4$	0·01	0·001
$CaCl_2$	∞	0·005
$Cd(NO_3)_2$	0·01	0·001
$Pb(NO_3)_2$	0·0025	0·001
$Fe_2(SO_4)_3$	0·0005	0·0001
$Al_2(SO_4)_3$	0·00025	0·00025

[1] In dieser Weise versuchten Landsteiner und Jagič (Münchner med. Wochenschrift, 1904) die gegenseitige Einwirkung der Immunkörper und die Spezifizität der Immunsera zu erklären.

[2] Ann. de l'inst. Pasteur, 1900, p. 267.

[3] Die angeführten Zahlen sind unter anderen in der bezeichneten Abhandlung: Münchner med. Wochenschr., Nr. 19, 1904, enthalten.

(Die letzten zwei Lösungen enthielten zweifellos kolloidales $Fe(OH)_3$ respektive $Al(OH)_3$, die beide elektropositiv sind; die Bakterien tragen hingegen negative Ladung).

Die Agglutination läßt sich also dem Verhalten von Hämatoxylin und Bismarckbraun (p. 1190) an die Seite stellen oder auch mit dem der Mastixemulsion vergleichen, welche analogerweise durch Gelatine allein nicht ausgefällt wird, sondern erst, wenn eine selbst zur Fällung nicht hinreichende Menge Elektrolyt zugegen ist.[1]

Dieses Verhalten ist dem von Eiweißlösungen aber nahe verwandt und hat mit der reversiblen Eiweißfällung viele wesentliche Merkmale gemein.

---

[1] Einen Vergleich mit dem Verhalten der Mastixemulsion führen Bechold, Neisser und Friedemann auch durch, beziehen denselben aber einerseits auf die Fähigkeit beider Systeme, zwischen den Elektroden auszufallen, dann darauf, daß beide Systeme ein Gemisch von Kolloiden vorstellen und daß die Gelatine durch Salzzusatz immer einsinnig geladen werde. Der erste Grund ist ganz weit entfernt davon, die Bedeutung zu haben, welche ihm Neisser und Friedemann beilegen. Wir haben schon p. 1183 gesehen, daß auch einheitliche Kolloide die Eigentümlichkeit aufweisen können, während des Stromdurchganges zwischen den Elektroden auszufallen, sie kommt denn auch ganz allgemein allen Kolloiden zu, die in schwach saurer Lösung andere Ladung tragen, wie in schwach alkalischer Lösung. Ich konnte mich überzeugen, daß die Konzentration der Gelatine im Zwischengefäße schließlich höher ist wie in den beiden andern, sofern man nur genügend lange den Strom durchleitet (deshalb wurde den Überführungsversuchen der p. 1183 f. nur dann Wert beigelegt, wenn die Konzentration in den Zwischengefäßen nahe unverändert geblieben war). Der Grund ist leicht einzusehen: die ursprünglich nach einer Seite geführte Gelatine wird schließlich von beiden Seiten gegen die Mitte gedrängt, sobald der Anodenraum sauer (die Gelatine darin also positiv), der Kathodenraum alkalisch (die Gelatine darin negativ) geworden ist. Viele Körper teilen diese Eigenschaft und die Bedingung für eine Ausfällung zwischen den Elektroden ist um so günstiger, je näher die Elektroden stehen; es fielen mir unter andern zwischen den Elektroden aus: Kongorot, Erythrosin, Eosin, SiO_2 etc. (vergl. hiezu auch: Lehmann, Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 14, p. 157, 1894).

Dies ist auch der Grund, weshalb sich kein Kolloid, dessen Ladungssinn von der mehr sauren oder alkalischen Natur der Lösung abhängt, an den Elektroden abscheidet. Kolloidales Silber scheidet sich an der Anode ab, desgleichen die kolloidalen Sulfide. Kolloidales Pt, Au, Pd, dagegen wie alle Kolloide, die in saurer Lösung positiv, in alkalischer negativ sind, scheiden sich

Die Gelabscheidung durch Salzwirkung oder durch gegenseitige Fällung elektrisch verschiedener Kolloide kann naturgemäß erst dann eintreten, wenn die schwebenden Partikeln infolge ihrer Vereinigung zu größern Komplexen einen Durchmesser erlangt haben, bei welchem sie der Gravitationskraft folgen können. Ist durch gegenseitigen Ladungsaustausch die beiderseitige Ladung gerade neutralisiert worden, so genügt es, wenn der Radius der schwebenden Teilchen eben das kritische Maß überschreitet, sind die Komplexe aber noch geladen, so wird die Gravitationskraft erst größern Teilchen gegenüber in ihr Recht treten. Das abgeschiedene Gel wird aber immer in der Lösung, aus der es gefällt wurde, unlöslich

aber nicht ab, auch Albumin, Gelatine etc. tun dies nicht oder höchstens in sehr stark alkalischen oder stark sauren Lösungen, welche eine saure Reaktion in der unmittelbaren Umgebung der Anode, respektive eine alkalische Reaktion in der unmittelbaren Nähe der Kathode nicht aufkommen lassen. Macht man die Kathodenlösung von Haus aus alkalisch und säuert den Anodenraum an, so wandern solche Kolloide immer zur Mitte. Aus der Tatsache, daß sich der Kathodenraum an Gelatine anreichert, ohne daß eine Abscheidung eintritt, anzunehmen, daß die Gelatine oder das Eiweiß infolge vermehrter Oberflächenspannung die Lösung »auspreßt«, wie es Bechold in einer jüngst erschienenen Abhandlung tut (Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 48, p. 394, 1904), klingt etwas gewagt, und auch das Bild ist wohl nicht glücklich gewählt, das Volumen wird doch nicht verringert! Das Kolloid übt doch keinen Druck von außen aus! Es könnte also höchstens behauptet werden, daß das Kolloid auf einer Seite einen größern osmotischen Druck ausübt, wie auf der andern, aber dies wäre immerhin etwas sonderbar.

Was die zweite Vermutung von Bechold, Neisser und Friedemann betrifft, daß die Gelatine als amphoteres Kolloid durch Salze einsinnig geladen würde, durch diese Salzwirkung erst entgegengesetzte Ladung zum Mastix erlange und nun erst auf dieses einwirken könne, ist sie als unrichtig zurückzuweisen, vielmehr ist die Gelatine von Haus aus elektropositiv und behält diese Ladung bei Gegenwart von NaCl etc. unverändert bei (hingegen übt sie die fällungsbefördernde Wirkung auf Mastix in alkalischer Lösung nicht aus). Der Grund für die Fällungsbegünstigung ist, wie wir weiter ausführen werden, darin zu sehen, daß die Gelatine wohl mit dem entgegengesetzt geladenen Mastix zusammentritt, aber zu geladenen Teilchen und unterhalb der kritischen Fällungsgröße. Erst bei Gegenwart fremder Ionen, die ihre sammelnde und entladende Wirkung ausüben, wird eine Fällung vermittelt. Da die Teilchen größer, dabei schwächer geladen sind, wie Mastix, sinkt aber die Fällungsgrenze (vergl. p. 1181 ff.).

bleiben. Bringt man es aber in eine andere Lösung, so kann es gegen diese wieder eine größere oder kleinere Potentialdifferenz annehmen. War bei der Ausflockung die Fällungsgrenze eben überschritten worden, so wird nun schon eine kleine Ladung genügen, das Gel wieder zu verteilen und in ein Kolloid rückzuverwandeln, dessen Teilchen in der Regel aber noch immer größer sein werden, wie die des ursprünglichen Kolloides und auch wohl meist eine geringere Ladung tragen werden, weil sie aus der Vereinigung zweier Kolloide respektive mehrerer Kolloidteilchen durch die Wirkung eines Iones hervorgegangen sind und weil diese Vereinigung wohl nur in den seltensten Fällen ganz rückgängig gemacht werden kann, aber das Gel wird wieder in Lösung gehen gegen Elektrolytzusätze etc., jedoch empfindlicher sein wie das ursprüngliche Kolloid.

So sahen wir p. 1187, daß elektronegative Kieselsäure momentan durch $BaCl_2$ ausgefällt wird, daß aber das Kieselsäure-Ba-Gel durch Salzsäure wieder »gelöst« werden kann. In der Tat erlangt Kieselsäure durch diese Behandlung eine positive Ladung, muß also aus dem Verbande mit $Ba^{\cdot\cdot}$ durch HCl herausgerissen werden. Ähnliche Ergebnisse förderten die Versuche mit kolloidalem Eisenhydrat und Sb_2S_3 respektive As_2S_3 (p. 1186) mit Bismarckbraun, Eosin und Methylorange (p. 1185) u. s. f.

Auch in der reversiblen Eiweißfällung ist dieselbe Erscheinung zu sehen, auch hier scheidet sich ein Gel ab, das gegen die Lösung keine Potentialdifferenz hat, eine solche aber wieder erlangt, sobald man die Lösung verdünnt, ansäuert oder alkalisch macht.[1] Die Versuche von Hardy (l. c.) bieten hiefür das beste Beispiel: ausgefälltes koaguliertes Eiweiß war nur dann beständig in Suspension zu erhalten, wenn man ihm durch Säure- oder Alkalizusatz eine ausgesprochene Ladung wieder erteilt hatte, während es sich sonst nicht wieder aufschwemmen ließ (der Fehlschluß, den Hardy daraus zog, lag

[1] Diese Erscheinung hat bei einigen Stoffen, deren Gele gegen sehr verdünnte Lösungen eine Potentialdifferenz annehmen, geradezu die Grundlage einer Methode gebildet, kolloidale Lösungen herzustellen, das Gel wird scharf abgesaugt in Wasser wieder in Lösung gebracht.

aber in der Identifizierung der Stabilität dieses Gels mit der des ursprünglichen Kolloides. Doch haben wir p. 1166 gesehen, daß SiO_2 selbst erst dann gegen Elektrolyte empfindlich wird, wenn es eine deutliche Ladung trägt, daß sie also gerade im isoelektrischen Punkte besonders stabil ist, und nicht anders steht es um die Eiweißstoffe und die andern kolloidalen Substanzen. Besitzen ihre Teilchen nämlich eine kleinere als die Größe, welche wir die »kritische« genannt haben, so sind sie gegen Elektrolytzusätze nur empfindlich, wenn sie eine Ladung tragen, ist dieselbe außerordentlich klein oder gar Null, so bleiben alle Elektrolyte, die nicht etwa die Fähigkeit besitzen, den schwebenden Teilchen eine Ladung zu erteilen, unwirksam und koagulieren nicht. Im Koagulum haben aber die Teilchen eine Größe, welche die kritische übertrifft und diese Teilchen können nur dann schwebend erhalten werden, wenn sie geladen sind (oder wenn man durch äußere Einwirkungen ihre Größe wieder herabsetzt).[1]

Nichts anderes liegt im Falle der Agglutininbakterien vor: Zwei kolloidartige Stoffe haben unter Vermittlung eines Elektrolyten ein Gel gebildet, dieses Koagulum erlangt nach der Trennung von der Lösung wieder eine Potentialdifferenz gegen destilliertes Wasser (denn sie wandern wieder im Stromgefälle), die eine Aufschwemmung wieder ermöglicht. Die Teilchen dieser Suspension sind, wie die mikroskopische Untersuchung lehrt, etwa von derselben Größe, wie die ursprünglichen, ihre Ladung ist aber abgestumpft worden, sie werden also (da sie verhältnismäßig große Teilchen vorstellen) schon durch kleinere Elektrolytmengen ausgefällt. Daß die Agglutininbakterien noch besonders leicht zwischen den Elektroden

[1] Kolloidale Lösungen, in denen die suspendierten Teilchen sehr groß sind, könnten durch konzentrierte Lösungen (auch Nichtelektrolytlösungen) auch etwa dadurch gefällt werden, daß sie das Wasser, welches sie in ihren Zwischenräumen enthalten, infolge des osmotischen Druckes an die Lösung abgeben, dabei einschrumpfen und möglicherweise mit der Änderung des Verhältnisses von Dichte und Raumerfüllung, die sie erfahren, die Fällungsgrenze überschreiten.

ausfallen, zeigt aber nur an, daß sie in saurer Lösung anders geladen sind, wie in alkalischer Lösung und daß sie überhaupt sehr leicht ausgefällt werden, wie es bei der Größe ihrer Teilchen kaum wundernehmen kann. Die Abhängigkeit der Ladung der Agglutininbakterien von der Zusammensetzung respektive der Konzentration der Lösung, die daraus hervorgeht, daß das Koagulum in destilliertem Wasser sich wieder lädt und nur gegen die Lösung, aus der es abgeschieden wurde, isoelektrisch ist, läßt aber auch voraussehen, daß die Zusammensetzung des Koagulums von der Konzentration der Lösung abhängen muß — eine Tatsache, die für den Prozeß der Agglutination von großer Wichtigkeit ist — wie denn überhaupt die Zusammensetzung eines Gels, das aus der Vereinigung von Kolloiden hervorgeht, deren Ladungen von der Natur der Lösung stark beeinflußt wird, immer mit der Zusammensetzung der Lösung variieren muß, denn es ändert sich dann das Kolloid kontinuierlich mit der Lösung.[1]

Wird ein Kolloid durch mehrwertige Ionen koaguliert, so sind die Teilchen im Koagulum entsprechend größer als wenn die Fällung durch ein einwertiges Ion herbeigeführt wird. Es wird also schwerer sein, das Gel wieder in »Lösung« zu bringen. Hatte dort eine Verdünnung schon genügt, so wird

---

[1] Diese Eigenschaft ist natürlich nicht den Eiweißstoffen allein eigentümlich; so konnte ich schon in der ersten Abhandlung zeigen, daß die Titeränderung bei der Fällung kolloidalen Pt, also auch die Menge mitgerissenen Ba, von seiner jeweiligen Ladung abhängt.

Fällt man beispielsweise kolloidales Eisenhydrat bei Gegenwart von Ammoniak oder Alkali, so wird die Menge mitgerissener Anionen von der Konzentration des anwesenden Ammoniaks oder des Alkalis abhängig sein, weil sie die Dissoziation, also die Ladung des Eisenhydrates beeinflussen. In stark alkalischer Lösung herrscht die Säuredissoziation des Eisenhydrates vor, es erlangt anodische Konvektion und reißt nun Kationen mit.

Duclaux, der seine Versuche (l. c.) anstellte, ohne Rücksicht auf diese und andere Faktoren zu nehmen (so gibt er selbst an, daß die chemische Konstitution des Kolloides von Zusätzen beeinflußt wurde), sieht fälschlich in seinen Resultaten einen Einwand gegen die Schlüsse, die Whitney und Ober (l. c.) aus ihren Untersuchungen gezogen haben.

Viele scheinbare Abweichungen erklären sich auf ähnliche Art, so wirken Elektrolyte oft in geringer Konzentration lösend, in größerer fällend u. a. m.

hier vielleicht die Wirkung von Agentien zu Hilfe genommen werden müssen, die den Teilchen im Koagulum eine andere, größere Ladung erteilen, als es durch bloße Verdünnung erzielt werden kann und so gelangt man von der reversiblen Eiweißfällung durch einwertige Kationen zur irreversibeln der mehrwertigen Metallionen, die aber durch starke Säuren noch rückgängig gemacht werden kann.

Alle Elektrolyte, welche aber eine Lösung des Koagulums in derselben Flüssigkeit begünstigen, welche also dem Koagulum oder dem Kolloide die Ladung der fällenden Ionen zu erteilen streben, müssen naturgemäß die Fällung des Kolloides hemmen und so treten neben fällenden auch schützende, fällungshemmende Ionen auf.

Bedenkt man, wie schnell die Dissoziation schwacher amphoterer Elektrolyte durch die geringfügigsten Mengen anwesender Ionen, vornehmlich $H^{\cdot}$ und OH', beeinflußt wird, daß auch Neutralsalze eine Wirkung auf sie üben, z. B. $CaCl_2$, daß alle amphoteren Elektrolyte einander gegenseitig beeinflussen und beim bloßen Zusammenbringen ihre Ladung ändern, zieht man endlich in Rücksicht, daß Lösungen unechter Kolloide soviel wie niemals elektrolytfrei sind, so ist es leicht, sich ein Bild der Mannigfaltigkeit und der Spezifität der Wirkungen zu entwickeln (cf. Landsteiner l. c.), die Kolloide und kolloidartige Körper in der Natur aufeinander üben. Dazu tritt noch die Reversibilität der Fällung und die mannigfachen Schutzwirkungen unechter Kolloide, endlich die Rolle, welche die Temperatur spielt, sobald die $H^{\cdot}$- und OH'-Dissoziation verschiedene Temperaturkoeffizienten aufweist. So hat Landsteiner gefunden, daß gewisse Verbindungen von Agglutininen durch mäßiges Erwärmen gespalten werden und einen Fall beschrieben, in dem schon bei Zimmertemperatur der Zerfall fast vollständig ist.

Daß die Schutzwirkung, die z. B. Gelatine auf Suspensionen, wie Mastix, oder auf echte Kolloide ausübt, nicht von ihrem Ladungssinn abhängt, hatten wir in mehreren Fällen wahrnehmen können (p. 1181 ff.). Gelatine schützt eine Mastixemulsion sowohl vor der Fällung durch Säure, wie durch Alkali; im ersten Fall ist sie elektropositiv, im zweiten aber

elektronegativ, hat also dieselbe Ladung wie Mastix. Sie schützt ebenfalls kolloidale Metalle vor der Fällung, gleichgültig, ob sie gleiche oder entgegengesetzte Ladung trägt, wenn auch die Schutzwirkung in beiden Fällen nicht gleich energisch ist. Im Überschusse zugefügt, erteilt sie kolloidalem Schwefelarsen, Schwefelantimon ihren Ladungssinn und scheint sich also mit ihm zu Komplexen vereint zu haben, in denen sie vorherrscht. Man wäre hiernach vielleicht veranlaßt, ihre Schutzwirkung auf eine Umhüllung der As_2S_3-, Sb_2S_3-Partikeln zurückzuführen, wie es Bechold, Neisser und Friedemann (l. c.) tun. Die Wanderungsversuche, die ich mit kolloidalen Metallen angestellt habe, hatten mich seinerzeit auch zu dieser Ansicht geführt. Tritt nämlich das kolloidale Metall infolge der Stromeinwirkung über die Grenze, die es auf der einen Seite mit der darüberstehenden Lösung gebildet und gelangt also in die reine Elektrolytlösung, so fällt es trotzdem dort nicht aus, es muß also schützende Gelatine mit ihm gegangen sein. Die Beobachtung, die ich seitdem gemacht habe, daß Gelatine auch schützt, wenn sie die gleichnamige Ladung trägt, hat mich aber veranlaßt, diese Ansicht etwas einzuschränken, denn es ist kaum anzunehmen, daß die Gelatine Teilchen umhüllen könnte, von denen sie elektrostatisch abgestoßen werden muß.

Mitwandern wird sie aber doch, denn sie trägt gleichsinnige Ladung, ihre bloße Anwesenheit, nicht erst ihre Umhüllung muß in diesem Falle also schützend wirken. Hat nun die Gelatine aber gleichen Ladungssinn, so muß sie sich mit dem geschützten Kolloid in die fällenden Ionen teilen, die nun für beide Kolloide dieselben sein werden. Da sie aber von diesen entsprechend ihrer viel höhern Fällungsgrenze eine viel größere Menge in Anspruch nimmt, ist es, als ob durch ihre Gegenwart der Schwellenwert erheblich gesteigert worden wäre, indem sie die fällenden Ionen gleichsam lähmt oder latent macht. Dabei kann es natürlich vorkommen, daß die sammelnde Wirkung der Ionen Gelatineteilchen mit Metallkolloidpartikeln zusammenführt und in einem geladenen Komplexe vereint.

Erklärt dies die Fähigkeit der Ionen, auch bei Gegenwart von Gelatine an die Metallpartikeln zu dringen und ihre Ladung zu beeinflussen, so geht es auch hervor, daß die Stabilität des

Metallsoles nun eine erheblich größere sein muß, weil auch verhältnismäßig große Partikeln schwebend erhalten werden können, sobald ihre Ladung genügend groß ist und weil die Koagulation so kleiner Teilchen, wie die der Gelatine, besonders schwer erfolgt. Daß sich gleichgeladene Kolloide kaum umhüllen, scheint mir auch aus der Klärung, die Mastix durch den Zusatz von kolloidalem Schwefelantimon erfährt und die ähnlichen Fälle hervorzugehen. Hier scheint vielmehr eine feinere Verteilung durch den gleichsinnigen Zusatz erzielt worden zu sein. Entgegengesetzt geladene Kolloide werden aber wohl zusammentreten, aus ihrer Vereinigung entstehen größere Komplexe, welche die Ladung des vorherrschenden Kolloides tragen oder im Grenzfall ungeladen sind. Ihre Stabilität wird von ihrer Ladung und ihrer Größe abhängen, am beständigsten gegen Elektrolyte werden kleine Teilchen mit sehr kleiner Ladung sein, weil dann die Zahl der zu sammelnden Teile zur Erlangung der kritischen Größe besonders groß ist.

Bestimmen diese Momente die schützende Kraft entgegengesetzt geladener Kolloide, so wird die Schutzwirkung, welche gleichsinnige Gelatine ausübt, vollständig sein, sobald sie praktisch alle zur Fällung verfügbaren Ionen (die nur einen kleinen Teil aller vorhandenen Ionen bilden) für sich in Anspruch nimmt.

Natürlich bleibt die Fähigkeit, schützende Wirkungen auszuüben, nicht auf Gelatine allein beschränkt, sondern ist allen unechten Kolloiden gemein und sogar Körper wie Methylorange etc., wissen noch eine solche, wenn auch in viel minderem Grad, auszuüben, wie wir es p. 1189 bemerken konnten (vergl. hiezu Zsigmondy, Zeitschr. für analyt. Chem., Bd. 40, p. 697; 1901).

Die fällungsbeschleunigende Wirkung der Gelatine tritt entgegengesetzt geladenen Teilchen gegenüber nur dann deutlich zutage, wenn es sich um gröbere Verteilung der Materie handelt oder wenn größere Mengen Elektrolyt anwesend sind, die selbst aber nicht zur Fällung ausreichen. Auf kolloidale As_2S_3- oder Sb_2S_3-Lösungen kann Gelatine allein nicht fällend wirken; offenbar sind also die resultierenden Teilchen noch zu klein, aber sie sind größer wie die des reinen

Kolloides, das gibt sich in der Trübung, in der Herabsetzung der Fällungsgrenze etc. zu erkennen. Endlich hatten wir gesehen, daß die Reihenfolge des Zusatzes von Wichtigkeit ist, indem die Schutzwirkung verschwindet, wenn einem Kolloide Elektrolyt und entgegengesetzt geladene Gelatine gleichzeitig zugesetzt wird, eine Erscheinung, die in der geringen Diffusionsgeschwindigkeit der Gelatine begründet ist. Es treten die entgegengesetzt geladenen Kolloide zusammen und werden durch Vermittlung des Elektrolyten gefällt, ehe die Gelatine sich in der Lösung verteilen und das andere Kolloid schützen kann.

Eine Eigentümlichkeit verdient noch hervorgehoben zu werden, welche bei Färbeprozessen möglicherweise von großer Bedeutung sein kann, es ist dies die Erscheinung, daß die Leichtigkeit der Fällung, ja die Fällungsgrenze selbst von dem Verhältnisse der Oberfläche zu dem Volumen der kolloidalen Lösung abhängt (einer der vielen schönen Versuche, die Bechold, Neisser und Friedemann in ihrer ersten Mitteilung beschreiben), in dem Sinne zwar, daß die Fällung um so leichter erfolgt, je größer die freie Oberfläche ist. Ihre Erklärung dürfte diese Erscheinung in der Wirkung von Oberflächenkräften finden. So hat neuerdings W. Ramsden[1] gezeigt, daß Suspensionen, Emulsionen etc. durch rein mechanische Wirkungen, wie durch Schütteln (Gasblasen), ausgefällt werden können, daß sich an der freien Oberfläche von Proteidlösungen zähe Oberflächenhäutchen bilden, die abgezogen werden können und sich nachbilden, und daß dies geschieht, so oft der gelöste Stoff die Oberflächenspannung vermindert. Das System strebt aber nach kleinster Oberflächenenergie und so wird die Konzentration in der Oberflächenschicht größer sein wie in dem Reste der Lösung. Diese Ansicht läßt sich gut mit denen vereinen, die Zawidzki[2] auf Grund von Versuchen mit Saponinschaum angestellt hat und bei denen er fand, daß die Schaumblasen Saponin in größerer Konzentration enthalten, wie der Rest der Lösung.

[1] Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 47, p. 336, 1904.
[2] Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 42, p. 612, 1903.

Folgt man dieser Überlegung, so kommt man zu dem Schlusse, daß die Fällungsgrenze, die ja bekanntlich mit der Konzentrationszunahme der Lösung herabgesetzt wird, immer dann mit der Ausbreitung der Lösung abnehmen wird, wenn der »gelöste« Stoff die Oberflächenspannung vermindert. Die Herabsetzung der Fällungsgrenze wäre demnach einer Anreicherung der Oberflächenschichten an Kolloid, also einer Konzentrationszunahme zu verdanken. Hatten wir gesehen, daß eine ganze Reihe von Farbstoffen kolloidähnliche Eigenschaften haben und hat auch die zu färbende Faser in der Regel kolloidartigen Typus, so kann die an derselben dargebotene so große Fläche von maßgebender Bedeutung für den Färbungsvorgang sein.

Daß die Kenntnis der Kolloide auch einiges Licht auf die vielumstrittene Frage nach dem Prinzipe des Färbeprozesses zu werfen berufen sein mag, geht aus einer Abhandlung von W. Biltz[1] schon hervor, vielleicht ist es hier am Platze, noch vorübergehend darauf hinzuweisen, daß die Stoffe, die vornehmlich als Beizen verwendet werden, solche sind, die bei der nachfolgenden Behandlung der Faser in Kolloide übergehen (Tonerdebeizen, Eisenbeizen, Antimonbeizen, Gerbsäurebeizen) und daß sie dazu berufen sind, Farbstoffe zu binden, mit welchen sie bei gleicher Behandlung in wässeriger Lösung Gele bilden. Kolloide färben meist die Faser direkt, sind aber nicht lichtecht, noch reibecht (Biltz), Gele scheinen aber andere Eigenschaften zu besitzen.

Die ununterbrochene Reihe, die von mechanischen Suspensionen zu echten Kolloiden, endlich zu unechten Kolloiden führt, wird aber hier nicht abgebrochen; es reihen sich einerseits Zwischenstufen an, die von unechten Kolloiden zu den Elektrolyten führen, andrerseits gehen unechte Kolloide mit abnehmender Ladung (und eventuell auch abnehmender Größe, doch ist dieser Umstand nur von nebensächlicher Bedeutung) in Lösungen von Nichtelektrolyten über. Nun gibt es aber kaum wirkliche Nichtelektrolyte und es wäre demnach zu erwarten, daß die Ionen dieselbe Wirkung, die sie auf unechte

---

[1] Nachr. der Ges. der Wiss. Göttingen 1904, Heft 1.

Kolloide ausüben, auch Nichtelektrolyten gegenüber, wenngleich in viel schwächerem Grade, bewahren. Und es scheint mir, als bestehe möglicherweise auch eine solche Wirkung auf Nichtelektrolyte und als sei die gegenseitige Löslichkeitsbeeinflussung von Elektrolyten und von Nichtelektrolyten, die Rothmund[1] zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gewählt hat, vielleicht damit in Zusammenhang zu bringen. Nach der Größe ihrer Löslichkeitsbeeinflussung ordnen sich die Anionen bei Rothmund in die Reihe:

Löslichkeitserniedrigung von Phenylthiocarbamid durch:

Sulfat > Carbonat > Acetat > Nitrat,

es ist dieselbe, die wir p. 1192 für die Eiweißfällung vorfanden, die Kationen ordnen sich allerdings anders ein, wie dort, doch ist der Unterschied der Wirkung der Anionen viel größer, wie der der Kationen, die Anionen dürften daher in erster Linie die Größe der Beeinflussung hier bestimmen.

Mit der Abnahme der Teilchengröße bildet sich auch allmählich die Fähigkeit zur Kristallbildung aus. Auch hier scheint aber der Übergang ein allmählicher zu sein, denn auch die Gele unechter Kolloide weisen eine bestimmte Struktur auf, bilden netzartige oder wabenförmige Gebilde von bestimmter Orientierung.[2]

Ist es, soweit ich es beurteilen kann, mit der Molekulartheorie der Kristallbildung (Frankenheim, Bravais, Sohnke) aus Kristallgittern wohl zu vereinen, daß die Kristallbildung ausbleibt, wenn die Abstände im Moleküle denen der Kristallzentren vergleichbar werden; spielen vielleicht die Verunreinigungen durch Mitreißen in den Niederschlag dabei eine entscheidende Rolle, so haben die außerordentlich interessanten Entdeckungen des Amerikaners Loeb[3] über die parthenogenetische Entwicklung mancher Eier durch Ionenwirkung, die derjenigen

[1] Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 33, p. 401, 1900; Zeitschr. für Elektrochemie, VII, 675, 1901; R. u. Wilsmore, Zeitschr. für phys. Chemie, Bd. 40, p. 611, 1902.

[2] Buetschli, Über den Bau quellbarer Körper (1896).

[3] Pflüger's Archiv, Bd. 87, 594 (1901). — Americ. Journ. of physiol., Bd. 6, 411 (1902); Bd. 3 (1899/1900), Bd. 4 (1900/1).

auf Kolloide analog zu sein scheint, die Möglichkeit eröffnet, die Furchung der Eier mit der Strukturveränderung von Kolloiden bis zu gewissem Grad in Beziehung zu setzen.

Für die Kolloidumsetzungen im lebenden Organismus, auf die erfahrungsgemäß die Elektrolytkonzentration, die Temperatur eine maßgebende Rolle spielen, wird es aber von großer Wichtigkeit sein, die elektrischen Eigenschaften der Kolloide, welche ihr Verhalten in so weitgehendem Maße bestimmen, genau kennen zu lernen, den Einfluß, welchen verschiedene Elektrolyte und in verschiedener Konzentration darauf ausüben, zu untersuchen, die gegenseitige Beeinflussung der Kolloide und die Temperaturfunktion einer Prüfung zu unterziehen, denn dies sind die Daten, welche eine systematische Ordnung des Materials ermöglichen.

Über Reihenentwicklungen mehrfachbinärer Formen

von

Emil Waelsch,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Oktober 1904.)

Bekanntlich wird eine doppeltbinäre Form $r_x^m s_y^n$ vermöge der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwicklung[1] nach Polaren ihrer Elementarkomitanten

$$C^{(\varkappa)} = (\overline{rs})^\varkappa = (rs)^\varkappa r_x^{m-\varkappa} s_x^{n-\varkappa}$$

wie folgt entwickelt:

$$r_x^m s_y^n = \Sigma C^{(\varkappa)}_{y^{n-\varkappa}} (xy)^\varkappa (m)_\varkappa (n)_\varkappa / (m+n-\varkappa+1)_\varkappa, \qquad 1)$$

wobei $C^{(\varkappa)}_{y^{n-\varkappa}}$ die $(n-\varkappa)^{\text{te}}$ Polare des Poles y bezüglich der Elementarkomitante $C^{(\varkappa)}$ ist.

Um nun die dreifachbinäre Form $r_x^m s_y^n t_z^p$ in analoger Weise zu entwickeln, wird von Gordan die folgende Methode angegeben. Man multipliziere Gleichung 1) beiderseits mit t_z^p, dann erhält man links die dreifachbinäre Form und rechts Glieder mit den Faktoren

$$C^{(\varkappa)}_{y^{n-\varkappa}} t_z^p = (C^{(\varkappa)} t_z^p)_{y^{n-\varkappa}};$$

nun wird die doppeltbinäre Form $C^{(\varkappa)} t_z^p$ nach Formel 1) entwickelt und dann für den Pol y die $(n-\varkappa)^{\text{te}}$ Polare nach x genommen. Analog wird für mehrfachbinäre Formen vorgegangen.

[1] Siehe Gordan, Vorlesungen über Invarianten, p. 88.

Dieses rekurrente Verfahren wird nun auch im folgenden benützt, um eine independente Reihenentwicklung für mehrfachbinäre Formen abzuleiten. Diese Entwicklung schreitet nach Elementarkomitanten der Grundform fort, die durch mehrfache Überschiebung aus der Grundform abgeleitet werden. Jedes Glied der Entwicklung wird durch Anwendung eines zur betreffenden Elementarkomitante »ähnlichen« Prozesses gefunden.

Als Beispiel wird die Reihenentwicklung einer mehrfachlinearen Form, der drei- und vierfachquadratischen Form,[1] gegeben.

1. Es sei im folgenden

$$a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 = (a\mathfrak{x})$$
$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$$

gesetzt, so daß also der Klammerausdruck seine Bedeutung ändert, je nachdem die in ihm vorkommenden Symbole verschiedenen Alphabeten angehören oder demselben Alphabet entnommen sind. Ferner sei

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = (a\xi) = a, \quad \mathfrak{a}_1\xi_1 + \mathfrak{a}_2\xi_2 = (\mathfrak{a}\xi) = \mathfrak{a} \quad \text{u. s. w.}$$

Es gilt dann vermöge dieser Bezeichnungen nach der obigen Reihenentwicklung für doppeltbinäre Formen

$$f_2 = (a\mathfrak{x})^m (b\mathfrak{y})^n = \Sigma C^{(\varkappa)}_{\mathfrak{y}^{n-\varkappa}} (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^\varkappa c_\varkappa, \tag{1'}$$

wo

$$c_\varkappa = (m)_\varkappa (n)_\varkappa / (m+n+1-\varkappa)_\varkappa$$

und

$$C^{(\varkappa)} = (ab)^\varkappa a^{m-\varkappa} b^{n-\varkappa}$$

also

$$C^{(\varkappa)}_{\mathfrak{y}^{n-\varkappa}} = (ab)^\varkappa (a^{m-\varkappa} b^{n-\varkappa})_{\mathfrak{x}^{m-\varkappa},\, \mathfrak{y}^{n-\varkappa}}.$$

Setzt man nun:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a}_2, \; \mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{b}_2, \; \mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{b}_1,$$

[1] Vergl. bezüglich letzterer Formen Waelsch, Über die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als mehrfachbinäre Formen, diese Sitzungsberichte, p. 1107, wo die entsprechenden Reihenentwicklungen noch durch das rekurrente Verfahren abgeleitet sind. Der dortige Φ-Prozeß ist in der vorliegenden Arbeit als zur Elementarkomitante »ähnlich« bezeichnet.

so wird

$$(a^{m-\varkappa} b^{n-\varkappa})_{\mathfrak{x}^{m-\varkappa},\, \mathfrak{y}^{n-\varkappa}} = (a^{m-\varkappa} b^{n-\varkappa},\, \mathfrak{a}^{m-\varkappa} \mathfrak{b}^{n-\varkappa})^{m+n-2\varkappa},$$

wo der letzte Ausdruck die $(m+n-2\varkappa)^{\text{te}}$ Überschiebung der in der Klammer stehenden Formen in ξ ist. Ferner wird

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{\varkappa} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\varkappa}.$$

Demnach gibt die Gleichung 1') die folgende Gleichung:

$$(a\mathfrak{a})^{m}(b\mathfrak{b})^{n} = \Sigma((a^{m}, b^{n})^{\varkappa}, (\mathfrak{a}^{m}, \mathfrak{b}^{n})^{\varkappa})^{m+n-2\varkappa} c_{\varkappa}. \qquad \text{I)}$$

Diese symmetrische Form der Reihenentwicklung soll nun verwendet werden, um eine Reihenentwicklung von gleicher Gestalt für mehrfachbinäre Formen abzuleiten.

2. Es sei

$$a_{\varkappa 1}\xi_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2}\xi_{\varkappa 2} = (a_{\varkappa}\mathfrak{x}_{\varkappa}), \quad a_{\varkappa 1}\xi_{1} + a_{\varkappa 2}\xi_{2} = a_{\varkappa}$$

und

$$f_{\nu} = (a_1\xi_1)^{n_1}(a_2\xi_2)^{n_2}\ldots(a_{\nu}\xi_{\nu})^{n_{\nu}}$$

eine ν-fachbinäre Form.

Ferner sei

$$A_{\nu} = (a_1 b_1)^{n_1}(a_2 b_2)^{n_2}\ldots(a_{\nu} b_{\nu})^{n_{\nu}},$$

wobei $a_{\varkappa}^{n_{\varkappa}}$, $b_{\varkappa}^{n_{\varkappa}}$ als binäre Formen in ξ aufgefaßt werden können.

Endlich seien die sich aus diesen Formen durch fortgesetzte Überschiebung ergebenden Formen in ξ eingeführt:

$$(a_1^{n_1}, a_2^{n_2})^{\alpha_2} a_3^{n_3})^{\alpha_3} \ldots a_{\nu}^{n_{\nu}})^{\alpha_{\nu}} = (\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu}) \; = (A\xi)^{m} = A$$
$$(b_1^{n_1}, b_2^{n_2})^{\alpha_2} b_3^{n_3})^{\alpha_3} \ldots b_{\nu}^{n_{\nu}})^{\alpha_{\nu}} = (\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu})_b = (B\xi)^{m} = B.$$

Hiebei ist:

$$\alpha_{\varkappa} \gtreqless n_{\varkappa}$$

und, wenn

$$s_{\varkappa} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{\varkappa}, \quad \sigma_{\varkappa} = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{\varkappa}, \quad (\sigma_1 = 0)$$

gesetzt wird:

$$\alpha_{\varkappa} \gtreqless s_{\varkappa-1} - 2\sigma_{\varkappa-1}, \quad m = s_{\nu} - 2\sigma_{\nu}.$$

Es gilt nun der Satz:

»Der Ausdruck A_ν läßt sich entwickeln wie folgt:

$$A_\nu = (a_1 b_1)^{n_1} (a_2 b_2)^{n_2} \ldots (a_\nu b_\nu)^{n_\nu} = \Sigma (AB)^m c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} \qquad \text{II)}$$

mit

$$\ldots_{\alpha_\nu} = \prod_{\lambda=2}^{\nu} (n_\lambda)_{\alpha_\lambda} (s_{\lambda-1} - 2\sigma_{\lambda-1})_{\alpha_\lambda} / (s_\lambda + \alpha_\lambda + 1 - 2\sigma_\lambda)_{\alpha_\lambda}.«$$

Für $\nu = 2$ ist Gleichung II) identisch mit I). Um ihre Allgemeingültigkeit nachzuweisen, sei sie für ν als richtig vorausgesetzt und es werde bewiesen, daß sie auch für $\nu+1$ gilt.

Multipliziert man Gleichung II) mit $(ab)^n$, so erhält man links den Ausdruck $A_{\nu+1}$ und rechts vermöge Gleichung I) eine Summe von Gliedern der Form

$$((A, a^n)^\varkappa, (B, b^n)^\varkappa)^{m+n-2\varkappa} c_\varkappa c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}.$$

Es ist aber

$$(A, a^n)^\varkappa = ((\alpha_2 \ldots \alpha_\nu), a^n)^\varkappa = (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu \varkappa)$$
$$(B, b^n)^\varkappa = ((\beta_2 \ldots \beta_\nu), b^n)^\varkappa = (\beta_2 \ldots \beta_\nu \varkappa)_b,$$

weshalb Gleichung II) richtig ist.

Für die Koeffizienten $c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$ ergibt sich gleichzeitig

$$c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu \varkappa} = c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} c_\varkappa = c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} (m)_\varkappa (n)_\varkappa / (m+n-\varkappa+1)_\varkappa,$$

so daß, wenn $\varkappa = \alpha_{\nu+1}$ gesetzt wird, der obige Ausdruck für $c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$ folgt.

3. Setzt man in A_ν

$$b_{\varkappa 1} = -\xi_{\varkappa 2}, \quad b_{\varkappa 2} = \xi_{\varkappa 1},$$

so erhält man die ν-fachbinäre Form f_ν und aus der obigen Form $B = (B\xi)^m$ die Form

$$(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)_\xi = ((\xi_1 \xi)^{n_1}, (\xi_2 \xi)^{n_2})^{\alpha_2} (\xi_3 \xi)^{n_3})^{\alpha_3} \ldots (\xi_\nu \xi)^{n_\nu})^{\alpha_\nu},$$

so daß sich ergibt:

»Die ν-fachbinäre Form f_ν hat die Entwicklung:

$$f_\nu = (a_1 \xi_1)^{n_1} \ldots (\alpha_\nu \xi_\nu)^{n_\nu} = \Sigma ((\alpha_2 \ldots \alpha_\nu), (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)_\xi)^m c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}. \qquad \text{III)}$$

4. Die Form $A = (A\xi)^m$ soll als **Elementarkomitante der Form** f_ν bezeichnet werden. Sie kann aus f_ν durch sukzessive Anwendung des Polaren- und Ω-Prozesses gefunden werden.

Sei hiezu

$$\eta_{\cdot} = \frac{1}{p}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)$$

der Prozeß der ersten Polare für den Pol ξ bezüglich einer Form p^{ter} Ordnung in η und $\eta_{\cdot}^{s}$ der Prozeß der s^{ten} Polare. Ferner sei

$$\bar{\eta}_{\cdot} = \Omega_{\xi\eta} = \frac{1}{pq}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \eta_1}\right)$$

der Ω-Prozeß, angewendet auf eine Form p^{ter} Ordnung in ξ und q^{ter} Ordnung in η, und $\bar{\eta}_{\cdot}^{s}$ sei dieser Prozeß, s-mal angewendet. Dann ist:

$$A = (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu) = \bar{\xi}_1^{0} \,.\, \xi^{n_1 - 0} \,.\, \bar{\xi}_2^{\alpha_2} \,.\, \xi_2^{n_2 - \alpha_2} \,.\, \bar{\xi}_3^{\alpha_3} \,.\, \xi_3^{n_3 - \alpha_3} \ldots \bar{\xi}_\nu^{\alpha_\nu} \,.\, \xi_\nu^{n_\nu - \alpha_\nu} \,.\, f_\nu,$$

wo die angeschriebenen Prozesse in der Reihenfolge von links nach rechts auszuführen sind.

Diese Form hat die Gestalt:

$$\Sigma c (a_h a_\varkappa)^\rho (a_l a_p)^\sigma \ldots (a_q a_t)^\tau a_u^\alpha \ldots a_z^\omega.$$

Daraus folgt:

$$(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)_\xi = \Sigma c (\xi_h \xi_\varkappa)^\rho (\xi_l \xi_p)^\sigma \ldots (\xi_q \xi_t)^\tau (\xi_u \xi)^\alpha \ldots (\xi_z \xi)^\omega.$$

Demnach ist die Überschiebung

$$((\alpha_2 \ldots \alpha_\nu), (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)_\xi)^m$$

der Entwicklung III) die Summe von Gliedern, welche Faktoren der Gestalt haben:

$$(a_u^\alpha \ldots a_z^\omega, (\xi_u \xi)^\alpha \ldots (\xi_z \xi)^\omega)^{m = \alpha + \ldots + \omega} =$$
$$= (a_u^\alpha \ldots a_z^\omega, (\xi_u \xi)^\alpha)^\alpha (\xi_v \xi)^\beta)^\beta \ldots (\xi_z \xi)^\omega)^\omega.$$

Ist aber

$$\eta_{;} = \frac{1}{p}\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$

die erste Polare η für eine Form p^{ter} Ordnung in ξ und analog $\eta_i;^s$ die s^{te} Polare, so kann der letzte Ausdruck gleich gesetzt werden:

$$\xi_u^{\alpha}; \ldots \xi_z^{\omega}; a_u^{\alpha} \ldots a_z^{\omega}.$$

Wird nun der Prozeß

$$(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu); = \Sigma c(\xi_h \xi_x)^{\rho}(\xi_l \xi_p)^{\sigma} \ldots (\xi_q \xi_t)^{\tau} \xi_u^{\alpha}; \ldots \xi_z^{\omega};$$

eingeführt, der als »ähnlich« zur Form

$$(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu) = \Sigma c(a_h a_x)^{\rho}(a_l a_p)^{\sigma} \ldots (a_q a_t)^{\tau} a_u^{\alpha} \ldots a_z^{\omega},$$

auf die er angewendet wird, bezeichnet werden kann, so folgt:

»Die Form f_ν hat die Entwicklung:

$$f_\nu = \Sigma(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu); (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu) c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu},$$

wo in jedem Gliede rechts auf die Elementarkomitante $A = (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$ der ihr ähnliche Prozeß $(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$; angewendet wird.«

Hiernach hat man für die doppeltbinäre Form:

$$f_2 = (a\xi)^m (b\eta_i)^n = \Sigma(\alpha_2); (\alpha_2) c_{\alpha_2} = \Sigma(\varkappa); (\varkappa) c_\varkappa =$$
$$= \Sigma(\xi\eta_i)^\varkappa \xi;^{m-\varkappa} \eta_i;^{n-\varkappa} (ab)^\varkappa a^{m-\varkappa} b^{n-\varkappa} c_\varkappa,$$

wie bekannt.

5. Die Elementarkomitanten der allgemeinen Form f_ν haben zusammen so viel Koeffizienten als f_ν selbst, etwa N. Denn ist dies der Fall für f_ν, so erhält man durch Multiplikation mit $(a'\xi)^n$ die Form $f_{\nu+1}$, die $N(n+1)$ Koeffizienten besitzt. Die Koeffizienten eines Gliedes von f_ν, das von der Elementarkomitante A herrührt, geben aber, mit $(a'\xi)^n$ multipliziert, $(n+1)$-mal so viel Koeffizienten für $f_{\nu+1}$. Ebenso folgt, daß die vorstehenden Reihenentwicklungen eindeutig sind, wenn die Ordnung der Faktoren $(a_1\xi_1)^{n_1}, \ldots (a_\nu\xi_\nu)^{n_\nu}$ der Form f_ν fixiert ist. Demnach folgt:

»Die Elementarkomitanten $(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$ der allgemeinen ν-fach-binären Form f_ν sind linear unabhängig und enthalten so viel Konstanten als f_ν. Die vorstehenden Reihenentwicklungen der Form f_ν sind eindeutig.«

6. Vereinigt man in Gleichung III) die Form $(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)$ mit den Zahlenfaktoren $c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$ und setzt statt dieser Produkte beliebige Formen $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}\xi)^m$, so folgt:

»Die allgemeine ν-fachbinäre Form ist gegeben durch

$$\Sigma(\mathfrak{A}, (\alpha_2 \ldots \alpha_\nu)_\xi)^m = \Sigma(\alpha_2 \ldots \alpha_\nu); \mathfrak{A},$$

wenn die $\mathfrak{A}$ beliebige Formen sind.«

7. Beispiele. *a)* Ist $n_\varkappa = n$, so gelten nach Art. 2 die Relationen

$$\alpha_\varkappa \gtreqless n, \quad s_\varkappa = \varkappa n;$$

daher ist dann

$$c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} = \prod_{k=2}^{\nu} (n)_{\alpha_\varkappa} ((\varkappa-1)n - 2\sigma_{\varkappa-1})_{\alpha_\varkappa} / (\varkappa n + \alpha_\varkappa + 1 - 2\sigma_\varkappa)\alpha_\varkappa.$$

Ist speziell $n_\varkappa = n = 1$, so liegt eine ν-fachlineare Form vor. Sind dann alle $\alpha_\varkappa = 0$, so ist vermöge der letzten Gleichung $c_{0\ldots 0} = 1$. Sind ferner die $\alpha_\varkappa$ entweder $= 0$ oder $= 1$, so ist

$$c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} = \prod_{\varkappa=2}^{n} \varphi_\varkappa \text{ mit } \varphi_\varkappa = \frac{\varkappa - 1 - 2\sigma_{\varkappa-1}}{\varkappa + 2 - 2\sigma_\varkappa},$$

wo das Produkt nur über diejenigen $\varkappa$ genommen wird, für die $\alpha_\varkappa = 1$ ist.

Es ist aber die Anzahl der Einheiten unter den Zahlen $\alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa$ gleich $\alpha_2 + \ldots + \alpha_\varkappa = \sigma_\varkappa$ und die Anzahl der Nullen gleich $\varkappa - 1 - \sigma_\varkappa$; daher ist $\varkappa - 1 - 2\sigma_\varkappa = \delta_\varkappa$ die Differenz dieser Anzahlen.

Für $\alpha_\varkappa = 1$ hat man weiter $\sigma_\varkappa = \sigma_{\varkappa-1} + 1$ oder $\delta_\varkappa = \delta_{\varkappa-1} - 1$, woraus folgt:

$$\varphi_\varkappa = \frac{\delta_{\varkappa-1}+1}{\delta_\varkappa+3} = \frac{\delta_\varkappa+2}{\delta_\varkappa+3}.$$

Wenn nun p der kleinste der Indices der $\alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ ist, für den $\alpha_p = 1$ ist, so ist:

$$\delta_p = (p-2) - 1 = p - 3.$$

Und wenn α_q, α_r zwei in $\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ aufeinanderfolgende Einheiten sind, so ist:

$$\delta_r = \delta_q + (r-q-1) - 1 = \delta_q + r - q - 2.$$

Wenn daher schließlich $\alpha_p, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Einheiten in $\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ sind, so ist:

$$\delta_p = p-3,\ \delta_{p_1} = p_1-5,\ \delta_{p_2} = p_2-7, \ldots$$

Demnach folgt:

$$c_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} = \frac{p-1}{p}\,\frac{p_1-3}{p_1}\,\frac{p_2-5}{p_2}\ldots$$

Für $\nu = 2, 3, 4$ hat man daher:

Die Form $(a\xi)(b\eta)$ hat die Elementarkomitanten:

$$(\alpha_2)^m:\quad (0)^2 = ab;\quad (1)^0 = (ab)$$

mit den respektiven Zahlenkoeffizienten:

$$c_{\alpha_2}:\quad 1;\quad {}^1/_2.$$

Die Form $(a\xi)(b\eta)(c\zeta)$ hat die Elementarkomitanten $(\alpha_2\alpha_3)^m$:

$$(00)^3 = abc;\quad (01)^1 = {}^1/_2[(ac)_,(bc)_,],[1]\quad (10)^1 = (ab)_,$$

mit den Koeffizienten $c_{\alpha_2\alpha_3}$:

$$1;\quad {}^2/_3,\quad {}^1/_2.$$

Die Form $(a\xi)(b\eta)(c\zeta)(d\omega)$ hat $(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m$:

$$(000)^4 = abcd;\quad (001)^2 = {}^1/_3[(ad)_,(bd)_,(cd)_,]$$
$$(010)^2 = {}^1/_2[(ab)_,(bc)_,],\quad (100)^2 = (ab)_,;\quad (101)^0 = (ab)(cd)$$

mit $c_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$:

$$1;\ {}^3/_4,\ {}^2/_3,\ {}^1/_2;\ {}^1/_8.$$

b) Die dreifachquadratische Form[2] $(a\xi)^2(b\eta)^2(c\zeta)^2$ hat die Elementarkomitanten $(\alpha_2\alpha_3)^m$:

$$(00)^6 = a^2b^2c^2;\ (01)^4 = {}^1/_2[(ac)_,(bc)_,],$$
$$(10)^4 = (ab)_,;\quad (02)^2 = {}^1/_6[(ac)_,^2(bc)_,^2 4(ac)(bc)_,],$$
$$(20)^2 = (ab)_,^2,\quad (11)^2 = {}^1/_2(ab)[(ac)_,(bc)_,];\ (12)^0 = (ab)(ac)(bc)$$

[1] Hier und im folgenden soll der hinter einem Klammerfaktor gesetzte Beistrich andeuten, daß das Produkt, zu dem ersterer gehört, durch Hinzufügung von Faktoren erster Art zu unsymbolischer Bedeutung ergänzt und zu dem folgenden Produkt addiert werden soll. Vergl. l. c., p. 1110.

[2] Vergl. l. c., p. 1112.

mit den Koeffizienten $c_{\alpha_2\alpha_3}$:

$$1;\ {}^4/_3,\ 1;\ {}^3/_5,\ {}^1/_3,\ 1;\ {}^1/_3.$$

c) Für die vierfachquadratische Form[1] $(a\xi)^2(b\eta)^2(c\zeta)^2(d\omega)^2$ ergeben sich die Elementarkomitanten $(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m$:

$$(000)^8 = a^2b^2c^2d^2;$$

$$(001)^6 = {}^1/_3[(ad)_{,}(bd)_{,}(cd)_{,}],\ (010)^6 = {}^1/_2[(ac)_{,}(bc)_{,}],$$
$$(100)^6 = (ab)_{,};$$

$$(200)^4 = (ab)^2_{,}(020)^4 = {}^1/_6[(ac)^2_{,}(bc)^2_{,}4(ac)(bc)_{,}],$$

$$(002)^4 = {}^1/_{15}[(ad)^2_{,}(bd)^2_{,}(cd)^2_{,}4(ad)(bd)_{,}4(bd)(cd)_{,}4(cd)(ad)_{,}],$$

$$(011)^4 = {}^1/_8[(ac)((ad)_{,}(cd)_{,}2(bd)_{,})+(bc)((bd)_{,}(cd)_{,}2(ad)_{,})],$$

$$(101)^4 = {}^1/_4(ab)[(ad)_{,}(bd)_{,}2(cd)_{,}],\ (110)^4 = {}^1/_2(ab)[(ac)_{,}(bc)_{,}];$$

$$(012)^2 = {}^1/_{12}[(ac)((ad)(cd)_{,}(bd)^2_{,}2(bd)(cd)_{,}2(ad)(bd)_{,})+$$
$$(bd)((bd)(cd)_{,}(ad)^2_{,}2(ad)(cd)_{,}2(bd)(ad)_{,})]$$

$$(021)^2 = {}^1/_6[(ac)(bd)((ac)_{,}2(bc)_{,})+(bc)(ad)((bc)_{,}2(ac)_{,})],$$

$$(102)^2 = {}^1/_6(ab)[(ad)(bd)_{,}(cd)^2_{,}2(ad)(cd)_{,}2(bd)(cd)_{,}]$$

$$(210)^2 = (ab)^2(cd)_{,},(120)^2 = (ab)(ac)(bc)_{,}$$

$$(111)^2 = {}^1/_4(ab)[(ac)(bd)_{,}(ac)(cd)_{,}(bc)(ad)_{,}(bc)(cd)_{,}];$$

$$(022)^0 = {}^1/_6[(ac)^2(bd)^2_{,}(bc)^2(ad)^2_{,}4(ac)(bc)(ad)(bd)],$$

$$(202)^0 = (ab)^2(cd)^2,\ (112)^0 = {}^1/_2(ab)(cd)[(ac)(bd)_{,}(bc)(ad)].$$

Die respektiven Zahlenkoeffizienten sind:

$$1;\ {}^3/_2,\ {}^4/_3,\ 1;\ {}^1/_3,\ {}^3/_5,\ {}^5/_7,\ {}^{16}/_9,\ {}^4/_3,\ 1;$$
$${}^4/_3,\ {}^3/_5,\ {}^3/_5,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3,\ 1;\ {}^1/_5,\ {}^1/_9,\ {}^1/_3.$$

[1] Vergl. l. c., p. 1113.

Versuche über Totalreflexion und deren Anwendung

von

E. Mach, w. M. k. Akad., und **L. Mach**.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Oktober 1904.)

1. Die Beobachtungen, welche Einer von uns vor vielen Jahren mit G. v. Osnobischin[1] über anomale Dispersion, und nachher mit B. Brauner[2] über Fluoreszenz angestellt hat, haben zu eigentümlichen Versuchen über Totalreflexion geführt, von welchen später nur ein Teil näher beschrieben worden ist.[3] Dieser letztere Teil bezieht sich auf die Fixierung der Brechungsexponenten der monochromatischen Lichter durch Totalreflexion. Die Totalreflexion kann aber auch benutzt werden zur Begrenzung des beleuchtenden oder zu beobachtenden Lichtes durch bestimmte Wellenlängen, welches Ziel eben durch die Beobachtungen über Fluoreszenz nahegelegt wurde. Endlich kann durch Totalreflexion auch eine ferne ausgedehnte Lichtquelle räumlich begrenzt werden. Was sich auf den zweiten und dritten Punkt bezieht, soll hier kurz besprochen werden.

2. Das einfachste und bekannteste Verfahren zur Beobachtung der Fluoreszenz besteht darin, daß man den fluoreszierenden, etwa auf Papier aufgetragenen Körper durch ein

[1] Anzeiger der k. Akademie, 1875, X.

[2] Anzeiger der k. Akademie, 1877, XIX.

[3] E. Mach und J. Arbes, Einige Versuche über totale Reflexion und anomale Dispersion. Diese Sitzungsber., Abt. IIa., Bd. XCII, Juli 1885.

blaues Glas mit Sonnenlicht beleuchtet und durch ein gelbes Glas betrachtet. Das Papier, welches nur das vom blauen Glase durchgelassene Licht zurücksendet, erscheint durch das gelbe Glas, welches dieses Licht nicht durchläßt, dunkel, während der fluoreszierende Körper (z. B. Baryum-Platin-Cyanür) in dem durch Umwandlung entstandenen Lichte größerer Wellenlänge erstrahlt. Um eine bessere Auslese und eine schärfere Begrenzung der farbigen Bestandteile des Lichtes zu erzielen, als dies durch farbige, absorbierende Glasschirme möglich ist, kann man folgendes Verfahren verwenden.

Das volle Sonnenlicht fällt auf ein Paar rechtwinkelige, mit den Hypotenusenflächen aneinandergelegte Reflexionsprismen aus Crownglas. Durch allmähliche Vergrößerung des Incidenzwinkels an der Luftschichte zwischen den Hypotenusenflächen wird zuerst das violette, zuletzt das rote Licht total reflektiert, so daß das Spektrum des durchgelassenen Lichtes beliebig weit vom violetten Ende aus abgeschnitten erscheint. Eine ähnliche Kombination von Flintprismen, welche eine dünne, reflektierende Schichte von Cassiaöl zwischen sich faßt, schneidet vermöge der Dispersionsverhältnisse das Spektrum des hindurchgehenden Lichtes vom roten Ende aus beliebig weit ab.[1] Beleuchtet man nun durch die zweite Kombination den fluoreszierenden Körper, während man durch die erste Kombination beobachtet, und zwar bei solcher Einstellung, daß die von beiden Systemen durchgelassenen Lichter sich eben zu einem vollen Spektrum ergänzen, so zeigt sich, auch bei schwacher Fluoreszenz, die dem Stokes'schen Gesetz entsprechende Umwandlung. Beleuchtung durch das erste und Beobachtung durch das zweite System ist umgekehrt anzuwenden, wenn es sich darum handelt, die von Lommel behauptete, dem Stokes'schen Gesetze widersprechende Umwandlung nachzuweisen.

Um nicht an zu spezielle Dispersionsverhältnisse gebunden zu sein und zugleich weiteren Spielraum sowie größere Präzision der Einstellung der Prismen zu gewinnen, muß man das Verfahren modifizieren. Es sei Σ_1 (Fig. 1) die Fensterladen-

[1] Siehe die Fußnoten 2 und 3 auf S. 1219.

spalte in der Brennweite einer achromatischen Linse L_1, S_1 ein Spektralprisma, aus welchem die roten Strahlen nach -----, die violetten nach —— austreten, R_1 eine Crownglasprismenkombination, welche bei der durch den Pfeil angezeigten Drehung vom violetten Ende aus löscht, R_2 eine zweite Crownglasprismenkombination, welche, wie leicht ersichtlich, bei der bezeichneten Orientierung und Drehung umgekehrt wirkt, S_2 ein S_1 vollkommen gleiches, aber gegen S_1 um 180° gedrehtes Spektralprisma, das die Dispersion wieder aufhebt, und endlich L_2 eine achromatische Linse, in deren Brennweite das Bild Σ_2 von Σ_1 durch jene Strahlen gebildet wird, welchen die Anordnung noch den Durchgang gestattet. Schaltet man S_2 aus, so erscheint statt des Spaltenbildes Σ_2 ein Spektrum, das durch Einstellung von R_1 und R_2 auf einen beliebigen, beliebig schmalen, farbigen Teil beschränkt oder ganz gelöscht werden kann.[1]

Entfernt man aus der Anordnung Fig. 1 das Glied R_1, läßt man Σ_2 auf einen Papierschirm P fallen, so kann Σ_2 in einem Spiegelchen M (Fig. 2) durch die Anordnung Fig. 1 mit fehlendem R_2 betrachtet werden. Hiebei bringt man das Auge in das Bild Σ_3, Fig. 2, oder ergänzt die Linse L_2' durch ein Okular zu einem Fernrohre. Durch Drehung von R_1 löscht man nun alles Licht, welches noch hindurchgeht. Sobald aber das Papier P weggezogen und der in Σ_2 befindliche, dem Stokesschen Gesetze gehorchende Körper F bloßgelegt wird, leuchtet dieser mächtig auf. Um Fluoreszenz wahrzunehmen, welche dem Stokes'schen Gesetze widerspricht, hat man in der Anordnung, welche im zweiten Teil ausführlich durch Fig. 2 dargestellt ist, einfach R_1 mit R_2 zu vertauschen.

Größere Lichtintensität, aber weniger genaue chromatische Begrenzung der Beleuchtung ergibt sich durch ausgiebige

[1] In unseren schematischen Figuren sind die Schirme zur Abhaltung des fremden Lichtes und die Asphaltierung der nichtbenützten Prismenflächen nicht angedeutet; auch auf die wirkliche Größe der Ablenkungen ist keine Rücksicht genommen. Die feinere Einstellung der Prismen fordert selbstverständlich die Anwendung von Mikrometerschrauben. Auch die selbstverständlichen Vorkehrungen zur Vermeidung störender Interferenzstreifen an den total reflektierenden Flächen sind nicht besonders erwähnt. Ein sehr guter Heliostatenspiegel ist für alle beschriebenen Versuche unentbehrlich.

Verbreiterung der Spalte Σ_1 (Fig. 1) und Beseitigung der Linse L_1. Es tritt nun das volle Sonnenlicht ein, aber auch der Gesichtswinkel, unter dem die Sonne erscheint (rund $^1/_2{}^\circ$), macht sich nun in störender Weise geltend. Um diesen Fall bequem zu

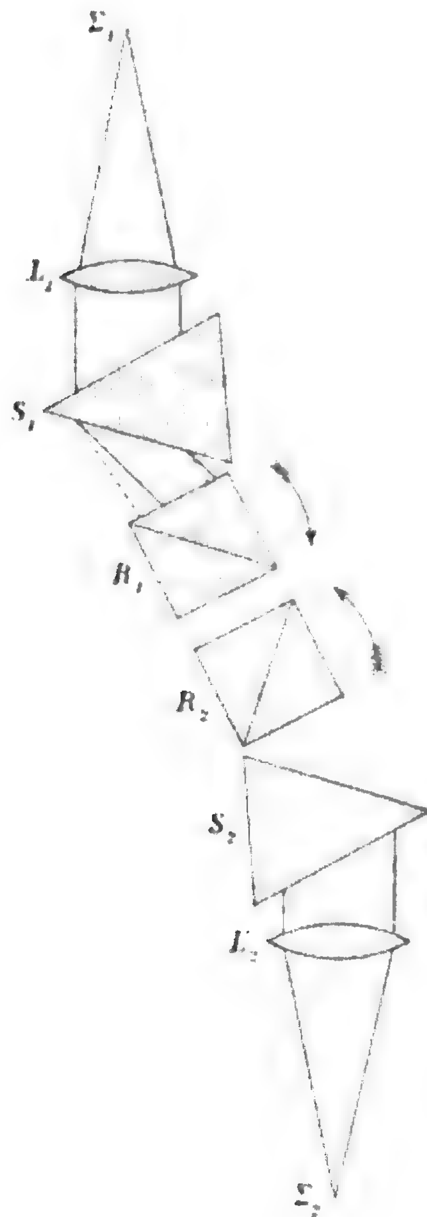


Fig. 1.

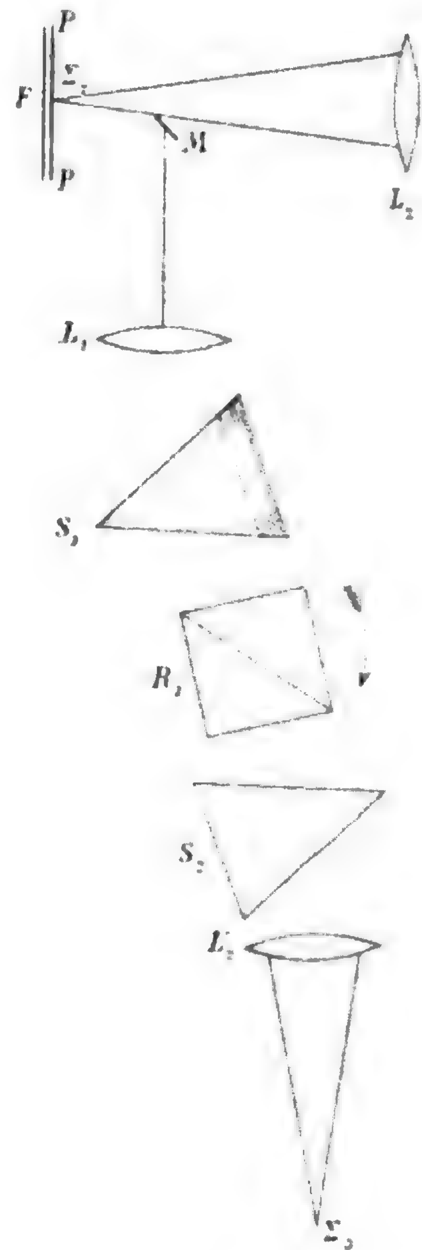


Fig. 2.

studieren, verwenden wir statt L_2 ein Fernrohrobjektiv von 20 *cm* Öffnung und 3 *m* Brennweite, welches ein Sonnenbild von 2·5 *cm* Durchmesser entwirft. Dieses Bild fangen wir mit einem sehr schmalen Papierstreifen oder auf einem weißen Faden auf, der einen horizontalen Durchmesser desselben bildet, und analysieren es durch ein Okularprisma mit gerader

Durchsicht und vertikaler Dispersion vor einem dunklen Grunde. Ist z. B. in Fig. 3 das Spektrum dargestellt, so sehen wir bei Drehung von R_1 (Fig. 1) im Pfeilsinne die Löschung im Violett beginnen und die schiefe Abgrenzung $g_1 g_1$ gegen das dunkle Feld nach oben fortschreiten. Die angezeigte Drehung von R_2 löscht vom Rot aus, wobei die stärker gegen den Horizont geneigte Grenze zwischen Hell und Dunkel, $g_2 g_2$, nach unten sich verschiebt. Der spektrale Keil, welcher übrig bleibt, wenn die beiden Grenzen sich zu schneiden beginnen, macht die kleinste chromatische Inhomogenität ersichtlich, welche mit der Erleuchtung des ganzen Sonnenbildes verträglich ist.

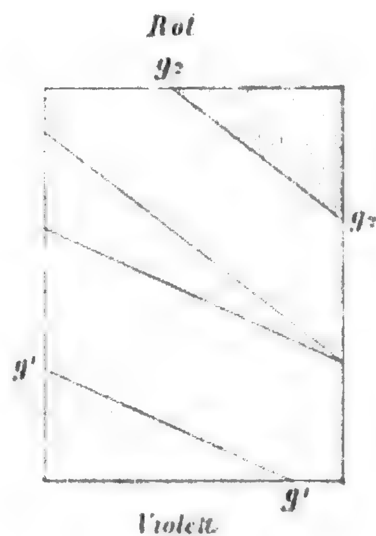


Fig. 3.

Derselbe weiße Strahl liefert, durch das Spektralprisma S_1 (Fig. 1) tretend, einen äußersten roten und einen äußersten violetten Strahl, welche miteinander den Winkel α bilden. Dagegen sei β der Unterschied der Incidenzwinkel der Totalreflexion dieser beiden Strahlen in den Crownglasprismen. Die Drehung, die R_1 ausführen muß, um von der Löschung des violetten bis zu jener des äußersten roten Anteiles desselben weißen Strahles fortzuschreiten, ist dann $\alpha + \beta$. Für R_2 führt hingegen die gegensinnige Drehung $\alpha - \beta$ von der Löschung des roten zu jener des violetten Anteiles über. Da α viel größer ist als β, hat man hiemit eine feinere Einstellung als nach dem ursprünglichen Verfahren. Denken wir uns nun alle Prismen feststehend, und umgekehrt den Hauptstrahl, welcher durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs L_2 nach einem Punkte des horizontalen Durchmessers des Sonnenbildes führt, der also das in diesem Punkte vereinigte Parallelstrahlenbündel repräsentiert und mit demselben in den Prismen dasselbe Schicksal erfährt, horizontal herumgedreht. Wir sehen bei einer Drehung beide Löschungsgrenzen in demselben Sinne, z. B. von unten nach oben, von Violett zu Rot sich verschieben.

Da aber wegen R_1 die Grenze bei der Drehung $\alpha+\beta$, wegen R_2 aber schon bei der Drehung $\alpha-\beta$ durch das ganze Spektrum läuft, ist die letztere Grenzlinie steiler. Von der relativen Stellung von R_1 gegen R_2 hängt es ab, wieviel Licht zwischen beiden Grenzen stehen bleibt. Da der Gesichtswinkel der Sonne viel kleiner ist als der Abweichungswinkel der äußersten aus dem Spektralprisma tretenden Strahlen, so zeigt das Sonnenbild nur einen Teil der Erscheinung auf einmal.

Bei Anwendung starker, durch Benützung mehrerer Prismen erzielter Dispersionen, nähern sich die beiden Grenzlinien $g_1 g_1$ und $g_2 g_2$ sehr der Horizontalen, also der Richtung der Fraunhofer'schen Linien. Man kann dann das Sonnenbild fast monochromatisch erhalten, d. h. bei großen Prismenöffnungen intensive monochromatische Beleuchtung herstellen.

3. Grimaldi[1] ließ durch zwei kleine, nebeneinander liegende Fensterladenöffnungen Sonnenlicht eintreten und glaubte wahrzunehmen, daß gewisse, von beiden Lichtquellen beleuchtete Stellen dunkler erscheinen, als wenn dieselben nur von einer Öffnung erleuchtet werden. Er schloß hieraus, daß Licht zu Licht hinzugebracht auch Dunkelheit erzeugen kann.[2] Nach den Dimensionen seiner Zeichnung kann man mit Sicherheit annehmen, daß Grimaldi in diesem Falle keine Interferenz gesehen hat, und daß er überdies durch eine Kontrasterscheinung getäuscht worden ist,[3] unbeschadet der Richtigkeit und Wichtigkeit des von ihm zuerst ausgesprochenen Satzes. Eine kleine quantitative Modifikation des Grimaldischen Versuches genügt aber, um die Interferenz deutlich hervortreten zu lassen. Radiert man in die Versilberung einer die Fensterladenspalte verschließenden Glasplatte mit der Teilmaschine eine sehr feine Linie, so zeigt das Sonnenlicht auf einem Schirm das bekannte Beugungsbild einer Spalte. Bei hinreichend starker Beugung durch die sehr enge Spalte kann

[1] Grimaldi, Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride. Bologna 1665, p. 187, Fig. 5.

[2] L. c. Prop. XXII. Lumen aliquando per sui communicationem reddit obscuriorem superficiem corporis aliunde prius illustratum.

[3] Vergl. die Fußnote 3 auf S. 1219 und 2 auf S. 1229.

nämlich der beträchtliche Gesichtswinkel, unter dem die Sonne erscheint, nicht mehr wesentlich stören. Bei 70 *cm* Schirmdistanz war das mittlere weiße Beugungsfeld ungefähr 4 *cm* breit.[1] Zieht man statt einer Linie deren zwei gleiche, parallele, in einem Abstande von $^1/_{32}$ *mm*, so bleibt das Beugungsbild dasselbe, nur daß in dem mittleren weißen Felde zwei deutliche sekundäre Minima sichtbar werden. Bei $^1/_{16}$ *mm* Spaltendistanz zählen wir fünf deutliche Minima, bei $^1/_8$ *mm* 11, bei $^1/_4$ *mm* 23 dunklere Streifen.

Je größer die Spaltendistanz, desto zahlreicher, aber auch desto matter werden die Streifen, so daß man zur leichteren Zählung die Schirmdistanz vergrößern muß. Bei $^1/_2$ *mm* Spaltendistanz konnten wir ohne weitere Veranstaltung keine sekundären Minima mehr sehen.

Daß für die Qualität der Erscheinung die Spaltendistanz nicht von Belang wäre, wenn die Sonne als hinreichend intensiv leuchtender, punktförmiger Fixstern erscheinen würde, wird niemand bezweifeln. Alle Strahlen des die Spalten treffenden Parallelstrahlenbündels wären ja dann, als von einem leuchtenden Punkte herrührend, kohärent. Von jedem Punkte der ausgedehnt erscheinenden Sonne rührt nun ein Parallelbündel von anderer Richtung her, dessen Wellenebene auf dieser Richtung senkrecht steht, dessen durch beide Spalten passierende Anteile also in der Spaltenebene einen von der Richtung abhängigen Gangunterschied aufweisen, so daß jedes Parallelbündel seine Minima gleicher Ordnung nach einer anderen Richtung auf den Schirm oder in die Fokalebene des Beobachtungsfernrohres wirft. Da nun die Lichter verschiedener Richtung untereinander inkohärent sind, verwischen sich notwendig die sekundären Minima desto mehr, je mehr bei gleichem Gesichtswinkel der Lichtquelle die Spaltendistanz wächst.

Die Totalreflexion gibt ein Mittel an die Hand, ein Parallelbündel aus dem von einer fernen ausgedehnten Lichtquelle

---

[1] Die Angabe der Breite dieses Feldes ist natürlich bei einer polychromatischen Erscheinung etwas willkürlich. Diese Breite ist desto größer, je enger die radierte Spalte ausfällt.

ausgestrahlten Licht auszusieben oder die ferne, unzugängliche Lichtquelle einzuschränken. Läßt man Sonnenlicht durch eine größere Fensterladenöffnung auf eine Kombination von Crownglas-Reflexionsprismen fallen und entwirft durch ein Fernrohrobjektiv größerer Brennweite mit diesem Licht ein Sonnenbild, so kann man durch passende Drehung der Prismenkombination einen beliebigen Teil des Sonnenbildes, z. B. von rechts her, abschneiden. Der übrigbleibende Teil des Bildes ist von dem gelöschten (schwarzen) Teil aus bekannten Gründen durch einen tiefroten Saum getrennt. Vor der völligen Löschung des ganzen Bildes bleibt zuletzt als Rest noch ein tiefroter Meniscus übrig. Löscht man das Sonnenbild von rechts her etwa zur Hälfte, so kann man durch eine zweite in den Lichtweg gestellte Kombination, welche nach Form und Orientierung das Spiegelbild der ersten in Bezug auf die Vertikalebene durch die Richtung des einfallenden Lichtes ist, fast die andere Hälfte löschen. Es bleibt dann vor dem völligen Verlöschen des Sonnenbildes von diesem nur eine feine, rote Linie stehen.

Indem wir uns dieses Strahlensiebes bedienten, konnten wir die sekundären Minima des in die versilberte Glasplatte radierten Spaltenpaares auch bei Spaltendistanzen mit voller Deutlichkeit wahrnehmen, bei welchen dieselben sonst verschwinden. Die beiden Prismenpaare wurden hiebei vor die Glassilberplatte in das volle Sonnenlicht gestellt. Noch ein Spaltenpaar von $^1/_2$ *mm* Distanz zeigte, besonders mit der Lupe in Fresnel'scher Weise beobachtet, bei möglichster Einschränkung der Sonne, die sekundären Minima und Maxima als sehr schöne und deutliche, tiefschwarze und rote, vertikale Streifen. Ließ man etwas mehr Raum zwischen den beiden Reflexionsgrenzen, so sah man die sekundären Streifen als abwechselnd rote und gelbe Bänder. Die volle Übersicht über den hier stattfindenden Vorgang eröffnet folgendes Verfahren.

Man setzt vor die Fresnel'sche Lupe eine horizontale, die Streifen senkrecht durchschneidende Spektralspalte und löst das Bild durch ein geradsichtiges Okularprisma so auf, daß etwa das Violett unten, das Rot oben zu liegen kommt. Ein vollkommenes Interferenzbild würde unter diesen Umständen fächerförmig nach unten im Violett konvergierende Streifen

darbieten. Sind nun die beiden einengenden Grenzen der Totalreflexion noch etwas weiter voneinander, so sieht man nur ein glattes Spektrum. Bei genügender Annäherung der Grenzen trennen sich die Interferenzstreifen zuerst im Violett; bei weiterer Annäherung steigt die Trennung allmählich bis zum Rot auf, wobei aber das Spektrum zugleich vom brechbareren Ende aus überhaupt erlischt. Der leuchtende Streifen der Sonne, welchen die Grenzen der Totalreflexion zwischen sich fassen, ist nämlich nicht überall chromatisch gleichwertig. Nur die größte Wellenlänge strahlt von der ganzen Breite des Streifens aus, während mit der Verkürzung der Wellenlänge die Strahlung auf einen immer schmäleren Streifen gegen die Mittellinie des leuchtenden Teiles sich zurückzieht. Bei Annäherung der Reflexionsgrenzen aneinander fallen also zuerst die kürzesten Wellenlängen in der Mitte ganz aus; zuletzt bleibt das äußerste und schwächste Rot allein übrig. Dies ist auch der Grund, warum diese Siebversuche mit radierten Spalten sich nicht weit über $1/_2$ *mm* Spaltendistanz mit Erfolg fortführen lassen.

Will man weiter gelangen, so muß man für die Erhaltung einer ausgiebigen Lichtintensität, in diesem Fall also für Erhaltung der chromatischen Integrität, sorgen, was durch Achromatisierung der Grenze der Totalreflexion erreicht wird. Gelangen die Grenzstrahlen des sichtbaren Spektrums unter einem Richtungsunterschied in eine reflektierende Prismenkombination, welcher dem Sinn und der Größe nach dem Unterschiede der Incidenzwinkel der Totalreflexion für dieselben Strahlen gleich ist, so entspricht dies dem Spezialfall $\alpha = \beta$ der früheren Betrachtung. Die Prismenkombination löscht dann alle farbigen Strahlen bei derselben Stellung. Um dies praktisch zu erreichen, läßt man das von einer Spalte Σ_1 (Fig. 1) ausgehende Sonnenlicht auf eine um die Brennweite abstehende Linse L_1, dann auf ein Crownglas-Winkelprisma S_1 von 45° brechendem Winkel, endlich auf eine Prismenkombination R_2 und eine Linse L_2 fallen, welche in ihrer Fokalebene ein Spektrum entwirft.

Da die Farbenzerstreuung durch kleine Drehungen von S_1 sich recht beträchtlich variieren läßt, so findet man leicht

eine Stellung, bei welcher durch Drehung von R_2 das ganze Spektrum auf einmal gelöscht wird. Ein zwischen R_2 und L_2 eingeschaltetes Crownglasprisma S_2, welches S_1 gleich, aber um 180° gegen letzteres gedreht ist, liefert ein weißes Spaltenbild Σ_2, das auch beim Auslöschen durch Drehung von R_2 ungefärbt bleibt. Die ganze Prismenkombination ist nun für das dem Hauptstrahl durch den optischen Mittelpunkt von L_1 gleichgerichtete Parallelstrahlenbündel achromatisiert. Diese Eigenschaft verbleibt aber der Anordnung auch für alle Parallelbündel, welche mit dem ersteren kleine Winkel bilden, also z. B. für alle von der Sonne ausgehenden Strahlen.



Fig. 4.

Eine achromatische Anordnung S_1RS_2 (Fig. 4), ohne Linsen, zeigt in der durch den Pfeil P angedeuteten Durchsicht bei der Drehung von R oder auch bei Drehung der ganzen Anordnung ein Abschneiden der Sonne von links her mit einer vollkommen schwarzen Grenze. Fügt man noch eine Anordnung $S_1'R'S_2'$ hinzu, welche in allen Stücken das Spiegelbild der erstgenannten in Bezug auf die Vertikalebene durch die Einfallsrichtung des Lichtes ist, so schneidet dieselbe von rechts her ab. Das durch beide Anordnungen hindurchgeführte, auf ein Fernrohrobjektiv geleitete Licht kann die Sonne als feine, weiße, vertikale Linie abbilden. Die Aussiebung des Lichtes ist jetzt recht vollkommen.

In Bezug auf die Justierung jeder einzelnen der beschriebenen Anordnungen ist noch zu bemerken, daß ein zurückbleibender schmaler, farbiger, roter oder blauer Grenzsaum auf zu kleine, beziehungsweise zu große Farbenzerstreuung von S_1 oder S_1' deutet ($\alpha \lesseqgtr \beta$). Das Licht muß aus einer und daher auch aus beiden Anordnungen nach derselben Richtung aus-

treten, wie das direkt einfallende Licht. Kompensieren sich S_1 und S_2 oder S_1' und S_2' nicht, so ist das Sonnenbild nicht kreisrund, sondern elliptisch und farbig gesäumt, tritt auch seitwärts von der Stelle auf, an welcher es durch das direkte Licht vom Fernrohrobjektiv entworfen wird.

Obwohl die Intensität des zwischen zwei Grenzen der Totalreflexion hindurchgelassenen Lichtes für unsere Versuche ausreichend ist, findet doch eine beträchtliche Schwächung, entsprechend der Annäherung der Grenzen aneinander, statt. Es sei in (Fig. 5, 1) *mno* die Intensitätskurve des reflektierten Lichtes in der Nähe der Grenze *n* der Totalreflexion schematisch dargestellt, wobei nach *aa* die Incidenzwinkel als Abszissen

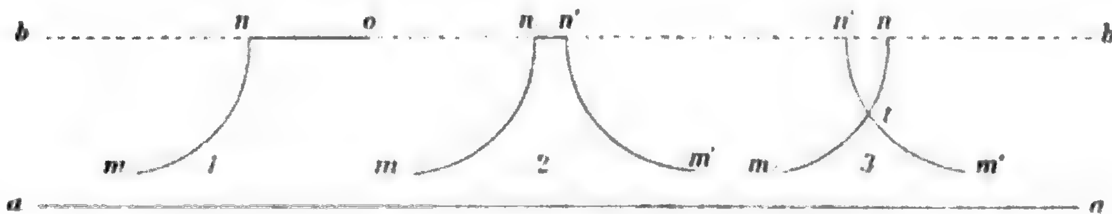


Fig. 5.

aufgetragen sind. Dann ist durch *mno* auch die Intensität des ergänzenden durchgelassenen Lichtes gegeben, aber auf die Abszisse *bb* bezogen und die Ordinaten nach unten gezählt. Nähern sich zwei Grenzen der Totalreflexion *n* und *n'* von verschiedenen Seiten, so bedingt dies für das reflektierte Licht die Intensitätskurve *mnn'm'* auf *aa* bezogen (Fig. 5, *2*), für das durchgelassene Licht aber *n'tn* auf *bb* bezogen (Fig. 5, *3*). Die Intensität ist also im zweiten Falle viel geringer, dagegen der Kontrast gegen die absolute Dunkelheit der Umgebung viel größer als im ersten Falle. Selbst die nach dem hier benützten Verfahren achromatisierte Grenze der Totalreflexion, und noch verdeutlicht durch mehrmalige Reflexion,[1] ist nur entsprechend einem eigentümlichen Kontrastgesetze[2] wahrzunehmen. Der

[1] Vergl. die in Fußnote 3, S. 1219, zitierte Abhandlung.

[2] Vergl. die Abhandlungen von E. Mach über die wechselseitige Beeinflussung benachbarter Netzhautstellen. Diese Sitzungsber., Bd. LII, 1865; Bd. LIV, 1866; LVII, 1868, und die in Fußnote 3, S. 1219, genannte Abhandlung.

bedeutende Unterschied der Intensität der Lichter zu beiden Seiten der Grenze ist an dem projizierten Sonnenbilde zwar deutlich zu sehen, ist aber wegen des kontinuierlichen Überganges gar nicht so sehr auffallend. Wir benützen deshalb bei dem folgenden Versuche nur das durchgelassene (gebrochene) Licht.

Das volle Sonnenlicht durchdringe, ohne Vermittlung einer Linse, die Prismenanordnung $S_1 R S_2 S_1' R' S_2'$ und falle dann auf das unmittelbar folgende Fernrohrobjektiv von 3 *m* Brennweite. In der Fokalebene entsteht ein Sonnenbild, das wir durch entsprechende Prismendrehungen auf eine schmale, weiße, vertikale Linie einengen. Setzen wir zwischen die Prismenanordnung und das Objektiv einen Schirm mit einem engen Spaltenpaar von 3 *mm* Spaltendistanz, so zeigen sich vollkommen deutlich die sekundären Minima. Die Erscheinung ist so scharf und klar, daß man annehmen muß, der Versuch lasse sich noch viel weiter treiben. Bei Bedeckung der einen Spalte verschwinden, bei Anwendung des Jamin'schen Kompensators vor dem Spaltenpaare verschieben sich die sekundären Minima.

Das volle Sonnenlicht, auf einen Doppelspaltenschirm von 3 *mm* Spaltendistanz einfallend, würde natürlich niemals sichtbare Interferenz geben. Die von beiden Spalten ausgehenden Bündel würden sich scheinbar wie inkohärent verhalten, obgleich dieselben nur pseudo-inkohärent sind, da sie aus lauter kohärenten Komponentenpaaren gleicher Richtung, jedoch von mit der Richtung wechselndem Gangunterschiede bestehen. Aber auch hintereinandergesetzte kongruente Spaltenpaare könnten die passende Aussiebung eines parallelen Komponentenpaares nicht bewirken. Denn, was durch Einschränkung des Gesichtswinkels der Sonne, durch die Enge der Spalten und durch die Distanz der Spaltenschirme gewonnen wird, geht durch die hiemit notwendig verbundene Beugung, welche die Mischung der Lichter verschiedener Richtung fördert, wieder verloren.

Über die Reduktion der Schwerebeobachtungen auf das Meeresniveau

von

Dr. **Adalbert Prey.**

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juli 1904.)

Einleitung.

Unter Meeresniveau versteht man nach der gewöhnlichen Definition jene Niveaufläche des Erdkörpers, deren sichtbaren Teil die als ruhend gedachte Oberfläche des Meeres bildet. Die Schwere im Meeresniveau ist also jener Wert der Schwere, den eine Beobachtung im Meeresniveau ergibt. Solche Beobachtungen sind aber meistens nicht möglich, weil die betreffenden Punkte entweder im Inneren der Erdmasse liegen und daher unzugänglich sind oder sich auf dem freien Ozean befinden, wo der Schwerebestimmung wieder eine Reihe von andern Schwierigkeiten erwachsen.[1] Wir können daher nur in einer gewissen Höhe über dem Meer auf der physischen Erdoberfläche beobachten und müssen, um die Schwere im Meeresniveau zu erhalten, eine Reduktion anbringen.

Diese Reduktion besteht im wesentlichen aus zwei Teilen: Da die Erde mit großer Annäherung als eine Kugel mit konzentrischer Schichtung angesehen werden kann, deren Anziehung so wirkt, als ob die ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, so wird das Hauptglied der Reduktion von der Distanz des angezogenen Punktes vom Kugelmittelpunkte und

[1] Hecker, Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean.

somit von seiner Meereshöhe abhängen. Der zweite Teil der Reduktion wird von der Abplattung und von den Unregelmäßigkeiten in der Erdmasse herrühren und wird seiner Größe nach gleich sein dem Unterschiede der Anziehung der in Betracht kommenden Massen auf den Beobachtungspunkt und auf den entsprechenden Punkt des Meeresniveaus.

Der erste Teil der Reduktion wird sehr leicht berechnet nach der Formel

$$\Delta g = \frac{2h}{R} \cdot g,$$

in welcher h die Meereshöhe, R den Erdradius und g die beobachtete Schwere bedeutet. Diese Korrektion wird auch als die von Faye[1] bezeichnet und sie stellt die Änderung der Schwere in freier Luft vor.

Rücksichtlich des zweiten Teiles der Korrektion gehen die Meinungen stark auseinander. Manche Autoren vernachlässigen dieselbe ganz und reduzieren nur mit dem ersten Gliede, welches der Abnahme der Schwere in freier Luft entspricht. Andere begnügen sich damit, den Einfluß der sichtbaren Massen in Abzug zu bringen. Das geschieht am einfachsten in der Weise, daß man die Massenschicht zwischen dem Beobachtungspunkte und dem entsprechenden Punkte des Meeresniveaus als unendlich ausgedehnte ebene Platte in Rechnung zieht. Dies führt zu der bekannten Young-Bougner'schen Formel

$$\Delta g = -\frac{3}{2} \frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h}{R} g,$$

wo ϑ die Dichte der Schicht, ϑ_m die mittlere Dichte der Erde bezeichnet, so daß zusammen mit dem ersten Teile der Reduktion die Schwere g_0 im Meeresniveau:

$$g_0 = g\left[1 + \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{3}{4} \frac{\vartheta}{\vartheta_m}\right)\right]$$

wird.

[1] Poincaré, Les mesures de gravité et la géodésie. Bull. astr., 1901.

An diese Formel bringt man bei sehr unebenem Terrain noch eine Reduktion auf horizontales Terrain oder eine topographische Korrektion[1] an. Zu diesem Zwecke muß man die sichtbaren Massenanhäufungen einzeln in Rechnung bringen, indem man dieselben zur leichteren Berechnung durch einfache geometrische Gebilde entsprechend ersetzt, was namentlich in dem Falle gilt, als prägnante Formen darunter vorkommen. Sind solche nicht vorhanden, so kann man auch die ganze Umgebung durch konzentrische Kreise und Radien in Felder einteilen, deren Anziehung mit Hilfe einer für jeden einzelnen Teil geltenden mittleren Höhe leicht berechnet werden kann.

Aus dieser Art der Reduktion entspringen aber einige Nachteile. Erstens ist es nicht möglich, in dieser Weise die sämtlichen sichtbaren Massenanhäufungen zu berücksichtigen, was eigentlich notwendig wäre. Da bekanntlich die Anziehung im Inneren einer Hohlkugel gleich Null ist, so wird ein kleiner Teil derselben auf irgend einen Punkt im Inneren eine Anziehung ausüben, die gleich und entgegengesetzt der Anziehung des übrigen Teiles der Hohlkugel ist. Wenn wir nur die Umgebung des Beobachtungspunktes in Betracht ziehen, so wissen wir nicht, wie viel von der entsprechenden Hohlkugel, von der die Massenschicht unter dem Beobachtungspunkte ein Teil ist, noch sonst auf der Erde vorhanden ist, wie viel also von der Anziehung der Massenschicht durch nicht berücksichtigte Massen wieder aufgehoben wird. Allerdings, je weiter man sich von dem Anfangspunkte entfernt, um so kleiner wird der Einfluß einzelner Massen. Wenn es also auch nur notwendig ist, in der unmittelbaren Umgebung Details in Rechnung zu ziehen, so ist doch von der weiteren und weitesten Umgebung wenigstens die allgemeine Verteilung der Massenunregelmäßigkeiten zu berücksichtigen.

Ein zweiter näher zu betrachtender Umstand ist der folgende: Durch Abziehen des Einflusses der äußeren Massen wird nicht mehr die Schwere im Meeresniveau erhalten. Die

---

[1] Helmert, Die math. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, Bd. II, p. 169. Siehe ferner die zahlreichen Abhandlungen von Oberst v. Sterneck in den Mitteilungen des k. u. k. mil.-geogr. Inst.

Meeresfläche ist eine Fläche, die unter dem Einfluß aller vorhandenen Massenunregelmäßigkeiten auf der Oberfläche und im Inneren der Erde steht. Wenn man also die über der Meeresfläche gelegenen Massen wegnimmt, so ändert sich die Schwere im Meeresniveau und erhält Werte, die ihr tatsächlich nicht zukommen, und auch die Meeresfläche selbst wird dabei ihre Form ändern. Die so gewonnenen Werte sind also nicht die gesuchten und dieselben sind auch ganz ungeeignet, wenn es sich darum handelt, aus dem Verlaufe der Schwere auf der Meeresfläche deren Gestalt zu bestimmen. Wir wissen ja auch nicht, wie viel von den sichtbaren Massen durch die sogenannten unterirdischen Massendefekte kompensiert ist und ob nicht durch Wegnahme der sichtbaren Massen die Werte eher verschlechtert als verbessert werden, wie es der Pratt-schen Gleichgewichtstheorie entspricht.

Dagegen sind diese Werte vorzüglich dazu geeignet, den Einfluß unsichtbarer Massen zu konstatieren. Wenn man nämlich von der Gesamtheit der Schwerestörung den den sichtbaren Massen entsprechenden Anteil wegnimmt, so wird der Rest von den unsichtbaren Massen herrühren. Für die verschiedenen Zwecke müssen daher die Schwerebeobachtungen verschieden behandelt werden.[1]

Dem ersten Übelstande sucht Helmert dadurch zu begegnen, daß er die Wirkung der hauptsächlichsten Kontinentalerhebungen einzeln untersucht und ihre Wirkung summiert.[2] Man kann sich aber auch die sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten durch eine Funktion dargestellt denken, wozu sich am besten eine Entwicklung nach Kugelfunktionen eignen dürfte. Ohne auf die Möglichkeit der Herstellung einer solchen Funktion einstweilen einzugehen, sei nur bemerkt, daß man hier wieder auf Schwierigkeiten stößt. Da es nämlich meist noch

---

[1] Helmert, Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten (Verhandl. der allg. Konferenz der internat. Erdmessung, Paris, 1900), ebenso Helmert, Über die Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein gemeinsames Niveau (Sitzungsberichte der königl. preuß. Akademie der Wissenschaften, 1902 und 1903).

[2] Helmert, »Theorien«, Bd. II, p. 343 ff.

Punkte geben wird, welche einen größeren Abstand vom Erdmittelpunkte besitzen als der betrachtete angezogene Punkt, so wird dieser gewissen Massenteilen gegenüber als äußerer, andern gegenüber aber als innerer Punkt anzusehen sein und eine Entwicklung, die für den einen Teil gilt, wird für den andern divergieren und umgekehrt.

Was aber den zweiten Punkt betrifft, so darf man die sichtbaren Massen entweder gar nicht wegnehmen oder, wenn man sie zuerst wegnimmt, muß man sie dann wieder hinzufügen. Auf diesem Grundgedanken fußt die von Helmert ausgearbeitete Kondensationstheorie. Dieselbe besteht darin, daß die Verteilung der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten auf der Erde durch eine idealisierte Massenverteilung ersetzt wird, indem alle Massen auf eine ganz im Inneren der Erde gelegene, mit derselben konzentrische Kugel verlegt gedacht werden, so daß sie daselbst nach Art einer Flächendichte gelagert oder kondensiert erscheinen. Die Reduktion erfolgt dann so, daß zuerst die Anziehung der sichtbaren Massen auf den Beobachtungspunkt in Abzug gebracht wird, hierauf die Massen auf die Kondensationsfläche kondensiert werden und schließlich deren Anziehung in ihrer neuen Lage auf den entsprechenden Punkt des Meeresniveaus wieder hinzugefügt wird. Die durch die Verlagerung der Massen hervorgebrachte Verfälschung der wahren Werte der Schwere ist so gering, daß sie in den meisten Fällen einflußlos bleibt; trotz ihres kleinen Wertes hat sie aber doch den Effekt, daß die Schwere nun durch eine konvergente Entwicklung nach Kugelfunktionen auf der ganzen Erde dargestellt werden kann. Denn da die Kondensationsfläche im Inneren der Erde liegt, so ist jeder Punkt in Bezug auf die kondensierte Masse ein äußerer und damit die Konvergenz außer Frage. Im Sinne der Pratt'schen Gleichgewichtstheorie entspricht der Vorgang der Kondensation einem Zurückschieben der Massen in die Erdoberfläche, so daß sie sich mit den ihnen entsprechenden Massendefekten kompensieren.

Man kann aber noch eine andere Methode verwenden, welche darin besteht, daß man statt einer Entwicklung nach Kugelfunktionen deren zwei einführt: eine für äußere und eine für innere Punkte. Dieser Weg, welcher bezüglich des Potentials

schon oft betreten wurde,[1] wurde, soweit dem Verfasser bekannt ist, bezüglich der Schwerebeschleunigung nie verfolgt. Es scheint, daß man sich gescheut hat, eine Entwicklung der ganzen Erdoberfläche nach Kugelfunktionen vorauszusetzen. Natürlich würde eine Entwicklung, welche auch nur einigermaßen den komplizierten Bau der Erdoberfläche wiedergibt, zu Rechnungen von ganz fabelhaftem und unleistbarem Umfange führen. Nichtsdestoweniger soll hier der Versuch gemacht werden, eine solche Entwicklung vorauszusetzen, wobei sich schließlich herausstellt, daß es gar nicht notwendig ist, eine so große Entwicklung herzustellen, sondern daß, abgesehen von Gipfelstationen im Hochgebirge, bei der Reduktion auf das Meeresniveau die Kugelfunktionen ganz herausfallen, bei Berechnung des Einflusses der sichtbaren Massen aber die ersten Glieder der Entwicklung für die meisten Fälle ausreichen.

Berechnung der Schwerebeschleunigung in einem Punkt im Inneren einer Kontinentalmasse.

Es soll gleich direkt der Wert der gegen den Mittelpunkt der Erde gerichteten Schwerebeschleunigung berechnet werden, ohne das Potential zu Hilfe zu nehmen. Da sich nämlich die Notwendigkeit herausstellen wird, Glieder zweiter Ordnung in der Schwere zu untersuchen, so hätten im Potential die Glieder dritter Ordnung entwickelt werden müssen. Es erschien daher der hier gewählte Weg der einfachere.

Wir suchen also mit Hilfe der Kugelfunktionen die Schwere in einem Punkte P mit der Meereshöhe h zu bestimmen, wobei wir vorerst nicht voraussetzen wollen, daß dieser Punkt der Oberfläche selbst angehört, sondern er liege irgendwo zwischen der physischen Erdoberfläche und dem Meeresniveau (Fig. 1).

Die Anziehung auf den Punkt P setzt sich in folgender Weise zusammen: Wir konstruieren zuerst eine Kugel mit dem Radius R, deren Mittelpunkt mit dem der Erde zusammenfällt und welche, erfüllt mit Masse von der mittleren Dichte der Erde, die ganze Masse derselben faßt. Die Oberfläche dieser

[1] Helmert, Das Theorem von Clairaut. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1878, Bd. VII, Heft 3. — Neumann, Potential und Kugelfunktionen

Kugel würde unter Vernachlässigung der Abplattung mit der Meeresfläche zusammenfallen. Wenn wir aber die Abplattung

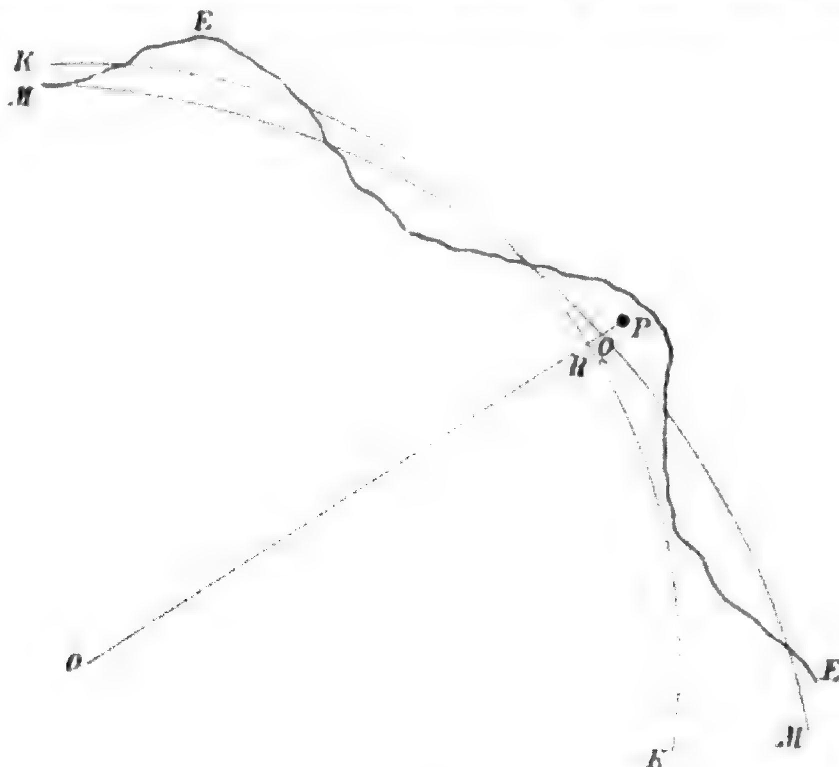


Fig. 1.

berücksichtigen, so wird dies nicht mehr der Fall sein. Der Wert von R ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \vartheta_m = \frac{4\pi}{3} a^3 \sqrt{1-e^2}\,\vartheta_m,$$

wenn a und e große Achse und Exzentrizität der Meridianellipse und ϑ_m die mittlere Erddichte bedeuten. Daraus findet sich

$$R = a\left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{5}{72} e^4 - \frac{55}{1296} e^6 \ldots\right).^{1} \qquad 1)$$

Die Höhe des Punktes P über dieser Kugelfläche bezeichnen wir mit H. In Fig. 1 ist MM die Meeresfläche, KK die Oberfläche der Kugel vom Radius R. Dieselbe soll im folgenden immer als Kugel K bezeichnet werden. Die Linie EE stellt die physische Erdoberfläche vor. Dann ist

$$PQ = h \qquad PR = H.$$

[1] Helmert, »Theorien«, Bd. I, p. 68.

h und H fallen eigentlich nicht genau in dieselbe Linie, da H normal zur Kugel K, h aber normal zum Erdellipsoid steht; der Winkel aber, den sie miteinander bilden, entspricht dem Unterschiede zwischen geographischer und geozentrischer Breite und beträgt daher im Maximum $11^1/_2{}'$; der aus der Vernachlässigung desselben entspringende Fehler der Höhe beträgt daher nur wenige Zentimeter.

Setzen wir die Masse der Erde $= M$, die Gravitationskonstante gleich k^2, so wird die von der Kugel K herrührende Schwerebeschleunigung im Punkte P:

$$\frac{k^2 M}{(R+H)^2}. \tag{2}$$

Zu dieser Kugel fügen wir nun noch so viele Masse hinzu und nehmen sie an andern Stellen weg, daß wir die Erde in ihrer wirklichen Gestalt erhalten. Die Summe aller dieser positiv und negativ hinzugefügten Massen wäre gleich Null, wenn nicht auch im Inneren der Erde Unregelmäßigkeiten in der Massenverteilung bestünden. Diese sind uns aber unbekannt und müssen daher unberücksichtigt bleiben.

Wir denken uns also auf die Kugel K eine Kugelschichte von der Höhe H und der Oberflächendichte der Erde ϑ aufgelagert, für welch letztere Größe man gewöhnlich den Wert $2 \cdot 8$ setzt. Die Oberfläche dieser Kugelschicht K' geht durch den Punkt P hindurch und sie erzeugt in demselben eine Schwerebeschleunigung von der Größe

$$k^2 \frac{\frac{4\pi}{3}\vartheta(R+H)^3 - \frac{4\pi}{3}\vartheta R^3}{(R+H)^2}. \tag{3}$$

Jetzt sind noch alle Massen m_a, welche sich über die Kugel vom Radius $R+H$ erheben, hinzuzufügen. Sie nehmen auf der Erdoberfläche einen Raum ein, den wir mit A bezeichnen. Die Distanz aller dazugehörigen Punkte vom Mittelpunkte der Erde ist größer als $R+H$. Endlich sind alle jene Massen m_i, welche die Kugel K' dort zu viel hat, wo sich die physische Erdoberfläche unter die Kugelfläche senkt und welche den Flächenraum J einnehmen, in Abzug zu bringen. Die Komponenten

der Anziehung dieser Massen in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Erde sind durch folgende Ausdrücke gegeben, wobei wir die Buchstaben A und J wieder in entsprechender Weise verwenden:

$$A = k^2 \iiint_A \frac{dm_a(r_1 - r\cos\gamma)}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{3/2}} \tag{4}$$

$$J = k^2 \iiint_J \frac{dm_i(r_1 - r\cos\gamma)}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{3/2}}. \tag{5}$$

Hierin ist r die Distanz eines beliebigen Punktes der Massen m_a respektive m_i vom Erdmittelpunkte, r_1 die des angezogenen Punktes P, so daß $r_1 = R+H$ und γ der Winkel zwischen r und r_1 ist.

Die nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Komponente der Schwere g wird daher

$$g = \frac{k^2 M}{(R+H)^2} + \frac{4\pi}{3} k^2 \vartheta \frac{(R+H)^3 - R^3}{(R+H^2)} + A - J. \tag{6}$$

Diese Komponente stellt aber noch nicht die ganze Schwere dar, sondern sie wird in Richtung und Größe noch durch die Querkomponenten beeinflußt. Bezeichnen wir die drei zueinander senkrechten Komponenten der Schwere für den Augenblick mit $g_0+\alpha$, β und γ, wobei $\alpha\beta\gamma$ die von den Unregelmäßigkeiten der Massenverteilung herrührenden Teile bezeichnen, so ist die Gesamtschwere G gegeben durch

$$G = \sqrt{(g_0+\alpha)^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Die Größen α, β, γ sind gegen g_0 als Größen erster Ordnung zu betrachten. Wir finden daher durch Entwicklung

$$G = g_0 + \alpha + \frac{\beta^2+\gamma^2}{2g_0}. \tag{7}$$

Die Querkomponenten treten somit als Größen zweiter Ordnung in G ein. Wenn wir daher vorerst nur Größen erster Ordnung berücksichtigen, so fallen die Größen β und γ weg.[1]

[1] Helmert, »Theorien«, II, p. 73.

Wir entwickeln nun die Teile von g bis inklusive Größen erster Ordnung. Es ist

$$\frac{M}{(R+H)^2} = \frac{M}{R^2}\left(1-\frac{2H}{R}\right) \qquad 8)$$

$$\frac{4\pi k^2\vartheta}{3}\,\frac{(R+H)^3-R^3}{(R+H)^2} = \frac{4\pi k^2\vartheta}{3}\cdot 3H = 4\pi k^2\vartheta H. \qquad 9)$$

Zur Bestimmung von A und J führen wir Kugelfunktionen ein, indem wir von den bekannten Gleichungen ausgehen:

$$\frac{1}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{r_1}\sum\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für} \quad r<r_1 \qquad 10)$$

und

$$\frac{1}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für} \quad r>r_1. \qquad 11)$$

Die erste Formel ist anzuwenden für m_i, die zweite für m_a. Durch Differentiation der ersten nach r_1 findet sich

$$-\frac{\partial}{\partial r_1}\left[\frac{1}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{1/2}}\right] =$$
$$= \frac{r_1-r\cos\gamma}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{r_1^{n+2}}P_n(\cos\gamma),$$

somit

$$J = \iiint k^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{r_1^{n+2}}P_n(\cos\gamma)\,dm_i. \qquad 12)$$

Für dm_i führen wir das Massendifferential in Polarkoordinaten ein:

$$dm_i = \vartheta r^2\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\lambda,$$

wobei λ die Länge, ψ das Komplement der Breite bedeutet. Es wird dann

$$J = \iiint k^2 \vartheta \sum (n+1) \frac{r^{n+2}}{r_1^{n+2}} P_n(\cos\gamma) \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\lambda.$$

Die Integration nach r können wir sofort ausführen und erhalten

$$J = \iint k^2 \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left| \frac{r^{n+3}}{r_1^{n+2}} \right|_r^{R+H} P_n(\cos\gamma) \sin\psi \, d\psi \, d\lambda.^{1} \qquad 13)$$

Die obere Grenze für r innerhalb der Massen m_i bildet die Größe $r_1 = R+H$, die untere Grenze ist der Oberflächenwert von r. Für dieses ist nun eine Entwicklung nach Kugelfunktionen einzusetzen. Es sei also

$$r = R[1+\alpha f(\psi\lambda)]. \qquad 14)$$

α ist dabei eine Größe von der Ordnung der Höhenunterschiede auf der Erde und somit eine Größe erster Ordnung. f ist die Entwicklung nach Kugelfunktionen, welche so beschaffen sein soll, daß, wenn man für ψ und λ die Koordinaten eines Punktes der Erde einsetzt, für r der Radiusvektor des betreffenden Erdpunktes folgt, und zwar in allen Punkten, für welche Massen m_i in Betracht kommen. Bis auf Größen erster Ordnung wird dann

$$J = \iint_J k^2 \vartheta \sum (n+1) R \left[\frac{H}{R} - \alpha f(\psi\lambda) \right] P_n(\cos\gamma) \sin\psi \, d\psi \, d\lambda. \qquad 15)$$

Das Doppelintegral ist nun über alle Punkte der Erdoberfläche auszudehnen, zu welchen Massen m_i gehören, was durch den beigesetzten Buchstaben J angedeutet ist. Für die Kugelfunktionen bestehen nun gewisse Integraleigenschaften, die

[1] Der Fall $n = -3$ sollte eigentlich separat behandelt werden, weil hier der Nenner $n+3$ verschwindet; man wäre dann genötigt, Logarithmen einzuführen. In der Tat ist aber eine spezielle Betrachtung dieses Falles überflüssig, weil der Nenner später wieder hinausfällt (Gleichung 15). Man überzeugt sich übrigens leicht, daß die Einführung der Logarithmen und ihrer Reihenentwicklung zu demselben Resultat führt.

aber nur für solche Integrale gelten, die über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt werden können. Wir wollen daher für $f(\psi\lambda)$ eine derartige Entwicklung einführen, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen für alle Punkte gleich Null wird, welche außer J liegen. Zu diesem Zwecke muß $f(\psi\lambda)$ so bestimmt werden, daß für alle Punkte außerhalb J $\alpha f(\psi\lambda)$ dem konstanten Werte $\frac{H}{R}$ gleich wird. In dieser Bedeutung setzen wir

$$f(\psi\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda), \qquad 16)$$

wo die Y die bekannten Laplace'schen Funktionen bezeichnen. Wenn wir diese Entwicklung einführen, so kann das Doppelintegral 15) über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt werden. Die durch $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda)$ dargestellte Fläche ist in Fig. 2 durch die Schraffierung angedeutet.

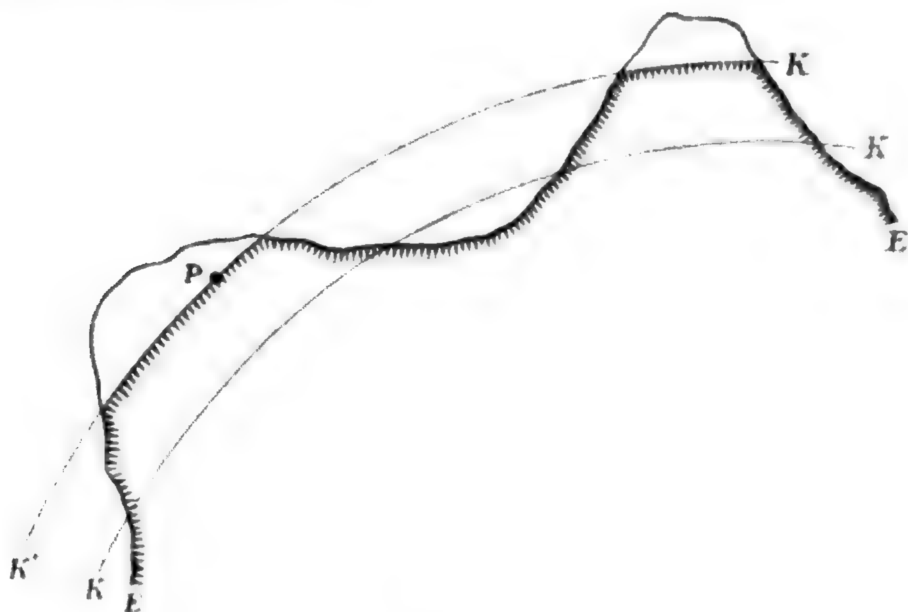


Fig. 2.

Nun erhält J die Form

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} k^2\vartheta \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)R\left[\frac{H}{R} - \alpha\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\psi\lambda)\right] P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda, \quad 17)$$

wobei sich nun das Doppelintegral über die ganze Kugeloberfläche erstreckt. Nun können wir die Integraleigenschaften anwenden. Dieselben lauten:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_m(\psi\lambda)\, P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda \begin{cases} = 0 \text{ für } m \gtrless n \\ = \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n(\psi_1\lambda_1) \text{ für } m = n, \end{cases} \tag{18}$$

wenn ψ_1 und λ_1 die Polarkoordinaten des Punktes P bezeichnen. Es wird daher schließlich, indem in der obigen Doppelsumme nur jene Glieder bleiben, in welchen $m = n$ ist, und indem wir bedenken, daß $\frac{H}{R}$ eine Konstante ist und daher als Kugelfunktion 0ter Ordnung aufgefaßt werden kann:

$$J = 4\pi k^2 \vartheta H - 4\pi k^2 \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} R\alpha Y_n(\psi_1\lambda_1).$$

Im Punkte P nimmt die Reihe

$$\alpha R \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda)$$

den Wert H an (Fig. 2). Wir können daher setzen

$$H = \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi_1\lambda_1) \tag{19}$$

und erhalten dann

$$\begin{aligned} J &= 4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right) Y_n(\psi_1\lambda_1) \\ &= 4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} Y_n(\psi_1\lambda_1). \end{aligned} \tag{20}$$

In derselben Weise wollen wir A behandeln. Es ist

$$-\frac{\partial}{\partial r_1}\left[\frac{1}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma)^{1/2}}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1^n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\gamma) = -\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{r_1^{n-1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma).$$

Daher wird unter Einführung des Massendifferentials

$$dm_a = \vartheta r^2 \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\lambda$$

$$A = -\iiint k^2 \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r_1^{n-1}}{r^{n-1}} P_n(\cos\gamma) \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\lambda$$

und durch Integration nach r:

$$A = \iint_A k^2 \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n-2} \left| \frac{r_1^{n-1}}{r^{n-2}} \right|_{R+H}^{r} P_n(\cos\gamma) \sin\psi\, d\psi\, d\lambda, \qquad 21)$$

wobei für die untere Grenze $r = r_1 = R+H$, für die obere der Oberflächenwert von r zu setzen ist. Wir denken uns für den letzteren wieder eine Entwicklung nach Kugelfunktionen gesetzt:

$$r = R[1+\alpha f_1(\psi\lambda)]. \qquad 22)$$

Das übrigbleibende Doppelintegral erstreckt sich über jene Teile der Kugeloberfläche, zu welchen Massen m_a gehören, was durch den beigesetzten Buchstaben A angedeutet ist. Durch Entwicklung der Glieder erster Ordnung wird:

$$A = \iint_A k^2 \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha R \left[\frac{H}{R} - \alpha f_1(\psi\lambda)\right] P_n(\cos\gamma) \sin\psi\, d\psi\, d\lambda. \qquad 23)$$

Um das Integral wieder über die ganze Kugelfläche ausdehnen zu können, muß die Entwicklung f_1 wieder so beschaffen sein, daß für alle Punkte außerhalb A der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwindet. Es muß also für alle Punkte außerhalb A: $\alpha f_1(\psi\lambda) = \frac{H}{R}$ sein, während für alle Punkte innerhalb A aus Gleichung 22) der richtige Wert von r folgt. In diesem Sinne setzen wir

$$f_1(\psi\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\psi\lambda). \qquad 24)$$

Die durch diese Entwicklung dargestellte Fläche ist in Fig. 3 durch die Schraffierung angedeutet.

Indem wir jetzt die Integration über die ganze Kugeloberfläche ausdehnen und die Integraleigenschaften anwenden, ergibt sich

$$A = -4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} Z_n(\psi_1 \lambda_1), \qquad 25)$$

wobei das Glied mit H, da es als Kugelfunktion 0ter Ordnung mit $n = 0$ multipliziert erscheint, verschwindet.

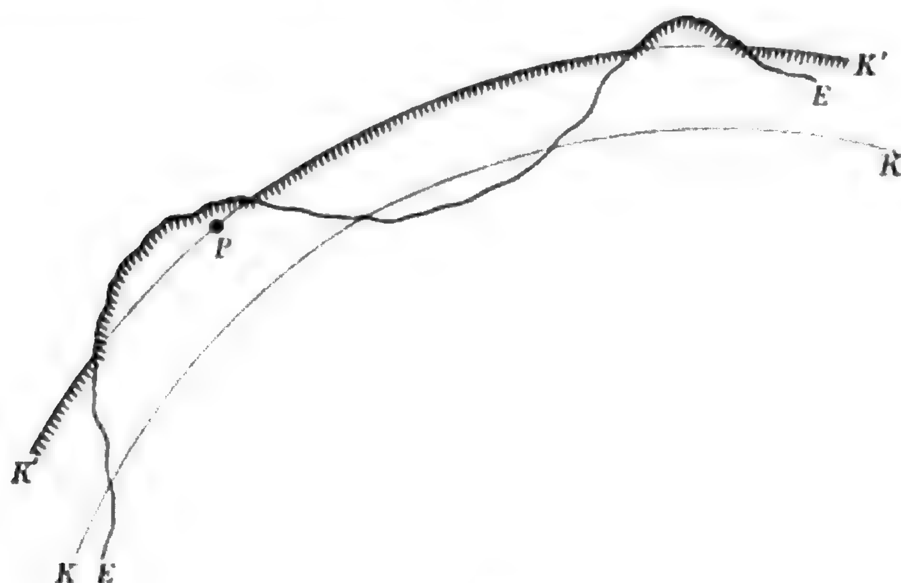


Fig. 3.

Indem wir nun die Ausdrücke 8), 9), 20) und 25) in Gleichung 6) substituieren, erhalten wir endlich

$$g = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1 - \frac{2H}{R}\right) + 4\pi k^2 \vartheta H - 4\pi \vartheta k^2 \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} Y_n(\psi_1 \lambda_1)$$

$$- 4\pi \vartheta k^2 \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} Z_n(\psi_1 \lambda_1)$$

oder

$$g = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1 - \frac{2H}{R}\right) + 4\pi k^2 \vartheta H -$$

$$- 4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} [Y_n(\psi_1 \lambda_1) + Z_n(\psi_1 \lambda_1)]. \qquad 26)$$

Die beiden Entwicklungen Y und Z summiert, geben nun eine neue Entwicklung, welche für alle Punkte der Erdoberfläche deren Höhe über der Kugel K vermehrt um die konstante Größe H gibt. Wenn wir uns also die Erhebungen aller Punkte der Erde über die Kugel K nach Kugelfunktionen entwickelt denken und setzen

$$r = R\left[1+\alpha\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\psi\lambda)\right] \tag{27}$$

so müssen, da sich eine gegebene Funktion nur auf eine einzige Art nach Kugelfunktionen entwickeln läßt, die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} S_n &= Y_n+Z_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3 \ldots \infty \\ S_0 &= Y_0+Z_0-H. \end{aligned} \tag{28}$$

Führen wir dies ein und beachten, daß H mit den Kugelfunktionen 0ter Ordnung, die mit $\left(\frac{n}{2n+1}\right)_{n=0} = 0$ multipliziert sind, in die Gleichung eintritt, also ohnehin verschwindet, so können wir setzen:

$$g = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H}{R}\right)+4\pi k^2\vartheta H - 4\pi k^2\vartheta\alpha R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n+1}S_n(\psi_1\lambda_1). \tag{29}$$

Um den Wert der Schwere für einen Punkt der Erdoberfläche zu erhalten, ist für H der entsprechende Wert H_1 zu setzen. Der zugehörige Wert der Schwere im Meeresniveau wird erhalten, indem man für H die Höhe H_0 des betreffenden Punktes der Meeresfläche über der Kugel K setzt. Es ist daher

$$\begin{aligned} g_{H_1} &= \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H_1}{R}\right)+4\pi k^2\vartheta H_1 - 4\pi k^2\vartheta\alpha R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n+1}S_n(\psi_1\lambda_1) \\ g_{H_0} &= \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H_0}{R}\right)+4\pi k^2\vartheta H_0 - 4\pi k^2\vartheta\alpha R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n+1}S_n(\psi_1\lambda_1). \end{aligned} \tag{30}$$

Der Punkt, dessen Höhe über der Kugel K gleich H_1 ist, besitzt die Meereshöhe h; es ist daher $H_1 - H_0 = h$ und wir können statt g_{H_1}: g_h, statt g_{H_0}: g_0 setzen.

Die Reduktion einer in der Höhe h über dem Meer in einem Punkte der Erdoberfläche beobachteten Schwere wird daher gegeben sein durch

$$g_h - g_0 = -\frac{Mk^2}{R^2} \cdot \frac{2h}{R} + 4\pi k^2 \vartheta h$$

oder dividiert durch einen Normalwert G der Schwere

$$G = \frac{Mk^2}{R^2} = \frac{4\pi k^2 \vartheta_m R}{3} \qquad 31)$$

$$\frac{g_h - g_0}{G} = -\frac{2h}{R} + \frac{3\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h}{R}. \qquad \text{I}$$

Soll außer der Reduktion auf das Meeresniveau auch der Einfluß der sichtbaren Massen berücksichtigt werden, so muß noch das letzte Glied in Gleichung 29) in Rechnung gezogen werden. Dabei ist aber zu beachten, daß in der Entwicklung S auch die Abplattung steckt, die mit den störenden Massen nichts zu tun hat. Die entsprechenden Glieder müssen daher zuerst weggenommen werden. Sie sind nichts anderes als die Erhebung H_M des ellipsoidischen Meeresspiegels über die Kugel K:

$$H_M = R[-0\cdot0000010 - 0\cdot0022325\, P_2(\cos\psi_1) + \\ + 0\cdot0000039\, P_4(\cos\psi_1). \qquad 32)$$

Man erhält diesen Ausdruck, indem man von dem Radiusvektor der Meridianellipse[1] den Radius der Kugel K (Gleichung 1) abzieht.

Die übrigbleibenden Glieder S'_n enthalten dann nur mehr die Seehöhen. In Teilen der normalen Schwere ausgedrückt, wird die Schwerestörung durch die sichtbaren Massen gleich

$$\frac{\Delta g}{G} = -\frac{3\vartheta}{\vartheta_m} a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} S'_n(\psi_1 \lambda_1). \qquad \text{II}$$

[1] Helmert, »Theorien«, I., p. 60.

Der Einfluß des Meeres.

Bevor an die Diskussion der obigen Formeln geschritten wird, soll noch gezeigt werden, daß man auch hier den Einfluß des Meeres in der herkömmlichen Weise berücksichtigen kann. Wir berechnen denselben als die Differenz zweier Größen. Wir denken uns zuerst die Anziehung eines Körpers von genau derselben Gestalt wie der früher berechnete. jedoch durchaus

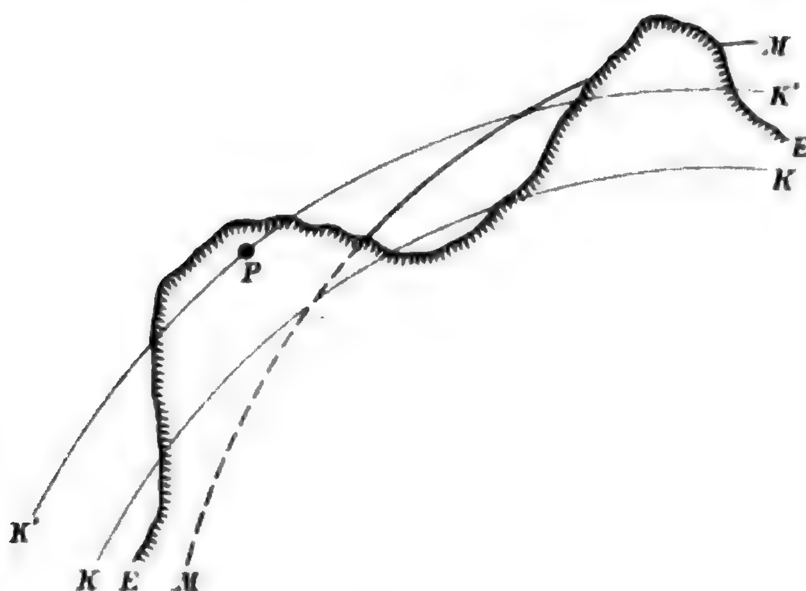


Fig. 4.

von der Dichte ϑ' des Meeres. Indem wir in diesem Falle statt M: $\frac{4\pi\vartheta'}{3}R^3$ zu setzen haben, findet sich die entsprechende Schwerebeschleunigung gleich:

$$\frac{4}{3}\pi k^2\vartheta' R+\frac{4}{3}\pi k^2\vartheta' H-4\pi k^2\vartheta'\alpha R\sum\frac{n}{2n+1}S_n(\psi_1\lambda_1).$$

Nun fügen wir die Masse des Meeres hinzu und berechnen die Anziehung des neu entstandenen Körpers nach derselben Formel, indem wir nur statt der Entwicklung S eine neue Entwicklung S^* einführen. Die Bedeutung derselben erhellt aus den Figuren 4 und 5. Fig. 4 zeigt die Entwicklung S, Fig. 5 die Entwicklung S^*, wobei MM die Meeresfläche vorstellt. Die Entwicklung S^* wird somit gewonnen, wenn man die Höhen aller Punkte über der Kugel K in Betracht zieht

und dabei die Meeresfläche wie die physische Erdoberfläche behandelt.

Der Ausdruck für die Anziehung lautet:

$$\frac{4}{3}\pi k^2 \vartheta' R + \frac{4}{3}\pi k^2 \vartheta' H - 4\pi k^2 \vartheta' \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} S^*(\psi_1 \lambda_1).$$

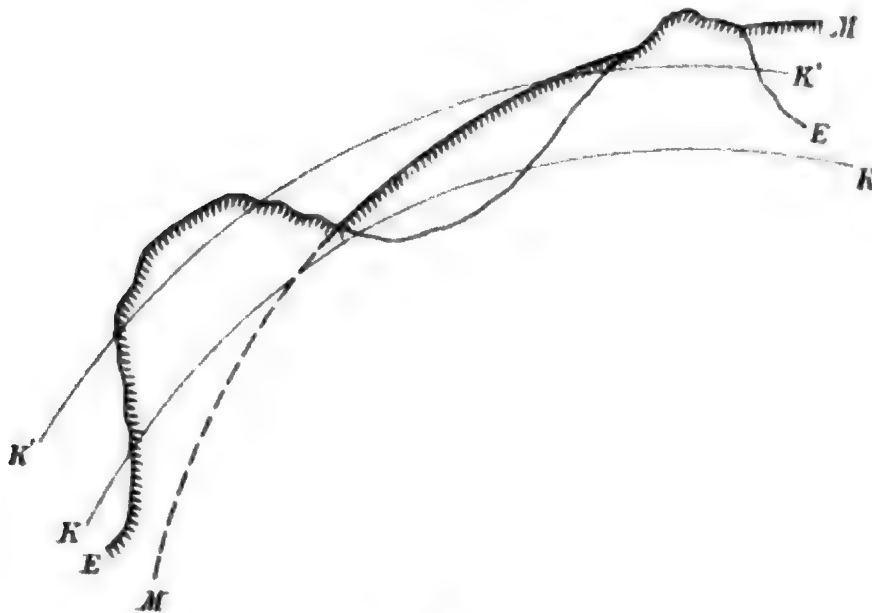


Fig. 5.

Die Differenz der beiden Ausdrücke liefert den Einfluß des Meeres

$$\Delta g_M = +4\pi k^2 \vartheta' \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} [S_n(\psi_1 \lambda_1) - S_n^*(\psi_1 \lambda_1)]. \quad 33)$$

Die Differenz dieser beiden Entwicklungen führt auf eine Entwicklung S^M, welche in allen Punkten des Meeres, dessen Tiefe, vom Meeresniveau gemessen, in allen übrigen Punkten aber Null gibt. Damit wird der Einfluß des Meeres:

$$= 4\pi k^2 \vartheta' \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} S_n^M(\psi_1 \lambda_1). \quad 34)$$

Fügen wir dies zu dem Ausdrucke 30) hinzu, so folgt

$$g_{H_1} = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H_1}{R}\right) + 4\pi k^2 \vartheta H_1 -$$

$$-4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}\left[S'_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S^M_n(\psi_1\lambda_1)\right]$$

36)

$$g_{H_0} = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H_0}{R}\right) + 4\pi k^2 \vartheta H_0 -$$

$$-4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}\left[S'_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S^M_n(\psi_1\lambda_1)\right],$$

wobei in S' schon die von der Abplattung herrührenden Glieder fehlen.

Daraus ergibt sich wie früher

$$\frac{g_h - g_0}{G} = -\frac{2h}{R} + \frac{3\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h}{R} \qquad \text{I}$$

Für die Schwerestörung durch sichtbare Massen, jetzt einschließlich der Ozeane, findet sich mit Hilfe von 36):

$$\frac{\Delta g}{G} = -3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}\left[S'_n(\lambda_1\psi_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S^M_n(\lambda_1\psi_1)\right].$$

Die Entwicklung $\alpha R \sum_{n=0}^{\infty} S'_n(\psi\lambda)$ gibt in allen Punkten des festen Landes deren Seehöhe, in allen Punkten des Meeres dessen Tiefe. Die Entwicklung $\alpha R \sum_{n=0}^{\infty} S^M_n(\psi\lambda)$ gibt in allen Punkten des festen Landes Null, in allen Punkten des Meeres ebenfalls dessen Tiefe. Die Entwicklung $\alpha R \sum_{n=0}^{\infty}\left[S'_n(\psi\lambda) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S^M_n(\psi\lambda)\right]$ gibt daher in allen Punkten des festen Landes die richtige Seehöhe, in allen Punkten des Meeres aber die im Verhältnisse $1 : 1 - \frac{\vartheta'}{\vartheta}$ oder

$$1 : \frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta}$$

verkleinerte Tiefe. Diese so hergestellte Entwicklung werde mit $\alpha R \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\psi\lambda)$ bezeichnet, so daß wir nun schreiben können

$$\frac{\Delta g}{G} = -3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n+1}T_n(\psi_1\lambda_1), \qquad \text{II}'$$

woraus man erkennt, daß man den Einfluß des Meeres auch hier dadurch berücksichtigt, daß man sich die ganze Wassermasse von der Dichte ϑ' zu Gestein von der Dichte ϑ verfestigt denkt.

Diskussion.

Die Formeln I und II′ enthalten die Lösung des gestellten Problems. Vor allem zeigt sich, daß aus Gleichung I die Kugelfunktionen ganz hinausgefallen sind, was dem Umstande zu danken ist, daß sich die Entwicklungen Y und Z zu einer einzigen Entwicklung S vereinigt haben.

Das erste Glied der Gleichung I entspricht der Reduktion in freier Luft und tritt genau so in der Bouguer'schen Formel auf. Das zweite Glied entspricht dem andern Gliede der Bouguer'schen Formel, ist aber doppelt so groß. In der Tat müssen wir in der Bouguer'schen Formel das zweite Glied verdoppeln, wenn wir sie mit der unserigen vergleichen wollen,[1] weil sie in ihrer ursprünglichen Gestalt die Schwere nur von der Anziehung einer Platte von der Dicke h befreit, ohne die Anziehung derselben auf einen Punkt des Meeresniveaus wieder hinzuzufügen. Unsere Formel stimmt daher mit der Bouguer-schen vollständig überein. Immerhin besteht aber ein wesentlicher Unterschied. Die Anziehung der Platte auf einen Punkt an ihrer Oberfläche ist gegeben durch $\frac{3}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{h}{R}$, welche einmal subtrahiert werden muß, weil die Platte unter dem Punkte weggenommen wird, und dann nochmals subtrahiert wird, weil die Platte auf den entsprechenden Punkt der Meeresfläche in der entgegengesetzten Richtung wirkt. In unserem Fall aber wird

[1] Poincaré, Bull. astr., 1901, p. 9.

zuerst eine Kugelschicht entfernt, deren Anziehung $3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{h}{R}$ ist, während ihre Anziehung auf den entsprechenden Punkt der Meeresfläche gleich Null ist. Der Effekt ist für die Anwendung der Formel I der gleiche. Wenn es sich aber darum handelt, von der Anziehung der äußeren Massen ganz zu befreien, in welchem Falle mit Recht die Bouguer'sche Formel in ihrer ursprünglichen Gestalt zu verwenden ist, dann tritt in unserem Falle das Glied II′ hinzu, welches, wie sich zeigen wird, den Unterschied ausgleicht.

Wir wenden uns daher der Untersuchung des Ausdruckes II′ zu. Es scheint, daß zur Berechnung desselben die Entwicklung T, und zwar wegen des äußerst komplizierten Baues der Erdoberfläche, bis zu Gliedern sehr hoher Ordnung bekannt sein müßte. In der Tat genügen aber schon wenige Glieder. Der Faktor $\frac{n}{2n+1}$ nähert sich mit wachsendem n dem Werte $\frac{1}{2}$. Wenn wir daher die Entwicklung nur bis zum k^{ten} Gliede fortsetzen und die Größe

$$\varepsilon_n = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4n+2}$$

einführen, so erhält der Ausdruck die Form:

$$\frac{\Delta g}{G} = -3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha\sum_{n=0}^{k}\frac{n}{2n+1}T_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{3}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha\sum_{n=k+1}^{\infty}T_n(\psi_1\lambda_1)$$
$$-3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha\sum_{n=k+1}^{\infty}\varepsilon_n T_n(\psi_1\lambda_1).$$

Die ε_n nehmen mit wachsendem n ab und wir können das letzte Glied vernachlässigen, wenn wir das k genügend groß wählen. Die Summe $\alpha R\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\psi_1\lambda_1)$ ist gleich der Höhe h des Beobachtungsortes. Es ist daher

$$\alpha R\sum_{n=k+1}^{\infty}T_n(\psi_1\lambda_1) = h - \alpha R\sum_{n=0}^{k}T_n(\psi_1\lambda_1).$$

Die Summe auf der rechten Seite ist das Resultat, welches erhalten wird, wenn man in die ersten k Glieder der Entwicklung die Werte ψ_1 und λ_1 für den Beobachtungsort substituiert. Die linke Seite ist daher jener Teil der Höhe, welcher durch die ersten k Glieder der Entwicklung nicht dargestellt wird, oder der Fehler der Darstellung, den wir mit h' bezeichnen wollen. Dann findet sich:

$$\frac{\Delta g}{G} = -3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha\sum_{n=0}^{k}\frac{n}{2n+1}T_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{h'}{R}.$$

Dieses letzte Glied stellt die Anziehung einer Platte von der Dicke h' dar und dieses Glied ist es, welches die Übereinstimmung mit der Bouguer'schen Formel bewirkt.[1]

Es dürfte genügen, $k = 5$ zu setzen. Die allgemeinen großen Massenerhebungen der Erde, die Kontinente, sind sehr flach und weit ausgedehnt und werden daher durch Kugelfunktionen niederer Ordnung dargestellt. In der Tat, wenn man auf einem beliebigen Parallelkreis um die Erde herumgeht, so trifft man nie mehr als drei Maxima der Erhebung.[2] Der Äquator z. B. durchschneidet Südamerika, Afrika und die in der ziemlich seichten Sundasee gelegenen Inseln. Die geographischen Längen dieser Erhebungen sind um etwa 90 bis 100° voneinander verschieden. Sie werden daher der Hauptsache nach durch Kugelfunktionen dritter und vierter Ordnung dargestellt werden. Um dies zu illustrieren, wurden mit provisorischen Werten die Seehöhen längs des Äquators in eine Fourier'sche Reihe entwickelt und dabei noch Glieder sechster Ordnung mitgenommen. Es fand sich in Metern

$$h = -1900 + 180\cos\lambda - 430\cos 2\lambda - 380\cos 3\lambda - 50\cos 4\lambda - \\ -130\cos 5\lambda - 360\cos 6\lambda \\ -770\sin\lambda + 1140\sin 2\lambda - 1580\sin 3\lambda - \\ -1770\sin 4\lambda - 450\sin 5\lambda + 300\sin 6\lambda.$$

---

[1] In der Tat, führt man keine Kugelfunktionen ein, so wird $h = h'$ und obige Formel führt zusammen mit I zu $\frac{g_h - g_0}{G} = -\frac{2h}{R} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{h}{R}$ d. i. die Bouguer'sche Formel.

[2] G. H. Darwin, On the stresses caused in the interior of the earth by the weight of continents and mountains. Phil. Trans., 1882, vol. 173, I.

Hier haben in der Tat die ersten vier Sinusglieder die größten Koeffizienten, während die Glieder fünfter und sechster Ordnung schon wesentlich kleinere Koeffizienten besitzen. Sie betragen nur mehr wenige hundert Meter oder in Teilen des Erdradius etwa

$$300 : 6000000 = 0\cdot 00005.$$

Der von den sechsten Gliedern herrührende Fehler wird daher, wenn wir $\varepsilon_6 = \frac{1}{4.6+2} = \frac{1}{26}$ und $\frac{\vartheta}{\vartheta_m}$ wie gewöhnlich gleich $\frac{1}{2}$ setzen,

$$3 \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\cdot 00005 = 0\cdot 000003$$

in Teilen der Schwere.

Natürlich werden auch die weiteren Glieder ähnliche Fehler liefern; dieselben werden sich aber ebenso kombinieren wie die Glieder T_n selbst, so daß wir nicht fehlgehen werden, wenn wir den ganzen Fehler gleich:

$$3 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{h'}{R}$$

setzen. Dies gilt jedenfalls für die Glieder niederer Ordnung. Die Glieder hoher Ordnung aber, welche berufen sind, die steilen Details der Hochgebirge darzustellen und welche daher relativ große Koeffizienten haben werden, respektive, wenn die Koeffizienten klein sind, durch ihre Anzahl das ersetzen, was ihnen an Größe fehlt, werden dafür Fehler mit sehr kleinen Faktoren $\varepsilon = \frac{-1}{4n+2}$ liefern. Es wird daher der obige Ausdruck für den Fehler, der mit dem größten ε gebildet ist, ausreichen.

Die Größe h' ist der Fehler der Darstellung. Derselbe wird daher für mittlere Verhältnisse, d. i. im Flachlande und Mittelgebirge, nur wenige hundert Meter betragen; im Hochgebirge aber kann er sehr bedeutend werden. Setzen wir für $\frac{h'}{R}$ den Wert 0·001, was einem Fehler der Darstellung von 6300 m entspricht, so wird der Fehler gleich

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{26} \cdot 0\cdot 001 = 0\cdot 00006 \text{ der Schwere}$$

oder 0·06 *cm*. Ein solcher Betrag kann nicht vernachlässigt werden. In Europa kann dieser Fall aber nicht vorkommen, sondern selbst auf den höchsten Spitzen wird der Betrag kaum die Hälfte oder ein Drittel ausmachen. Für Stationen im Tieflande und Mittelgebirge aber und auch für Hochgebirgsstationen, wenn sie nur nicht Gipfelstationen sind, erreicht der Fehler nur wenige Milliontel der Schwere oder wenige Tausendstel eines Zentimeters und kann daher immer vernachlässigt werden. Der obige Nachteil bezüglich der Hochstationen dürfte aber nicht stark ins Gewicht fallen, wenn man bedenkt, wie selten Schwerebeobachtungen in großer Höhe gemacht werden. So sind unter den ganzen 508 v. Sterneck'schen Pendelstationen, welche doch den größten Teil unserer Alpen umfassen, nur sechs höher als 1500 *m*, nur zwei höher als 2000 *m*. Selbst im letzteren Falle wäre der Fehler nur 0·02 bis 0·03 *cm*, was bei einem mittleren Fehler von ± 0·010 bis ± 0·015 *cm*[1] der Beobachtungen wohl nicht allzu groß ist.

Es dürfte daher eine Entwicklung bis inklusive Glieder fünfter Ordnung für die meisten Fälle genügen.[2]

Noch ein Punkt bedarf einer genauen Besprechung. Nach obigen Formeln scheint es, als ob die Reduktion außer von den allgemeinen kontinentalen Erhebungen nur noch von der Seehöhe abhängig wäre, dagegen unabhängig von der lokalen Massenverteilung. Es wäre dann für einen Punkt auf einer steilen Bergspitze die Reduktion dieselbe wie für eine gleich hohe Station auf einem breiten Plateau oder dieselbe für eine Station in einem weiten Tale wie für eine Station in dem Schacht eines Bergwerkes. Dieser scheinbare Widerspruch rührt von der Vernachlässigung der höheren Glieder her. Um dies zu untersuchen, sollen daher nun die Glieder zweiter Ordnung entwickelt werden.

[1] Helmert, Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten.

[2] Unter Anwendung der Neumann'schen Methode kann man übrigens auch noch weitere Glieder ohne besonderen Mehraufwand an Rechenarbeit erhalten.

Die Glieder zweiter Ordnung.

Zu den Gliedern zweiter Ordnung gehören alle, welche die Faktoren α^2, αh und h^2 enthalten. Nach der Art der Entwicklung S sind darin auch die Glieder mit e^4, $e^2\alpha$ und e^2h inbegriffen. Ferner gehört hieher das Glied $\frac{1}{2}\,\frac{\beta^2+\gamma^2}{g_0}$ aus Gleichung 7) und schließlich noch ein Glied, welches von der Fliehkraft herrührt.

Wir gehen zunächst auf die Formeln 2) und 3) zurück und finden in einfacher Weise

$$\frac{Mk^2}{(R+H)^2} = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1-\frac{2H}{R}+\frac{3H^2}{R^2}\right) \qquad 37)$$

$$\frac{4\pi k^2\vartheta}{3}\,\frac{(R+H)^3-R^3}{(R+H)^2} = 4\pi k^2\vartheta H - 4\pi k^2\vartheta\,\frac{H^2}{R}. \qquad 38)$$

Ferner zu Formel 13)

$$\left|\frac{r^{n+3}}{r_1^{n+2}}\right|_{R(1+\alpha f)}^{R+H} =$$

$$= R\left\{(n+3)\left[\frac{H}{R}-\alpha f(\psi\lambda)\right]-\binom{n+3}{2}\left[\frac{H}{R}-\alpha f(\psi\lambda)\right]^2\right\} \qquad 39)$$

und zu Formel 21)

$$\left|\frac{r_1^{n-1}}{r^{n-2}}\right|_{R+H}^{R(1+\alpha f_1)} =$$

$$= R\left\{(n-2)\left[\frac{H}{R}-\alpha f_1(\psi\lambda)\right]+\binom{n-1}{2}\left[\frac{H}{R}-\alpha f_1(\psi\lambda)\right]^2\right\}. \qquad 40)$$

Die Glieder zweiter Ordnung in J und A, die wir mit J_2 und A_2 bezeichnen wollen, werden daher nach Gleichung 13) und 21):

$$J_2 = -\iint_J k^2\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+3}\binom{n+3}{2} R\left[\frac{H}{R} - \alpha f(\psi\lambda)\right]^2 P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda$$

$$A_2 = \iint_A k^2\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n-2}\binom{n-1}{2} R\left[\frac{H}{R} - \alpha f_1(\psi\lambda)\right]^2 P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda \qquad 41)$$

Unter Einführung der früher definierten Entwicklungen Y und Z wird wieder für alle Punkte außerhalb J

$$\frac{H}{R} = \alpha f(\psi\lambda) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda)$$

und für alle Punkte außerhalb A

$$\frac{H}{R} = \alpha f_1(\psi\lambda) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\psi\lambda).$$

Wir können daher die Integrationen wieder über die ganze Kugelfläche ausdehnen und die Integraleigenschaften anwenden, wobei wieder H^2 als Kugelfunktion nullter Ordnung gilt.

Es wird dann

$$J_2 = -4\pi k^2\vartheta \frac{H^2}{R} + 8\pi k^2\vartheta\alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n+2}{2} Y_n(\psi_1\lambda_1)$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} k^2\vartheta \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2} R\alpha^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\psi\lambda)\right)^2 P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda,$$

$$A_2 = -8\pi k^2\vartheta\alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} Z_n(\psi_1\lambda_1)$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} k^2\vartheta \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{2} R\alpha^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\psi\lambda)\right)^2 P_n(\cos\gamma)\sin\psi\, d\psi\, d\lambda.$$

Um die noch übrigen Integrationen ausführen zu können, denken wir uns die Ausdrücke

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\psi\lambda)\right]^2 \quad \text{und} \quad \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\psi\lambda)\right]^2,$$

welche in jedem Punkte das Quadrat jener Höhe darstellen, die

$$\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\psi\lambda) \quad \text{respektive} \quad \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\psi\lambda)$$

allein darstellt, neuerdings nach Kugelfunktion entwickelt und setzen

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\psi\lambda)\right]^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{Y}_m(\psi\lambda),$$
$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\psi\lambda)\right]^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{Z}_m(\psi\lambda). \qquad 42)$$

Wenden wir wieder die Integraleigenschaften an, so wird endlich

$$J_2 = -4\pi k^2\vartheta\frac{H^2}{R} + 8\pi k^2\vartheta\alpha H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n+2}{2}Y_n(\psi_1\lambda_1) -$$
$$-4\pi k^2\vartheta\alpha^2 R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n+2}{2}\bar{Y}_n(\psi_1\lambda_1).$$

$$A_2 = -8\pi k^2\vartheta\alpha H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}Z_n(\psi_1\lambda_1) +$$
$$+4\pi k^2\vartheta\alpha^2 R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\bar{Z}_m(\psi_1\lambda_1).$$

Da nach Gleichung 19)

$$H = R\alpha\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi_1\lambda_1)$$

ist, so können wir setzen

$$\frac{H^2}{R} = \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda)$$

oder auch

$$\frac{H^2}{R} = \alpha^2 R \left[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\psi\lambda)\right]^2 = \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_n(\psi\lambda)$$

und da

$$-1 + \frac{1}{2n+1}\binom{n+2}{2} = \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}$$

ist, so folgt, wenn wir $4\pi k^2 \vartheta \frac{H^2}{R}$ addieren und subtrahieren:

$$J_2 = +8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} Y_n(\psi_1\lambda_1) -$$

$$-4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} \bar{Y}_n(\psi_1\lambda_1),$$

43)

$$A_2 = -8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} Z_n(\psi_1\lambda_1) +$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} \bar{Z}_n(\psi_1\lambda_1).$$

Bilden wir endlich $A_2 - J_2$ nach Maßgabe von Formel 6), so finden wir

$$A_2 - J_2 = -8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} [Y_n(\psi_1\lambda_1) + Z_n(\psi_1\lambda_1)]$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} \bar{Y}_n(\psi_1\lambda_1)$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\binom{n}{2} \bar{Z}_n(\psi_1\lambda_1)$$

oder wegen

$$Y_n + Z_n = S_n \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \infty$$
$$Y_0 + Z_0 = S_0 + H$$

und $\binom{n}{2}_{n=0} = 0$:

$$A_2 - J_2 = -8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} S_n(\psi_1 \lambda_1)$$
$$+ 4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \bar{Y}_n(\psi_1 \lambda_1) \qquad 44)$$
$$+ 4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \bar{Z}_n(\psi_1 \lambda_1).$$

Der Einfluß des Meeres auf die Glieder zweiter Ordnung.

Wir bilden die Glieder zweiter Ordnung, welche vom Einflusse des Meeres herrühren, nach derselben Methode, wie die Glieder erster Ordnung. Zu diesem Zwecke haben wir zuerst in 44) ϑ und ϑ_m durch ϑ' zu ersetzen:

$$-8\pi k^2 \vartheta' \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} S_n(\psi_1 \lambda_1)$$
$$+ 4\pi k^2 \vartheta' \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \bar{Y}_n(\psi_1 \lambda_1) \qquad 45)$$
$$+ 4\pi k^2 \vartheta' \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \bar{Z}_n(\psi_1 \lambda_1).$$

Diese Glieder sind ohne die Masse der Ozeane abgeleitet; fügen wir diese hinzu, so haben wir in dem obigen Ausdrucke S durch S^* und ebenso die Entwicklungen $\bar{Y}_n$ und $\bar{Z}_n$ durch entsprechende Entwicklungen Y_n^* und Z_n^* zu ersetzen, welche

die Quadrate von Höhen über der Kugel K darstellen. Dieselben sind durch die Figuren 6 und 7 angedeutet.

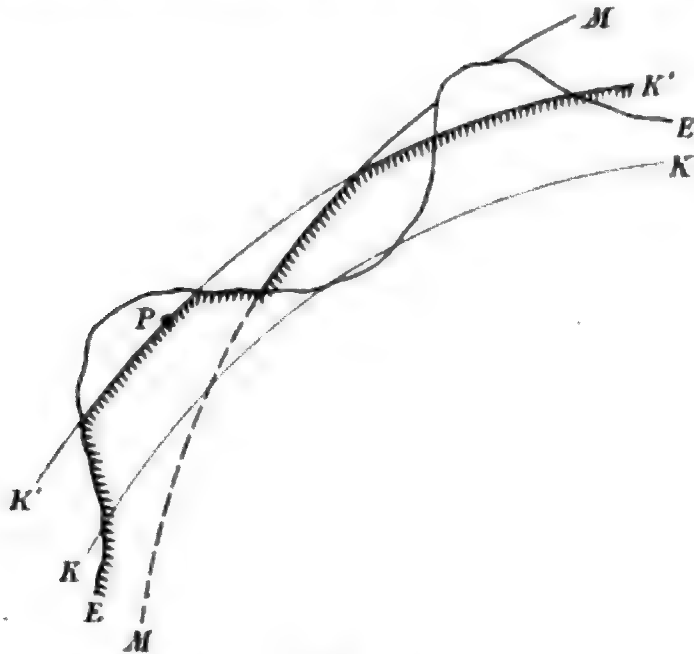


Fig. 6.

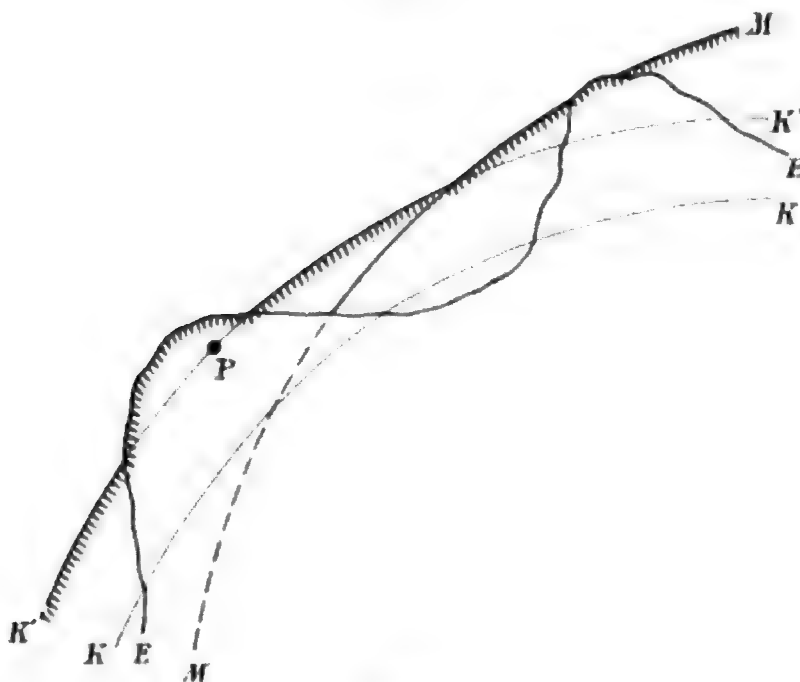


Fig. 7.

Bilden wir die Differenz der beiden Ausdrücke und setzen analog wie früher

$$
\begin{aligned}
S_n - S_n^* &= S_n^M, \\
\overline{Y}_n - \overline{Y}_n^* &= Y_n^M, \\
\overline{Z}_n - \overline{Z}_n^* &= Z_n^M,
\end{aligned}
\qquad 46)
$$

so lauten endlich die gesuchten Glieder zweiter Ordnung

$$M_2 = 8\pi k^2 \vartheta' \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} S_n^M(\psi_1 \lambda_1)$$

$$-4\pi k^2 \vartheta' \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} Y_n^M(\psi_1 \lambda_1) \qquad 47)$$

$$-4\pi k^2 \vartheta' \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} Z_n^M(\psi_1 \lambda_1).$$

Die Entwicklungen $\bar{Y}_n^M$ und $\bar{Z}_n^M$ lassen keine einfache Deutung mehr zu.

Es wird nun schließlich

$$A_2 - J_2 + M_2 =$$

$$-8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[S_n(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right]$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[\bar{Y}_n(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} \bar{Y}_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right] \qquad 48)$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[\bar{Z}_n(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} Z_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right].$$ [1]

Von den hier aufgeführten Gliedern gehören nur jene nicht zur Reduktion, welche die vierte Potenz der Exzentrizität

[1] Der Einfluß des Meeres ließe sich auch durch direkte Integration über die ganze Wassermasse bestimmen. Man hätte dabei nicht nötig, einen Unterschied zwischen äußeren und inneren Punkten zu machen, da für ein Rotationsellipsoid von kleiner Abplattung beide Entwicklungen bis zur Oberfläche konvergieren (Callandreau, »Sur le developpement en séries du potentiel des sphéroides de revolution«, Journal de l'école polytechnique, 1889). Fur die Glieder erster Ordnung findet man wieder den Ausdruck 34). Die Glieder zweiter Ordnung ergeben sich aber in anderer Form.

allein enthalten. Solche Glieder kommen in $\overline{Y}_n$ und $\overline{Z}_n$ vor und sind nichts anderes als die Glieder, die von H_M^2 herrühren. Nun war H_M gegeben durch (Gleichung 32):

$$H_M = a + b\,P_2(\cos\psi) + c\,P_4(\cos\psi), \tag{49}$$

worin nur b eine Größe erster Ordnung ist, a und c aber zweiter Ordnung sind. In den Entwicklungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{Y}_n(\psi\lambda) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \overline{Z}_n(\psi\lambda)$$

entstehen dann die Glieder von H_M^2 und diese sind die einzigen, welche nur die Abplattung enthalten und daher zum normalen Teile der Schwerkraft gehören. Indem wir H_M^2 bilden, nach Kugelfunktion entwickeln und nur Glieder zweiter Ordnung beibehalten, wird

$$H_M^2 = \frac{1}{5}b^2 + \frac{2}{7}b^2P_2(\cos\psi) + \frac{18}{35}b^2P_4(\cos\psi). \tag{50}$$

Diese Glieder ziehen wir von den Entwicklungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{Y}_n(\psi\lambda) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \overline{Z}_n(\psi\lambda)$$

ab, wodurch diese in die neuen Ausdrücke

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n'(\psi\lambda) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} Z_n'(\psi\lambda)$$

übergehen.

Die Entwicklungen $\overline{Y}_n^M$ und $\overline{Z}_n^M$ enthalten die von e^4 abhängigen Glieder nicht mehr, da sie schon die Differenz zweier Entwicklungen sind.

Es bleiben so schließlich die folgenden von der Höhe und den Massenstörungen abhängigen Glieder:

$$-8\pi k^2 \vartheta \alpha H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[S_n(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} S_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right]$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[\bar{Y}_n'(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} \bar{Y}_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right] \qquad 51)$$

$$+4\pi k^2 \vartheta \alpha^2 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{n}{2} \left[\bar{Z}_n'(\psi_1 \lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta} \bar{Z}_n^M(\psi_1 \lambda_1) \right].$$

Der Einfluß der Abplattung auf die Reduktion, das sind die Glieder mit $e^2 h$ und $e^2 \alpha$, ist in diesen Ausdrücken bereits enthalten.

Bestimmung der Schwerekomponenten senkrecht zum Radiusvektor.

Die Komponenten senkrecht zum Radiusvektor, welche als Glieder zweiter Ordnung die Schwere beeinflussen, werden am einfachsten aus dem Potential abgeleitet. Der allgemeine Ausdruck, von dem wir auszugehen haben, lautet daher:

$$V = \frac{Mk^2}{R+H} + \frac{4\pi k^2 \vartheta}{3} \cdot \frac{(R+H)^3 - R^3}{R+H} +$$

$$+k^2 \vartheta \iiint_A \frac{r^2 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\lambda}{E} - k^2 \vartheta \iiint_J \frac{r^2 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\lambda}{E} \qquad 52)$$

mit

$$E = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für } A(r > r_1),$$

$$E = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für } J(r < r_1).$$

Wir benötigen nur die Glieder erster Ordnung und finden genau in derselben Weise wie früher:

$$V = \frac{Mk^2}{R+H} + \frac{4\pi k^2 \vartheta R^2 H}{R+H} -$$

$$-k^2 \vartheta R^2 \iint_A \left(\frac{H}{R} - \alpha f\right) P_n(\cos\gamma) \sin\psi\, d\psi\, d\lambda \qquad 53)$$

$$-k^2 \vartheta R^2 \iint_J \left(\frac{H}{R} - \alpha f_1\right) P_n(\cos\gamma) \sin\psi\, d\psi\, d\lambda.$$

Da nun unter den beiden doppelten Integralzeichen dieselbe Funktion steht, so ergänzen sich die beiden Integrale über A und J zu einem ebensolchen über die ganze Kugelfläche und wir können für f sofort eine Funktion setzen, welche für alle Punkte der Kugel die richtigen Höhen liefert. Diese Funktion ist nichts anderes als die Entwicklung S.[1] Indem wir wieder die Integraleigenschaften anwenden und dabei $\frac{H}{R}$ als Kugelfunktion nullter Ordnung betrachten, bleibt

$$V = \frac{Mk^2}{R+H} + \frac{4\pi k^2 \vartheta R^2 H}{R+H} - 4\pi k^2 \vartheta R H +$$

$$+ 4\pi k^2 \vartheta R^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} S_n(\psi_1 \lambda_1). \qquad 54)$$

Der Einfluß des Meeres wird dadurch berücksichtigt, daß man die Entwicklung S durch die Entwicklung T ersetzt (Gleichung II').

Die Horizontalkomponenten ergeben sich nun durch Differentiation nach ψ_1 und nach λ_1. Es ist

$$\beta = \frac{\partial V}{R \partial \psi_1} = 4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\partial T_n(\psi_1 \lambda_1)}{\partial \psi_1},$$

$$\gamma = \frac{\partial V}{R \sin\psi_1 \partial \lambda_1} = 4\pi k^2 \vartheta \alpha R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\partial T_n(\psi_1 \lambda_1)}{\sin\psi \partial \lambda_1}, \qquad 55)$$

[1] Neumann, Potential und Kugelfunktionen.

in welchen Gleichungen die normalen, von der Abplattung herrührenden Teile schon fehlen.

Der Einfluß der Fliehkraft endlich ist durch den Ausdruck

$$H\omega^2 \sin^2 \psi_1 \tag{56}$$

gegeben.

Fassen wir nun alles zusammen und dividieren gleich durch den normalen Wert der Schwere

$$\frac{Mk^2}{R^2} = \frac{4\pi k^2 \vartheta_m R}{3},$$

so erhalten wir endlich den vollständigen Ausdruck für die Glieder zweiter Ordnung, wobei auch noch von den Gliedern mit H^2 der e^4 enthaltende Teil $\frac{3H_0^2}{R^2} - 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{H_0^2}{R^2}$ in Abzug gebracht wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta g_2}{G} = &+ \frac{3H^2}{R^2} - 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{H^2}{R^2} - \frac{3H_0^2}{R^2} + 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{H_0^2}{R^2} + \\
&- 6\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{\alpha H}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\left[S_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}S_n^M(\psi_1\lambda_1)\right] \\
&+ 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\left[\bar{Y}_n'(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}\bar{Y}_n^M(\psi_1\lambda_1)\right] \\
&+ 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\left[\bar{Z}_n'(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}\bar{Z}_n^M(\psi_1\lambda_1)\right] \\
&+ \frac{9}{2}\frac{\vartheta^2}{\vartheta_m^2}\alpha^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\partial T_n(\psi_1\lambda_1)}{\partial\psi_1}\right)^2 \\
&+ \frac{9}{2}\frac{\vartheta^2}{\vartheta_m^2}\alpha^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\partial T_n(\psi_1\lambda_1)}{\sin\psi_1\partial\lambda_1}\right)^2 \\
&+ \frac{H\omega^2}{G}\sin^2\psi_1 .
\end{aligned} \tag{III}$$

Setzen wir für H die Höhe H_1 eines Punktes der Erdoberfläche, so gilt der obige Ausdruck für einen Punkt der Erd-

oberfläche, der die Koordinaten ψ_1 und λ_1 und die Höhe H_1 über der Kugel K besitzt. Um den Ausdruck für den entsprechenden Punkt $\psi_1\lambda_1$ des Meeresniveaus zu erhalten, hat man einerseits H_1 durch H_0, andrerseits die Entwicklungen Y und Z durch andere zu ersetzen, welche sich zu dem Punkte mit der Höhe H_0 über K ebenso verhalten, wie Y und Z zu dem Punkte mit der Höhe H_1. Wir bezeichnen sie mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\psi\lambda) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\psi\lambda).$$

Es ergibt sich dann, wenn wieder $H_1 - H_0 = h$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{g_{H_1}-g_{H_0}}{G}\right)_2 = \Delta\left(\frac{g_h-g_0}{G}\right) = \frac{3H_1^2}{R^2} - 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{H_1^2}{R^2} - \\
- \frac{3H_0^2}{R^2} + 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\cdot\frac{H_0^2}{R^2} \\
-6\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\frac{\alpha h}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\left\{S_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}S_n^M(\psi_1\lambda_1)\right\} \\
+3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\cdot \\
\cdot\left\{\bar{Y}_n'(\psi_1\lambda_1) - \bar{U}_n'(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}[\bar{Y}_n^M(\psi_1\lambda_1) - \bar{U}_n^M(\psi_1\lambda_1)]\right\} \qquad \text{IV)} \\
+3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n}{2}\cdot \\
\cdot\left\{\bar{Z}_n'(\psi_1\lambda_1) - \bar{V}_n'(\psi_1\lambda_1) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}[\bar{Z}_n^M(\psi_1\lambda_1) - \bar{V}_n^M(\psi_1\lambda_1)]\right\} \\
+\frac{h\omega^2\sin^2\psi_1}{G}.
\end{aligned}$$

Es ist nun zu untersuchen, welche Werte diese Glieder annehmen können.

Vor allem erkennt man, daß mit $\frac{\vartheta}{\vartheta_m} = \frac{1}{2}$ sich die beiden ersten Glieder zu $\frac{3}{2}\frac{H_1^2}{R^2}$ vereinigen. Der Wert des Gliedes ist

immer leicht zu berechnen, wird aber selbst bei den größten Höhen nur wenige Milliontel der Schwere betragen. Dasselbe gilt von den Gliedern mit H_0^2.

Das nächste Glied enthält die Entwicklung αS_n der Höhen über der Kugel K; sie setzt sich zusammen aus der Entwicklung $\alpha S'$ der Seehöhen und den Gliedern von H_m (Gleichung 49). Wenn wir zuerst diese letzteren herausnehmen und uns dabei auf das Glied mit P_2 beschränken, so ist das entsprechende Glied gleich

$$-6 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta_m} \frac{h}{R} \cdot b \cdot \frac{1}{2.2+1} \cdot \binom{2}{2} P_2 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h}{R} b . P_2 .$$

Für $\frac{\vartheta}{\vartheta_m}$ setzen wir wie gewöhnlich $\frac{1}{2}$; b ist nach Gleichung 32) gleich $-0 \cdot 0022325$. Wenn wir ferner für $\frac{h}{R} = 0 \cdot 001$ setzen, so entspricht dies einer Höhe von 6300 *m*, was für die meisten Fälle ausreicht. Da endlich der größte Wert von P_2 gleich 1 ist, so folgt der Maximalbetrag des Gliedes

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 001 . 0 \cdot 002 = \frac{3}{5} \cdot 0 \cdot 000002 = 0 \cdot 000001$$

in Teilen der Schwere, was einer Korrektion der Schwerebeschleunigung von

$$0 \cdot 001\, cm$$

entspricht.

Dieses Glied kann daher, obwohl seine Berechnung immer leicht mit der nötigen Genauigkeit durchgeführt werden kann, wohl immer vernachlässigt werden. Der Einfluß der Abplattung auf alle Schwerereduktionen ist daher unmerklich.

Was nun die Glieder S'_n betrifft, so ist vor allem zu bemerken, daß eine Entwicklung der Unebenheiten der Erdoberfläche Kugelfunktionen ungeheuer hoher Ordnung enthalten muß. Die Glieder mit kleinen n werden wegen des Faktors αh oder α^2 immer sehr klein sein, da aber der Zahlenfaktor

$$\frac{1}{2n+1} \binom{n}{2}$$

sich mit wachsendem n der Grenze $\frac{n}{4}$ nähert, so besteht nicht nur die Möglichkeit, daß die Glieder mit hohem n bedeutende Werte annehmen, sondern es ist sogar die Konvergenz des ganzen Verfahrens, wenigstens innerhalb der Anfangsglieder, in Frage gestellt. In der Tat entstehen die Glieder mit den höheren Potenzen von α aus Entwicklungen von Ausdrücken der Form:

$$(1+\alpha f)^n$$

nach dem binomischen Lehrsatze. Setzen wir hierin aber beispielsweise $\alpha f = 0\cdot001$ und $n = 10000$, so wäre es nötig, um den Wert des Ausdrucks auf $0\cdot01$ sicher zu erhalten, die ersten 30 Glieder zu entwickeln. Eine wenn auch langsame Konvergenz unter den ersten Gliedern würde aber dann eintreten, wenn wir α noch zehnmal kleiner nehmen, also $\alpha f = 0\cdot0001$ setzen. Dann wäre bereits das dritte Glied nur mehr die Hälfte des zweiten. Wir wollen untersuchen, was diese letztere Annahme bei den Größenverhältnissen der Erde bedeuten würde und dann einen Vergleich mit den Tatsachen anstellen. Setzen wir daher $\alpha = 0\cdot001$ und $f = S'_{10000}$ im Maximim $= 0\cdot1$, so wird $\alpha f = 0\cdot0001$ seinen größten und kleinsten Wert mit $\pm 630\,m$ erreichen. Da ferner der Umfang der Erde gleich $40000\,km$ ist, so würde unsere Annahme einer Massenverteilung entsprechen, bei welcher alle $4\,km$ eine Spitze oder ein Gebirgskamm auftritt, welcher von dem nächsten durch ein $2.630 = 1260$ (genauer 1275) m tiefes Tal getrennt ist. Dies würde eine mittlere Neigung der Talseiten von 12 : 20 oder von 34° ergeben. Denkt man sich aber Auf- und Abstieg in Form einer einfachen Sinuslinie, so hätten die Hänge in der Mitte eine Neigung von 60°. Es ist nicht zu leugnen, daß solche steile Hänge sich vereinzelt finden, aber von einer wiederholten Wiederkehr solcher Verhältnisse in beschränkten Gebieten kann nicht die Rede sein. Um dies nachzuweisen, sollen hier einige markante Fälle aus unseren Alpen in dieser Hinsicht untersucht werden.

Die Zahl der S_n, welche zur Darstellung unserer Gebirge in Betracht kommen, ist eine überaus große, so daß die

einzelnen S_n gewiß keine großen Koeffizienten haben können. Dagegen werden sich die S_n, welche annähernd gleicher Ordnung sind, innerhalb beschränkter Gebiete so summieren, als wenn nur eine Funktion S_n, aber mit wesentlich größerem Koeffizienten vorhanden wäre. Zur Beurteilung der Verhältnisse in unseren Alpen wollen wir uns einzelne Gebirgsstöcke durch eine einzige Kugelfunktion S_n dargestellt denken und voraussetzen, daß die übrigen S mit hohem Index den Koeffizienten Null haben; der Effekt für die Reduktion wird annähernd derselbe sein, weil ja doch nur der Wert der S_n für den Punkt $\psi_1\lambda_1$ in Betracht kommt, ohne Rücksicht darauf, wie sich die S_n an anderen Stellen der Erde kombinieren.

Als erstes Beispiel nehmen wir den Schneeberg bei Wien, dessen Gipfel eine Höhe von 2075 *m* besitzt.[1] Die Höhe der Talsohle an seiner Nordostseite beträgt in Puchberg 582 *m*, an der Südwestseite in Kaiserbrunn (Höllental) 537 *m*, im Mittel also 560 *m*, so daß gegen den Gipfel eine Höhendifferenz von 1515 *m* besteht. Die lineare Distanz Puchberg—Kaiserbrunn beträgt 10·7 *km*. Eine Kugelfunktion, welche eine Höhendifferenz von 1515 *m* darstellt, muß einen Koeffizienten gleich 1557 : 2 = 757 besitzen, somit $\alpha S_n = 0\cdot000119$ in Teilen des Radius, S_n selbst im Maximum 0·119. Für eine Station am Gipfel ist $\frac{h}{R} = 0\cdot000325$ und die Größe n wird schließlich 40000 : 10·7 = 3738. Mit diesen Werten wird das dritte Glied in Gleichung IV) zu schätzen sein auf

$$6\cdot\frac{1}{2}\,0\cdot000119\,.\,0\cdot000325\cdot\frac{3738}{4} = 0\cdot000108$$

in Teilen der Schwere.

Ähnliche Verhältnisse finden wir auch in anderen Teilen der nördlichen Kalkalpen.

Zu beiden Seiten des Hochschwab (2278 *m*), eines gewaltigen Gebirgsstockes an der niederösterreichisch-steirischen

[1] Die hier und in den folgenden Beispielen vorkommenden Daten sind teils der Spezialkarte (1 : 75.000), teils der Generalkarte (1 : 200.000) der österreichisch-ungarischen Monarchie entnommen.

Grenze, liegt im Norden Weichselboden (677 *m*), im Süden Aflenz (765 *m*), in einer linearen Distanz von 15 *km*. Die Höhendifferenz beträgt hier 1557 *m*. Es wird hiernach $n = 2667$, S_n im Maximum $= 0 \cdot 122$, $\frac{h}{a} = 0 \cdot 000357$ und der Wert des gesuchten Gliedes

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 001 \,.\, 0 \cdot 122 \,.\, 0 \cdot 000357 \cdot \frac{2667}{4} = 0 \cdot 000087 \,.$$

Als Beispiel aus den Zentralalpen wählen wir den Groß-Venediger (3660 *m*), als Talstationen zu beiden Seiten Windisch-Matrei (975 *m*) und Ober-Krimml (1062 *m*), deren Distanz 37 *km* beträgt. Es ist hier $n = 1081$, S_n im Maximum $0 \cdot 207$, $\frac{h}{a} = 0 \cdot 000574$, womit sich

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 001 \,.\, 0 \cdot 207 \,.\, 0 \cdot 000574 \cdot \frac{1081}{4} = 0 \cdot 000096$$

findet.

Die steilsten Verhältnisse bieten die Dolomiten. Der Monte Kristallo erreicht eine Höhe von 3199 *m*. An seiner Westseite liegt St. Blasius (1474 *m*), an der Ostseite der Misurinasee (1755 *m*). Distanz 9 *km*. Daraus ergibt sich $n = 4444$, S_n im Maximum $0 \cdot 124$, $\frac{h}{a} = 0 \cdot 000502$ und

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 001 \,.\, 0 \cdot 124 \,.\, 0 \cdot 000502 \cdot \frac{4444}{4} = 0 \cdot 000208.$$

Diese Beispiele aus den Alpen zeigen, daß der Fall $S(\text{Max.}) = 0 \cdot 1$ und $n = 10000$ nie erreicht wird. Die S_n sind zwar in unseren Beispielen etwas größer, dagegen die n bedeutend kleiner, so daß die Konvergenz im allgemeinen doch stärker ist als in diesem angenommenen Fall. Immerhin sind aber die Werte der Reduktionsglieder ziemlich bedeutend. Sie gelten allerdings für Gipfelstationen; für Beobachtungen im Tale wäre für S_n sein entgegengesetztes, d. h. negatives Maximum, für $\frac{h}{R}$ aber ein bedeutend kleinerer Wert zu setzen, so daß für diesen Fall die obigen Werte sich auf die Hälfte oder das

Drittel reduzieren würden. Irgendwo in der Mitte des Hanges, an der Stelle, wo S_n das Zeichen wechselt, wäre die Reduktion gleich Null.

Es ist leicht einzusehen, daß die weiteren Glieder in III) und IV), welche den Faktor $\binom{n}{2}$ enthalten, von derselben Ordnung sind, wie das früher betrachtete.

Die Glieder, welche von den zum Radiusvektor senkrechten Komponenten herrühren, werden nach Ausführung der Differentiation Faktoren von der Ordnung $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$ erhalten, welche sich mit wachsendem n der Grenze $\frac{1}{4}$ nähern. Sie werden nur in den seltensten Fällen den Betrag weniger Milliontel der Schwere erreichen und können unbedenklich vernachlässigt werden.

Das Glied endlich, welches von der Fliehkraft herrührt, kann Beträge von der Ordnung

$$0\cdot001 \cdot \frac{1}{289} = 0\cdot0000035$$

der Schwere erreichen. Es kann in allen Fällen leicht berücksichtigt werden.

Aus alldem folgt, daß für Schwerestationen in unserem Alpengebiete der Wert der Glieder zweiter Ordnung den Betrag von einigen Zehntausendstel der Schwere erreichen kann. Das von uns eingeschlagene Verfahren ist also wohl ein selbst für die Anfangsglieder konvergentes, doch dürfen für Hochgebirgsstationen die Glieder zweiter Ordnung nicht mehr vernachlässigt werden.

Um zu zeigen, wie rasch der oben geschätzte Wert mit der Höhe und Steilheit der Gebirge abnimmt, seien hier noch einige Beispiele aus dem Mittelgebirge in analoger Weise behandelt.

Der Jauerling, 957 *m* (ein Gebirgsstock in den Ausläufern des Greinerwaldes an der Donau). Talstationen: Raxendorf (495 *m*) im Westen, Schwalbenbach an der Donau (200 *m*) im Osten; lineare Distanz 8·6 *km*.

$$n = 4651, \quad S_n(\text{Max.}) = 0\cdot 0478, \quad \frac{h}{R} = 0\cdot 000150,$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\cdot 001 \,.\, 0\cdot 0478 \,.\, 0\cdot 000150 \cdot \frac{4651}{4} = 0\cdot 000025.$$

Dreisesselberg (1330 *m*) im Böhmerwalde. Talstationen: Ostermühle (765 *m*) am Osterbache im Westen, Schönau (748 *m*) im Osten; lineare Distanz 17·5 *km*.

$$n = 2286, \quad S_n(\text{Max.}) = 0\cdot 0449, \quad \frac{h}{R} = 0\cdot 000209,$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\cdot 001 \,.\, 0\cdot 0449 \,.\, 0\cdot 000209 \cdot \frac{2286}{4} = 0\cdot 000016.$$

Schneekoppe (1603 *m*) im Riesengebirge. — Talstationen: Schmiedeberg (506 *m*)[1] im Norden, Niederhof (551 *m*) im Süden, lineare Distanz 20·6 *km*.

$$n = 1942, \quad S_n(\text{Max.}) = 0\cdot 0842, \quad \frac{h}{R} = 0\cdot 000251,$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\cdot 001 \,.\, 0\cdot 0842 \,.\, 0\cdot 000251 \cdot \frac{1942}{4} = 0\cdot 000031.$$

Am Mittelgebirge geht also der Fehler selbst für Gipfelstationen auf wenige Hunderttausendstel herunter.

Im ganzen erkennt man, daß die höheren Glieder dieselbe Bedeutung haben wie die sogenannte topographische Reduktion. In der Tat sind sie mit dieser Reduktion im Wesen identisch, da das erste Glied (Gleichung I und II), abgesehen von den Einflüssen kontinentalen Charakters, nur mehr die Plattenanziehung berücksichtigt. Die Glieder zweiter und höherer Ordnung können daher in denselben Fällen vernachlässigt werden wie die topographische Reduktion.

Daraus erhellt übrigens auch, daß die oben durchgeführte Schätzung für den Wert der Glieder zweiter Ordnung doch wohl zu große Werte geliefert hat.

[1] Diese Seehöhe ist der preußischen Landesaufnahme (9. Bd.) entnommen.

Resultate.

Wir können nun die gewonnenen Resultate in folgendes zusammenfassen. Um den Wert der Schwere am Meeresniveau zu finden, genügt bis auf Glieder zweiter Ordnung die Anwendung der Formel

$$\frac{g_h - g_0}{G} = -\frac{2h}{R} + 3\frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h}{R}, \qquad \text{I}$$

welche mit der von Poincaré modifizierten Bouguer'schen Formel identisch ist. Die von der Massenunregelmäßigkeit herrührenden Glieder erster Ordnung fallen weg. Die Glieder zweiter Ordnung, deren vollständiger Ausdruck durch Gleichung IV gegeben ist, können aus dieser Formel wegen des Auftretens von Kugelfunktionen hoher Ordnung nicht berechnet werden, sondern müssen in der herkömmlichen Weise aus den lokalen Verhältnissen gewonnen werden. In den meisten Fällen kann man sie vernachlässigen.

Soll die Schwere von der Anziehung der sichtbaren Massen befreit werden, so ist das Glied

$$-3\frac{\vartheta}{\vartheta_m}\alpha \sum_{n=0}^{k} \frac{n}{2n+1} T_n(\psi_1\lambda_1) - \frac{3}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h'}{R} \qquad \text{II}$$

hinzuzunehmen, wobei es genügt, für k den Wert 5 zu setzen. Der Sinn der obigen Formel ist der: Die allgemeine Verteilung der Kontinentalmassen wird durch Kugelfunktionen bis einschließlich fünfter Ordnung dargestellt. Diese Darstellung ist natürlich nur angenähert und was dieselbe von der Höhe des Beobachtungspunktes noch übrig läßt (h'), wird als die Dicke einer Platte betrachtet, deren Anziehung auf einen Punkt ihrer Oberfläche gleich $\frac{3}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_m} \cdot \frac{h'}{R}$ ist.

Für die Glieder zweiter Ordnung (Gleichung III) gilt dasselbe wie bei Gleichung IV.

Der Vorteil der Formel II liegt darin, daß bei allen Reduktionen auf die Meeresfläche die gesamte Massenverteilung auf der Erde in Rechnung gezogen werden kann, was von großer

Wichtigkeit ist, weil die Anziehung der unter dem Beobachtungspunkte liegenden Platte auf den entsprechenden Punkt des Meeresniveaus unter Umständen durch die Anziehung der andern Kontinente aufgehoben werden kann. Allerdings benötigt man von der übrigen Massenverteilung wegen der großen Distanz nur einer minder genauen Kenntnis: Dies charakterisiert sich in der Formel dadurch, daß die Entwicklung T nur wenige Glieder braucht.

Der Verfasser hofft eine Anwendung der obigen Formeln auf folgenden Grundgedanken aufzubauen: Zuerst wird die Entwicklung T hergestellt, wozu die Seehöhen der Punkte des Festlandes und die im Verhältnisse $(\vartheta-\vartheta'):\vartheta'$ oder $1\cdot 8:2\cdot 8$ verkleinerten Meerestiefen dienen. Mit Hilfe dieser Entwicklung werden die sämtlichen Schwerebeobachtungen auf der Erde nach Formel I und II reduziert. Dies liefert ein System von Schwerewerten, wie es für die Erde gelten würde, wenn alle sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten entfernt wären. Dieses System wird nun selbst wieder nach Kugelfunktionen G_n entwickelt und daraus wieder eine entsprechende Massenverteilung zurück berechnet; dieselbe wird erhalten, indem man die einzelnen G_n mit den Faktoren

$$\frac{2n+1}{4\pi k^2 \vartheta n} = \frac{2n+1}{3n} \cdot \frac{\vartheta_m}{\vartheta} \cdot \frac{R}{g_0}$$

multipliziert, welche nichts anderes sind als die reziproken Werte jener Koeffizienten, durch welche aus der Entwicklung T des Terrains die Entwicklung der Schwere (Gleichung II') entstanden ist. Indem man nun die resultierende Form betrachtet, wird sich ergeben, inwieweit die Kontinente kompensiert sind. Ist die Gleichgewichtstheorie richtig, so muß die zurückberechnete Massenverteilung statt der Kontinente Einsenkungen, statt der Meere Erhebungen zeigen.

Über Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen einer reellen Veränderlichen

von

A. Schoenflies.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Oktober 1904.)

In einem kürzlich erschienenen Hefte dieser Berichte[1] beschäftigt sich Herr W. H. Young mit demjenigen Kapitel meines Berichtes über Mengenlehre, das den »punktweise unstetigen« Funktionen gewidmet ist.[2] Sein Artikel muß den Anschein erwecken, als ob meine Darstellung der Berichtigung bedürfe. Diese Meinung trifft jedoch nicht zu; sie kann nur Folge einer mißverständlichen Auffassung meiner Ausführungen respektive ihres Gegenstandes sein. Zunächst ist zu bemerken, daß das angezogene Kapitel, wie schon die Überschrift zeigt, gar keinen anderen Gegenstand hat, als die Eigenschaften, die einer in einem gewissen Bereich punktweise unstetigen Funktion zukommen; andere Probleme waren, als der Bericht erschien, nicht in Betracht gezogen worden. Zweitens — und das scheint mir die Hauptsache zu sein — bezieht Herr Young die Worte stetig, punktweise unstetig und total unstetig augenscheinlich auf die gesamte Funktion, während sie in meinem Bericht nur für einen perfekten Bereich, resp. für irgend ein Intervall benutzt werden, so daß die Funktion für das ganze Intervall mit Einschluß der Endpunkte den gleichen Stetigkeitscharakter oder kurzgesprochen einen einheitlichen Charakter besitzt.[3] Auf die hieraus fließenden Ausstellungen des Herrn

[1] Bd. 112, Abt. IIa, p. 1317 (1903).

[2] Jahresber. d. deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 8, 2, p. 125 ff. (1900).

[3] Damit steht nicht in Widerspruch, daß ich in der historischen Einleitung des Kapitels diese Begriffe in unbestimmterer Form erwähne; vergl. auch das Folgende.

Young näher einzugehen, erscheint mir daher nicht erforderlich.

Was nun die von Herrn Young im weiteren Verlauf seiner Note abgeleiteten Resultate betrifft, so möchte ich hier zugleich Veranlassung nehmen, die von ihm aufgeworfene Frage zu vertiefen und das von ihm abgeleitete spezielle Resultat zu verallgemeinern.

1. An der angezogenen Stelle nehme ich an, eine Funktion sei in einem Bereich H für eine perfekte Menge T definiert und fahre dann fort:[1] »Es sind dann an sich drei Fälle möglich. Es können erstens alle Punkte von T Stetigkeitspunkte sein oder sie sind sämtlich Unstetigkeitspunkte oder aber sie sind teils Stetigkeitspunkte, teils Unstetigkeitspunkte. Im ersten Fall ist die Funktion in T überall stetig, im zweiten heißt sie überall oder total unstetig. Was den dritten Fall betrifft, so ist weiter zu unterscheiden, ob es Teilbereiche von H gibt, in denen die Funktion total unstetig bezüglich T ist oder nicht. Gibt es keinen Teilbereich dieser Art und dieser Fall ist der einzige, der der näheren Erörterung bedarf und auf den wir uns daher ausdrücklich beschränken, so heißt dies andrerseits, daß die Stetigkeitspunkte einer solchen Funktion überall dicht bezüglich T liegen. Diese Funktionen sollen als punktweise unstetige Funktionen in T bezeichnet werden.«

Ich füge in einer Anmerkung hinzu: »Der Bereich H, in dem eine Funktion definiert ist, muß immer in eine höchstens abzählbare Menge von Teilbereichen H_1, H_2, H_3 . . . zerfallen, so daß in jedem Bereich H_i die Funktion einen der drei oben genannten Charaktere besitzt.«

Die vorstehenden Worte zeigen meines Erachtens, daß es mir gar nicht — was Herr Young annimmt — um eine Einteilung aller Typen reeller Funktionen einer Veränderlichen zu tun war. Ich beschränke mich, wie schon hervorgehoben, auf den Fall, daß der Definitionsbereich eine perfekte Menge ist und daß die Funktion für sie einen einheitlichen Charakter besitzt. Da eine Funktion in verschiedenen Intervallen verschiedenen Stetigkeitscharakter haben kann, so scheint mir

[1] A. a. O., p. 127.

diese Beschränkung durch die Natur der Sache geboten. Sie liegt ebenso im Interesse der Einfachheit, wie in dem der Präzision; sie liegt auch den sämtlichen weiteren Entwickelungen des angezogenen Kapitels als natürliche Voraussetzung zu Grunde.[1] Freilich steht die oben erwähnte beiläufige Anmerkung[2] damit in einem gewissen formalen Widerspruch. Wenn nämlich eine Funktion auf zwei benachbarten Intervallen verschiedenen Stetigkeitscharakter hat, so wird dieser Charakter sich im allgemeinen nicht mehr auf die abgeschlossenen Intervalle beziehen, sondern nur innerhalb von ihnen gelten; ein Tatbestand, der auch sonst im Gebiet der Mathematik immer da angetroffen wird, wo man die Definitionen zunächst für abgeschlossene Mengen aufstellt. Die Anmerkung ist naturgemäß so zu verstehen, daß der bezügliche Charakter der Funktion nur innerhalb der einzelnen Intervalle zukommt.

Dieser evidente Tatbestand ist es, den Herr Young zum Ausgangspunkt nimmt. Er sagt nämlich:[3] »Es ist tatsächlich wahr, wie von Schoenflies behauptet wird, daß es immer möglich ist, eine Intervallmenge anzugeben, deren Intervalle nicht ineinander übergreifen und die Eigenschaft haben, daß in jedem derselben die Funktion durchaus einer einzelnen der Schoenflies'schen Klassen angehört.... Daraus folgt aber keineswegs, daß das ganze Segment auf diese Weise erschöpft ist oder daß, wenn man die Eigenschaften der Funktion nur in diesen Intervallen untersucht, man einen Überblick über die Natur und die Eigenschaften der Funktion bekommen werde.«

2. Mit den letzten Worten weist Herr Young auf eine Aufgabe hin, die er für einen speziellen Fall löst und der ich hier selber einige allgemeine Bemerkungen widmen möchte.

Seien δ_1 und δ_2 zwei in einem Punkt x angrenzende Intervalle, sei k_1 der Unstetigkeitsgrad von x bezüglich des Intervalles δ_1, k_2 derjenige bezüglich δ_2, endlich k derjenige für das Gesamtintervall δ, so hat man

[1] Sie wird in seinem weiteren Text der Kürze halber meist weggelassen.

[2] Herr Young meint, daß ich mich auf Grund dieser Anmerkung auf punktweise unstetige Funktionen beschränke. Dies trifft nicht zu. Die Beschränkung war, wie ich oben erwähnte, historisch gegeben.

[3] A. a. O., p. 1308.

$$k \leqq k_1 + k_2 \qquad \ldots 1)$$

und wenn man einem Stetigkeitspunkt den Grad $k = o$ beilegt, so gilt diese Gleichung für Punkte jeden Charakters. Sie läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß x Grenzpunkt von Intervallendpunkten ist und führt zu folgender allgemeiner Fragestellung:

Seien

$$\{\delta_\nu\} = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

die Intervalle, die der oben erwähnten Anmerkung meines Berichtes entsprechen, also den Bereich H, in dem die Funktion definiert ist, überall dicht bedecken.[1] Diese Intervalle bestimmen bekanntlich durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine nirgends dichte, abgeschlossene Punktmenge S. Innerhalb eines jeden Intervalles δ_ν ist die Funktion überall stetig, überall unstetig oder punktweise unstetig. Gemäß dem Obigen bleibt aber unbestimmt, welchen Charakter die Funktion in den Punkten der Menge S hat. Man kann also fragen, welcher Art dieser Charakter sein mag und dies ist die Frage, auf die Herr Young hinweist.

Die Antwort ist leicht zu geben. Sie lautet, daß der Charakter der Funktion in den Punkten von S nur der Relation 1) folgt, aber einer weiteren Gesetzmäßigkeit nicht unterliegt. Es ist leicht zu zeigen, daß ihm jede beliebige Beschaffenheit aufgeprägt werden kann, wenn man nur die Funktionswerte auf den Intervallen δ_ν in geeigneter Weise wählt; mag sonst der Charakter dieser Intervalle sein, welcher er will. Herr Young zeigt insbesondere — und dies ist der spezielle Fall, auf den er sich beschränkt —, daß die Funktion in allen Punkten von S stetig sein kann, wenn sie innerhalb jedes Intervalls δ_ν total unstetig ist. In den so konstruierten Funktionen erblickt er eine Funktionsklasse, die in meiner Einleitung übersehen worden sei.[2]

3. Daß man Funktionen dieser Art als eine besondere Funktionsklasse einführen kann, ist zweifellos; man könnte sie punktweise stetige Funktionen nennen. Andrerseits ist klar,

[1] Ich beschränke mich hier der Einfachheit halber darauf, daß H ein Continuum ist.

[2] A. a. O., p. 1308.

daß die Art, wie man Funktionen einteilen will, etwas durchaus subjektives besitzt; sie hängt davon ab, welchen Einteilungsgrund man wählt. Für die Einteilung aller Funktionen einer reellen Veränderlichen kommen hier meines Erachtens nur zwei Hauptgegensätze in Frage; derjenige zwischen stetig und unstetig und derjenige zwischen überall dicht und nirgends dicht. Abgesehen von den Funktionen, die überall stetig oder überall unstetig sind, käme man so zu folgenden vier Klassen: 1. Sowohl die Stetigkeitspunkte wie die Unstetigkeitspunkte liegen überall dicht. 2. Die Stetigkeitspunkte liegen überall dicht, die Unstetigkeitspunkte nirgends dicht. 3. Die Stetigkeitspunkte liegen nirgends dicht, die Unstetigkeitspunkte überall dicht. 4. Weder die Stetigkeitspunkte noch die Unstetigkeitspunkte liegen überall dicht. Diese formale Einteilung läßt sich so modifizieren, daß man das Gesamtintervall, in dem die Funktion definiert ist, wieder in Teilintervalle zerlegt, in denen die Funktion einen einfacheren und zugleich einheitlichen Charakter besitzt. Dies gibt dann nur drei Möglichkeiten statt der obigen vier, nämlich nur die drei ersten und der dritte Fall würde derjenige sein, der den punktweise stetigen Funktionen entspricht.

Wenn übrigens die Berücksichtigung solcher Funktionen bisher unterblieben ist, so hat dies vielleicht einen einfachen Grund. Zwischen ihnen und den punktweise unstetigen Funktionen besteht ein prinzipieller Gegensatz, der für die eine Funktionsklasse eine Gesetzmäßigkeit bewirkt, für die anderen nicht. Sei nämlich P die im Intervall H gelegene, nirgends dichte Menge der Stetigkeitspunkte einer punktweise stetigen Funktion. Sie bestimmt eine in H gelegene, überall dichte Intervallmenge $D = \{\delta_\nu\}$. Ist S wiederum diejenige abgeschlossene Menge, die aus den Endpunkten aller Intervalle δ_ν und ihren Grenzpunkten besteht, so gehört jeder Punkt von P auch zu S. Weiteres aber läßt sich nicht aussagen, was darauf beruht, daß ein Grenzpunkt von Stetigkeitspunkten nicht selbst Stetigkeitspunkt zu sein braucht. Mit dem Satz, daß P ein Teil von S sein muß, ist die Analyse zu Ende. Ganz anders bei den punktweise unstetigen Funktionen. Hier hat man es immer mit abgeschlossenen Mengen zu tun und dies bewirkt, daß man

für ihre Struktur und ihre Eigenschaften eine Reihe interessanter Resultate abzuleiten vermag.

4. Ich komme nun auf die in § 2 gestellte Frage zurück. Wir gehen von einer im Bereich H liegenden überall dichten Intervallmenge

$$D = \{\delta_\nu\} = \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

aus, denken uns die Funktion in den Intervallen δ_ν gegeben und fragen, welchen Charakter die Funktion in den Punkten der Menge S haben kann, die durch die Menge D, wie oben erwähnt, bestimmt ist. Wie bereits oben erwähnt, kann man auf die mannigfachste Weise bewirken, daß die Funktion in den Punkten von S vorgeschriebenen Stetigkeitscharakter besitzt, welcher Charakter auch für das Innere der Intervalle δ_ν vorgeschrieben sein mag.

Um dies zu beweisen, gehe ich von einer im Intervall $o \leqq \xi \leqq 1$ definierten willkürlichen reellen Funktion $f(\xi)$ aus. Sei C die Gesamtheit der Punkte dieses Intervalls und es sei

$$C = R + C_g,$$

wo R eine in C überall dichte, abzählbare Menge ist, z. B. die Menge der rationalen Punkte, also C_g ihre Komplementärmenge. Die Menge S nehme ich insbesondere als eine perfekte Menge T an, dann kann man bekanntlich

$$T = T_l + T_r + T_g$$

setzen, wo T_l und T_r die rechten respektive linken Endpunkte der Intervalle δ_ν bedeutet. Bildet man nun die Menge R eineindeutig so auf die Menge $D = \{\delta_\nu\}$ ab, daß die Ordnung der Intervalle der Ordnung der Punkte von R entspricht,[1] so entspricht zugleich jedem Punkt von C_g eineindeutig ein Punkt von T_g. Wenn man nun noch jedes Intervall δ_ν durch seine beiden Endpunkte ersetzt, so hat man eine stetige Abbildung der Punkte von T auf die Punkte von C, die bezüglich R und

[1] Über diese von G. Cantor angegebene Abbildung vergl. Mat. Annalen, 23, p. 481 sowie meinen Bericht p. 79.

T_r respektive T_l einzweideutig, bezüglich C_g und T_g eineindeutig ist. Definiert man nun eine Funktion $f(t)$ für die Menge T so, daß ihr Wert in einem Punkt t von T mit demjenigen identisch ist, den $f(\xi)$ in dem entsprechenden Punkt ξ von C besitzt, so wird $f(t)$ in einem Punkt t' von T den gleichen Stetigkeitscharakter besitzen, wie $f(\xi)$ in dem entsprechenden Punkt ξ'.

Es hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Funktion $f(t)$ zu einer Funktion zu ergänzen, die für das gesamte Intervall H definiert ist. Man braucht nur die Funktionswerte auf jedem Intervall δ_ν so anzunehmen, daß der Charakter der Funktion in den Punkten von T nicht geändert wird. Dabei kann die Funktion innerhalb eines jeden Intervalls δ_ν ganz nach Belieben stetig, punktweise unstetig oder auch total unstetig gewählt werden. Daß dies auf die mannigfachste Weise möglich ist, bedarf keiner Ausführung. Soll sie z. B. innerhalb eines Intervalls δ_ν total unstetig sein, so wird man immer in der Weise zum Ziele kommen, daß man das Maximum ihres Unstetigkeitsgrades auf diesem Intervall geeignet wählt,[1] und ihn bei der Annäherung an seine Endpunkte in geeigneter Weise gegen Null abnehmen läßt, wie es in den von Herrn Young angegebenen Beispielen der Fall ist.

5. Man kann die vorstehenden Tatsachen noch von einem andern Gesichtspunkt aus betrachten. Die Definition des Unstetigkeitsgrades gilt ihrer Natur nach für jede beliebige reelle Funktion, also auch für solche, die in einzelnen Teilbereichen total unstetig sind. Das gleiche gilt also von dem Satz, daß die Punkte, deren Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$ ist, eine abgeschlossene Menge K bilden. In meinem Bericht, der sich nur mit den punktweise unstetigen Funktionen befaßt, ist die Menge K für jedes k nirgends dicht.[2] Betrachtet man insbesondere eine gegen Null abnehmende Reihe von Zahlen

$$k_1 > k_2 > \ldots > k_\nu > \ldots$$

[1] Z. B. proportional der Intervallbreite.

[2] Daß K für jedes k nirgends dicht ist, bildet die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Funktion punktweise unstetig ist; a. a. O. p. 128 und 129.

und sind

$$K_1, K_2, \ldots K_\nu, \ldots$$

die zugehörigen Punktmengen, so ist jede von ihnen in der folgenden enthalten. Bezeichnet man also durch

$$\mathfrak{K} = \{K_\nu\}$$

diejenige Punktmenge, die jeden einem K_ν angehörigen Punkt enthält und setzt

$$H = \mathfrak{K} + \mathfrak{M},$$

wo H wieder das Intervall ist, in dem die Funktion definiert ist und $\mathfrak{M}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{K}$ ist, so stellt $\mathfrak{M}$ die Stetigkeitspunkte der Funktion dar und es ist an sich klar, daß $\mathfrak{M}$ in H überall dicht ist.

Wenn es in H Intervalle gibt, in denen die Funktion total unstetig ist, so kann man immer noch die Mengen K_ν konstruieren; sie werden aber nicht mehr für jedes k_ν nirgends dicht in H sein. Ihre übrigen Eigenschaften bleiben bestehen, insbesondre auch diejenige, daß jede Menge K_ν in der folgenden als Teilmenge enthalten ist. Wird also wieder

$$\mathfrak{K} = \{K_\nu\},\ H = \mathfrak{K} + \mathfrak{M}$$

gesetzt, so stellt auch jetzt noch $\mathfrak{M}$ die Stetigkeitspunkte der Funktion dar. Über diese Menge läßt sich aber sonst nichts mehr aussagen. Sie kann sich auf Null reduzieren, sie kann in H nirgends dicht sein, sie kann abgeschlossen und nicht abgeschlossen sein, sie kann in einzelnen Teilen von H nirgends dicht, in anderen überall dicht sein u. s. w. u. s. w. Der allgemeinste Fall ist auch hier der, daß der Bereich H in je eine endliche oder abzählbare Menge von Teilbereichen zerfällt, in denen die Verteilung der Stetigkeitspunkte nirgends dicht oder überall dicht ist. Die von Herrn Young aufgeworfene Frage, welches die allgemeinste Verteilung der Stetigkeitspunkte einer willkürlichen Funktion ist, findet damit ihre allgemeinste Beantwortung. Was die von Herrn Young selbst gegebene Beantwortung dieser Frage betrifft, die ihn zur Aufstellung der folgenden Klassen führt:

1. Die Stetigkeitspunkte fehlen;

2. die Menge der Stetigkeitspunkte ist abzählbar und hat keine in sich dichte Teilmenge;

3. die Menge der Stetigkeitspunkte ist mehr als abzählbar

3 *a*. und nirgends dicht; oder

3 *b*. überall dicht, nicht abgeschlossen; oder

3 *c*. überall dicht, abgeschlossen,

so bedarf es kaum des besonderen Hinweises, daß sie sich nur auf den Fall bezieht, daß die Funktion in dem ganzen betrachteten Segment einer und derselben dieser Klassen angehört, d. h. also einen einheitlichen Charakter besitzt. Diese Tatsache wird zwar von Herrn Young nicht angeführt; sie zeigt aber, daß auch er der Notwendigkeit folgen muß, die Funktionen zunächst für abgeschlossene Intervalle mit einheitlichem Charakter zu betrachten. Auch hier bleibt aber unbestimmt, welche Eigenschaft der Funktion, wenn sie innerhalb verschiedener Intervalle verschiedenen Charakter hat, in den Endpunkten oder Grenzpunkten dieser Intervalle zukommen mag, und man kann auch hier die oben in § 2 gestellte Frage erheben.[1] Herr Young muß also die Ausstellungen, die er gegen mich richtet, in der gleichen Weise gegen sich selber erheben.

---

[1] Man bestimme z. B. eine Funktion so, daß sie innerhalb des Intervalles von —1 bis 0 stetig ist und innerhalb des Intervalles von 0 bis 1 punktweise stetig, in dem S. 4 genannten Sinn. Dann kann sie im Nullpunkt sowohl stetig wie unstetig sein. Auch fällt sie unter keine der obigen Klassen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. IX. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Zur kinetischen Theorie der Abhängigkeit der Gasdichte von den äußeren Kräften

von

Prof. **G. Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. November 1904.)

Wir wollen mit folgender Überlegung beginnen. Durch das zylindrische Gefäß *ABCD* (Fig. 1) denken wir uns zwei ideale parallele Ebenen *EE'* und *FF'* gelegt. Das Gefäß sei mit einem einfachen Gas gefüllt.

Betrachten wir ein bestimmtes Volumen unseres Gases, so können wir daraus immer die Zahl N der Molekeln in der Volumseinheit finden, falls wir die Zahl der Molekeln in diesem Volumen durch das Volumen selbst dividieren. Ist unser Gefäß vollkommen geschlossen und wirken auf das Gas keine äußeren Kräfte, so erhalten wir für die Zahl N immer dieselbe Größe, indem die etwa vorkommenden Abweichungen im Vergleiche zu N so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können, falls wir zur Berechnung Volumina benützen, welche eine sehr große Zahl von Molekeln enthalten. Gehen wir jedoch auf entsprechend kleine Räume über, so können die Werte für N sehr verschieden ausfallen. Es liegen auch bereits von verschiedenen

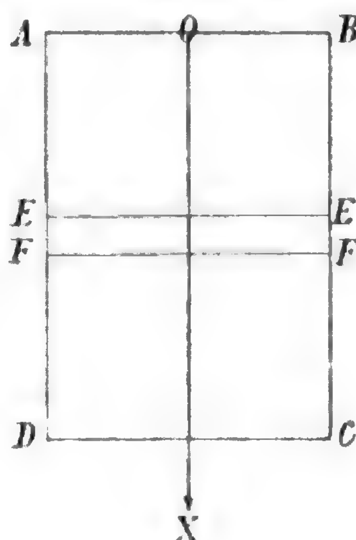


Fig. 1.

Forschern[1] Versuche vor, die Dichtenverteilung in einem Gas zu berechnen. Nichtsdestoweniger können wir aber auch aus beliebig kleinen Räumen den richtigen Wert für die Zahl N erhalten, wenn wir den Mittelwert der in dem bewußten Raum befindlichen Molekeln über eine genügend lange Zeit bilden. Dabei nehmen wir eine Molekel als in einem bestimmten Raum vorhanden an, wenn deren Schwerpunkt sich daselbst befindet. Unsere Behauptung geht also darauf hinaus, daß, wenn ν die jeweilige Zahl der Molekeln während einer unendlich kleinen Zeit dt in dem beliebig kleinen Volumen ω ist, dann

$$N = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\nu}{\omega} dt$$

sein muß, vorausgesetzt, daß das Zeitintervall $t_2 - t_1$ genügend groß ist.

Wir können uns dies etwa folgendermaßen klar machen. Die beiden Ebenen EE' und FF' seien einander beliebig nahe; ihre Entfernung sei δ. Die Zahl der Molekeln zwischen den Ebenen wird sich beständig ändern. In der Volumeinheit des Gefäßes seien ν Molekeln mit einer Geschwindigkeitskomponente ξ senkrecht gegen EE', d. h. parallel zur x-Achse, vorhanden, die wir gleichzeitig als die Zylinderachse ansehen wollen. Von diesen Molekeln werden $\nu\xi$ in der Sekunde die Flächeneinheit der Ebene EE' passieren. Die Strecke δ zwischen den beiden Ebenen werden sie in der Zeit $\frac{\delta}{\xi}$ zurücklegen. Die mittlere Zahl der Molekeln in dem Raum δ, d. h. in einem Zylinder von der Höhe δ und der Grundfläche Eins ist daher

$$\nu\xi \cdot \frac{\delta}{\xi} = \nu\delta,$$

wobei wir als Zeitintervall die Zeiteinheit benützt haben, was erlaubt ist, weil wir als solche jede beliebige Zeitgröße wählen

[1] Siehe z. B. v. Smoluchowski, Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie und Zustandsgleichung. Boltzmann-Festschrift, p. 626 ff. 1904.

können. Dehnen wir diese Überlegung auf alle möglichen Geschwindigkeitskomponenten ξ aus, so ergibt sich als mittlere Zahl der Molekeln im Volumen δ

$$\Sigma\nu\delta = \delta\Sigma\nu = \delta N,$$

wobei N jetzt die Zahl sämtlicher Molekeln in der Volumeinheit ist. Die Summierung ist dabei über alle positiven und negativen ξ auszudehnen, d. h. wir ziehen gleichzeitig die Molekeln, welche von oben nach unten und jene, welche von unten nach oben fliegen, in Betracht.

Dividieren wir jetzt die Zahl der Molekeln im Raum δ durch den Raum selbst, so erhalten wir N als die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit. Damit bestätigt sich unsere Behauptung, daß es gleichgültig ist, welchen Raum wir zur Bestimmung der Anzahl der Molekeln in der Volumeinheit oder, was dasselbe heißt, zur Bestimmung der Dichte des Gases benützen.

Es ist das eine natürlich selbstverständliche Sache, die sich als unmittelbare Folge aus der Annahme ergibt, daß wir es mit einem Gas zu tun haben, welches sowohl »molar« als »molekular ungeordnet« ist. Wir haben jedoch die Auseinandersetzung deshalb so umständlich durchgeführt, weil sie uns im folgenden dienlich sein wird. Unsere bisherige Betrachtung hat auch nur unter der Voraussetzung Gültigkeit, daß der Durchmesser der Wirkungssphären der Molekeln, gleichgültig, ob wir diese als vollkommen elastische Kugeln oder als Kraftzentren ansehen, klein ist gegenüber den mittleren Abständen der Molekeln, daß wir es also mit einem genügend verdünnten Gas zu tun haben.

Wir geben nun den Ebenen EE' und FF' bestimmte physikalische Eigenschaften. Die Ebene EE' soll auf jede Molekel, welche sie durchsetzt, eine Kraft parallel zur x-Achse, also senkrecht nach unten ausüben, so daß beim Passieren dieser Ebene von oben nach unten jede Molekel einen Energiezuwachs a erfährt, von unten nach oben jedoch verliert. Für die Ebene FF' gelte dasselbe in entgegengesetzter Richtung.

Wir nehmen δ so klein an, daß wir jene Fälle, daß eine Molekel zwischen den beiden Ebenen einen Zusammenstoß

mit einer anderen erfährt, außer Betracht lassen können. Jede Molekel, welche demnach von oben EE' passiert, geht ungestört durch FF' weiter und umgekehrt.

Wir fragen nun: Wie groß ist jetzt die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit zwischen den beiden Ebenen, wenn sie im übrigen Gefäß N ist? Wir wollen wieder in der obigen Weise vorgehen. $\nu\xi$ Molekeln passieren in der Sekunde die Flächeneinheit der Ebene EE', ändern aber beim Passieren ihre Komponente ξ in ξ', und zwar ist nach unserer Annahme $\xi' > \xi$, da jede Molekel den Energiezuwachs a erfährt. Die Zeit, welche eine jede solche Molekel zwischen den Ebenen zubringt, ist $\frac{\delta}{\xi'}$; die mittlere Zahl dieser herausgehobenen Molekeln im Raum δ ist somit

$$\nu\xi \cdot \frac{\delta}{\xi'} = \nu\delta\frac{\xi}{\xi'},$$

die Gesamtzahl hingegen

$$\Sigma\nu\delta\frac{\xi}{\xi'} = \delta\Sigma\frac{\nu\xi}{\xi'} = \delta N\left(\overline{\frac{\xi}{\xi'}}\right),$$

wobei wir unter $\left(\overline{\frac{\xi}{\xi'}}\right)$ den Mittelwert sämtlicher $\frac{\xi}{\xi'}$ verstehen.

Nun ist aber nach unserer Voraussetzung jedes einzelne $\frac{\xi}{\xi'}$ kleiner als Eins, folglich auch

$$\left(\overline{\frac{\xi}{\xi'}}\right) < 1,$$

und

$$\delta N\left(\overline{\frac{\xi}{\xi'}}\right) < \delta N$$

oder

$$N\left(\overline{\frac{\xi}{\xi'}}\right) < N.$$

Das heißt: Zwischen unseren Ebenen ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit kleiner, und zwar beständig kleiner als im übrigen Gefäß.

In meiner Abhandlung »Zwei Wege zum Maxwellschen Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln«[1] habe ich nun gezeigt, daß, wenn wir in einem ähnlichen zylindrischen Gefäß wie Fig. 1 eine ideale Ebene von der Art der Ebene EE' besitzen (Fig. 2), im unteren Teil des Gefäßes die Dichte des Gases größer sein muß als im oberen. Allerdings wurde dabei vorausgesetzt, daß die Räume so groß seien, daß auch in jedem Volumelement noch sehr viele Molekeln vorhanden sind. Es hat somit den Anschein, als wäre die Möglichkeit vorhanden, daß für sehr kleine Räume bezüglich der Gasdichte andere Gesetze gelten als für genügend große, oder es hätten die hydrostatischen Grundgleichungen für sehr kleine Räume keine Gültigkeit mehr.

Es sei schon jetzt erwähnt, daß dem nicht so ist, sondern daß unser Resultat einen ganz bestimmt definierten Gaszustand voraussetzt, der tatsächlich nicht vorhanden ist. Diese Definition besteht in dem Verlangen, daß zwischen den Ebenen EE' und FF' nie eine Molekel einen Zusammenstoß erfahre, was in Wirklichkeit nicht vorkommt.

Wie leicht man aber geneigt sein kann, die obige Überlegung für bindend anzusehen, geht aus einem anderen Beispiel hervor, welches tatsächlich von anderer Seite angegeben wurde und etwa in folgendem besteht. Es sollte gezeigt werden, daß sich eine Gastheorie in gleicher Weise wie die bestehende entwickeln lasse, wenn man den Molekeln lediglich Anziehungskräfte beilegt. Sieht man z. B. die Molekeln als Kugeln an, welche beim Zusammentreffen wie Billardbälle wieder auseinanderfliegen, so würde man denselben Effekt erzielen, wenn beim Durchschneiden der Wirkungssphären zwei Molekeln sich mit sehr großer Kraft anziehen würden. Sie würden dann einfach durcheinander hindurchfliegen und sich nach der Trennung geradeso bewegen, als hätten wir es mit einem Zusammenstoß vollkommen elastischer Kugeln zu tun gehabt. Ja auch eine Bewegung, wie sie aus der Maxwell'schen Annahme, die Molekeln stoßen sich mit Kräften ab, welche verkehrt

[1] Diese Sitzungsber., CXII., p. 309 ff. 903; Drude's Ann., Bd. 11, p. 1071 ff. 1903.

proportional der fünften Potenz ihrer Entfernung sind, läßt sich durch Anziehungskräfte derselben Art darstellen. Es ist dabei nur die Voraussetzung notwendig, daß jene Fälle, bei welchen sich gleichzeitig mehr als zwei Wirkungssphären durchschneiden, außer Betracht gelassen werden.

Hätten wir in Wirklichkeit zwei im übrigen ganz gleiche Gase nur mit dem Unterschied, daß die Abstoßungskräfte zwischen den Molekeln beim einen durch analoge Anziehungskräfte beim anderen ersetzt wären, so würden sich tatsächlich diese beiden Gase sehr verschieden verhalten. Daß man nach den obigen Annahmen das gleiche Verhalten beider Gase folgerte, rührt davon her, daß man im zweiten Fall ein Gas annahm, welches »molekular geordnet« ist; denn die Forderung, gleichzeitig sollen sich nie mehr als zwei Wirkungssphären durchschneiden, läuft auf eine bestimmte »molekulare Ordnung« hinaus, die bei einem wirklichen Gas nie vorkommt. Vielmehr gilt für alle Fälle jenes bedeutende, von L. Boltzmann gefundene Theorem, welches die Beziehung zwischen Gasdichte und äußeren Kräften feststellt.

Wir stellten dieses Gesetz in der bereits zitierten Abhandlung folgendermaßen dar.

Für die Zahl dN der Molekeln in der Volumeinheit, welche eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u+du$ besitzen, erhielten wir den Ausdruck

$$dN = \frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(u^2+2\chi)} du.$$

Hier haben die einzelnen Buchstaben folgende Bedeutung. α ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln, χ das Potential der äußeren Kräfte und N_0 die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit an jenen Stellen des Gases, wo $\chi = 0$ wird.

Wir haben die angeführte Formel unter der Annahme abgeleitet, daß jedes in Betracht kommende Volumelement eine sehr große Anzahl von Molekeln enthält. Wir wollen nun zeigen, daß die Formel in gleicher Weise gültig ist, wenn wir

die gestellte Annahme fallen lassen, doch werde vorerst folgende Untersuchung gemacht.

Wir denken uns wieder ein Gefäß (Fig. 2) ähnlich dem Gefäß Fig. 1. Durch dasselbe legen wir die ideale Ebene EE', welche die Eigenschaft besitzt, daß jede Molekel, welche sie von oben nach unten passiert, den Energiezuwachs a erfährt.

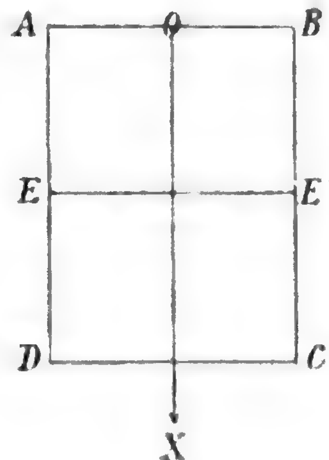


Fig. 2.

Die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit sei oben N_0, unten N_1. Die Zahl im oberen Teil, welche eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u+du$ senkrecht zur Ebene EE' besitzt, ist pro Volumeinheit nach dem Maxwell'schen Gesetz

$$\frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du. \tag{I}$$

Die Zahl, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von diesen Molekeln nach unten wandert, ist somit

$$\frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du.$$

Jede dieser Molekeln gewinnt beim Passieren der Ebene EE' den Energiezuwachs a, tritt somit mit vergrößerter Geschwindigkeitskomponente u' in den unteren Teil des Gefäßes ein. u und u' stehen in dem Zusammenhang

$$\frac{mu'^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + a$$

oder

$$u'^2 = u^2 + \frac{2a}{m}. \qquad (1)$$

Zur Erhaltung des Gleichgewichtszustandes müssen ebensoviel Molekeln von der Geschwindigkeitskomponente u' nach oben die Flächeneinheit der Ebene EE' passieren. Deren Zahl ist gemäß dem früheren

$$\frac{N_1}{\alpha\sqrt{\pi}} u' e^{-\frac{u'^2}{\alpha^2}} du'.$$

Aus Gleichung (1) können wir

$$u'du' = udu$$

folgern und erhalten durch Einführung der Variabeln u für den letzten Ausdruck

$$\frac{N_1}{\alpha\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(u^2+\frac{2a}{m}\right)} du = \frac{N_1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2a}{m\alpha^2}} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du. \qquad (II)$$

Da die Ausdrücke (I) und (II) einander gleich sein müssen, so ergibt sich ohneweiters

$$N_1 = N_0 e^{\frac{2a}{m\alpha^2}},$$

eine Beziehung, die wir ebenfalls schon in der mehrmals erwähnten Abhandlung benützt haben. Während somit die $\frac{N_1}{\alpha\sqrt{\pi}} u' e^{-\frac{u'^2}{\alpha^2}} du'$ Molekeln, welche nach oben fliegen, vollständigen Ersatz durch die aus dem oberen Teil des Gefäßes nach unten fliegenden Molekeln finden, solange $u' > \sqrt{\frac{2a}{m}}$ ist, wird die Stetigkeit in der Verteilung der Geschwindigkeiten dadurch erzielt, daß alle Molekeln, für welche $u' < \sqrt{\frac{2a}{m}}$ ist, an der Ebene EE' reflektiert werden.

Wir kehren wieder zur Fig. 1 zurück, wollen jetzt aber annehmen, daß die Kräfte, welche auf die Molekeln beim Passieren der Ebenen EE' und FF' wirken, untereinander und

mit der x-Achse gleich gerichtet sind. Hat daher eine Molekel eine Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der x-Achse, so erlangt sie beim Passieren der Ebene EE' den Energiezuwachs a_1; fliegt sie in derselben Richtung durch die Ebene FF', so wächst ihre Energie um a_2. Nach den Entwicklungen der bereits genannten Abhandlung, sowie nach der eben gemachten Ableitung ist direkt klar, daß, wenn wir die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit des oberen Teiles des Gefäßes mit N_0 bezeichnen, die entsprechende Zahl im unteren Teil

$$N_2 = N_0 e^{\frac{2(a_1+a_2)}{m\alpha^2}}$$

ist. Es ist ferner bekannt, daß in beiden Teilen des Gefäßes das Maxwell'sche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten gültig ist.

Fliegt nun eine Molekel mit der Geschwindigkeitskomponente u'' von unten durch die Ebene FF', so erfährt sie eine Verminderung der Geschwindigkeit und sie geht mit der Komponente u' zwischen FF' und EE' weiter nach oben. Beim Passieren der Ebene EE' tritt eine neue Verminderung ein, so daß sie mit der Komponente u in den oberen Teil des Gefäßes gelangt. Dabei bestehen die Beziehungen

$$\frac{mu''^2}{2} = \frac{mu'^2}{2} + a_2,$$

$$\frac{mu'^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + a_1.$$

Zur Erhaltung des Beharrungszustandes muß nun jede Molekel, welche die Ebene EE' nach oben passiert, durch eine gleichwertige, von oben kommende, ersetzt werden. Die Zahl der Molekeln, welche den unteren Teil des Gefäßes mit der Geschwindigkeit u'' verlassen und in den oberen Teil eintreten, ist pro Zeit- und Flächeneinheit wiederum

$$\frac{N_2}{\alpha\sqrt{\pi}} u'' e^{-\frac{u''^2}{\alpha^2}} du'' = \frac{N_2}{\alpha\sqrt{\pi}} u' e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(u'^2 + \frac{2a_2}{m}\right)} du' =$$

$$= \frac{N_2}{\alpha\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(u^2 + \frac{2a_1}{m} + \frac{2a_2}{m}\right)} du =$$

$$= \frac{N_2 e^{-\frac{2(a_1+a_2)}{m\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = \frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du.$$

Der letzte Ausdruck in dieser Gleichung entspricht aber vollkommen der Zahl der Molekeln, welche eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u+du$ senkrecht nach unten haben und pro Flächen- und Zeiteinheit aus dem oberen Teil des Gefäßes nach unten durch die Ebene EE' fliegen. Unterhalb EE' verwandelt sich die Komponente u jedoch in u', welches größer ist als u. Diese Geschwindigkeit u' wird beibehalten bis zum Auftreffen auf FF'. Wiederum ist Stetigkeit in der Verteilung der Geschwindigkeiten aller von EE' nach FF' gehenden Molekeln vorhanden, da alle u', welche kleiner als $\sqrt{\frac{2a_1}{m}}$ sind, ihre Ergänzung in den an EE' reflektierten Molekeln finden.

Es tritt also durch FF' pro Flächen- und Zeiteinheit in den Raum zwischen EE' und FF' die Zahl

$$\frac{N_2 e^{-\frac{2a_2}{m\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{\pi}} u' e^{-\frac{u'^2}{\alpha^2}} du'$$

ein, welche eine Geschwindigkeit zwischen u' und $u'+du'$ besitzen. Da diese Molekeln entweder direkt an EE' reflektiert werden oder, wenn dies nicht geschieht, die von oben neu eintretenden Molekeln denselben Effekt haben, als würden einfach sämtliche von unten kommenden Molekeln an EE' reflektiert, so ist die Zeit, welche die Molekeln in dem Raum zwischen den Ebenen EE' und FF', deren Abstand wiederum δ sein soll, verweilen, $\frac{2\delta}{u'}$. Multiplizieren wir diese Zeit mit der Anzahl der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von unten eintretenden Molekeln, so erhalten wir die Zahl der Molekeln,

welche im Mittel im Raum δ vorhanden sind und eine Geschwindigkeit zwischen u' und $u'+du'$ besitzen. Diese ist demnach

$$\frac{N_2 e^{-\frac{2a_2}{m\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u'^2}{\alpha^2}} du' . \delta .$$

Dividieren wir durch δ, so erhalten wir die Zahl derartiger Molekeln in der Volumeinheit. Diese ist also

$$\frac{N_2 e^{-\frac{2a_2}{m\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u'^2}{\alpha^2}} du' .$$

Wir haben also wieder eine Anordnung nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz vor uns, wobei die Gesamtzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Molekeln

$$N_1 = N_2 e^{-\frac{2a_2}{m\alpha^2}}$$

ist. Das ist aber jene Zahl, welche vom Maxwell-Boltzmann'schen Gesetz verlangt wird.

Unsere Betrachtung verlangt aber noch eine Ergänzung. Wir erhielten nur deshalb in dem Raum zwischen EE' und FF' die Maxwell-Boltzmann'sche Verteilung, weil die Kräfte, welche in den Ebenen auf die Gasmolekeln wirken, gleich gerichtet sind, so daß von oben nach unten die Dichte des Gases wächst. In dem eingangs betrachteten Fall war die Annahme so, daß die Kräfte in den Ebenen EE' und FF' gegen das Innere des von diesen begrenzten Raumes wirken und wir konnten dann scheinbar auch einen möglichen Beharrungszustand ableiten, der nicht dem Maxwell-Boltzmann'schen Verteilungsgesetz folgte. Soll die zuletzt gemachte Überlegung einspruchsfrei sein, so müssen noch die Zusammenstöße in Betracht gezogen werden, welche die Molekeln zwischen EE' und FF' machen.

Erfährt eine Molekel in dem genannten Raum einen Zusammenstoß, so wird die Regel die sein, daß die stoßende Molekel außerhalb dieses Raumes liegt. Machen wir δ unendlich klein, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß beide Molekeln

beim Zusammenstoß im Raum δ liegen, unendlich klein höherer Ordnung sein, so daß wir sagen können: Die Zusammenstöße finden so statt, daß die stoßende Molekel außerhalb des in Betracht gezogenen Raumes liegt. Die gestoßenen Molekeln werden ebenfalls wieder Geschwindigkeiten besitzen, welche das Maxwell'sche Verteilungsgesetz befolgen, da ja die stoßenden Molekeln im oberen und unteren Teil des Gefäßes nach diesem Gesetz verteilt sind. Betrachten wir daher die gestoßenen Molekeln allein, so werden sie sich nach oben und unten genau den Zahlen N_0 und N_2 proportional verteilen. Nach oben werden nur jene wandern können, deren Geschwindigkeitskomponente $u' > \sqrt{\frac{2a_1}{m}}$ ist, während nach unten alle Molekeln, auch die an EE' reflektierten, austreten können. Da nun die Zahl der Zusammenstöße proportional der Anzahl der eintretenden Molekeln ist, so hält sich die Zahl der eintretenden Molekeln, welche einen Stoß erfahren, mit der Zahl der austretenden sowohl nach oben als nach unten im Gleichgewicht. Es wird dadurch an der Verteilung gar nichts geändert.

Die Untersuchung, welche wir für den Fall gemacht haben, daß die Kräfte in den Ebenen EE' und FF' gleich gerichtet sind, lassen sich ohneweiters auf den Fall übertragen, daß sie entgegengesetzt, aber nach außen gerichtet sind. Das heißt also: In der Ebene EE' wirkt auf die Molekeln eine Kraft senkrecht nach oben, in der Ebene FF' senkrecht nach unten. Es ist dann im oberen und unteren Teil des Gefäßes die Dichte des Gases größer als im Zwischenraum $EE'\,FF'$.

Einer besonderen Überlegung bedarf nur noch der Fall, daß in der Ebene EE' eine Kraft senkrecht nach unten auf die Molekeln wirkt, in der Ebene FF' senkrecht nach oben. Die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn eine Molekel in der Richtung der Kraft die Ebene EE', bezüglich FF' passiert, sei wie früher mit a_1 respektive a_2 bezeichnet. Es folgt dann, wie bereits gezeigt wurde, daß

$$N_2 = N_0 e^{\frac{2(a_1 - a_2)}{m a^2}}$$

und daß wieder im oberen und unteren Teil des Gefäßes der Maxwell'sche Verteilungszustand realisiert ist. Daraus ergibt

sich weiter, daß zwischen den Ebenen EE' und FF' die Stöße, welche die Molekeln erleiden, derart erfolgen, daß die gestoßenen Molekeln ebenfalls das Maxwell'sche Verteilungsgesetz befolgen.

Wir nehmen nun $a_1 > a_2$ an, was die Allgemeinheit unserer Betrachtung nicht beeinträchtigt. Es ist dann die Dichte im unteren Teil des Gefäßes größer als im oberen. Alle Molekeln, welche von oben kommen, passieren die Ebene EE' und FF', alle, welche von unten kommen, können zwar FF', nicht alle jedoch EE' passieren, doch ergänzen sich die von oben kommenden Molekeln mit den an EE' reflektierten so, daß sie innerhalb des Raumes $EE'FF'$ dieselbe Strömung nach unten darstellen, wie die von unten durch FF' kommenden Molekeln sie nach oben bilden. Durch die Zusammenstöße innerhalb $EE'FF'$ werden jetzt aber auch Geschwindigkeitskomponenten u' erzeugt, welche kleiner sind als $\sqrt{\frac{2a_2}{m}}$. Derartige Molekeln können den Zwischenraum überhaupt nicht mehr verlassen, bis sie durch einen Zusammenstoß wieder eine größere Geschwindigkeitskomponente erlangen. Dies hat eine Ansammlung von Molekeln zur Folge, welche sowohl von EE' als FF' zurückgeworfen werden, also zwischen EE' und FF' hin- und herfliegen. Diese Molekeln müssen sich mit jenen, welche aus dem oberen und unteren Teil des Gefäßes in den Zwischenraum eintreten, so ergänzen, daß sie als Ganzes das Maxwell'sche Verteilungsgesetz befolgen; denn nur unter dieser Bedingung erfährt der Verteilungszustand durch die Zusammenstöße keine Veränderung. Nur unter dieser Bedingung haben wir es mit einem Beharrungszustand zu tun. Dadurch, daß die Molekeln von zu kleiner Geschwindigkeitskomponente u' in FF' reflektiert werden, erreichen wir für das oberhalb FF' liegende Gas dasselbe, als wenn wir uns den Gaszustand zwischen EE' und FF' nach unten beliebig weit ausgedehnt denken. Können wir aber das, dann gilt für unseren kleinen Zwischenraum genau dasselbe, wie für beliebig große Räume. Wir haben in unserem kleinen Zwischenraum genau dieselbe Verteilung der Molekeln, als wäre er ein beliebig großer. Wir können mit einem Wort alle jene Überlegungen anwenden,

welche wir unter der Annahme gemacht haben, daß in jedem Volumelement noch sehr viele Molekeln enthalten sind. Es gilt demnach für alle Fälle, auch in dem sehr kleinen Raum $EE'FF'$, das Maxwell-Boltzmann'sche Gesetz.

Genau dieselbe Überlegung, welche wir für einen sehr kleinen Zwischenraum gemacht haben, können wir für beliebig viele machen. Es wird die Untersuchung und das Resultat kein anderes, wenn wir uns anstatt zwei, beliebig viele sehr nahe aneinander liegende parallele Ebenen in unserem Gefäß denken und jede in der entsprechenden Weise mit Kräften ausstatten.

Nun denken wir uns ein beliebiges Kraftfeld, welches mit einem Gas erfüllt ist. Dieses Kraftfeld sei derart, daß für alle vorkommenden Kräfte ein Potential existiert. Das ganze Feld erfüllen wir mit unendlich viel unendlich nahe aneinander liegenden Äquipotentialflächen. Auf einer beliebigen Potentialfläche begrenzen wir ein so kleines Stück, daß wir es als eben betrachten können. Auf der ganzen Peripherie dieses Stückes errichten wir Lote und schneiden so ein korrespondierendes Stück aus der benachbarten Potentialfläche heraus. Auf den Raum, den wir so erhalten, können wir direkt unsere früheren Betrachtungen anwenden, denn er unterscheidet sich in nichts von den gemachten Annahmen. Da sich dies aber an jeder Stelle unseres Gases durchführen läßt, so ist bewiesen, daß, wie immer die Kräfte verteilt sein mögen, in allen Fällen für den Beharrungszustand das Maxwell-Boltzmann'sche Verteilungsgesetz gültig ist.

Über die disruptive Entladung in Flüssigkeiten

von

Dr. Karl Przibram.

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. November 1904.)

Schon wiederholt wurde die elektrische Festigkeit flüssiger Dielektrika zum Gegenstande von Messungen gemacht.

Im Jahre 1850 machte Masson[1] eine Reihe von Messungen an verschiedenen isolierenden Flüssigkeiten nach Faraday's[2] Methode der korrespondierenden Schlagweiten. Macfarlane und Playfair[3] maßen 1878 die zum Durchschlagen gleicher Dicken verschiedener Isoliermittel erforderliche Potentialdifferenz. W. Holtz[4] (1880) verglich die Schlagweiten seiner Influenzmaschine in einigen Flüssigkeiten. G. Quincke[5] (1886), B. und F. Bourne[6] (1892), C. P. Steinmetz[7] (1897), F. W. Edmondson[8] (1898), T. Gray[9] (1898)

---

1 Ann. d. Chim. e. Phys. [3], 30, p. 49, 1850. Vergl. Wiedemann, Elektrizität, IV., p. 808, 1885.

2 Exp. Res. XIII., § 1507.

3 Trans. Edinb. Roy. Soc., 29, p. 561, 1878. Vergl. Wiedemann, Elektrizität, IV., p. 808, 1885.

4 Wied. Ann., 11, p. 710, 1880.

5 Wied. Ann., 28, p. 540, 1886.

6 Fortsch. d. Phys., 48, 1892; Lum. El., 44, p. 42 bis 45, 1892.

7 El. World, 30. Nov. 1897; Fortsch. d. Phys., 53, p. 475, 1897.

8 Phys. Rev., 6, p. 65 bis 97, 1898.

9 Phys. Rev., 7, p. 199 bis 209, 1898; Science Abstracts, 2, p. 135, 1899.

und J. d'Almy[1] (1899) bestimmten das Entladungspotential in Flüssigkeiten und J. d'Almy gelangte auf Grund seiner Messungen zu einer Formel von der Form

$$V = \alpha d + \beta$$

(V = Potentialdifferenz, d = Abstand der Elektroden, α und β Konstanten der Flüssigkeit) für Benzol, Xylol, Terpentinöl und Petroleum. In allen zitierten Arbeiten wurde jedoch entweder nur eine kleine Zahl von Flüssigkeiten genaueren Messungen unterzogen oder, wo eine größere Zahl untersucht wurde, ist die Auswahl derselben von technischen Gesichtspunkten aus getroffen (Anwendbarkeit als Isolationsmittel) und dementsprechend wohl auch nicht auf besondere Reinheit Gewicht gelegt worden. Daß es aber bei dem elektrischen Verhalten der Flüssigkeiten sehr wesentlich auf Reinheit ankommt, hat namentlich J. d'Almy nachgewiesen. Ich habe deshalb eine größere Anzahl chemisch reiner, organischer Verbindungen auf ihre elektrische Festigkeit geprüft, in der Hoffnung, einen Zusammenhang dieser Eigenschaft mit der chemischen Konstitution aufzufinden.

Durch die Untersuchungen von Holtz weiß man, daß die maximale Funkenlänge in Flüssigkeiten ebenso wie in Gasen zwischen ungleichen Elektroden von deren Polarität abhängig ist, und zwar gaben alle von Holtz untersuchten Flüssigkeiten längere Funken, wenn eine positive Spitze einer negativen Scheibe gegenüberstand (positive Funken), als wenn die Spitze negativ, die Scheibe positiv war (negative Funken).

Um auch diese Erscheinung zu beobachten, ließ ich den Funken zwischen einem bis auf wenige Millimeter in Glas eingeschmolzenen Platindraht und einer Kreisscheibe übergehen und bestimmte die größte Funkenlänge einmal für positive, einmal für negative Spitze. Es wurden drei Gefäße verwendet. Bei Apparat I (Fig. 1) ist die eine Elektrode eine Zinkscheibe von 4 *cm* Durchmesser, die von einem dicken, als Zuleitung dienenden und durch eine starke Glasröhre führenden Draht getragen wird. Die Glasröhre, welche die Platinspitze trägt, ist

[1] Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 1, p. 95 bis 99, 1899.

mit Reibung durch einen Kork verschiebbar. Beide Elektroden werden von einer Holzklammer gehalten und tauchen in ein Becherglas mit der zu untersuchenden Flüssigkeit. II und III (Fig. 2) sind Probiergläser, 10 *cm* hoch, 3 *cm* weit. Durch den Boden geht ein starker Platindraht, der eine Kreisscheibe aus Platinblech trägt. Die Spitze wird von einem das Probierglas verschließenden Kork getragen.

Als Elektrizitätsquelle dient ein Funkeninduktor mit Hammerunterbrecher. Um mit kleineren Flüssigkeitssäulen auskommen zu können, als sie der ganzen Schlagweite des

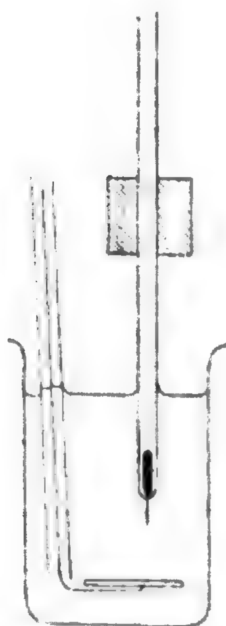


Fig. 1.

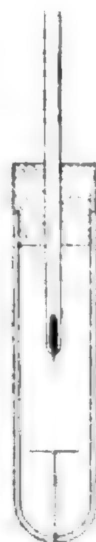


Fig. 2.

Induktors, etwa 8 *cm*, entsprechen, wurde den Versuchselektroden eine Luftfunkenstrecke von 5 *cm* Länge parallel geschaltet.

Die Versuche wurden folgendermaßen angestellt:

Die frisch destillierte Flüssigkeit wird bis zu einer bestimmten Höhe eingefüllt; die Elektroden werden erst beliebig eingestellt, hierauf der Induktor in Tätigkeit gesetzt und die Elektroden solange verschoben, bis auch bei längerem Betriebe keine Funken mehr auftreten und der Abstand der Elektroden an entsprechend angebrachten Marken in Millimetern gemessen. Dies geschieht mehrmals für beide Stromrichtungen. Die so erhaltenen Werte sind natürlich von sehr geringer Genauigkeit,

doch erhält man bei häufiger Wiederholung genügend übereinstimmende Mittelwerte, um verschiedene Substanzen vergleichen zu können. Die Funkenlängen in derselben Flüssigkeit sind für die drei Apparate sehr verschieden. Um vergleichbare Werte zu erhalten, wurden daher durch Vergleichsflüssigkeiten die Konstanten zur Umrechnung der mit II und III gefundenen Werte auf I bestimmt.

Es gab:

Apparat	In Benzol		In Propylalkohol für negative Funken
	für positive Funken	für negative Funken	
Maximale Funkenlänge in Millimetern			
I	13	10	50
II	10	8	37
Quotient ..	1·3	1·25	1·35

Apparat	In Methyleugenol		In Methylisoeugenol	
	positiv	negativ	positiv	negativ
Maximale Funkenlänge in Millimetern				
I	14	14	24	22
III	7—8	7—8	12	11
Quotient ..	1·9	1·9	2·0	2·0

Die folgende Tabelle gibt die maximalen Funkenlängen für positive und negative Funken in Millimetern für Apparat I. Die mit II bestimmten Werte sind mit 1·3, die mit III bestimmten mit 2·0 multipliziert.

Substanz	Formel	Apparat	Positive Funken	Negative Funken
Pentan	C_5H_{12}	I	24—25	8—9
Hexan	C_6H_{14}	I	23	8
Heptan	C_7H_{16}	I	22	8
Oktan	C_8H_{18}	I	10—11	7—8
Benzol	C_6H_6	I	13	9—10
Toluol	C_7H_8	I	13	9
Xylol Ortho-	C_8H_{10}	I	8—9	8
Xylol (käufliches Gemisch der drei Isomeren)	C_8H_{10}	I	9—10	8—9
Cumol	C_9H_{12}	I	7—8	7—8
Cymol	$C_{10}H_{14}$	I	5—6	5—6
Chlorbenzol	C_6H_5Cl	II	30	18
Brombenzol	C_6H_5Br	II	30	19
Jodbenzol	C_6H_5J	II	27	18
Anilin	C_6H_7N	I	30	11
Orthotoluidin	C_7H_9N	II	18	11
Monomethylanilin	C_7H_9N	II	17	14
Dimethylanilin	$C_8H_{11}N$	I	7	6
Diäthylanilin	$C_{10}H_{15}N$	I	18	18
Methylalkohol	CH_4O	I	2	2—3
Äthylalkohol	C_2H_6O	I	42	42
Propylalkohol	C_3H_8O	I	45—47	45—47
Butylalkohol	$C_4H_{10}O$	I	47	50
Amylalkohol [1]	$C_5H_{12}O$	III	46	68

[1] In meiner vorläufigen Mitteilung in der »Physikalischen Zeitschrift«, 5, p. 574, 1904, gab ich für Amylalkohol die mit Apparat I gefundenen Werte: 44—45 und 50. Letztere Zahl fiel jedoch, wie sich später zeigte, nur infolge eines Fehlers des Apparats so klein aus.

Substanz	Formel	Apparat	Positive Funken	Negative Funken
Heptylalkohol	$C_7H_{16}O$	III	28—34	48—54
Äthylbromid	C_2H_5Br	I	4	4
Äthyljodid	C_2H_5J	I	30	30
Chloroform	$CHCl_3$	III	60	38
Aceton	C_3H_6O	II	49	69
Methyläthylketon	C_4H_8O	II	49	56
Acetylaceton	$C_5H_8O_2$	II	8	5—6
Essigsaures Äthyl	$C_4H_8O_2$	II	26	26
Methylbutyrat	$C_6H_{12}O_2$	II	30	32
Safrol	$C_{10}H_{10}O_2$	III	10—12	8—10
Isosafrol	$C_{10}H_{10}O_2$	III	12—14	12
Methyleugenol	$C_{11}H_{14}O_2$	I	14	14
Methylisoeugenol	$C_{11}H_{14}O_2$	I	24	22
Brom	Br_2	II	6—7	6—7

Der Diskussion dieser Zahlen mögen ein paar allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt werden. B. Walter[1] hat nachgewiesen, daß in Luft dem Funken erst durch mehrere, immer weiter vordringende Büschelentladungen der Weg gebahnt wird. Das Auftreten von begleitenden Büscheln, das in fast allen angeführten Flüssigkeiten beobachtet werden kann, spricht dafür, daß auch in flüssigen Dielektricis dieser Vorgang stattfindet. Zur Erzeugung des Büschels ist aber ein gewisses Spannungsgefälle an der betreffenden Elektrode erforderlich. Das Zustandekommen dieses Spannungsgefälles wird erschwert durch Elektrizitätsleitung in der Flüssigkeit, sei es nun durch das Vorhandensein elektrolytischer Dissoziation, sei es durch

[1] Wied. Ann., 66, p. 636, 1898.

leichtes Fortwandern von Ionen, die durch eine leuchtende Entladung unmittelbar an der (spitzen) Elektrode erzeugt werden. In besser leitenden Flüssigkeiten werden daher bei gegebener Elektrizitätszufuhr nur verhältnismäßig kurze Funken zu erhalten sein (vergl. G. Wiedemann, Elektrizität, IV., p. 808, 1885). Bei sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten, wie Benzol etc., scheint jedoch die Leitfähigkeit bei Anwendung eines Induktionsapparates kaum mehr in Betracht zu kommen (anders bei kontinuierlicher Elektrizitätszufuhr, Influenzmaschine). So gibt H. Koller[1] folgende Werte für den spezifischen Widerstand in Siemenseinheiten an:

Benzol	200.10^{15},
Toluol	2.10^{15},
Xylol	11.10^{15}.

Diese Flüssigkeiten gaben bei meinen Versuchen folgende Funkenlängen:

	Benzol	Toluol	Xylol
Positiv......	13	13	9—10
Negativ.....	9—10	9	8—9

Es scheint also bei sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten die elektrische Festigkeit (die zum Durchschlagen gleicher Dicken erforderliche Feldstärke, für die die maximale Funkenlänge ein Maß abgibt) in ziemlich übersichtlicher Weise von der chemischen Konstitution abzuhängen, was nach dem vorliegenden spärlichen Material von ihrer Leitfähigkeit nicht gesagt werden kann. Allerdings dürfte die Leitfähigkeit mehr von geringen Verunreinigungen abhängig sein als die elektrische Festigkeit, obwohl es auch bei dieser sehr auf die Reinheit der Substanz ankommt. Übrigens kommt nach den Versuchen v. Schweidler's[2] diesen schlecht leitenden Flüssigkeiten überhaupt keine konstante Leitfähigkeit zu; ihre Leitfähigkeit ist vielmehr, ähnlich wie die ionisierter Gase, eine Funktion der Stromstärke.

---

[1] Diese Sitzungsber., 98 (II a.), p. 201, 1889.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 109, p. 1 bis 10, 1900; Bd. 113, p. 881 bis 902, 1904. — Ann. d. Phys., 4, p. 307 bis 315, 1901; 5, p. 483 bis 486, 1901.

Die elektrische Festigkeit der Flüssigkeiten ist abhängig von der Temperatur. Diese Abhängigkeit läßt sich nach der hier benützten Methode leicht verfolgen. Auch hier macht sich die Abhängigkeit der Funkenlänge von zwei Faktoren, der elektrischen Festigkeit einerseits, der elektrischen Leitfähigkeit andrerseits, bemerkbar. Da die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten mit der Temperatur zunimmt, werden die Funken in besser leitenden Flüssigkeiten mit steigender Temperatur kürzer werden. So bemerkt G. Wiedemann,[1] daß in warmem Wasser Funken schwerer zu erhalten sind als in kaltem.

Propylalkohol (etwas wasserhältig) gab

bei	2°	20 *mm*	lange	Funken.
»	5	20	»	»
»	15	17	»	»
»	33	14	»	»
»	37	13	»	»
»	45	11	»	»
»	55	9	»	»
»	66	8	»	»
»	80	7	»	»
»	105	4	»	»

Anders liegen die Verhältnisse bei Toluol (und Xylol). Hier nehmen die Funken bei steigender Temperatur erst zu, erreichen bei einer bestimmten Temperatur ein Maximum, um dann wieder, wie bei Propylalkohol, abzunehmen.

Toluol gab

bei	1°	8 *mm*	lange	Funken.
»	5	12	»	»
»	15	13	»	»
»	22	15	»	»
»	32	17	»	»
»	47	22	»	»
»	52	20	»	»
»	62	14	»	»
»	80	11	»	»
»	100	9	»	»

[1] Lehre von der Elektrizität, IV., p. 808, 1885.

Da in dem Intervalle von 1° bis 47° eine Abnahme der Leitfähigkeit mit steigender Temperatur nicht anzunehmen ist, so muß die elektrische Festigkeit mit steigender Temperatur abnehmen, ein Effekt, der dann bei höheren Temperaturen von der wachsenden Leitfähigkeit verdeckt wird.

1. Paraffine. Untersucht wurden die vier ersten flüssigen Glieder dieser Reihe. Für positive und negative Funken nimmt die Länge mit wachsendem Molekulargewicht ab. Die positiven Funken sind durchwegs beträchtlich länger als die negativen; das Verhältnis der Längen nimmt aber mit wachsendem Molekulargewicht ab.

2. Kohlenwasserstoffe der Benzolreihe. Bei den fünf untersuchten Gliedern nimmt, wie bei den Paraffinen, die Funkenlänge und das Verhältnis der Längen der positiven und negativen Funken mit wachsendem Molekulargewicht ab. Bei Cumol ist mit der angewendeten Versuchsanordnung schon kein Unterschied mehr zwischen der positiven und negativen Funkenlänge nachweisbar. Reines Orthoxylol gibt nicht sehr verschiedene Werte, wie das käufliche Gemisch der drei isomeren Xylole.

3. Monohalogenderivate des Benzols. Monochlor- brom- und Jodbenzol geben doppelt so lange Funken als Benzol. Auch hier sind die positiven Funken viel länger als die negativen. Alle drei Halogene haben ziemlich dieselbe Wirkung.

4. NH_2-Derivate der Bezolreihe. Anilin und Orthotoluidin verhalten sich ganz wie die bisher besprochenen Gruppen. Die Funkenlängen sind größer als für Benzol respektive Toluol. Das Verhalten der Alcylverbindungen des Anilins ist nicht klar.

5. Alkohole. Das Verhalten dieser Gruppe ist auf den ersten Blick nicht klar. Die Ursache des scheinbaren Maximums der Funkenlänge bei Butyl- respektive Amylalkohol dürfte aber in der oben erörterten Wirkung verschiedener Leitfähigkeit liegen. Die niederen Alkohole geben nicht infolge großer elektrischer Festigkeit, sondern infolge großer Leitfähigkeit kürzere Funken als die höheren.

Beim Propylalkohol ist aber die Leitfähigkeit schon so gering, daß eine weitere Abnahme nicht mehr im stande ist,

eine Zunahme der Festigkeit aufzuwiegen, daher die Abnahme der positiven Funkenlänge bei Amylalkohol und die noch geringere Länge beider Funken in Heptylalkohol. Es könnte daher auch in dieser Reihe die elektrische Festigkeit mit zunehmendem Molekulargewicht wachsen. Dafür, daß die auffallende Kürze der Funken in Methylalkohol von der großen Leitfähigkeit herrührt, scheint mir auch das Verhalten von Gemischen von Methylalkohol und Toluol zu sprechen.

Es war die Länge der

	positiven Funken	negativen Funken
In Toluol	12	9
100 cm^3 Toluol, 10 cm^3 Methylalkohol	17	12
100 » 20 »	8	6
Methylalkohol	2	2

Zu einer schlecht leitenden Flüssigkeit zugefügt, bewirkt also Methylalkohol erst eine Verlängerung der Funken, was für eine geringere elektrische Festigkeit spricht.

Normaler und Isopropylalkohol geben nahezu dieselben Werte. Bemerkenswert ist ferner, daß die Funkenlänge in Amylalkohol viel größer ist als im entsprechenden Kohlenwasserstoff, dem Pentan, im Heptylalkohol länger als im Heptan. Bei den Alkoholen sind im Gegensatze zu den früheren Gruppen, wenn überhaupt ein Unterschied merkbar ist, die negativen Funken die längeren.

6. Dies ist auch noch bei anderen Sauerstoffverbindungen der Fall, bei Aceton, Methyläthylketon, essigsaurem Äthyl und Methylbutyrat.

7. Bei den Safrolen und Methyleugenolen, die ich sowie mehrere andere der angeführten Substanzen Herrn Professor Pomeranz verdanke, handelte es sich darum, ob die Umlagerung in der ungesättigten Seitenkette von Einfluß auf die elektrische Festigkeit ist. Dies scheint in der Tat der Fall zu sein, da die Isoverbindung bei Methyleugenol sehr bedeutend, bei Safrol noch deutlich merkbar längere Funken gibt. Freilich reichen die Versuche noch nicht hin, um diese Regel zu verallgemeinern.

8. Zusammenfassend kann man sagen, daß im allgemeinen die elektrische Festigkeit in einer homologen Reihe mit dem Molekulargewichte zunimmt und daß sie abnimmt, wenn in einem Kohlenwasserstoff ein Wasserstoffatom durch ein Halogen, eine NH_2- oder OH-Gruppe ersetzt wird.

In Gasen und Dämpfen nimmt die elektrische Festigkeit auch im allgemeinen in einer homologen Reihe mit dem Molekulargewichte zu, wie namentlich die Versuche von Natterer[1] zeigen.[2] Ich entnehme seiner Tabelle hier die Glieder homologer Reihen.

Substanz	bei	Funkenlänge
CH_3OH	100° C.	9—12
C_2H_5OH...........	110	7— 9
CH_3CHO	100	6— 8
C_2H_5CHO	100	4— 7
CH_3Cl	zirka 20	8—11
C_2H_5Cl	20	4— 7
CH_3J	100	2— 2·25
C_2H_5J	100	1·75— 2
C_2H_5Br	100	3— 3·5
C_3H_7Br	100	2·25— 2·75

Nach J. J. Thomson und anderen steht dies in Zusammenhang mit der Abnahme der mittleren freien Weglänge.

[1] Wied. Ann., 38, p. 663, 1889.

[2] Ich habe auch die Potentialdifferenz bei der Spitzenentladung einer Influenzmaschine bei 5 *mm* Elektrodenabstand in verschiedenen Dämpfen bei 160° C. verglichen. Da nur schwankende Ausschläge am Elektrometer erhalten wurden, wahrscheinlich infolge Zersetzung, so soll nicht näher auf

Um zu entscheiden, ob dies auch bei Flüssigkeiten gilt, ist die kinetische Theorie der Flüssigkeiten noch nicht genügend ausgebildet.

Was die polaren Unterschiede betrifft, so sind bekanntlich die »positiven« Funken in Luft und anderen Gasen beträchtlich länger als die »negativen«. Dies hängt mit der den eigentlichen Funken vorhergehenden Büschelentladung (B. Walter) zusammen, indem die positiven Funken ihre größere Länge dem Überwiegen des positiven Büschels über das negative verdanken. Daß das positive Büschel cet. par. aber größer ist als das negative, hat wiederum seinen Grund in der geringeren Beweglichkeit der positiven Ionen, die ihr rasches Fortwandern verhindert und dadurch das Zustandekommen eines stärkeren Potentialgefälles ermöglicht, wie ich in meiner Arbeit: »Über das Leuchten verdünnter Gase im Teslafelde«[1] zu zeigen versucht habe. Wenn es gestattet ist, diese Schlüsse auf Flüssigkeiten zu übertragen, so wären bei den Paraffinen, Benzolen und anderen die negativen, bei den Alkoholen, einigen Ketonen und Estern die positiven Ionen leichter beweglich. Chattock, Walker und Dixon[2] haben die spezifische Ionengeschwindigkeit bei der Spitzenentladung in Terpentin bestimmt und

die Versuche eingegangen werden. Es war beiläufig die Potentialdifferenz in Volt:

	Für positive Spitze	Für negative Spitze
In Methylalkohol	3400	2000
» Äthylalkohol	3800	2200
» Propylalkohol ...	4300	2300
» Butylalkohol	4800	2800
» Amylalkohol	5400	3200
» Pentan	3900	1700—2500
» Hexan	4200	1700—2500
» Heptan	4500	1700—2800
» Oktan	5000	1700—3500
» Benzol	4200—5800	2800
» Toluol	4500—6200	2900
» Xylol	4500—6200	3000

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 113, p. 439 bis 468, 1904.

[2] Phil. Mag. (6), 1, p. 84, 1901.

fanden für die positiven Ionen 0·0013, für die negativen 0·0015. In käuflichem Terpentinöl erhielt ich 19 *mm* lange positive und 17 *mm* lange negative Funken, was mit dem oben Gesagten übereinstimmt. Doch ist auf diese Übereinstimmung nicht viel Gewicht zu legen, da v. Schweidler in seiner neuen Untersuchung[1] für die Summe der Geschwindigkeiten in anderen schlecht leitenden Flüssigkeiten Werte ganz anderer Größenordnung findet als die oben angegebenen.

Die polaren Unterschiede konnte ich noch in so zähen Flüssigkeiten wie Kanadabalsam, beobachten (positive Funken etwas länger). Daß sie auch in festen Körpern auftreten, dafür spricht eine Beobachtung über das Durchschlagen von dicken Glasplatten. Du Moncel[2] sagt bei der Besprechung von Jean's Verbesserungen des Ruhmkorff'schen Induktionsapparates, daß der Durchschlag an der negativen Elektrode beginnt und stoßweise fortschreitet.

Die elektrische Entladung ist bei allen untersuchten organischen Flüssigkeiten von einer Zersetzung der Substanz begleitet, wie die mehr oder weniger starke Gasentwicklung erkennen läßt. Van Troostwyck[3] beobachtete schon 1790 die Zersetzung von Wasser durch den elektrischen Funken. Holtz[4] erwähnt die in der Flüssigkeit herumwirbelnden Gasblasen. Borlinetto[5] beschreibt die Wirkung eines kurzen Funkens zwischen Platinelektroden auf einige Flüssigkeiten. Die Gasentwicklung erfolgt nicht nur bei der Funkenentladung, sondern auch bei der Büschel- und Spitzenentladung. Sie findet hier nicht wie bei der Elektrolyse nur an den Elektroden, sondern längs der ganzen Entladungsbahn statt, wie man in auffallender Weise in Glyzerin zeigen kann. In dieser Flüssigkeit erhält man zwischen einer Spitze und einer Scheibe schöne positive und negative Büschel. Infolge der großen Zähigkeit verbleiben die gebildeten feinen Gasblasen minutenlang an

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 113, p. 881 bis 902, 1904.

[2] Dingler's Polyt. Journ., 149, p. 359 bis 363, 1858; Fort. d. Phys., 14, p. 486, 1860; Bull. d. l. Soc. d'Encouragement, 1858. p. 232.

[3] Ann. de Chim., 5, p. 278, 1790.

[4] L. c.

[5] Electricité, 1879, p. 353 bis 356; Fort. d. Phys., 36, p. 798, 1880.

ihrem ursprünglichen Platz und lassen so, dicht aneinandergereiht, den Verlauf des Büschels bis in seine feinsten Verästelungen verfolgen. Dieses aus lauter Bläschen bestehende, fein verästelte, bei jeder folgenden Entladung um neu hervorschießende Zweige vermehrte Büschel bildet ein sehr hübsches Demonstrationsobjekt.

Die bei der Entladung entwickelten Gase haben eine ähnliche Zusammensetzung, wie das durch Zersetzung der betreffenden Flüssigkeit bei Rotglut gelieferte Gasgemisch.

Konstruktion der Perspektivumrisse und der ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung

von

Prof. **L. Klug** in Klausenburg.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Oktober 1904.)

1. Die Konstruktion des Perspektivumrisses einer Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$, von welcher die perspektiven Bilder von drei paarweise konjugierten und sich in einem Punkte schneidenden Sehnen gegeben sind, sowie auch die Konstruktion eines ebenen Schnittes der Fläche, kann man auf folgenden Satz gründen:

Schneidet eine Ebene ω eine Fläche II. O. $F^{(2)}$ und ein Polartetraeder derselben in dem Kegelschnitt u und in einem Vierseit, so ist die Projektion desselben Polartetraeders aus dem Pol O der Ebene ω auf ω, die Polarfigur des Vierseits in Bezug auf u. Das Vierseit ist ein Polvierseit und also die Projektion des Polartetraeders ein Polviereck von u. Die Projektionen des Kegelschnittes u, des Polvierseits und Polviereckes aus einem beliebigen Punkt auf irgendeine Ebene bleiben Polvierseit und Polviereck und Polarfiguren in Bezug auf die Projektion des Kegelschnittes u auf dieselbe Ebene.

Es sind nämlich die Polaren der Seiten des Vierseits, die aus O projizierende Strahlen der Endpunkte des Polartetraeders, also die Spuren dieser Strahlen in ω, die Pole der Seiten des Vierseits in bezug auf den Kegelschnitt $u = (F^{(2)}, \omega)$.

Da ferner je zwei Gegenkanten des Polartetraeders Polaren sind von $F^{(2)}$, so sind ihre Spuren in ω, d. h. die Gegeneckpunkte des Vierseits, konjugierte Pole und also die Gegenseiten des Viereckes konjugierte Polaren von u. Das Vierseit ist dem Viereck einbeschrieben und beide zusammen bilden die Konfiguration $(10_3, 10_3)$.

Da endlich die Polareigenschaften eines Kegelschnittes durch das Projizieren auf eine Ebene nicht zerstört werden, so ist auch der letzte Teil des Satzes richtig.

2. Betrachten wir (Fig. 1) das Viereck $K'K_1'K_2'K_3'$ als das perspektive Bild (aus dem Auge O projiziert) eines Polartetraeders $KK_1K_2K_3$; ferner $A'A'$, $B'B'$, $C'C'$ als die perspektiven Bilder der auf den Tetraederkanten KK_1, KK_2, KK_3 liegenden, also paarweise konjugierten Sehnen AA, BB, CC einer Fläche II. O. $F^{(2)}$.

Durch diese Daten ist $F^{(2)}$, also durch die Bilder derselben der perspektive Umriß u', als das Bild des wahren Umrisses u von $F^{(2)}$ bestimmt.

$K'K_1'K_2'K_3'$ ist ein Polviereck von u'; die Treffpunkte der Gegenseitenpaare sind

$$H_1' = (K'K_1',\ K_2'K_3'),$$
$$H_2' = (K'K_2',\ K_3'K_1'),$$
$$H_3' = (K'K_3',\ K_1'K_2')$$

und die Punkte A_1', B_1', C_1' trennen diese Treffpunkte von den Punktpaaren $A'A'$, $B'B'$, $C'C'$ harmonisch.

$A_1'B_1'C_1'$ sind die Bilder der Pole $A_1B_1C_1$ der Ebenen OK_2K_3, OK_3K_1, OK_1K_2, also zugleich die Pole der Seiten

$$K_2'K_3' = a_1', \qquad K_3'K_1' = b_1', \qquad K_1'K_2' = c_1'$$

und daher

$$B_1'C_1' = k_1', \qquad C_1'A_1' = k_2', \qquad A_1'B_1' = k_3'$$

die Polaren der Eckpunkte $K_1'K_2'K_3'$ jenes Polviereckes in bezug auf u'. Endlich geht die Polare k' des vierten Eckpunktes K' durch die Schnittpunkte

$$G_1' = (a_1', k_1'), \qquad G_2' = (b_1', k_2'), \qquad G_3' = (c_1', k_3')$$

der homologen Seiten, der in bezug auf K' perspektiven Dreiecke $K'_1K'_2K'_3$, $A'_1B'_1C'_1$.

Die Polarfigur $k'k'_1k'_2k'_3$ des Polviereckes $K'K'_1K'_2K'_3$ ist das Bild desjenigen Vierseits $kk_1k_2k_3$, in welchem die Polarebene ω des Auges O das Polartetraeder trifft. Durch jene Polarfiguren ist aber u' bestimmt.

3. Um die Konstruktion der den Umriß u' bestimmende Polarfiguren allgemein auszudrücken, wollen wir die auf den Kanten KK_1, KK_2, KK_3, K_2K_3, K_3K_1, K_1K_2 liegende Involutionen der konjugierten Pole von $F^{(2)}$ mit $I_1I_2I_3J_1J_2J_3$, ihre Bilder mit $I'_1I'_2I'_3J'_1J'_2J'_3$ bezeichnen. Außer den bezüglichen Eckpunktpaaren des Viereckes $K'K'_1K'_2K'_3$ sind in diesen Involutionen noch beziehungsweise $A'_1H'_1$, $B'_1H'_2$, $C'_1H'_3$, $G'_1H'_1$, $G'_2H'_2$, $G'_3H'_3$ konjugierte Punkte. Sind von diesen Involutionen irgend drei auf den in einem Eckpunkte des Viereckes $K'K'_1K'_2K'_3$ sich schneidenden Seiten gegeben, so sind damit auch die drei übrigen bekannt und man kann die Polarfigur des Viereckes in bezug auf u' konstruieren. Diese Konstruktion gibt folgender Satz:

Eine Fläche II. O. $F^{(2)}$ ist durch ein Polartetraeder und durch die Involutionen der konjugierten Pole auf drei in einer Ecke des Polartetraeders sich schneidenden Kanten, z. B. der Involutionen I_1, I_2, I_3 auf den Kanten KK_1, KK_2, KK_3 bestimmt. Ebenso ist auch der Umriß u' der Fläche $F^{(2)}$ bestimmt durch das Bild $K'K'_1K'_2K'_3$ des Polartetraeders und durch die Bilder I'_1, I'_2, I'_3 jener Involutionen.

Sind (Fig. 1, 2) A'_1, B'_1, C'_1 die konjugierten Punkte in I'_1, I'_2, I'_3 zu den Punkten

$$H'_1 = (K'K'_1,\ K'_2K'_3),$$
$$H'_2 = (K'K'_2,\ K'_3K'_1),$$
$$H'_3 = (K'K'_3,\ K'_1K'_2)$$

und k' die Perspektivachse der Dreiecke

$$K'_1K'_2K'_3 = a'_1b'_1c'_1, \qquad A'_1B'_1C'_1 = k'_1k'_2k'_3,$$

so ist das Vierseit $k'k'_1k'_2k'_3$ die Polarfigur des Viereckes $K'K'_1K'_2K'_3$ in bezug auf den Umriß u'.

Auf dieselbe Weise findet man auch die Polarfiguren $k'k_1'k_2'k_3'$, $K'K_1'K_2'K_3'$, wenn z. B. die Bilder $I_1'J_2'J_3'$ der auf den Kanten K_1K, K_1K_3, K_1K_2 liegenden Involutionen der konjugierten Pole bekannt sind:

Die konjugierten Punkte $A_1'G_2'G_3'$ in diesen Involutionen zu den Punkten

$$H_1' = (K_1'K', K_2'K_3'),$$
$$H_2' = (K_1'K_3', K'K_2'),$$
$$H_3' = (K_1'K_2', K'K_3')$$

sind die Eckpunkte eines zu $K'K_3'K_2' = a_1'g_2'g_3'$ perspektiven Dreieckes $A_1'G_2'G_3' = k'k_3'k_2$ mit der Perspektivachse k_1'.

4. Die obige Konstruktion kann man in drei verschiedenen Figuren ausführen. Bezeichnet man mit e elliptische, mit h hyperbolische Involutionen, so sind die Involutionen $I_1I_2I_3J_1J_2J_3$ auf den Kanten KK_1, KK_2, KK_3, K_2K_3, K_3K_1, K_1K_2, sowie auch ihre Bilder, in der ersten Figur (Fig. 1) *hhheee*, in der zweiten Figur (Fig. 2) *ehhehh* und in der dritten Figur *eeeeee*. Die Fläche $F^{(2)}$ der ersten Figur ist ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid; die der zweiten Figur ein einschaliges Hyperboloid; endlich ist die Fläche der dritten (hier nicht gezeichneten) Figur imaginär.

Betrachtet man in Fig. 1 $A'A'$, $B'B'$, $C'C'$ als die Bilder von drei konjugierten Durchmessern AA, BB, CC eines Ellipsoids und $K_1'K_2'K_3'$ als ihre Fluchtpunkte, oder $A'A'$ als das Bild eines Durchmessers, $B'B'$, $C'C'$ aber als die Bilder von zwei zueinander und zu dem Durchmesser AA konjugierte Sehnen BB, CC eines Ellipsoides und sind $K_2'K_3'$ die Fluchtpunkte dieser Sehnen, ein außerhalb der Strecke $A'A'$ liegender Punkt Q' dieser Geraden als den Fluchtpunkt des Durchmessers AA, so ist der Kegelschnitt u' in beiden Fällen der Umriß des Ellipsoids.

Nimmt man im zweiten Falle den Fluchtpunkt Q' in einem der Punkte A' an, so ist die dargestellte Fläche ein elliptisches Paraboloid und u' sein Umriß.

Sind $K_1'K'$, $K_1'K_2'$, $K_1'K_3'$ die Bilder von drei konjugierten Durchmessern eines zweischaligen Hyperboloids, K', K_2', K_3' die Fluchtpunkte derselben; $A'A'$, $G_3'H_3'$, $G_2'H_2'$ die Bilder der

Doppelpunkte beziehungsweise von konjugierten Punkten der auf jenen Durchmessern liegenden Involutionen der konjugierten Pole, wobei die Bilder der zwei letzteren Involutionenpaare auch durch die Bilder von anderen konjugierten Polen gegeben sein können, — so ist wieder der Kegelschnitt u' der Umriß des zweischaligen Hyperboloids.

Betrachtet man in Fig. 2 $K'K'_1$, $K'K'_2$, $K'K'_3$ als die Bilder von drei konjugierten Durchmessern eines einschaligen Hyperboloids und K'_1, K'_2, K'_3 als die Fluchtpunkte derselben; sind $A'_1H'_1$ die Bilder eines konjugierten Punktpaares, $B'B'$, $C'C'$ aber die Doppelpunkte der auf jenen Durchmessern liegenden Involutionen der konjugierten Pole, wobei das Bild der ersten Involution auch durch die Bilder von anderen Paaren konjugierter Pole gegeben sein kann, — so ist der Kegelschnitt u' der Umriß des einschaligen Hyperboloids.

Stellt endlich eines der Punkte B' (oder nach entsprechender Änderung auch C') den Fluchtpunkt des zweiten (beziehungsweise dritten) Durchmessers dar, während die zwei anderen Durchmesser zu jenem und zueinander konjugierte Sehnen sind, dann ist die dargestellte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid und u' sein Umriß.

Ebenso kann man in der dritten Figur den durch die Polarfiguren $K'K'_1K'_2K'_3$, $k'k'_1k'_2k'_3$ bestimmten imaginären Kegelschnitt u' als den Umriß derjenigen imaginären Fläche II. O. betrachten, dessen drei konjugierte Durchmesser $K'K'_1$, $K'K'_2$, $K'K'_3$ sind, mit den Fluchtpunkten K'_1, K'_2, K'_3. Die Punktpaare $A'_1H'_1$, $B'_1H'_2$, $C'_1H'_3$ sind die Bilder von konjugierten Polen auf jenen Durchmessern; sie dienen zur Bestimmung jener Polarfiguren und der Involutionen.

5. Was nun die Konstruktion des Kegelschnittes u' anbelangt, kann man leicht seinen Mittelpunkt U' finden. Denn sind $A'_iB'_iC'_iA'_jB'_jC'_j$ die Mittelpunkte der Involutionen $I'_1I'_2I'_3$ $J'_1J'_2J'_3$, so sind von den Punkten

$$N' = (K'_1A'_j,\ K'_2B'_j,\ K'_3C'_j),$$

$$N'_1 = (K'A'_j,\ K'_3B'_i,\ K'_2C'_i),$$

$$N'_2 = (K'_3A'_i,\ K'B'_j,\ K'_1C'_i),$$

$$N_3' = (K_2'A_i', K_1'B_i', K'C_j'),$$
$$U' = (K'N', K_1'N_1', K_2'N_2', K_3'N_3')$$

die vier ersteren die Bilder der Mittelpunkte der Bilder $n'n_1'n_2'n_3'$ derjenigen Kegelschnitte $nn_1n_2n_3$, in welchen die den Eckpunkten $KK_1K_2K_3$ gegenüberliegenden Flächen des Polartetraeders die $F^{(2)}$ schneiden, während der letztere U' der Mittelpunkt von n' ist.

Zu jedem Durchmesser von n', welcher durch einen Eckpunkt des Polviereckes $K'K_1'K_2'K_3'$ oder des Polvierseites $k'k_1'k_2'k_3'$ geht, ist derjenige Durchmesser konjugiert, welcher zur Polaren jenes Eckpunktes, also zu einer gewissen Seite des Polvierseits beziehungsweise des Polviereckes parallel läuft. So ist z. B. zu dem durch K' gelegten Durchmesser $K'U' \equiv D'D'$ der zu k' parallele Durchmesser $E'E'$ konjugiert. Trifft nun der erste die k' in T', so bestimmt man die Endpunkte oder die Potenzpunkte dieses Durchmessers aus der Relation $\overline{U'D'}^2 = U'K'.U'T'$.

Trifft irgendeine Seite des Polviereckes oder Polvierseites z. B. k_2' den anderen Durchmesser $E'E'$ im Punkt E_1' und die durch seinen Pol K_2' zu $D'D'$ parallel gelegte Gerade in E_2', so sind die Endpunkte oder die Potenzpunkte $E'E'$ dieses Durchmessers aus der Relation $\overline{U'E'}^2 = U'E_1'.U'E_2'$ zu ermitteln.

Wir bemerken noch, daß die Kegelschnitte $n'n_1'n_2'n_3'$ den Kegelschnitt n' in je zwei Punkten der Geraden $k'k_1'k_2'k_3'$ berühren und daß $K_1'K_2'K_3'$, $K'K_2'K_3'$, $K'K_3'K_1'$, $K'K_1'K_2'$ beziehungsweise Polardreiecke sind jener Kegelschnitte.

6. Obige Konstruktionen lassen sich auch auf Kegel II. O. anwenden.

Es seien $A'A'$, $B'B'$ die Bilder von zwei konjugierten Sehnen AA, BB mit den Fluchtpunkten $K_1'K_2'$ und es sei $K'K_3'$ das Bild des zu jenen Sehnen konjugierten Durchmessers eines Kegels II. O. mit dem Bilde K_3' der Spitze K_3.

$K'K_1'K_2'K_3'$ ist das Bild eines Polartetraeders $KK_1K_2K_3$ der Fläche. Von den Bildern $I_1'I_2'I_3'$ der auf den Kanten KK_1, KK_2, KK_3 liegenden Involutionen $I_1I_2I_3$ der konjugierten Pole haben die zwei ersten ihre Doppelpunkte in $A'A'$, $B'B'$, während der dritte parabolisch ist und K_3' zum singulären Punkt hat. In diesen Involutionen sind die zu den Diagonalpunkten H_1', H_2', H_3'

des Viereckes $K'K'_1K'_2K'_3$ konjugierte Pole A'_1, B'_1, $C'_1 \equiv K'_3$ und die Mittelpunkte A'_i, B'_i, $C'_i \equiv K'_3$. Von den auf den Kanten K_2K_3, K_3K_1, K_1K_2 liegenden Involutionen $J_1J_2J_3$ sind die zwei ersteren parabolisch mit den singulären Punkten K_2, K_1; die dritte ist elliptisch. Also koinzidieren die früheren Punkte A'_j, B'_j, $N'_1N'_2N'U'G'_1G'_2$ beziehungsweise mit K'_2, K'_1 und K'_3.

Da die Polaren $k'_1k'_2a'_1b'_1$ der außerhalb einer Geraden liegenden Punkte $K'_1K'_2A'_1B'_1$ durch denselben Punkt K'_3 gehen, so verkümmert der Kegelschnitt u', d. h. der Umriß des Kegels II. O. ist ein Geradenpaar $u'u'$, welches die Punkte K', K'_1, K'_2 von den Geraden k'_1, k'_1, k'_2 harmonisch trennt. Das Polviereck $K'K'_1K'_2K'_3$ bleibt Viereck, aber das Polvierseit $k'k'_1k'_2k'_3$ verkümmert und beide sind Polarfiguren in bezug auf den Umriß $u'u'$. Das Bild u'_3 des in der Tetraederfläche KK_1K_2 liegenden Kegelschnittes u_3 hat N'_3 zum Mittelpunkte; die in den übrigen Tetraederflächen liegenden Kegelschnitte uu_1u_2 verkümmern in Geradenpaare, deren Bilder sich in K'_3 schneiden.

Ist K'_3 der Fluchtpunkt des Durchmessers KK_3, so stellt $u'u'$ den Umriß des durch dieselben Daten gegebenen Zylinders II. O. dar.

7. Wir wollen jetzt das Bild eines ebenen Schnittes der allgemeinen Fläche II. O. $F^{(2)}$ konstruieren.

Eine Ebene φ schneidet $F^{(2)}$ in dem Kegelschnitt f und das Polartetraeder $KK_1K_2K_3$ in einem Polvierseit von f, dessen Polarfigur, als Polviereck, die Projektion des Polartetraeders ist aus dem Pol F der Ebene φ auf diese Ebene (laut dem Satz unter [1]).

Sind $pp_1p_2p_3$ die auf den Flächen $K_1K_2K_3$, KK_2K_3, KK_3K_1, KK_1K_2 des Polartetraeders liegende Seiten, also $L_1L_2L_3M_1M_2M_3$ die auf den Kanten KK_1, KK_2, KK_3, K_2K_3, K_3K_1, K_1K_2 liegende Eckpunkte jenes Polvierseits, und sind $L^*_1L^*_2L^*_3M^*_1M^*_2M^*_3$ die konjugierten Pole zu jenen Eckpunkten auf den nämlichen Kanten, so treffen die Polarebenen $K_2K_3L^*_1$, $K_3K_1L^*_2$, $K_1K_2L^*_3$, $KK_1M^*_1$, $KK_2M^*_2$, $KK_3M^*_3$ jener Eckpunkte die Ebene φ in den Seiten

$$l_1 = P_2P_3 = (p_2, K_3L^*_1)(p_3, K_2L^*_1),$$
$$l_2 = P_3P_1 = (p_3, K_1L^*_2)(p_1, K_3L^*_2),$$

$$l_3 = P_1 P_2 = (p_1, K_2 L_3^*)(p_2, K_1 L_3^*),$$
$$m_1 = PP_1 = (p, K_1 M_1^*)(p_1, KM_1^*),$$
$$m_2 = PP_2 = (p, K_2 M_2^*)(p_2, KM_2^*),$$
$$m_3 = PP_3 = (p, K_3 M_3^*)(p_3, KM_3^*)$$

des Polviereckes und die Geraden KP, K_1P_1, K_2P_2, K_3P_3 treffen sich in dem Pol F der Ebene φ.

Auf diesen letzteren vier Geraden liegen auch die Punkte

$$S = (K_1 M_1^*, K_2 M_2^*, K_3 M_3^*),$$
$$S_1 = (KM_1^*, K_2 L_3^*, K_3 L_2^*),$$
$$S_2 = (K_3 L_1^*, KM_2^*, K_1 L_3^*),$$
$$S_3 = (K_1 L_2^*, K_2 L_1^*, KM_3^*)$$

als die Pole der Geraden $pp_1p_2p_3$ in bezug auf die früheren Kegelschnitte $uu_1u_2u_3$.

Betrachtet man daher in Fig. 3 (als Fortsetzung der Fig. 1) ein beliebiges, dem Viereck $K'K_1'K_2'K_3'$ einbeschriebenes Vierseit $p'p_1'p_2'p_3' = L_1'L_2'L_3'M_1'M_2'M_3'$, als das Bild des Polvierseits, d. h. als das Bild der Schnittfigur der Ebene φ mit dem Polartetraeder $KK_1K_2K_3$, und sind $L_1^{*\prime}L_2^{*\prime}L_3^{*\prime}M_1^{*\prime}M_2^{*\prime}M_3^{*\prime}$ die Bilder der konjugierten Pole auf den bezüglichen Seiten von $K'K_1'K_2'K_3'$, so findet man die Bilder der Seiten $l_1'l_2'l_3'm_1'm_2'm_3'$ des Polviereckes nach obiger Tafel. Es ist z. B. m_3' die Verbindungsgerade des Schnittpunktes von p' und $K_3'M_3^{*\prime}$ mit dem Schnittpunkte von p_3' und $K'M_3^{*\prime}$.

Mit den Bildern der Seiten des Polviereckes sind auch seine Eckpunkte $P'P_1'P_2'P_3'$ und damit auch das Bild f' des Kegelschnittes f bestimmt.

Der Umriß u der Fläche $F^{(2)}$ und der Schnitt f treffen sich in der Schnittlinie s ihrer Ebenen und ihre Bilder $u'f'$ berühren sich auf dem Bilde s' von s. Die Polare von s ist OF, also ist das Bild F' von F der Pol von s' in bezug auf u' und f'. Auf s' liegen die Schnittpunkte der homologen Seitenpaare der Vierseite $k'k_1'k_2'k_3'$, $p'p_1'p_2'p_3'$, und durch F' gehen die Verbindungsgeraden der homologen Eckpunkte der Vierecke $K'K_1'K_2'K_3'$, $P'P_1'P_2'P_3'$.

Die Gerade $F'U'$ geht durch den Mittelpunkt F_0' von f' und der zu dieser Geraden konjugierte Durchmesser läuft mit s' parallel. Auf diesen Durchmessern kann man nun konjugierte Pole leicht finden, da Pole und Polaren von f' in genügender Anzahl vorhanden sind.

8. Man kann auch umgekehrt das Bild f' desjenigen Kegelschnittes f verlangen, in welchen die Polarebene des Punktes F die Fläche $F^{(2)}$ schneidet.

Ist (in Fig. 3) der Punkt F durch sein Bild F' und durch das Bild S' desjenigen Punktes gegeben, in welchen die Gerade FK die Fläche $K_1K_2K_3$ des Polartetraeders schneidet, so kann man $p'p_1'p_2'p_3'$ wie folgt finden.

Aus S' projiziert man die Eckpunkte des Dreieckes $K_1'K_2'K_3'$ auf die Gegenseiten nach $M_1^{*\prime}M_2^{*\prime}M_3^{*\prime}$ und sucht in $J_1'J_2'J_3'$ die konjugierten Punkte $M_1'M_2'M_3'$, welche in der Geraden p' liegen.

Die Bilder der Punkte, in welchen FK_1, FK_2, FK_3 die anderen Tetraederflächen treffen, sind

$$S_1' = (F'K_1',\ K'M_1^{*\prime}),$$
$$S_2' = (F'M_2',\ K'M_2^{*\prime}),$$
$$S_3 = (F'K_3',\ K'M_3^{*\prime})$$

und $L_1'L_2'L_3'$ sind in den Involutionen $I_1'I_2'I_3'$ die konjugierten Punkte zu

$$L_1^{*\prime} = (S_2'K_3',\ S_3'K_2'),$$
$$L_2^{*\prime} = (S_3'K_1',\ S_1'K_3'),$$
$$L_3^{*\prime} = (S_1'K_2',\ S_2K_1').$$

Damit ist aber das Polvierseit $p'p_1'p_2'p_3' = L_1'L_2'L_3'M_1'M_2'M_3'$ von f' bestimmt und die Konstruktion auf die frühere zurückgeführt.

9. Um die Schnittpunkte RR einer Geraden r mit der allgemeinen Fläche II. O. $F^{(2)}$ zu finden, bestimmt man auf r die Involution der konjugierten Pole I_r in bezug auf $F^{(2)}$. Trifft r die Flächen $K_1K_2K_3$, KK_1K_2 des Polartetraeders in den Punkten V und W, so kann man mittels den Involutionen $I_1I_2 \ldots J_3$ auf den Kanten des Polartetraeders die Polaren v und w der Punkte V und W in bezug auf die früheren Kegelschnitte n, n_1

und also die Polarebenen Kv, $K_1 w$ derselben in bezug auf $F^{(2)}$ bestimmen. Diese Polarebenen treffen r in den zu V und W konjugierten Punkten V^* und W^* der Involution I_r.

Sind also (Fig. 4) V', W' die Bilder von V, W, und $V^{*\prime}_{12} V^{*\prime}_{13} V^{*\prime}_{23}$, $W^{*\prime}_{02} W^{*\prime}_{03} W^{*\prime}_{23}$ die konjugierten Punkte zu

$$\begin{aligned} V'_{12} &= (K'_1 K'_2,\ V' K'_3) \\ V'_{13} &= (K'_1 K'_3,\ V' K'_2) \\ V'_{23} &= (K'_2 K'_3,\ V' K'_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W'_{02} &= (K' K'_2,\ W' K'_3) \\ W'_{03} &= (K' K'_3,\ W' K'_2) \\ W'_{23} &= (K'_2 K'_3,\ W' K') \end{aligned}$$

in den Involutionen $J'_3 J'_2 J'_1$ $I'_2 I'_3 J'_1$, so liegen die drei ersteren in der Polaren v' von V' in bezug auf u' und die drei anderen in der Polaren w' von W' in bezug auf u'_1.

Die Geraden, welche K' mit dem Treffpunkte $(v', V'W'_{23})$ und K'_1 mit dem Treffpunkt $(w', W'V'_{23})$ verbinden, schneiden r' in den zu $V'W'$ konjugierten Punkten $V^{*\prime} W^{*\prime}$ der Involution I'_r. Die Doppelpunkte $R'R'$ dieser Involution sind die gewünschten Bilder der Schnittpunkte von $F^{(2)}$ mit r.

Die Ebenenpaare Kv, KK_2K_3; $K_1 w$, $K_1 K_2 K_3$ treffen sich in den Geraden KV^*_{23}, $K_1 W^*_{23}$, also ist die Verbindungsgerade t der Punkte

$$X = (v, K_1 W^*_{23}),\quad Y = (w, KV^*_{23}),$$

als Schnittlinie der Ebenen Kv, $K_1 w$, die Polare von r in bezug auf $F^{(2)}$.

Die Bilder $X'Y'$ der Punkte XY ergeben sich aus den Schnittpunkten der Bilder der angegebenen Geraden;

$$V'W'_{23} = x',\quad W'V'_{23} = y'$$

sind die Polaren jener Punkte in bezug auf u' und u'_1; schließlich berühren die zwei Ebenen tR die Fläche $F^{(2)}$ in den zwei Punkten R.

Will man umgekehrt die Punkte RR finden, in welchen die durch eine beliebige Gerade t gelegten Berührungsebenen die

Fläche $F^{(2)}$ berühren und trifft t die Tetraederflächen $K_1K_2K_3$, KK_2K_3 in X, Y, so suche man die Punkte

$$V_{23}^* = (KY, K_2K_3), \quad W_{23}^* = (K_1X, K_2K_3).$$

Die Pole V, W der Geraden $v = XV_{23}^*$, $w = YW_{23}^*$ in bezug auf u, u_1 liegen in der Geraden $r = VW$, welche $F^{(2)}$ in den gewünschten Berührungspunkten RR trifft.

Ist in der ersten Aufgabe die Gerade r ein Sehstrahl, so fallen die Bilder der Schnittpunkte derselben mit der Fläche $F^{(2)}$ im Bildpunkte r' von r. In r' sind zugleich die Bilder der Treffpunkte $V'W'$ von r mit den Tetraederflächen $K_1K_2K_3$, KK_2K_3; aus ihnen kann man wie früher die Geraden $v'w'$ und $t' = X'Y'$ konstruieren. Man erhält t' auch als die Polare des Bildpunktes r' in bezug auf den Umriß u'.

Über die Radioaktivität der Gasteiner Thermen

von

Dr. Heinrich Mache.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. November 1904.)

J. J. Thomson und F. Himstedt haben gezeigt, daß Quellwässer eine radioaktive Emanation enthalten, die durch Auskochen oder Durchperlen von Luft aus ihnen entfernt werden kann. Es ist zu vermuten, daß die durch J. Elster und H. Geitel in der freien Atmosphäre, in besonderem Maße aber in den Erdkapillaren aufgefundene Emanation mit dieser im Quellwasser enthaltenen identisch ist. Ihre gemeinsame Ursache ist darin zu suchen, daß nach Elster und Geitel manche Erdarten und gewisse tonhältige Gesteine eine radioaktive Substanz enthalten, welche die Fähigkeit besitzt Emanation zu entwickeln, die sich dann eben in Luft und Wasser vorfindet. Die Tatsache, daß nicht meteorische Quellwässer (Thermen) in besonders reichem Maße Emanation aufweisen, führt weiters zur Vermutung, daß diese radioaktiven Substanzen in den tieferen Schichten der Erdrinde in reicherem Maße vorhanden sind als an der Oberfläche. Hiemit findet sich in Übereinstimmung, daß die Sedimente dieser Wässer direkt radioaktive Substanz zu enthalten scheinen, wie dies bereits wiederholt, am erfolgreichsten von Elster und Geitel, an Sedimenten und am Schlamme der Thermalquellen in Baden-Baden dargetan worden ist.[1]

[1] Phys. Z., p. 5 und 321 (1904).

Die nächste Frage wird die nach den Eigenschaften dieser neuen aktiven Materialien sein, da die Kenntnis dieser Eigenschaften die Entscheidung ermöglicht, ob hier neue radioaktive Körper vorliegen oder bereits bekannte.

Es behalten nun nach den Versuchen von Elster und Geitel die aus dem Fangoschlamm auf chemischem Wege gewonnenen radioaktiven Produkte ihre Wirksamkeit durch zumindest längere Zeit bei, es ist weiter festgestellt, daß die entwickelte Emanation bei derselben Temperatur kondensiert wie die des Radiums (—150° C.)[1] und daß auch das Gesetz des zeitlichen Abklingens ihrer Wirkung ungefähr dasselbe ist wie für Radiumemanation, daß also die Wirkung in 3 bis 4 Tagen auf die Hälfte sinkt.[2] Bezüglich der induzierten Aktivität hat Adams gezeigt, daß sie in ungefähr 35 Minuten zum halben Wert abfällt, was Burton für die aus Rohpetroleum gewonnene Emanation bestätigte.[3] Auch diese Zahl nähert sich dem für Radium gültigen Wert.

Einen weiteren Beleg für die große Ähnlichkeit, ich glaube sogar für die Identität der in Frage kommenden Substanz mit Radium bilden die im folgenden mitgeteilten Versuche, die mit den an Emanation ungemein reichhaltigen Produkten der Gasteiner Thermen teils in Bad-Gastein selbst, teils in Wien vorgenommen wurden. Man vermutet schon seit langer Zeit in diesem indifferenten, an Mineralbestandteilen ungewöhnlich armen und doch bekannt heilkräftigem Wasser ein physikalisches Agens und in der Tat haben vor kurzem P. Curie und A. Laborde[4] gelegentlich einer Untersuchung des Emanationsgehaltes von Quellgasen auch das Gas der Gasteiner Therme (Grabenbäckerquelle) untersucht und gefunden, daß es von allen untersuchten den weitaus größten Betrag von Emanation enthält. Die hier mitgeteilten Versuche erstrecken sich jedoch nicht auf die Quellgase allein, sondern vor allem

[1] F. Himstedt, Phys. Z., p. 5 und 212 (1904).

[2] Adams, Phil. Mag. (6), 6, p. 563 (1903); Himstedt, Ber. d. Naturf.-Ges. v. Freiburg i. B., 12, p. 101 (1903); Burton, Phys. Z., p. 5 und 511 (1904).

[3] L. c.

[4] C. R., 138, p. 1150 (1904).

auf die im Wasser selbst absorbierte Emanation und auf das in den Quellstollen vorhandene aktive Material. Allen denen, welche mich in freundlicher Weise durch Zusendungen von Wasser und Gesteinsproben unterstützt haben[1] oder die mir in Bad-Gastein selbst förderlich zur Seite standen, bitte ich, auch hier nochmals meinen wärmsten Dank aussprechen zu dürfen. Besonders bin ich auch Herrn Prof. E. Ludwig für die meiner Arbeit erwiesene Förderung und das ihr entgegengebrachte Interesse zu Dank verpflichtet.

I. Methode der Untersuchung.

Die Untersuchung des Wassers und des Gases auf Emanationsgehalt geschah mit der bekannten, zuerst von Elster und Geitel eingeführten Anordnung, die nur einiger geringfügiger Modifikationen bedurfte.

Ein zylindrischer, innen mit dicht anschließendem Messingdrahtnetz ausgekleideter Glassturz von 13·7 *l* Inhalt wurde mit seinem abgeschliffenen Rande auf einen massiven Kupferteller aufgesetzt und mit Vaselinfett vollkommen gedichtet. Unter dem Sturze stand ein Exner'sches Elektroskop mit Bernsteinisolation und Spiegelablesung nach Elster und Geitel, auf das der zylindrische Zerstreuungskörper aufgesetzt war. Das Ablesen des Elektroskopes geschah durch ein Fenster aus Spiegelglas, das Laden vermittels einer Magnetnadel, die von außen durch einen kleinen Stabmagnet zum Kontakt mit dem den Zerstreuungskörper tragenden Stifte gebracht und durch eine den Kupferteller isoliert durchsetzende Zuleitung geladen werden konnte. Zwei Hähne, der eine im Teller, der andere in einer Öffnung des Glassturzes angebracht, ermöglichten die Ausführung der folgenden Operation: Es wurde vermittels eines durch einen Motor oder die Hand betriebenen Gummigebläses die unter dem Glassturz enthaltene Luft durch den einen Hahn aspiriert, weiter in heftigem Blasenstrom

[1] Ich erwähne hier namentlich das Mitglied der Gasteiner Kurkommission, Herrn L. Schurk, der allen meinen diesbezüglichen Wünschen in der liebenswürdigsten Weise nachkam.

durch das untersuchte Wasser gepreßt und hierauf über eine Chlorcalciumvorlage und durch den zweiten Hahn in den Apparat zurückgebracht. Bei einer Förderungsmenge von zirka $3^1/_3$ *l* Luft pro Minute und bei der gewöhnlich verwendeten Wassermenge von 400 cm^3 war dann der Gleichgewichtszustand in längstens einer halben Stunde erreicht. Sollte statt des Wassers Gas untersucht werden, so wurde ganz analog verfahren. Man ersetzte dann die das Wasser enthaltende Flasche durch die das Gas enthaltende und trieb die Luft so lange durch, bis das emanationshältige Gas im ganzen Kreise gleichmäßig verteilt war.

Da diese Operation, wie erwähnt, im allgemeinen eine halbe Stunde in Anspruch nahm und die in den Apparat getriebene Emanation sofort auf dessen Wände induzierend einwirkt, so war der nach dem Aufhören des Durchpumpens im Apparat gemessene Wert des Sättigungsstromes bereits zu hoch und mußte um diesen auf die Aktivierung durch Induktion entfallenden Teilbetrag korrigiert werden. Das geschah in der Weise, daß man den Apparat durch Abheben des Sturzes und kräftiges Ausblasen lüftete und hierauf, nachdem der Sturz wieder aufgesetzt worden war, durch zumindest eine halbe Stunde das Abklingen der induzierten Aktivität beobachtete. Der aus der hiefür erhaltenen Kurve für den Zeitpunkt Null extrapolierte Wert wurde dann in Abzug gebracht.

Eine zweite Korrektur bezog sich auf denjenigen Betrag der Emanation, der in der Trockenvorlage, dem Gebläse, den Schlauchverbindungen und endlich auch noch im Wasser nach Erreichung des Gleichgewichtszustandes zurückbleibt und sich bei der Messung des Sättigungsstromes im Apparat selbst nicht bemerkbar macht. Diese letztere Korrektur erhöhte unter den gegebenen Verhältnissen die Werte um zirka 10%. Bei dieser Berechnung wurde auf Grund der Versuche von v. Traubenberg[1] sowie auf Grund der weiter unten beschriebenen eigenen Versuche angenommen, daß nach erreichtem Gleichgewichtszustande im Wasser drei Zehntel der in gleichem Volumen Luft vorhandenen Emanationsmenge enthalten ist.

[1] Phys. Z., p. 5, 130 und 210 (1904).

II. Vergleich der verschiedenen Thermalquellen bezüglich ihres Emanationsgehaltes.

Da es nicht ausgeschlossen ist, daß dieser Gehalt mit der Zeit schwankt und es demnach wünschenswert erscheinen könnte, die Versuche nach längerer Zeit zu wiederholen, so soll hier zunächst kurz die Aufzählung der Quellen erfolgen, deren Wasser untersucht wurde, und ihre Lage sowie die Stellen, wo die Proben entnommen wurden, soweit beschrieben werden, daß ein späteres Auffinden ermöglicht ist:

a) Franz Josephs-Stollen.

Der höchstgelegene, am rechten Ufer der Ache oberhalb der Straße mündende Stollen. Er enthält zwei spärliche Quellen von stark verschiedener Temperatur. Am Hauptort rinnt über eine schräge Felsplatte der kältere Thermenstrahl; etwas weiter gegen den Tag gelegen entspringt aus einer gegen Norden gelegenen Spalte die wärmere Quelle.

b) Rudolf-Stollen, auch Fürstenstollen genannt.

Die Mündung liegt an der Straße beim Postgebäude. Er enthält die heißeste Therme Gasteins. Das untersuchte Wasser wurde wegen der Unmöglichkeit, es bei den Ausläufen blasenfrei einzufüllen, aus dem Bassin entnommen, das sich am Ende des Stollens befindet und in welches das Wasser aus einer seitlichen und zum Teile vom First her aus einer höheren, in einer Art Schacht austretenden Quelle abfließt.

c) Wasserfallquelle.

Entspringt beim Hotel Straubinger mitten im Wasserfall. Sie ist dort gut gefaßt, so daß kein Bachwasser zudringen kann und wird in einem Rohre in das Badehaus des Hotels geleitet. Da die Quelle im Sommer völlig unzugänglich ist, wurde die Probe an der Mündung der Leitung entnommen.

d) Chirurgenstollen.

Liegt unmittelbar unter der Straße. In dem kurzen Stollen entspringt am Orte die Therme, die in einem kleinen Becken gefangen wird.

e) Doktorquelle.

Etwas tiefer, in der Nähe des Elisabeth-Stollens gelegen. Das Wasser läuft aus einer Spalte des anstehenden Felsens in ein kleines Bassin.

f) Elisabeth-Stollen, auch Hauptstollen genannt.

Der Stolleneingang liegt unterhalb der Straße beim Wasserversendungspavillon Mattoni's. In diesem Stollen brechen drei Quellen aus. Die mächtigste, am Hauptort aus einer seitlichen Gesteinsspalte hervorströmend, ergießt sich in ein weites Bassin, von dem auch die nach Hof-Gastein führende Röhrenleitung ausgeht. Weiter gegen Tag findet sich an der nördlichen Wand des Stollens eine zweite Quelle, die in ein kleines, zur Zeit dicht mit Schlamm gefülltes Becken strömt und endlich nahe am Eingang auf der Südseite in einem Flügelort eine dritte, reiche Quelle, die von der Sohle her aus einer mit Sand gefüllten Spalte in ein tiefes Bassin quillt.

g) Elisabeth-Nebenquelle.

Liegt unterhalb des Einganges zum Elisabeth-Stollen. (Nicht zu verwechseln mit dem unmittelbar darüber gelegenen Sammelbecken für die beiden seitlichen Quellen des Elisabeth-Stollens!)

h) Chorinsky-Quelle.

Wenige Schritte über dem Pumphaus. Die Therme bricht in zwei Strahlen hervor, die sich, gut gefaßt, in einem kleinen tiefen Bassin vereinigen. Eine gesonderte Untersuchung der beiden Zuflüsse wurde nicht vorgenommen.

i) Fledermausstollen.

Liegt über dem Pumphaus nahe dem Wasserfall. Am Ort rieselt die Quelle spärlich über die schräge Seitenwand. Diese Therme wird gegenwärtig nicht benützt. Der Stollen stand zur Zeit voll schlammigen Wassers. Die Probe wurde diesem Wasser möglichst beim Einfluß entnommen, das aber gewiß

auch hier längere Zeit gestanden hatte. Da zudem das Eindringen von Tagwasser nicht ausgeschlossen war, so ist der gefundene Wert als untere Grenze zu betrachten.

k) Grabenbäckerquelle.

Die tiefstgelegene und die einzige unter den gefaßten Thermen Gasteins, die sich am linken Ufer der Ache vorfindet. Sie entspringt, leicht zugänglich, auf der Wiese des Grabenbäckers, wo sie von unten aus einer mit Sand gefüllten Gesteinsspalte quillt.

Hier steigt auch freies Gas auf. Desgleichen und zwar reichlicher in der südlichen Quelle des Elisabeth-Stollens. Vermutlich führen auch alle anderen Quellen freies Gas mit sich; doch sind die beiden genannten die einzigen, bei welchen gegenwärtig der Zufluß unter dem Wasserspiegel erfolgt und das Gas gefangen werden kann, ehe es sich mit Luft mischt.

Von kalten Quellen wurden zwei untersucht, nämlich

a) die Schachenquelle, ein Tagwasser, das von der Höhe des Graukogels behufs Trinkwasserversorgung in Röhren nach Bad-Gastein geleitet wird;

b) die Quelle im Gruberhaus, die Sommer und Winter gleiche Temperatur und Fördermenge aufweist und den kälteren Thermen zugezählt werden kann.

Endlich wurde auch das Thermalwasser in Hof-Gastein untersucht, das aus der Hauptquelle des Elisabeth-Stollens in einer $7^1/_2$ *km* langen Holzröhrenleitung dorthin geführt wird. Die Laufzeit des Wassers wurde mir zu $2^h\ 9^m$ angegeben. Die am Ende der Leitung entnommene Probe enthielt nur mehr $3^1/_3{}^0/_0$ der am Quellursprung vorhandenen Emanation. Es ist somit anzunehmen, daß an einer oder mehreren Stellen der Leitung eine Durchmischung des Wassers mit Luft stattfindet. Sollte man geneigt sein, die Heilkraft der indifferenten Thermen mit ihrem Emanationsgehalt in Zusammenhang zu bringen, dann stünde diese Beobachtung mit der oft gehörten Behauptung im Einklang, daß das Heilwasser in Hof-Gastein, bei gleicher Temperatur angewendet, auf den Organismus weit schwächere Wirkungen ausübt als in Bad-Gastein selbst.

Was die chemische Beschaffenheit des Gasteiner Thermalwassers und Quellgases anbelangt, sei auf die diesbezüglichen Untersuchungen von E. Ludwig und Th. Panzer verwiesen.[1] Dort gibt auch Fr. Berwerth eine kurze Darlegung der eigenartigen geologischen Verhältnisse von Gastein. Ich lasse nun in der folgenden Tabelle die Messungsergebnisse folgen, die Mitte August erhalten wurden und die sich auf Proben beziehen, die wenige Minuten vorher den Quellen entnommen worden waren.

Die Zahlen der ersten Kolumne geben die beobachteten Werte der Spannungsabnahme des Elektroskopes in Volt bezogen auf 15 Minuten und den Liter Wasser oder Gas.

Die Zahlen der zweiten Kolumne bedeuten den Sättigungsstrom in E. S. E., bezogen auf den Liter Wasser oder Gas. Sie geben an, welche Stromstärke durch die ionisierende Wirkung der im Liter enthaltenen Emanation im Maximum erreichbar ist und bilden daher ein absolutes, mit den gleichgehaltenen Angaben anderer Beobachter vergleichbares Maß des Emanationsgehaltes.[2] Die Kapazität des Apparates wurde bei dieser Berechnung zu 11·7 *cm* angesetzt und war mittels eines Harmschen Kondensators[3] bestimmt worden.

An den Zahlen beider Kolumnen ist bereits in der oben angegebenen Weise die Aktivierung durch Induktion korrigiert wie auch der bei der Messung nicht einbezogene Betrag an Emanation, welcher in den Vorlagen und im Wasser selbst nach Erreichung des Gleichgewichtszustandes zurückbleibt.

Die letzte Kolumne enthält die Temperaturen der betreffenden Quellen, die Herr Dr. A. Kalmann für mich mit einem Normalthermometer zu bestimmen die Freundlichkeit hatte. Diese Temperaturen beziehen sich auf die Stellen, an denen die Wasserproben entnommen wurden.

[1] Wiener klinische Wochenschrift Nr. 27 (1900).

[2] Vergl. Curie und Laborde, l. c.

[3] Phys. Zeitschr. 5, p. 47, 1904.

Tabelle I.

Nr.		Volt in 15 Minuten	$i \cdot 10^3$	Temperatur in Grad Celsius
	A. **Quellgas.**			
1	Grabenbäckerquelle	13000	564[1]	—
2	Elisabeth-Stollen (Quelle Nr. 7)	9500	412	—
	B. **Wasser.**			
3	Grabenbäckerquelle, S—N	3550	155	36·3
4	Elisabeth-Stollen, Hauptort	3060	133	46·8
5	Wasserfallquelle, S—N	2450	106	36·9
6	Chorinsky-Quelle	1920	83·4	41·9
7	Elisabeth-Stollen, Südquelle	1700	73·7	46·1
8	Franz Josephs-Stollen, hintere Quelle, E—W	1480	64·5	39·0
9	Franz Josephs-Stollen, vordere Quelle, E—W	1420	61·7	44·7
10	Chirurgenquelle, E—W	1260	54·5	47·1
11	Fledermausstollen	> 760	> 32·8	30·0
12	Doktorquelle, E—W	730	31·5	44·2
13	Elisabeth-Stollen, Nordquelle	620	26·8	42·5
14	Rudolf-Stollen, E—W	570	24·7	46·9[2]
15	Elisabeth-Nebenquelle	85·0	3·69	45·7
16	Quelle im Gruberhaus	60·2	2·61	15·6
17	Schachenquelle	7·1	0·31	—
	Wiener Leitungswasser	1·9	0·08	—

[1] Der von Curie und Laborde am Gase der Grabenbäckerquelle 12 Tage nach der Entnahme gemessene und auf die Zeit der Entnahme extrapolierte Wert ist wesentlich größer wie der oben gegebene. Doch ist hiebei der auf Aktivierung durch Induktion entfallende Betrag mit einbezogen.

[2] Die Temperatur der beiden Zuflüsse beträgt am Ursprung 47·2 und 47·4° C.

Bei Betrachtung dieser Tabelle fällt zunächst der große Unterschied auf, der zwischen den einzelnen Thermalquellen Gasteins besteht. Selbst die im gleichen Stollen austretenden Quellen können außerordentliche Differenzen aufweisen (vergl. Nr. 4, 7, 13). Hält man an der Hypothese fest, daß »der Wasserzufluß der Gasteiner Thermen auf eine einzige Urquelle zurückzuführen ist, die auf einem Risse in der Tiefe des Gneises aufsteigt und sich erst in der Nähe der Gneisoberfläche nach den Kluftflächen des Gneises verzweigt«,[1] so würde die erwähnte Verschiedenheit entweder dadurch zu erklären sein, daß das emanierende Gestein in verschiedener Menge erst in diesen hochgelegenen Spalten lagert oder, und zwar mit größerer Wahrscheinlichkeit in der Weise, daß die Spalten sich in verschiedener Art und mit verschiedenen Weiten verzweigen, so daß das Wasser nach sehr verschiedener Laufzeit die Oberfläche erreicht.

Ein Zusammenhang des Emanationsgehaltes mit der Richtung der Quellspalten ist nicht ausgeschlossen. Der Gneis des Gasteiner Quellgebietes zeichnet sich durch eine auffallend regelmäßige Zerklüftung längs der Flächen von Kuboiden aus, so zwar, daß alle Spalten ins Kreuz gehen und sich einerseits um die Nord-Süd-, andrerseits um die Ost-Westlinie zusammenscharen. Zieht man die hierüber vorhandenen Aufzeichnungen heran, so bemerkt man, daß die an Emanation reichen Quellen (Nr. 3 und 5) aus Spalten entspringen, die dem Nord-Südsystem angehören, während die weniger reichen Quellen (Nr. 8, 9, 10, 12, 14) aus ost-westlichen Spalten ausbrechen.

Ein einfacher Zusammenhang des Emanationsgehaltes mit der Temperatur besteht nicht und ist in Anbetracht der vielen, für diesen Gehalt mitbestimmenden Faktoren wohl auch nicht zu erwarten. Jedenfalls ist es eher noch wahrscheinlich, daß die kälteren Thermen vor den heißen begünstigt sind, da die Absorptionsfähigkeit des Wassers für radioaktive Emanation sowie für jedes andere Gas mit steigender Temperatur abnimmt. In der Tat ist die kälteste unter den benützten Quellen Gasteins,

[1] F. Berwerth, l. c.

die Grabenbäckerquelle, die an Emanation reichste, während die heißeste, die Quelle im Rudolf-Stollen, unter den Thermen an vorletzter Stelle steht.

Mit dieser Vorstellung befindet sich im Einklange, daß das Quellgas in gleichem Volumen viel mehr an Emanation enthält als das Wasser, aus dem es aufsteigt, und daß dieser Unterschied um so größer ist, je höher die Temperatur der Thermalquelle liegt. Nennt man mit v. Traubenberg das Verhältnis zwischen der nach erreichtem Gleichgewicht in der Volumeinheit Wasser enthaltenen Emanationsmenge zu der in der Volumeinheit Gas enthaltenen den Absorptionskoeffizienten des Wassers für diese Emanation und nimmt man an, daß für das aus den Quellen aufsteigende Gas der Gleichgewichtszustand erreicht ist, so erhält dieser Koeffizient nach der Beobachtung an der Grabenbäckerquelle (Nr. 1 und 3), also bei der Temperatur 36·3° den Wert 0·27 und nach der Beobachtung an der Südquelle im Elisabeth-Stollen (Nr. 2 und 7), also bei der Temperatur 46·1° den Wert 0·18.

Wurde auf Zimmertemperatur abgekühltes Thermalwasser (Grabenbäckerquelle) in einer nach Art einer Spritzflasche konstruierten, halb leeren und hermetisch geschlossenen Flasche durch 20 bis 30 Minuten heftig durchgebeutelt und dann Wasser und Luft in der oben beschriebenen Weise gesondert auf Emanationsgehalt geprüft, so erhielt man für den Absorptionskoeffizienten den Wert 0·32, in genügender Übereinstimmung mit den durch v. Traubenberg für Freiburger Leitungswasseremanation bei Zimmertemperatur gefundenen Zahlen, die zwischen 0·33 und 0·36 liegen.

Es erschien des Vergleiches halber von Wert, diese Größe auch für Radiumemanation zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurde mit Hilfe eines kleinen Gummigebläses Luft durch eine schwache wässerige Radiumchloridlösung gepreßt und, nachdem sie einen 50 *cm* langen Wattefilter passiert hatte, durch destilliertes Wasser geleitet, von wo sie zum Gebläse zurückkehrte. Auf diese Weise war es möglich, das destillierte Wasser bis zum gewünschten Maße mit Radiumemanation zu versehen. Wurde dann ein abgemessenes Quantum dieses Wassers in kubizierter Flasche mit Luft gebeutelt, so erhielt man durch

gesonderte Untersuchung von Wasser und Luft den gesuchten Absorptionskoeffizienten zu 0·33.

Die Unabhängigkeit dieser Größe von der Art des Gases, mit dem die Mischung geschieht, ist bei der chemischen Indifferenz aller Emanationen im voraus zu erwarten und erscheint durch die Beobachtung bestätigt. Wurde nämlich der Versuch, statt mit Luft, mit Leuchtgas, Kohlensäure oder Stickstoff wiederholt, so ergab sich beziehungsweise 0·30, 0·32, 0·32, Werte, die bei der geringen Genauigkeit, deren die Methode in dieser Form fähig ist, als identisch zu betrachten sind.

Es mag vielleicht noch interessieren, das Volumen kennen zu lernen, welches die in Gas und Wasser absorbierte Emanation bei normalem Drucke für sich allein einnehmen würde. Nach Ramsay und Soddy erzeugen 60 *mg* Radiumbromid in 5·3 Tagen 0·035 mm^3 Emanation.[1] Andrerseits erhält nach der Messung von Curie und Laborde die aus 1 *mg* Radiumbromid in 19·7 Minuten entwickelte Emanation einen Sättigungsstrom von $720 . 10^{-3}$ E. S. E. Da nun ein Liter Gas aus der Grabenbäckerquelle einen Sättigungsstrom von $564 . 10^{-3}$ E. S. E. liefert, so nimmt das in ihm enthaltene Emanationsgas bei 0° C. und Atmosphärendruck ein Volumen von $12 . 10^{-7}$ mm^3 ein. Es ist somit etwa ein Billionstel des Volumens des Quellgases aktive Emanation.

III. Zerfallsgeschwindigkeit der Emanation.

Wurde aus Thermalwasser extrahierte Emanation in den Apparat gebracht, so stieg zunächst, wie bereits erwähnt, infolge der an den Wänden und am Elektroskop sich ausbildenden induzierten Aktivität der Sättigungsstrom regelmäßig an. War der Maximalwert nach 4 Stunden erreicht, so wurde dann ein Absinken dieses Wertes beobachtet, das in ausgezeichneter Weise durch die Formel $I_t = I_0 e^{-t/\lambda}$ darstellbar war. Hierin ist I_0 die Wirksamkeit der Emanation zur Zeit Null, I_t die nach t Tagen und $\lambda = 5 \cdot 60$. Bezieht man die Zeit auf

[1] F. Soddy, Radio-Aktivity, p. 161, London (1904).

Sekunden, so ist $\lambda = 4 \cdot 83 . 10^5$. Die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte erhellt aus der Fig. 1, wo die Logarithmen von *I* eingetragen sind und sich die beobachteten Punkte in ersichtlicher Weise an die der Formel ent-

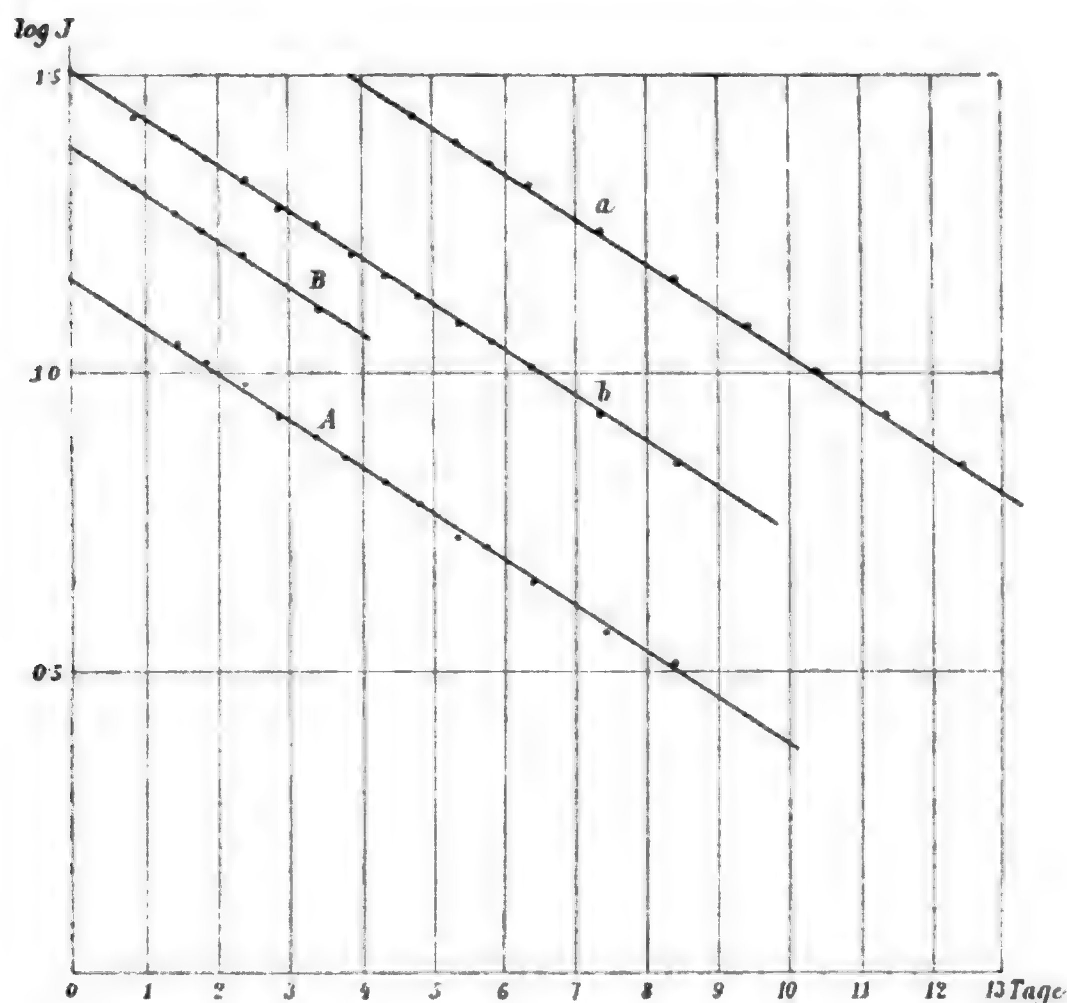


Fig. 1.

sprechenden Geraden *a* und *b* anschließen. Man erhält für die beiden dort dargestellten Versuchsreihen, von denen sich *a* auf Wasser aus dem Elisabeth-Stollen (Quelle Nr. 4), *b* auf Wasser aus der Grabenbäckerquelle bezieht, die folgende kleine Tabelle beobachteter und berechneter Werte:

Tabelle II.

a) Elisabeth-Stollen.			b) Grabenbäckerquelle.		
Zeit in Tagen	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet	Zeit in Tagen	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet
0	—	32·2	0	—	32·6
0·802	27·6	27·9	0·833	27·6	28·1
1·375	24·8	25·2	1·417	24·9	25·3
1·854	23·0	23·1	1·833	23·3	23·5
2·417	21·0	20·9	2·417	21·4	21·1
2·854	19·1	19·3	2·833	19·4	19·6
3·385	17·5	17·6	3·417	17·9	17·7
4·438	14·6	14·6	4·583	14·8	14·4
5·417	12·2	12·3	5·417	12·2	12·4
6·427	10·2	10·2	6·427	10·3	10·3
7·396	8·65	8·59	7·396	8·66	8·69
8·427	7·13	7·14	8·417	7·17	7·24

Berechnet man die Zeit, innerhalb welcher die Emanation zur halben Wirkung absinkt, so erhält man 3·88 Tage. P. Curie findet für Radiumemanation $\lambda = 4·97.10^5$ und E. Rutherford $\lambda = 4·63.10^5$. Der für Gasteiner Emanation erhaltene Wert $\lambda = 4·83.10^5$ fällt somit zwischen diese beiden Zahlen.

Himstedt[1] und Adams[2] haben gezeigt, daß in Wasser absorbierte, in geschlossenem Gefäße aufbewahrte Emanation, die aus Freiburger beziehungsweise Cambridger Leitungswasser stammte, nach demselben Gesetze abklingt wie die in einem Gas enthaltene Emanation. Madame Curie hat nachgewiesen, daß das Gleiche für mit Radiumemanation versehene Flüssigkeiten gilt.[3] Es schien mir der Mühe wert, auch das

[1] Phys. Z., p. 5 und 511 (1904).

[2] L. c.

[3] Diss., p. 112, Paris 1903.

Gasteiner Thermalwasser daraufhin zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurden aus vier zu gleicher Zeit vollgefüllten Flaschen an verschiedenen Tagen Proben von je $^1/_4\,l$ mittels einer Pipette entnommen und ihr Emanationsgehalt ermittelt. In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Werte mit den nach der Exponentialformel unter Zugrundelegung des für λ erhaltenen Wertes berechneten zusammengestellt.

Tabelle III.

Zeit nach der Füllung	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet
0	—	30
1 Tag	26·0	25·1
3 Tage	19·6	17·6
6 »	10·1	10·3
9 »	6·2	6·0

Die Übereinstimmung ist genügend, um aus ihr schließen zu können, daß im Gasteiner Thermalwasser nur sehr geringe Mengen der emanierenden Substanz selbst vorhanden sein können, da sonst das Abklingungsgesetz hier ein anderes sein müßte. Auch ist es evident, daß, wofern man die Wirkungen der Gasteiner Bäder auf den Emanationsgehalt der Thermen zurückführt, dieses Verhalten ein Versenden des Heilwassers auf größere Entfernungen illusorisch macht.

IV. Induzierte Radioaktivität.

Wartet man nach dem Einführen der emanationshältigen Luft in den Apparat, bis die Leitfähigkeit nach 4 Stunden zu ihrem Maximalwert angestiegen ist, so beteiligt sich die induzierte Aktivität mit 40 bis 50% an dem erzielten Wert. Nach Lüften und Wiederzusammensetzen des Apparates kann dann ihr Abklingen beobachtet werden. Derartige Abklingungskurven wurden in sehr großer Zahl ermittelt, und zwar für aus ver-

schiedenen Quellen stammende Emanation, für stark verschiedene Emanationskonzentration und für Expositionszeiten, die zwischen 30 Minuten und 53 Stunden schwankten. Der Gang dieser Kurven ist qualitativ und quantitativ vollkommen der gleiche, wie er durch P. Curie und Danne[1] und noch weiter im Detail durch Rutherford[2] an durch Radium induzierten Körpern gemessen wurde. Die ersten drei der dort auftretenden Phasen lassen sich auch hier genau beobachten. Im Anfang der Entaktivierung zeigt sich innerhalb der ersten zehn Minuten ein rascher Abfall (I. Stadium), von da in den nächsten 30 Minuten eine genäherte Konstanz, ja bisweilen ein Ansteigen zu einem Maximum (II. Stadium) und hierauf in dem durch $3^1/_2$ Stunden andauernden III. Stadium ein Abfall, der in ausgezeichneter Weise durch die von Curie und Danne aufgestellte Formel ohne irgend welche Änderung der Konstanten darstellbar ist. Für diesen dritten Teil der Kurve ist es gleichgiltig, wie lang man die Expositionszeit wählt; hingegen ist die durch das zweite Stadium bedingte Störung der Kurve um so weniger ausgeprägt, je länger man exponiert, ohne jedoch auch nach zweitägiger Exposition vollständig zu verschwinden. Curie und Danne fanden für durch Radium induzierte Körper das Abfallgesetz

$$I = I_0 [4 \cdot 2\, e^{-\frac{t}{2420}} - 3 \cdot 2\, e^{-\frac{t}{1860}}],$$

worin t die Zahl der Sekunden bedeutet, von dem Moment an gerechnet, in welchem der aktivierte Körper dem Einfluß der Emanation entzogen wird. Die folgende Tabelle und die in Fig. 2 enthaltene Kurve a beziehen sich auf einen Versuch, bei dem die Emanation wieder aus dem Thermalwasser des Elisabethstollens (Quelle Nr. 4) entnommen worden war und durch $4^1/_2$ Stunden eingewirkt hatte. Die erste Kolumne der Tabelle gibt die Zeit vom Lüften des Apparates an gerechnet, die zweite die beobachteten Werte in Volt/Minuten, die dritte

[1] C. R., 136, p. 364 (1903).

[2] E. Rutherford, Radio-Activity, p. 262 und 273, Cambridge (1904).

die aus der Formel von Curie und Danne für $I_0 = 87 \cdot 7$ berechneten. Im Diagramm entspricht b der theoretischen Kurve.

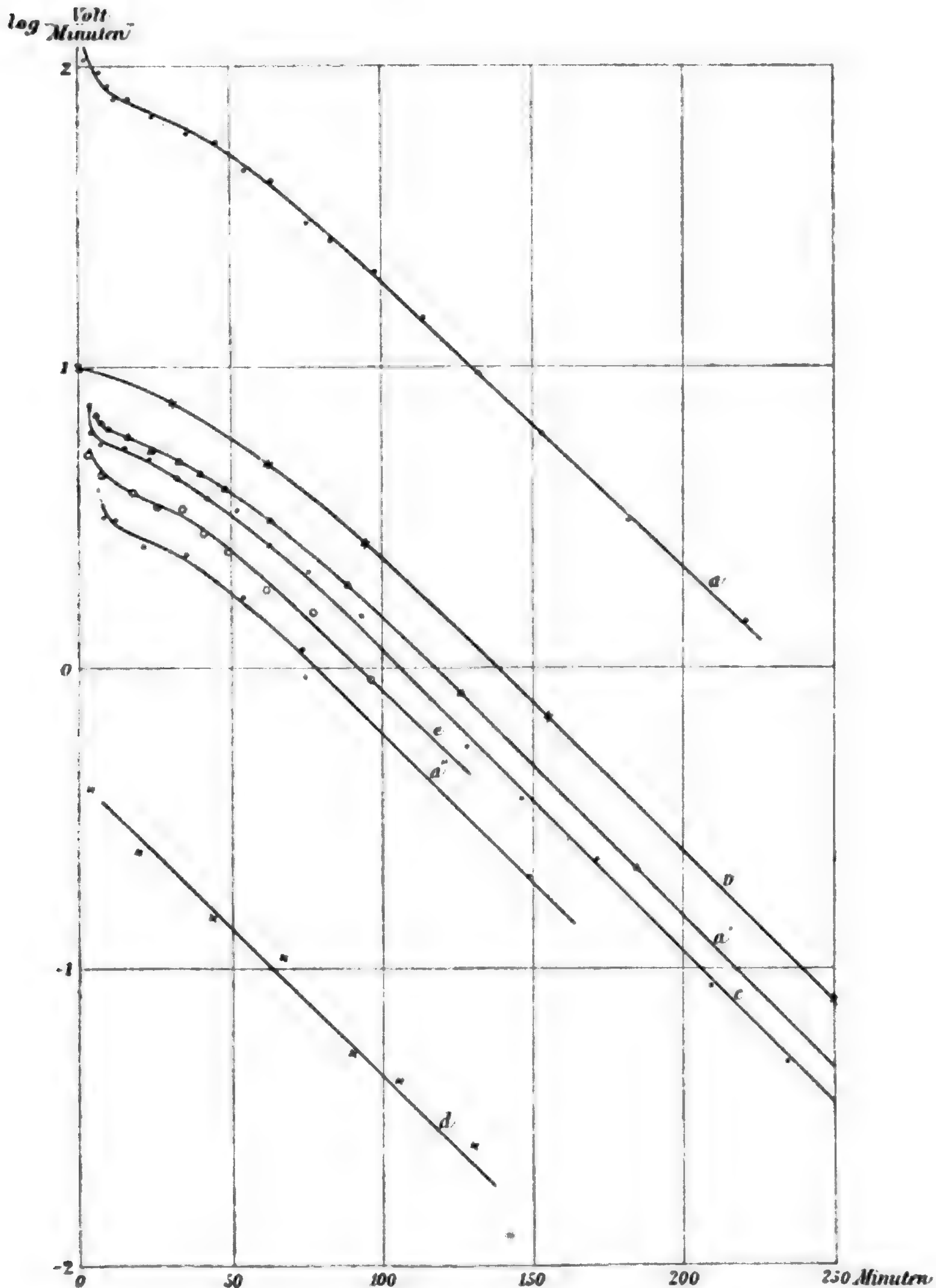


Fig. 2.

Tabelle IV.

Zeit in Minuten	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	I in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet	Δ
31	65·0	67·6	+2·6
62	42·3	41·2	—1·1
93	22·9	22·8	—0·1
124	11·5	11·9	+0·4
155	5·8	6·0	+0·2
186	2·89	2·97	+0·08
217	1·49	1·44	—0·05

An den beobachteten Werten ist hiebei der nach 4 Stunden erreichte, etwas über dem Normalen liegende, nahezu konstante Endwert in Abzug gebracht. Diese Erscheinung einer zurückbleibenden induzierten Aktivität mit langsamen Abfall ist durch Curie an gewissen Substanzen wie Zelluloid und Kautschuk beobachtet worden und war wohl auch hier durch die Anwesenheit vermutlich ähnlich wirkender Körper (kleine Stücke von Ebonit, Bernstein, Wachs-Kolophoniumkitt, Spuren von Vaselinfett) bedingt. Ein Parallelversuch mit der, einer schwachen, wässerigen Radiumchloridlösung entnommenen Emanation (Kurve *c*) gab in jeder Richtung völlig gleiche Resultate. Die Kurven a' und a'' der Figur entsprechen Versuchsreihen, die mit Gasteiner Thermalwasseremanation (Quelle Nr. 4) nach 24stündiger beziehungsweise 53stündiger Exposition gewonnen worden waren.

Adams findet, daß bei der Cambridger Leitungswasser entnommenen Emanation die durch sie induzierte Aktivität in 35 Minuten auf die Hälfte sinkt und Burton gelangt für aus Rohpetroleum gewonnene Emanation zu dem gleichen Resultat. Diese Angaben dürften aber die Messungsergebnisse wohl nur annähernd darstellen, da sie den Gang der Entaktivierung in den ersten 40 Minuten mit einbeziehen.

Emanation, die dem Wasser der Wiener Hochquelleitung entzogen worden war, gab, soweit der geringe Effekt eine genauere Beobachtung ermöglichte, eine induzierte Aktivität, die in ihrem Abklingen vollkommen dem am Gasteiner Thermalwasser beobachteten Verhalten entsprach. Auch hier war die Übereinanderlagerung dreier Phasen zu bemerken und entsprach der Abfall im dritten Stadium dem Gesetz von Curie und Danne (Kurve *d*).

V. Radioaktive Substanz im Wasser und in den Quellspalten der Thermen.

Wurde destilliertes Wasser nochmals gut ausgekocht und nach vierzehntägigem Stehen in hermetisch geschlossenen Flaschen durchgepumpt, so zeigte sich keine Änderung der Leitfähigkeit der Luft im Apparate. Hingegen bewirkte die Durchlüftung von 8 *l* Thermalwasser (aus verschiedenen Quellen stammend), das in gleicher Weise behandelt worden war, eine Steigerung des Spannungsverlustes von 0·50 Volt auf 0·58 Volt pro Minute. Es ist also, wenn auch in außerordentlich geringen Mengen, emanierende Substanz im Wasser gelöst.

Das Gestein, aus welchem die Quellen hervorbrechen — stark quarzhältiger Gneis — zeigt Spuren von Radioaktivität, doch um nichts mehr als Gneis von anderen Punkten der Goldberggegend, beispielsweise Gneis aus dem Tauerntunnel im Anlauftal. Hingegen hatten manche Materialien (Gneis, Quarz, Sand, Sinter, Mörtel, Ziegel- und Kohlenstücke), die durch vermutlich sehr lange Zeit im Thermalwasser gelegen waren, eine auffallende Aktivität. Prof. E. Ludwig hatte schon im Frühsommer dieses Jahres an verschiedenen, aus den Stollen stammenden Gesteinsproben radiographische Wirkungen festgestellt. Es galt nun dasjenige Quellsediment aufzufinden, dem die beobachteten Wirkungen zuzuschreiben sind. Das schwarzgrüne, als »Badeschlamm« bezeichnete Produkt, das sich unter dem Einfluß der Luft im Quellmunde absetzt und das zunächst verdächtig schien, erwies sich als inaktiv.

Unter den außerordentlich zahlreichen, den Quellstollen entnommenen Proben zeigten nun radioaktive Eigenschaften

vor allem lose Quarz- und Gneisstückchen, die dem Rudolf-Stollen entnommen waren und die auf ihrer ganzen Oberfläche eine schwarze bis schwarzbraune Kruste aufwiesen. Diese Proben senden in reichem Maß Emanation aus, sind α- und β-strahlend (die β-Strahlung beteiligt sich mit ungefähr 10% an der Gesamtstrahlung), wirken stark auf photographische Platten und besitzen eine Aktivität, die von Stück zu Stück stark verschieden ist und auf gleiche Oberflächen bezogen, bis zu 3·9 Uranylnitrat beträgt, so daß sie bisweilen die von metallischem Uran übertrifft. Da die Dicke der Kruste sehr gering ist und die Aktivität des Materials sich auf die Kruste beschränkt, andrerseits das zum Vergleich benützte Uranylnitrat in einer Schichtdicke von 8 *mm* zur Verwendung kam, so ist die gegebene Zahl gewiß noch zu klein.

Zerstampfen des Steines und Ausbreiten des Materials auf großer Oberfläche setzte die Aktivität scheinbar auf etwa die Hälfte herab, Abwaschen des Steins mit konzentrierter Salzsäure, in der sich der Bezug mit rubinroter Farbe vollständig löst,[1] vernichtete sie völlig.

Es war also die Aktivität des Materials an das Vorhandensein jener schwarzen Kruste gebunden und es lag nahe, im Vorkommen dieser Substanz auch den Grund für die Aktivität aller anderen, aus den Gasteiner Quellstollen stammenden Proben zu sehen. In der Tat zeigten Sand- und Gesteinsproben, die den Quellen des Elisabeth- und Franz-Josef-Stollens entnommen worden waren und eine Aktivität bis zu 0·12 Uranylnitrat aufwiesen, bei näherer Betrachtung an manchen Stellen den typischen, schwarzbraunen Bezug, dessen Identität mit der fraglichen Substanz durch Ablösen mit Salzsäure leicht erwiesen werden konnte.

War nun in diesem Material das fragliche radioaktive Sediment gefunden, so bot dessen mineralogische Bestimmung einige Zeit Schwierigkeiten, bis ich bei der Lektüre verschiedener, Gastein betreffender Schriften, in dem Buche K. Reißacher's »Der Kurort Wildbad Gastein«, Salzburg 1865

[1] Bei mehrtägigem Stehen geht durch Oxydation die Farbe der Lösung über braunrot und braungelb in ein helles Gelb über.

hiefür einen Anhaltspunkt fand. Reißacher, der einige Jahre früher den Aufschließbau der Franz Josephs-Quellen geleitet hatte, stieß hiebei in einer Gneisspalte auf eine Art schwarzbraunen Schlammes. Dieser Schlamm bildete nach dem Trocknen einen zerreiblichen, kastanienbraunen, sehr leichten Körper und wurde von W. Haidinger unter dem Namen »Reißacherit« der Naturforscherversammlung im Jahre 1856 vorgelegt.[1] An zwei Proben dieses Minerals, die ich der Güte des Herrn Prof. F. Becke und des Herrn Dr. E. Sueß verdanke, konnte nun die Identität der fraglichen Substanz mit Reißacherit erwiesen werden. Die spektralanalytische Untersuchung ergab als Hauptbestandteil Mangan (Manganoxyd), ferner geringere Mengen von Eisen (Eisenoxyd), Calcium (kohlensaurer Kalk), Barium und Strontium. Uran ist nicht nachweisbar, Barium nicht als Sulfat vorhanden.

Auch die beiden mir zur Verfügung gestellten Proben des Minerals, die durch 48 Jahre in Sammlungen gelegen waren, zeigten radioaktive Eigenschaften. Pulver davon in einem Schälchen mit Uranylnitrat verglichen, besaß die Aktivität 0·05. Ich glaube nicht, daß dieser verhältnismäßig niedrige Wert dahin zu deuten ist, daß innerhalb des erwähnten Zeitraumes ein Absinken der Aktivität des Materials stattgefunden hat, vielmehr gelangte ich durch die Untersuchung der aus den verschiedenen Stollen stammenden, Reißacherit führenden Proben zur Überzeugung, daß der Gehalt dieses Minerals an radioaktiver Substanz überhaupt ein sehr verschiedener ist und nur im Rudolfs- und Elisabeth-Stollen einen höheren Wert erreicht. Es wäre nicht aussichtslos, durch Verfolgung der Quellspalten dieser Thermen größere Mengen aktiven Reißacherits zu gewinnen, doch verlangt, wegen der den Thermen hiebei drohenden Gefahr, ein derartiges Unternehmen die größte Sachkenntnis und Vorsicht.

Wurden von verschiedenen Gneis- und Sinterstücken, die aus dem Rudolf-Stollen stammten, die Krusten mit Salzsäure gelöst und die Lösung auf einer flachen Platinschale eingedampft, so erhielt man ein schwarzbraunes, stark hygrosko-

[1] Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt, 7, p. 312 (1856).

pisches Präparat, das, auf gleiche Fläche bezogen, scheinbar aktiver war als die Ausgangssubstanz, da nun die Schichtdicke größer geworden war.

Wurde die salzsaure Lösung mit Schwefelsäure versetzt und der Niederschlag getrocknet, so fand sich der radioaktive Körper in diesem Niederschlag. Eine noch größere Konzentration der aktiven Substanz gelang nach dem folgenden Verfahren:

Es wird aus der Lösung durch Ammoniak und Schwefelammon das Mangan und das Eisen gefällt, hierauf filtriert, das Filtrat eingedampft und durch scharfes Trocknen von den Ammonsalzen befreit. Wird dann der Rückstand, um den Kalk zu lösen, mit absolutem Alkohol ausgekocht, so ist im unlöslichen Teile hauptsächlich nur Bariumsalz enthalten. Hier findet sich dann auch der radioaktive Körper.

Auf diese Weise gelang es, aus einigen Reißacheritkrusten, deren Aktivität ungefähr gleich der von Uranylnitrat war, ein Präparat von etwa $2^1/_2$ *cg* Gewicht[1] zu gewinnen, das auf 1 cm^2 Fläche ausgebreitet 4 Tage nach der Herstellung $11^1/_2$ mal, einen Monat später 19 mal so aktiv war, wie Uranylnitrat.

Es galt nun, noch den Nachweis zu liefern, daß die im Reißacherit enthaltene radioaktive Substanz mit derjenigen identisch ist, welche das Gasteiner Thermalwasser mit Emanation versieht. Zu diesem Zweck wurde verschiedenes, mit Reißacherit bedecktes Material durch 24 Stunden in einer gut verschlossenen Flasche belassen und hierauf die Luft aus der Flasche in den Apparat gepumpt (Versuch *A*). Bei einem zweiten Versuch (*B*) wurde das Material in destilliertes Wasser gelegt und die in ihm durch 48 Stunden angereicherte Emanation durch Durchlüftung des Wassers entnommen und in den Apparat überführt. Die Abklingungskonstante erwies sich in beiden Fällen gleich und hatte dieselbe Größe wie für im Thermalwasser enthaltene Emanation. Setzt man wieder $\lambda = 5 \cdot 60$, so zeigt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten, wie aus der folgenden Tabelle erhellt. Man vergleiche hiezu auch Fig. 1, *A* und *B*.

---

[1] Hiebei ist die Asche des Filters mitgewogen.

Tabelle V.

Reißacherit, Versuch *A*			Reißacherit, Versuch *B*		
Zeit in Tagen	*I* in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	*I* in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet	Zeit in Tagen	*I* in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ beobachtet	*I* in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$ berechnet
0	—	12·3	0	—	24·3
0·469	11·3	11·3	0·812	21·0	21·0
0·792	10·7	10·6	1·396	18·9	18·9
1·417	9·62	9·51	1·823	17·4	17·5
1·844	8·79	8·81	2·385	15·8	15·8
2·406	7·93	7·93	3·427	13·1	13·2
3·406	6·62	6·67			
4·406	5·54	5·57			
5·417	4·57	4·66			
6·458	3·77	3·86			
7·417	3·26	3·25			
8·406	2·77	2·73			

Schließlich zeigt auch die durch Reißacherit induzierte Aktivität in ihrem Abfall qualitativ und quantitativ genau das gleiche Verhalten, wie es oben für die Induktion durch Wasseremanation beschrieben wurde. Die hiefür erhaltene Kurve *e* (Fig. 2) fügt sich in ersichtlicher Weise in den Zug der anderen Kurven.

VI. Zusammenfassung der Resultate.

1. Im Gasteiner Thermalwasser und Quellgas ist in außerordentlich reichem Maße radioaktive Emanation vorhanden. Diese Emanation hat dieselbe Abklingungskonstante wie Radiumemanation. Die durch sie induzierte Aktivität folgt genau den Gesetzen welche an durch Radium induzierten Körpern beobachtet werden. Der Absorptionskoeffizient der fraglichen Emanation und der von Radiumemanation im Wasser ist der gleiche und sinkt mit steigender Temperatur.

Die Emanation klingt im Wasser nach dem gleichen Gesetz ab wie in Luft.

2. Der Gehalt an Emanation im Thermalwasser ist von Quelle zu Quelle verschieden. Der Grund für diese Verschiedenheit dürfte darin liegen, daß das von der gemeinsamen Urquelle aufsteigende Wasser nach sehr verschiedener Laufzeit die Erdoberfläche erreicht.

Eine verschieden starke Mischung mit Tagwasser kann nicht der maßgebende Grund sein, da gerade die kälteren Quellen vor den warmen begünstigt zu sein scheinen. Ein Zusammenhang des Reichtums an Emanation mit der Richtung der Quellspalten ist nicht ausgeschlossen und zwar wäre die Nord—Südrichtung bevorzugt.

3. Die an den Quellstollen von Gastein entnommenen Materialien (Gneis, Quarz, Sinter, Sand etc.) beobachtete Radioaktivität läßt sich auf das Vorhandensein eines einzigen Quellproduktes zurückführen, als das der Reißacherit, eine Art Braunstein, erkannt wurde. Die Aktivität dieses Gastein eigentümlichen Schlamminerals schwankt zwischen 0·05 und 3·9 Uranylnitrat, übertrifft somit zuweilen die des metallischen Urans und erhält sich durch lange Zeit. Die von ihm reichlich entwickelte Emanation besitzt die gleichen Eigenschaften, wie die im Thermalwasser enthaltene. Bei der chemichen Trennung des Minerals geht der radioaktive Körper mit dem Barium.

4. Nach allem ist anzunehmen, daß in den Tiefen, aus welchen die Gasteiner Thermen aufsteigen, große Mengen radioaktiven, emanierenden Gesteins lagern und zwar kann in Anbetracht der außerordentlichen Parallelität des Verhaltens kaum ein Zweifel sein, daß hier der radioaktive Körper Radium selbst ist. Dieses Radium löst sich in außerordentlich geringem Betrage im Thermalwasser, von dem es dann in den höheren Schichten mit dem als Reißacherit benannten Sediment abgesetzt wird. Das Merkwürdige an diesem Vorkommen von Radium besteht darin, daß es hier nicht mit Uran zugleich auftritt und daß es nicht an Bariumsulfat gebunden ist, sondern an eine leicht lösliche Verbindung dieses Elementes.

Stereoskopische Versuche

von

Prof. **G. Jäger.**

Aus dem theoretisch-physikalischen Institut der k. k. Wiener Universität.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Dezember 1904.)

1. Das Polaristereoskop.

Gelangt von irgend einem Körper linear polarisiertes Licht in unser Auge, so sind wir mit Hilfe eines vorgehaltenen Nicolschen Prismas in der Lage, das Licht beliebig bis zum Verschwinden zu dämpfen. Kommt gleichzeitig von einem andern Gegenstand linear polarisiertes Licht, aber mit dem Unterschied, daß die Schwingungsebene desselben senkrecht zur Schwingungsebene des früheren steht, so ermöglicht uns ein Nicol'sches Prisma, nach Belieben den einen oder den anderen Körper zu verdunkeln. Wären diese beiden Körper zwei zusammengehörige stereoskopische Bilder, welche passend übereinander liegen, und würden wir vor jedes Auge ein Nicolsches Prisma geben, so könnten wir die Stellung leicht so wählen, daß jedes Auge nur das ihm zukommende Bild erblickt. Das Resultat wäre dann ein stereoskopischer Effekt der beiden Bilder.

So naheliegend nun der Gedanke ist, nach diesem Prinzip ein Stereoskop zu bauen, so stellen sich doch der Ausführung erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Werfen wir z. B. ein Bild mit Hilfe eines Projektionsapparats auf einen Schirm aus Papier,

Leinwand oder dergleichen, so läßt sich durch ein zwischengeschaltetes Nicol'sches Prisma das Licht leicht linear polarisieren. Das Licht, welches jedoch vom Schirm in unser Auge gelangt, ist wieder vollständig depolarisiert. Durch die mehrfachen Reflexionen, vielleicht auch Brechungen, welche das Licht bei der diffusen Reflexion durch den Schirm erfährt, wird die Schwingungsebene der einzelnen Strahlen in der verschiedensten Weise gedreht, so daß im diffus reflektierten Licht die Schwingungsebenen alle möglichen Richtungen annehmen. Betrachten wir nun das Bild durch einen Nicol, so bleibt die Helligkeit des Bildes bei jeder Stellung des Nicols dieselbe. Auch das durch einen dünnen Papier- oder Leinwandschirm gehende Licht, welches ursprünglich linear polarisiert ist, wird beim Durchgang wieder vollständig depolarisiert. Es nutzt auch nichts, wenn man das Papier mit Öl tränkt. Nur beim Durchgang durch sehr dünnes Papier bleibt das Licht teilweise polarisiert.

Lassen wir linear polarisiertes Licht senkrecht durch eine planparallele Glasplatte gehen, so erfährt weder der durchgegangene, noch der reflektierte Strahl eine Änderung seiner Schwingungsrichtung. Dies ist noch nahezu der Fall, wenn Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel klein bleiben. Desgleichen ist es noch nahezu der Fall, wenn die Glasplatte nicht mehr planparallel ist, sondern einen Keil mit sehr spitzem Winkel bildet, so daß der durchgehende Strahl eine kleine Ablenkung erfährt.

Diese Tatsachen brachten folgende Überlegung zur Reife: Geben wir der einen Seite einer Spiegelplatte einen Mattschliff und lassen wir senkrecht auf die Platte, gleichgiltig von welcher Seite, einen Lichtstrahl fallen, so wird er diffus reflektiert und diffus gebrochen. Jene Strahlen, welche nur wenig von der ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, müssen durch Flächenelemente gehen, deren Neigung nur wenig von der ursprünglichen Fläche abweicht. Solche Strahlen können aber ihre ursprüngliche Schwingungsrichtung nicht wesentlich ändern. Wenn ich daher linear polarisiertes Licht einfallen lasse, so werden die nahezu senkrecht zurückgeworfenen als auch die nahezu gleichgerichteten durchgehenden Strahlen nur un-

erheblich depolarisiert werden. Betrachten wir diese Strahlen mit dem Nicol'schen Prisma, so müssen sie bei einer bestimmten Lage fast vollständig verlöschen.

Diese Überlegung wurde durch den Versuch aufs beste bestätigt. Besonders geeignet erwies sich eine mit Flußsäure geätzte Glasplatte. Weniger günstig, aber noch sehr gut wirkt eine mit Sandgebläse oder Sandschliff mattierte Scheibe. Ein gutes Resultat erhält man auch, wenn man eine gewöhnliche Spiegelplatte mit sogenanntem photographischen Mattlack übergießt.

Nachdem einmal festgestellt war, daß sich diffus reflektiertes oder gebrochenes Licht durch einen Nicol fast vollständig verdunkeln läßt, war es nicht schwer, nach den eingangs gemachten Bemerkungen ein Stereoskop zu konstruieren, welches sehr gute Resultate ergab.

Die stereoskopischen Bilder wurden als Diapositive in einen Projektionsapparat mit zwei getrennten Projektionsköpfen gebracht. Ich benützte dazu den bereits in der Abhandlung »Das Strobostereoskop«[1] erwähnten ehemaligen Nebelbilderapparat. Jedes der beiden Bilder wurde von einer elektrischen Glühlampe beleuchtet und auf eine matte Glasscheibe geworfen. Soll das Bild im reflektierten Licht betrachtet werden, so ist es, um Spiegelungen zu vermeiden, vorzuziehen, die matte Seite der Glastafel dem Beschauer zuzukehren. Bei der Beobachtung im durchgehenden Licht ist es gleichgültig, welche Seite der Glastafel sich auf Seite des Beschauers befindet.

Der Strahlengang von den stereoskopischen Diapositiven aus ist nun derart, daß die Strahlen, nachdem sie die Projektionslinse passiert haben, durch einen Nicol gehen, so daß nur linear polarisiertes Licht auf den Glasschirm fällt. Die Schwingungsebenen des Lichts beider Bilder werden zueinander senkrecht gestellt, etwa so, daß die eine vertikal, die andere horizontal ist. Die beiden Bilder, welche so aufeinander fallen sollen, wie sie das Objekt in Wirklichkeit den Augen darbietet, sind für das freie Auge in gleicher Helligkeit gleichzeitig sichtbar. Betrachten wir sie jedoch durch einen Nicol, so sehen wir sie im allge-

[1] Wien. Ber. CXII, Abt. II, S. 985 (1903).

meinen von verschiedener Helligkeit. Ja, bei vertikaler Schwingungsebene des Nicols erblicken wir nur das eine, bei horizontaler nur das andere Bild. Bewaffnen wir nun beide Augen mit Nicols, am besten so, daß wir sie in ein brillenartiges Gestell fassen, so daß die Schwingungsebene des einen vertikal, jene des anderen horizontal ist, so können wir nach Belieben das Bild auf dem Schirm stereoskopisch oder pseudoskopisch sehen, je nachdem wir die Nicols so vor den Augen haben, daß jedem Auge jenes Bild zukommt, welches es vom körperlichen Objekt empfangen würde, oder daß die beiden Bilder vertauscht sind.

Der Apparat dürfte sich besonders für physiologische Untersuchungen eignen, da man gleichzeitig mit den stereoskopischen Bildern auch reale Gegenstände, die man zwischen Auge und Schirm gibt, erblickt. So sind wir in der Lage, genau die Stelle anzugeben, wo sich das Stereoskopbild scheinbar befindet, da wir dieses Bild mit Leichtigkeit mit einem wirklichen Gegenstand zusammenfallen lassen können, dessen Abstand vom Beobachter direkt gemessen werden kann. Es lassen sich die beiden Bilder leicht voneinander entfernen und einander nähern. Man kann sonach leicht die größtmögliche Divergenz der Sehachsen des Beschauers bestimmen.

2. Das Konzentrationsstereoskop.

Mit Hilfe desselben Projektionsapparates *P* (Fig. 1), den wir schon im vorhergehenden Abschnitt erwähnten, werden die beiden stereoskopischen Aufnahmen auf eine große Linse *L* geworfen. Dieselbe ist so gewählt, daß sie von den Öffnungen *O O'* des Projektionsapparates die Bilder *A* entwirft, deren Abstand mit der Augendistanz des Beobachters übereinstimmt. Bringt der Beobachter seine Augen an Stelle der Bilder *A*, so empfängt das eine Auge nur Licht aus der Öffnung *O*, das andere nur von *O'*. Das eine Auge kann somit auf der Linse *L* nur das Bild, welches die Öffnung *O* entwirft, sehen, während das zweite Bild nur vom andern Auge wahrgenommen wird. Ergänzen sich beide zu einer stereoskopischen Ansicht, so erhalten wir ein körperliches Bild. Während jedoch beim Polari-

stereoskop eine Reihe von Beschauern das Bild gleichzeitig sehen kann — es braucht nur jeder mit der entsprechenden Nicolbrille versehen zu sein — ist beim Konzentrationsstereoskop, dessen Name von der Konzentration der Lichtstrahlen auf die zwei Punkte A hergeleitet ist, dies nicht möglich. Da jedoch hier der Beschauer das ganze Licht empfängt, können die Lichtquellen im Projektionsapparate sehr schwach sein. Ich benützte Glühlampen von 16 Kerzen, die jedoch durch vorgehaltenes Papier oder Milchglas noch bedeutend abgeschwächt werden mußten, damit die Lichtstärke der Bilder nicht zu

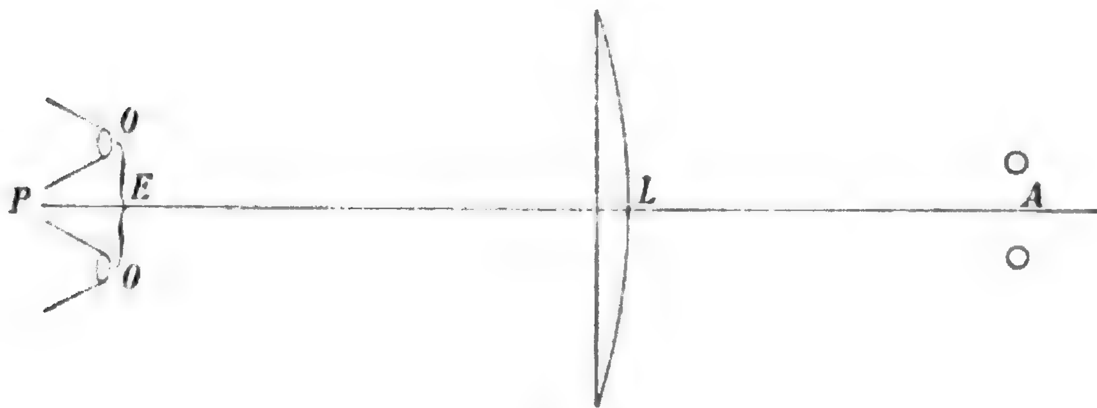


Fig. 1.

intensiv wurde. Beim Polaristereoskop sind jedoch starke Lichtquellen erwünscht, da ja das Licht vom Schirm, auf welchem die Bilder entworfen werden, stark zerstreut wird.

Die bekannten stereoskopischen Bilder, welche in komplementären Farben aufeinander gedruckt sind und mit einer Brille aus entsprechenden farbigen Gläsern betrachtet werden, haben den Vorteil, daß man bei der Betrachtung beide Bilder mit großer Leichtigkeit zur Deckung bringt, da gewisse Partien derselben sich ohnehin auf der Bildfläche schon decken. Störend wirkt hingegen, daß jedes Auge sein Bild in einer anderen Farbe empfängt. Die beiden beschriebenen Stereoskope haben denselben Vorteil, da man die Bilder auf dem Schirm, respektive der großen Linse L ja beliebig zur Deckung bringen kann. Dabei empfängt aber gleichzeitig jedes Auge die Bilder in derselben Farbe, was auch die Anwendung von kolorierten Bildern ermöglicht.

Das Konzentrationsstereoskop unterscheidet sich wesentlich von verschiedenen anderen Stereoskopen dadurch, daß wir es nicht nötig haben, durch Brillen, vorgehaltene Gläser oder dergleichen zu blicken, sondern wir brauchen nur die Augen an Stelle der Bilder *A* zu bringen und auf die Linse *L* zu schauen, so sehen wir sofort, je nach der Projektion vor oder hinter der Linse, das körperliche Bild.

Besonders überraschend wird die Erscheinung bei Anwendung einer sehr großen Linse. Bei dem von mir zusammengestellten Apparat hatten die einzelnen Bestandteile folgende

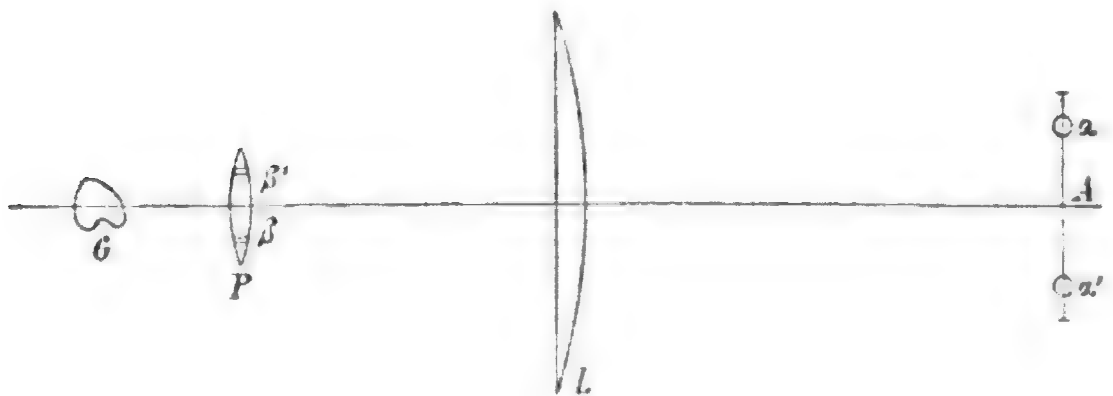


Fig. 2.

Maße. Der Durchmesser der Projektionslinsen *P* betrug 3·5 *cm*, ihre Entfernung *E* war 14 *cm*, die Entfernung der plankonvexen Linse *L* vom Projektionsapparat, dem sie ihre plane Seite zukehrte, 210 *cm*. Sie selbst hatte 41·5 *cm* im Durchmesser und entwarf die Bilder *A* in der Entfernung von 120 *cm*.

3. Ein stereoskopischer Vergrößerungsapparat.

Wir entwerfen mit einer Projektionslinse *P* (Fig. 2) von einem dreidimensionalen Gegenstand *G* ein Bild auf eine große Linse *L*, welche von der Linse *P* das Bild *A* entwirft. Dieses Bild soll größer sein als die Augendistanz eines Beobachters, der seine Augen an den Stellen α und α' des Bildes *A* hat. Die Stellen α und α' sind die Bilder zweier entsprechender Stellen β und β' der Projektionslinse *P*. Nach α kommt nur Licht von β, nach α' nur von β'. Bringen wir demnach unsere Augen nach α,

bezüglich α', so können wir die ganze Linse *P* bis auf die Stellen β und β' schwärzen, ohne daß die Gesichtswahrnehmung geändert wird, da ja von vornherein nur von den Stellen β und β' Licht in unsere Augen gelangen kann. Nun ist aber der Anblick des Gegenstandes *G* von β aus ein anderer als von β'. Es wird demnach das Bild, welches das Auge in α sieht, ein anderes sein als jenes, welches von α' aus gesehen wird. Der Beobachter in *A* sieht die Bilder des Gegenstandes *G* auf der Linse *L* verkehrt, da aber auch die Stellen α und α' verkehrte Bilder von β und β' sind, so ergänzen sich die beiden Bilder des Gegenstandes in den Augen des Beobachters wieder zu einem körperlichen, und zwar entsprechend vergrößerten Bild.

Der von mir nach diesem Schema zusammengestellte Apparat hatte eine etwa zehnfache lineare Vergrößerung; trotzdem bot er schon sehr überraschende Erscheinungen. Die Beleuchtung, welche die Gegenstände erfordern, braucht nicht stark zu sein, da das gesamte Licht, welches auf die Linse *L* fällt, ja auf die kleine Fläche *A* zusammengedrängt wird, so daß sehr viel Licht in die Augen des Beobachters gelangt. Ein Auerbrenner, den man seitlich von der Projektionslinse *P* aufstellt und gegen den Beschauer abdeckt, erzeugte bei der obigen Vergrößerung sehr helle Bilder.

Die Dimensionen meines Apparats waren folgende: Als Projektionslinse *P* wurde ein photographisches Porträtobjektiv von 8 *cm* Durchmesser und 28·5 *cm* Brennweite benützt. Die große Linse *L* war jene, welche früher zum Konzentrationsstereoskop benützt wurde. Sie war 120 *cm* von *P* und 210 *cm* von *A* entfernt. Wählt man die Dimensionen der Aufstellung anders, so lassen sich auch andere Vergrößerungen erzielen, ohne daß man die einzelnen Linsen deshalb zu ändern braucht. Bedeutend erweitert wird natürlich der Spielraum der Vergrößerung, wenn wir Projektionslinsen verschiedener Brennweite benützen. Es ist jedoch darauf zu achten, daß der Durchmesser der Linse *P* nicht zu klein ist, weil sonst, damit das Bild *A* groß genug werde, man sich entsprechend weit von *L* entfernen muß, was einer Entfernung vom entworfenen Bild gleichkommt, wodurch unter Umständen der Gewinn an Vergrößerung wieder wettgemacht werden kann.

Der Umstand, daß die Beleuchtung der Gegenstände nicht stark zu sein braucht und der Beobachter in beträchtlicher Entfernung vom beobachteten Gegenstand sich befindet, dürfte dem Apparat direkt praktische Bedeutung geben. So ließe sich das Leben kleiner Tiere, welche durch die Nähe des Beobachters gestört würden, mit Hilfe unseres Apparates sehr gut studieren. Rein mechanische Bewegungen, wie z. B. die Schwingungen eines Pendels oder der Gang eines Uhrwerks, gewinnen eine erhöhte Anschaulichkeit. Es ist geradezu beängstigend, wenn man die große Pendelkugel auf sich losfliegen sieht. Die Bewegung einer Riesenhand bietet einen ganz eigenartigen Anblick.

Die Verzerrungen, welche bei der stereoskopischen Vergrößerung auftreten, betreffen hauptsächlich die Tiefendimensionen. Durch entsprechende Wahl der Linsen lassen sie sich jeoch innerhalb eines bestimmten Bereiches derart kompensieren, daß man dem Original ähnliche Bilder erhält.

Über die Frage gemeinsamer kosmischer Abkunft der Meteoriten von Stannern, Jonzac und Juvenas

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn, k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. November 1904.)

Vor einiger Zeit wurde ich von einem der hervorragendsten Meteoritenkenner, dem wirklichen Mitgliede der kaiserl. Akademie, Hofrat Prof. Dr. G. Tschermak, auf die große mineralogische Übereinstimmung der im Titel angeführten Meteoritenfälle, deren Substrate in dieser Hinsicht »beinahe identisch sind«, mit dem Beifügen aufmerksam gemacht, daß man deshalb veranlaßt sein möchte, den betreffenden Körpern einen gemeinsamen Ursprung zuzuschreiben.

Da ich in meiner Untersuchung über die Bahnen von 36 Meteoritenfällen[1] von den oben erwähnten nur jenen bei Stannern angeführt habe, wurde mir zugleich die Frage vorgelegt, ob aus den mir etwa bekannten, aber nicht veröffentlichten Nachrichten über die beiden andern Fälle mit Sicherheit hervorgeht, daß sie ganz verschiedener Abkunft sind, oder ob die Möglichkeit offen bleibt, daß alle drei aus derselben Gegend des Weltraumes herrühren.

Die Fälle von Jonzac und Juvenas habe ich seinerzeit nebst vielen andern deshalb nicht in den Kreis meiner Betrachtungen einbezogen, weil die mir hierüber bekannt gewordenen Berichte sehr unbestimmt und zu lückenhaft waren, um in

[1] Über die Periheldistanzen und andere Bahnelemente jener Meteoriten etc. Verhandl. des naturf. Vereines in Brünn, 29. Bd., p. 182.

diesem Sinne Verwendung finden zu können. Den Bemühungen des Herrn Hofrates Dr. Tschermak, der sogar schriftliche Erkundigungen zur Sicherstellung einiger besonders wichtigen Angaben aus den alten Akten veranlaßte, verdanke ich es nun, daß mir reichlichere Materialien hinsichtlich der beiden französischen Fälle zugänglich wurden. Freilich liefern auch diese keine direkt brauchbaren Beobachtungen der betreffenden Meteore, allein sie ermöglichen doch nicht ganz unbegründete Schätzungen, etwa von demselben Gewichte wie die größere Zahl der von mir für andere Meteoritenfälle vorgenommenen und oben erwähnten.

Es bedarf keiner besonderen Versicherung, daß der Versuch einer Beantwortung der von so berufener Seite aufgeworfenen Frage nunmehr mein lebhaftes Interesse in Anspruch nahm. Da für keinen der drei Fälle irgendwelche Angaben vorliegen, aus welchen man direkt auf die Bahngeschwindigkeit dieser Körper schließen könnte, bleibt, wenn man vermeiden will, ausschließlich Erfahrungen analoger Art heranzuziehen, für die Annahme der Geschwindigkeit und der Bahnform zur Epoche des Zusammentreffens mit der Erde ein weiter Spielraum, welcher die Bahnen von den Ellipsen kurzer Umlaufszeit bis zu ausgeprägten Hyperbeln umfaßt.

Die im nachstehenden mitgeteilten Ergebnisse gründen sich auf die (unter I) abgeleiteten Radiationspunkte und auf Untersuchungen, welche sich über folgende Punkte erstreckten:

1. Auf die Erörterung und Beantwortung der Frage, ob diese Meteoriten nach der Lage ihrer Strahlungspunkte unmittelbar vor ihrem in verschiedenen Epochen erfolgten Zusammentreffen mit der Erde im Sonnensystem nahezu identische Bahnen beschrieben haben können.

Da, wie sich zeigen wird, diese Frage an der Hand der vorliegenden Materialien mit Bestimmtheit verneint werden mußte, waren zunächst folgende Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen:

2. Ob die einzelnen voneinander abweichenden heliozentrischen Bahnen aus einem in Bezug auf Richtung und Größe der ursprünglichen Bewegung einheitlichen außerplanetarischen, also stellaren Strom abgeleitet werden können.

3. Ob diese drei verschiedenen Bahnen aus einer und derselben geschlossenen planetarischen Bahn durch Störungen innerhalb des Sonnensystems entstanden sein können.

Endlich käme noch 4. die Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit in Frage, daß diese materiell fast identischen, aber zu verschiedenen Zeiten in ganz verschiedenen Bahnen mit der Erde zusammen getroffenen Körper auf andere Weise einer gemeinsamen Quelle entsprungen wären.

Es stellt sich dabei heraus, daß für keine der in den Punkten 2 bis 4 bezeichneten Annahmen die Möglichkeit gänzlich ausgeschlossen ist, doch bleibt der Grad der Wahrscheinlichkeit für die eine oder andere sehr verschieden und wird für einzelne verschwindend klein.

I.

1. Der Meteoritenfall bei Stannern in Mähren, 1808, Mai 21. $17^h\ 30^m$ bis 18^h. Die Lage des scheinbaren Radianten dieses Falles habe ich nach den mir darüber bekannt gewordenen Nachrichten in 315° Rektaszension und 15° südlicher Deklination geschätzt.[1] In Ermanglung brauchbarer Beobachtungen der betreffenden Feuerkugel stützt sich dieses Resultat fast allein auf die Lage derjenigen Orte, aus welchen deutliche Schallwahrnehmungen gemeldet wurden, auf die besondere Art dieser letzteren sowie auf die Verteilung der Fallstücke über die Streufläche. Auch in diesem Falle war die Schallausbreitung sehr charakteristisch nach einer Seite ungemein weit vom Fallorte reichend. Das angeführte Ergebnis kann hienach allerdings nur als ein beiläufiges bezeichnet werden und mag noch erhebliche Änderungen gestatten, doch hat man es hier ohne Zweifel mit einem der selteneren Fälle zu tun, in welchen die Bahn der Meteoriten im strengsten Sinne rückläufig war, da die Feuerkugel jedenfalls aus der Nachbarschaft des Apex herkam.

Der scheinbare Radiant befand sich in der vorhin bezeichneten Position zur Fallzeit ungefähr 12° westlich von Süd und 25° über dem Horizont des Fallortes. Die aus demselben hervorgehenden parabolischen Elemente findet man in einer Zusammenstellung weiter unten.

[1] Über die Periheldistanzen etc. A. a. O., p. 243.

2. Der Meteoritenfall bei Jonzac (Charente infer.) in Frankreich, 1819, Juni 12. $17^h 45^m$.

Die Grundlagen der nachstehenden Betrachtungen sind einem Berichte von Fleuriau de Bellevue[1] entnommen, welcher der Pariser Akademie erstattet wurde und der auszugsweise im Journal de Physique, T. XCII, p. 136 (1821) mitgeteilt ist. Derselbe enthält im wesentlichen folgende Angaben:

»Am 13. Juni 1819 fiel um $5^3/_4{}^h$ morgens bei ganz heiterem, wolkenlosem Himmel im Arrondissement von Jonzac ein Steinhagel infolge dreier Detonationen. Man hörte zuerst einen Schuß von mittlerer Stärke, welchem ein langes Rollen und Krachen wie Musketensalven folgte. Dies dauerte $1^1/_2$ bis 2 Minuten und endete Schlag auf Schlag mit zwei Detonationen, deren letzte von äußerster Heftigkeit war. Der Fall fand statt in den Gemeinden Archiac, Saint Eugène, Moingts, Saint Martial bei Jonzac, Allas-Champagne, Brie, Saint-Ciers-Champagne. Die Fläche, auf welcher die Steine ausgestreut waren, bildet eine Art Dreieck, dessen lange Seite von mehr als 6000 Toisen (11·7 *km*) Länge von NE—SW, dessen kürzere, nahezu 4000 Toisen (7·8 *km*) lang, von N—S gerichtet ist.

Die letzte Detonation war von solcher Stärke, daß sie zu Marennes, Blaye und bis 20 Lieues Entfernung in der Nähe von Niort gehört wurde. In Angoulême und Mauzé glaubte man, das Pulvermagazin zu Saint-Jean d'Angély sei wieder in die Luft geflogen.

Unmittelbar nach (?) der ersten Detonation beobachteten mehrere Personen ein Meteor, welches ungefähr die Form eines verlängerten Rechteckes hatte. Es war von schwachem Glanze, da es von Rauch umgeben war und weil die Wirkung des hellen Sonnenlichtes den Eindruck verminderte. Seine Farbe war weiß mit einem Stich ins Grauliche. Es erschien zuerst in NNW und zog mit überraschender Schnelligkeit gegen SSE. Es war 50 bis 60° über dem Horizont und löste sich in Rauch auf, nachdem es das Zenit erreicht hatte, wo die beiden letzten Detonationen erfolgten.«

[1] Sur les pierres météoriques, tombées près de Jonzac au mois de juin 1819.

Zur besseren Orientierung sind im nachstehenden die geographischen Koordinaten der oben erwähnten Orte sowie ihre Beziehung zum Fallorte (Jonzac) nach Entfernung und Richtung übersichtlich angeführt.

	Geogr. Breite		Geogr. Länge		Entfernung	Richtung	
					von Jonzac aus		
Jonzac......	45°	26′	17°	14′	—	—	
Blaye	45	8	17	0·5	37 *km*	24°8	W. v. S.
Angoulême ..	45	39	17	54	54	63·6	E. v. N.
Saint-Jean...	45	56	17	8	58	7·4	W. v. N.
Marennes ...	45	49	16	33	66	50·7	»
Mauzé......	46	12	16	58	87·5	13·5	»
Niort	46	19	17	12	98	1·7	»

Diese Nachrichten deuten daher auch wieder eine einseitige Ausbreitung der Detonationswahrnehmungen hinsichtlich der fernsten Orte, und zwar entschieden gegen die Nordseite an, denn die Entfernung des gegen SSW gelegenen Blaye ist so gering, daß dahin auch der Schall vom Fallorte direkt vernommen worden sein konnte.

Niort und Mauzé, die am weitesten entfernt liegen, sind wenig westlich von Nord und man kann nach mehrfachen anderweitigen Erfahrungen daher annehmen, daß das Meteor ungefähr über diese Gegend in einer gegen den Horizont nicht stark geneigten Bahn hingezogen ist.

Leider wurde der Standpunkt des Beobachters, dem man die einzige mitgeteilte Wahrnehmung der Feuerkugel verdankt, nicht näher bezeichnet. Da jedoch der Fallort bekannt ist, so kann diese Beobachtung, wenn ihr überhaupt einiges Gewicht beigelegt wird, nicht anders gedeutet werden, als daß das Meteor in der Tat von der Nordseite hergekommen ist, ohne daß man deshalb die Angabe NNW wörtlich genau nehmen müßte.

Dem gegenüber ist der Umstand, daß die längste Ausdehnung der Streufläche ungefähr nordöstliche Richtung gehabt haben soll, minder erheblich. Abgesehen davon, daß diese Angabe vielleicht später durch weitere Auffindungen von Fallstücken in der Richtung N—S noch Änderungen erfahren

haben konnte, ist es wohl auch bekannt, daß zuweilen Verschwenkungen der Streuflächenachse gegenüber dem ursprünglichen Zuge des Meteoritenschwarmes durch die Atmosphäre stattgefunden haben, wie dies z. B. für den Fall von Pultusk nachgewiesen worden ist. Ohne Zweifel enthalten daher die Angaben über die Detonationswahrnehmungen, in Verbindung mit der, wenn auch nur beiläufigen optischen Beobachtung des Meteors, verläßlichere Merkmale zur Abschätzung der Bewegungsrichtung. Mit Berücksichtigung aller dieser Umstände habe ich angenommen, daß die Feuerkugel aus 10° westlich von Nord oder aus 170° Azimut gekommen ist.

Viel unsicherer ist die Abschätzung der Neigung der Bahn. Die Detonationen, welche in Mauzé und Niort vernommen wurden (wenn es damit seine Richtigkeit hat), konnten nicht vom Fallorte herrühren, sondern nur von Punkten der Bahn, welche diesen Orten näher und dabei nicht allzu hoch lagen. Dies ließe, wie schon vorhin angedeutet, auf eine geringe Neigung schließen. Hiemit wären auch die Angaben über die nicht unbedeutende Länge der Streufläche im Einklange. Endlich spricht auch die direkte Beobachtung dafür, welche die erste Sichtbarkeit auf der Nordseite in 50 bis 60° Höhe angibt. Da bekanntlich die Höhen immer stark überschätzt werden (so daß z. B. 60° schon fast immer als »Zenit« bezeichnet wird), kann man diese Angabe wohl ganz gut auf 30 bis 40° herabsetzen und dann mußte der Radiant noch viel tiefer gelegen sein, weil das helle Sonnenlicht die Beobachtung auf sehr große Entfernung, wie sie für die Nähe des Radianten angenommen werden müßte, sicher verhindert hätte und weil auch die Angabe, daß die (scheinbare) Schnelligkeit der Bewegung sehr groß war, auf keine allzu große Entfernung schließen läßt.

Ich habe nach Erwägung aller dieser Umstände die Höhe des scheinbaren Radianten zu 15° genommen. Daraus würden, in Verbindung mit dem früher bezeichneten Azimut, dessen Koordinaten in 185° Rektaszension und 58·5° nördlicher Deklination oder in 150° Länge und 53° nördlicher Breite hervorgehen.

Für die Abschätzung der Geschwindigkeit liegen keine Angaben vor. Es wurden daher, nur zur beiläufigen Vergleichung mit andern Fällen, hier zunächst für den parabolischen Grenzwert $v = \sqrt{2}$ Bahnelemente abgeleitet.

Diese wären nach den hier aufgestellten Annahmen:

Länge des aufsteigenden Knotens	$\Omega = 81°$
Neigung	$i = 19°$
Länge des Perihels	$\pi = 250{^\circ}5$
Periheldistanz	$q = 0\cdot992$
Bewegung	rechtläufig

Recht lehrreich ist dieser Fall aus dem Gesichtspunkte, daß er fast genau zur selben Tageszeit (und wohl auch in nicht sehr entfernter Jahresepoche) stattfand wie jener bei Stannern, zu einer Stunde, da der Apex der Erdbewegung nahezu kulminiert und der weitaus überwiegende Teil der über dem Horizont befindlichen Halbkugel des Himmels der Hemisphäre des Apex angehört. Um diese Morgenstunde kommen relativ selten Meteoritenfälle vor. Die Meteoriten von Stannern kamen jedoch gleichwohl sicher aus der Gegend des Apex her. Hätte man nun, mangels irgendwelcher Nachrichten, nach der Analogie auf das Gleiche auch für die Meteoriten von Jonzac geschlossen, so würde man sehr weit gefehlt haben, da letztere fast aus der entgegengesetzten Richtung, nämlich nahezu vom Antiapex her, die Erde eingeholt hatten.

3. Der Meteoritenfall bei Juvenas (Ardèche) in Frankreich, 1821, Juni 15. gegen 3^h abends.

Die hier benützten Nachrichten über diesen Fall sind teils dem Aufsatze von Gilbert in seinen »Annalen der Physik« etc., 69. Bd., 1821, p. 407, teils den »Annales de Chimie et de Physique«, T. 17, p. 434, entlehnt.

Die Lage der im folgenden erwähnten Orte (soweit sie der Spezialkarte im Maßstab 1/75.000 entnommen werden konnte) ergibt sich aus nachstehender Übersicht.

Der Fallort beim Weiler Libonec liegt in 44° 43·5′ Breite und 21° 58·5′ östlicher Länge von Ferro, $1^1/_4$ *km* WSW von Juvenas.

	Geogr. Breite		Geogr. Länge		Entfernung (vom Fallort aus)	Richtung (vom Fallort aus)	
Aubenas....	44°	38'5	22°	4'0	11·6 *km*	38°	E v. S
Aps........	44	35·3	22	15·6	27·3	54·5	»
St. Thomé...	44	32·4	22	17·2	32·5	48	»
Viviers.....	44	31·4	22	21·2	37·4	51	»
Barjac......	44	21·8	22	1·6	41·3	6	»

Nîmes liegt ungefähr 102 *km* gegen 3° E v. S und Tarascon 108 *km* gegen 14° E v. S vom Fallorte.

Wahrnehmungen in der Nähe der Fallstelle:

Diese Nachrichten beziehen sich nicht auf den planetarischen Lauf der Feuerkugel durch die Atmosphäre, sondern nur auf den Fall zur Erde nach der Hemmung. Den ziemlich übereinstimmenden Angaben gemäß ist anzunehmen, daß die meisten erst durch das Getöse auf die Erscheinung aufmerksam gemacht wurden (während die Feuerkugel schon erheblich früher sichtbar gewesen sein mußte, aber wegen des vollen Sonnenscheines nicht den gewöhnlichen Effekt verursachte), so zwar, daß der Schall früher zur Erde gelangte als der Stein, was nach Rechnung und Erfahrung dann stattfindet, wenn der Hemmungspunkt in nicht sehr großer Höhe über der Erdoberfläche lag.

Zwei Landleute, welche auf dem Feld arbeiteten, sahen 50 Schritte vor sich einen ungeheueren Feuerklumpen herunterfallen. Sie »meinten, es sei dort der Teufel ins Feld gefahren und liefen aus Furcht davon« (Flaugergues). Vermutlich waren es dieselben furchtsamen Leute, von welchen im Protokoll des Maire von Juvenas die Rede ist, wo aber die Erzählung etwas anders lautet. Darnach fingen (gegen 3^h nachmittags) die Detonationen mit zwei ziemlich schnell aufeinanderfolgenden Schlägen an, die zwei starken Kanonenschüssen glichen, und dann folgte ein fürchterliches Getöse, das »über 20 Minuten (sicher weit überschätzt!) anhaltend«, Furcht und Schrecken unter Menschen und Tieren verbreitete. In demselben Augenblicke sah man eine schwarze Masse (also hier ist nicht von der Feuerkugel die Rede) hinter dem Berge l'Oulette[1] hervor-

[1] Dieser Name fand sich auf der französischen Spezialkarte nicht.

kommen, welche, in der Luft rollend, das Viertel eines Kreises beschrieb und in die Talmulde von Libonec hineinfiel. Einer der Berichterstatter meinte, das sei seine letzte Stunde, betete und bereitete sich auf den Tod vor. Indessen verfolgten Kinder, welche mutiger waren, den Fall und konnten den Ort genau anzeigen. Allein der Schrecken hatte sich aller in solchem Grade bemächtigt, daß sie nicht eher als am 23. (also acht Tage später) sich ein Herz faßten, das Wunderding, welches, wie sich zeigte, 18 *dm* (?) in den sandigen Boden eingedrungen war, auszugraben.

Daß in der ganzen Fallgegend zuerst zwei starke Detonationen vernommen wurden, auf welche erst ein mehrere Minuten dauerndes Rollen folgte, berichtete auch D'Hombres Firmas (Gilbert, a. a. O.).

Berichte aus entfernteren Orten:

In Aubenas wurde um 3^h eine starke Detonation vernommen. Darauf folgte Donnerrollen »durch einige Minuten« (Protokoll des Maire).

In und um Viviers, z. B. zu St. Thomé und Aps, sahen viele Leute am Himmel etwas, das wie ein Stern glänzte, sich langsam auf Le Coiron (NW) herabbewegte und beim Verschwinden einen »Rauch« zurückließ. Es wurde dann ein dumpfes, an Stärke zunehmendes Rollen vernommen, das länger als drei Minuten dauerte. Während desselben waren vier Detonationen, wie etwas entfernte Kanonenschüsse, zu hören (Flaugergues, der übrigens, ganz abweichend von allen andern Berichten, 4^h für die Fallzeit angibt und noch erwähnt, »man versichert, daß Detonationen selbst noch zu Tarascon und Nîmes wahrnehmbar waren«).

Die für unseren Zweck wichtigste Beobachtung ist jene von Jules de Malbos in Barjac.[1] Ihr wesentlichster Teil lautet wie folgt: »Am 15. Juni 1821 gegen 3^h nachmittags, als ich eben nach meinen Arbeitern sah, welche sehr hohe Maulbeerbäume ausholzten, erblickte ich, fast gerade über meinem

[1] So heißt der Ort in den gegenwärtigen Karten (Departement Gard). Im Bericht ist er Bariat genannt, welche Bezeichnung weder auf den Karten noch in den geographischen Registern vorkommt. Ziemlich umständliche Nachforschungen haben indessen außer Zweifel gestellt, daß Barjac gemeint ist.

Kopfe, nach Nordost zu eine sehr ansehnliche Feuerkugel, die ich, da sie sehr schnell und dem Anscheine nach lotrecht herabfiel, sogleich für einen Aerolithen hielt. Ich rief daher den Arbeitern zu, die Arbeit zu lassen und aufzumerken, ob sie nicht einen Knall hören würden und fing sogleich an, meine Pulsschläge zu zählen. Als ich bis 90 gekommen war und sich noch immer nichts vernehmen ließ, hörte ich damit auf. Einen Augenblick darnach aber vernahmen wir ein langdauerndes Rollen, auf welches sehr bald ein anderes so starkes folgte, daß ich es anfangs für ein Echo hielt, welches die zu meiner rechten Hand liegende Bergkette hervorbringe. An dem Orte, wo der Aerolith herabgefallen ist, sind diesem Rollen zwei starke Detonationen vorausgegangen.«

»Auf der von der Feuerkugel durchlaufenen Bahn bemerkte ich einen graulichen Dunst, der wie ein langes, fünf bis sechs Zoll breites Band mit nur sehr schwachen Zickzacks an den Rändern aussah. Dieser Rauch hatte dieselbe Farbe wie die Wolken, befand sich in einer sehr hohen Region und war in so völliger Ruhe, daß man ihn noch nach 10 Minuten wahrnahm, ohne daß er seine Stelle und Gestalt merklich geändert hatte, indes einige wenige in niedrigeren Regionen befindliche Wolken schnell vorüberzogen, von heftigem NE-Winde getrieben.«

Auch Malbos schreibt: »Man versichert mir, die Detonation sei in Nîmes gehört worden.«

Alle Orte, von welchen Detonationen gemeldet wurden, befinden sich ganz einseitig im Quadranten zwischen S und E vom Fallort. Es unterliegt daher nach unseren vielen Erfahrungen keinem Zweifel, daß auch die Bahn aus diesem Quadranten gerichtet war. Ziemlich sicher ist es ferner, daß die Neigung gegen den Horizont kaum 45° überschritten haben konnte, weil bei steil abfallenden Bahnen die Schallausbreitung nicht so weit nach einer Seite stattfindet und weil auch das in Barjac zwischen Licht und Schall beobachtete Intervall sonst viel größer ausgefallen wäre.

Da also die wahre Bahn durch die Atmosphäre nicht einmal nahezu lotrecht gewesen sein konnte, in Barjac aber doch

so erschien, mußte dieser Ort unweit der Vertikalebene der Bahn sich befunden haben, allein doch immer noch etwas westlich, denn Malbos sagt, daß er das Meteor gegen NE zu bemerkte, was sonst nicht möglich gewesen wäre, weil der Fallort aus Barjac gesehen etwas westlich von N liegt. Also mußte auch die scheinbare Bahn etwas gegen die Ostseite hin geneigt gewesen sein. Auch erwähnt der sehr genaue Beobachter, daß der Schall von seiner Rechten, also von E her, gekommen ist. Würde man dagegen die Bahn weit östlich von Barjac nehmen, so bliebe unerklärlich, daß sie für lotrecht gelten konnte. Auch die Detonationswahrnehmungen in dieser Entfernung sprechen dagegen.

Ich habe daher nach einigen Erwägungen angenommen, daß die Bahn aus etwa 15° östlich von Süd gerichtet war und in einer Neigung von ungefähr 30° zum Horizont des Endpunktes führte. Bei dieser Lage würden dann auch die Nachrichten aus Tarascon und Nîmes nicht als ganz unglaubwürdig erscheinen.

War die Endhöhe unter 18 *km*, vielleicht nur 15 *km* oder noch geringer (weil der Schall vor den Fallstücken eingetroffen sein soll), so konnte die Höhe, als das Meteor von Malbos in Barjac nordöstlich erblickt wurde, noch etwa 35 bis 38 *km* betragen haben und nur wenig mehr hätte man für die zugehörige Entfernung vom Beobachter zu nehmen. Aus dem angegebenen Intervall könnte man bei einigem Zeitverlust auf eine Entfernung von 30 *km* oder etwas mehr schließen, doch ist es ja möglich, daß die Bahn auch noch näher an Barjac vorüberführte und auch niedriger lag.

Für die Fallzeit habe ich, entsprechend fast allen übereinstimmenden Nachrichten, 3^h genommen und damit würde sich der scheinbare Radiationspunkt in 141° Rektaszension und 13·5° südlicher Deklination ergeben. Die ekliptischen Koordinaten wären dann rund 148° Länge und 27° südlicher Breite. Da der Fluchtpunkt oder Antiapex der Erdbewegung sich in 173° Länge befand, lag der scheinbare Radiant nur 36° von diesem entfernt. Noch viel geringer ergibt sich die Elongation des wahren Radianten, für die jedoch ein Wert nur im Zusammenhange mit der Geschwindigkeit angegeben werden

könnte. In Ermanglung von Nachrichten, welche zur Ermittlung derselben dienen würden, habe ich auch hier für die heliozentrische Bewegung die parabolische Geschwindigkeit, also $v = \sqrt{2}$ oder rund 42 *km*, zu Grunde gelegt. Damit findet man, daß die wahre Richtung nur um 7° von der Bewegung der Erde abwich, und zwar gegen die Sonnenseite hin. Es war daher das Perihel schon überschritten.

Die Bewegungsrichtung am Knoten war also jener der Meteoriten von Stannern fast gerade entgegengesetzt. Das parabolische Aphel würde sich in 69° Länge und 2° nördlicher Breite befunden haben. Übrigens sind die Elemente weiter unten angeführt.

Zur Vergleichung seien die gefundenen scheinbaren Radianten hier zusammengestellt:

		Radiant	
		α	δ
Stannern:	1808, Mai 21. $17^h 30^m$—18^h...	315°	—15°
Jonzac:	1819, Juni 12. $17^h 45^m$........	185°	+58°5
Juvenas:	1821, Juni 15. 3^h............	141°	—13·5

Diese Positionen liegen weit genug voneinander entfernt, um, selbst unter Voraussetzung großer Unsicherheit, mit Bestimmtheit darzutun, daß von identischen Bahnen hier nicht die Rede sein kann. Der Radiant des Stannern-Meteors war zur Fallzeit der Meteoriten von Juvenas tief unter dem Horizont und die Strahlungspunkte der Meteore von Jonzac und Juvenas liegen um mehr als 80°, also fast um einen Quadranten voneinander entfernt.

Deutlich treten auch die Gegensätze an den wichtigsten parabolischen Elementen hervor, welche hier (zunächst ohne Rücksicht auf den Einfluß der Erdschwere) vergleichsweise angeführt werden:

	Stannern	Jonzac	Juvenas
Länge des aufsteigenden Knotens ...... ☊	60°	81°	263°
Länge des Perihels ... π	182°	251°	249°
Periheldistanz .... q	0·728	0·992	0·984
Neigung der Bahn.... i	176°	19°	9°
Bewegung	rückläufig	rechtläufig	rechtläufig

Für die Bahn von Stannern könnten π und q durch noch zulässige Änderungen am Radianten in viel nähere Übereinstimmung mit den entsprechenden Werten der beiden andern Bahnen gebracht werden. Unmöglich ist dies jedoch bezüglich der sehr ausgeprägt rückläufigen Bewegung. Die Bahnen von Jonzac und Juvenas, hinsichtlich π und q zwar nahe übereinstimmend, sind in der Länge des aufsteigenden Knotens um 182° verschieden. Der aufsteigende Knoten der einen Bahn liegt 2° neben dem absteigenden der andern. Geometrisch genommen heißt dies, daß die Neigungen (i) nicht um den Unterschied 19° — 9°, sondern um die Summe voneinander abweichen, also nicht um 10°, sondern um 28°. Diese erhebliche Abweichung kann unmöglich in der unsicheren Bestimmung der Radianten ihre Begründung finden.

Die hier nachgewiesenen Gegensätze und wesentlichen Verschiedenheiten in den Bahnelementen bleiben auch bestehen, wenn man statt der parabolischen Geschwindigkeit irgend eine elliptische zu Grunde legt, weil dabei die Qualität der Bewegungsrichtungen und Neigungen nicht geändert wird.

Die dreierlei Meteoriten können daher unmittelbar vor ihrem Zusammentreffen mit der Erde nicht identische Bahnen verfolgt haben.

II.

Treten in die Anziehungssphäre der Sonne Körper ein, welche an dieser Stelle im Weltraum untereinander parallele Bahnen mit gleicher Geschwindigkeit beschreiben und also gleichsam einen stellaren kosmischen Strom darstellen, so können die durch die Wirkung der Sonne daraus hervorgegangenen heliozentrischen Bahnen, welche unter der angeführten Bedingung alle gleich lange Hauptachsen aufweisen, sehr verschiedene Exzentrizitäten, Parameter, Knoten, Neigungen und Bewegungsrichtungen erhalten, je nach dem Orte des Eintrittes in das Sonnensystem.[1]

[1] Ausführlichere allgemeine Begründungen der im folgenden benützten Beziehungen sind zu finden in meiner Abhandlung: »Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme.« Diese Sitzungsber., 83. Bd., II. Abt., Jänner 1881.

Es entstehen auf diese Weise aus ursprünglich identischen Bewegungsumständen ganz neue Bahnen, welche untereinander hinsichtlich der angeführten Elemente desto größere Abweichungen zeigen können, je größer der laterale Abstand der einzelnen primären kosmischen Bahnen war. Es können dann rückläufige und rechtläufige Bahnen aus einem und demselben kosmischen Ausgangspunkte gleich wahrscheinlich werden, so zwar, daß einzelne Teile des ursprünglich einheitlichen Stromes in rechtläufigen, andere dagegen in rückläufigen Bahnen mit der Erde zusammentreffen würden.

Denkt man sich durch den Sonnenort eine Normalebene auf die Erdbahn errichtet, parallel zur ursprünglichen Eintrittsrichtung der kosmischen Körper in die Anziehungssphäre der Sonne, so werden jene Meteoriten, deren Bahn in diese Ebene selbst fällt, mit der heliozentrischen Bahnneigung von 90° die Grenze zwischen rechtläufigen und rückläufigen Bahnen darstellen. Die Körper, welche auf der einen Seite außerhalb dieser Ebene eintreten, werden rechtläufige, jene auf der andern rückläufige Bahnen verfolgen müssen.

Geometrisch entspricht an jeder Stelle der Erdbahn im allgemeinen jeder kosmischen Eintrittsrichtung sowohl eine rückläufige als eine rechtläufige Bahn, welche sich durch zweierlei verschiedene Strahlungspunkte kenntlich machen. Ob beide wirklich vertreten sein können, hängt von den Querschnittsdimensionen eines solchen Stromes ab. Erscheint es nicht unwahrscheinlich, sie hinreichend groß anzunehmen, so kann auf diesem Wege die gemeinsame Herkunft von Meteoriten erklärt werden, auch wenn sie mit der Erde aus ganz entgegengesetzten Richtungen zusammentreffen.

Daß dies insbesondere auch für die drei in Frage stehenden Fälle gelten kann, soll hier näher gezeigt werden.

Es bezeichne für diesen Abschnitt v die heliozentrische Geschwindigkeit der Meteore in der Entfernung 1 von der Sonne, ausgedrückt durch die Bahngeschwindigkeit der Erde in derselben Entfernung als Einheit, ferner a die hiezugehörige halbe große Achse der Meteorbahn, τ den Winkel, welchen die Tangente an die letztere in der Entfernung 1 mit dem zugehörigen Radiusvektor einschließt und σ den analogen Winkel

der zugehörigen Asymptote mit demselben Radiusvektor, beide Winkel von der nach auswärts — gegen die Opposition — gehenden Richtung des Radiusvektor gezählt, so ist

$$v^2 = 2 - \frac{1}{a}$$

und für alle Bahnen, welchen $e \gtreqless 1$ zukommt (Parabeln und Hyperbeln), gilt, wenn die Exzentrizität der Erdbahn vernachlässigt werden kann, was hier sicher der Fall ist, die Beziehung

$$\cos(2\tau - \sigma) = \frac{2 + (v^2 - 2)\cos\sigma}{v^2}. \qquad (1)$$

Ist die Ausgangsrichtung durch σ nebst i gegeben, so erhält man für jedes Vorzeichen von $\cos(2\tau - \sigma)$ zweierlei Werte des zugehörigen Bogens, also auch zweierlei τ, welche den beiden je möglichen recht- und rückläufigen Bahnen entsprechen.

Für die Parabel ist $v^2 = 2$ und die beiden Werte von τ sind dann $\tau_1 = \frac{\sigma}{2}$, $\tau_2 = 180 + \frac{\sigma}{2}$, welche die entgegengesetzten Bewegungsrichtungen in ein- und derselben Bahn darstellen.

Erfolgt der Zusammenstoß mit der Erde im Perihel der parabolischen Meteorbahn, so ist, wegen $\tau = 90°$, dann $\sigma = 180°$, zugehörig dem parabolischen Aphel im gegenüberliegenden Knoten, der geozentrisch in $\lambda = \odot$, $\beta = 0$ liegt.

Läßt man die Parabel, deren Periheldistanz 1 ist, um ihre Achse — die Knotenlinie — rotieren, so ist das erzeugte Paraboloid der geometrische Ort unendlich vieler kongruenter, nur in Bezug auf die Neigung gegen die Ekliptik verschiedener parabolischer Bahnen, welchen allen dasselbe, in Konjunktion mit der Sonne liegende Aphel zukommt.

Die Tangente am Perihel im Begegnungsknoten, welche mit dem Radiusvektor $\tau = 90°$ einschließt, ist maßgebend für den betreffenden wahren Radianten am Himmel. Bei der erwähnten Rotation beschreibt sie aber einen durch Apex und Antiapex gehenden Breitenkreis, dessen Länge also $\odot \pm 90°$ ist.

Dieser von der solaren Konjunktion und Opposition gleich weit, nämlich um einen Quadranten, abstehende Großkreis ist daher der Ort aller wahren Radianten, zu welchen jene parabolischen Bahnen Veranlassung geben, deren Perihele zugleich mit der Erde in den Bahnknoten treffen, wobei dann in Konjunktion mit der Sonne die gemeinsame Ausgangsrichtung aller dieser Bahnen liegt.

Da in diesem besonderen Fall auch die scheinbaren Radianten in derselben Ebene bleiben müssen, nur daß sie dem Apex näher kommen, so gilt für streng parabolische Bahnen die Regel, daß alle scheinbaren Radianten, welche sich in der Länge $\odot \pm 90°$ befinden, sie mögen in Breite auch noch so weit auseinanderliegen, eine gemeinsame kosmische Ausgangsrichtung, d. h. das gleiche parabolische Aphel in der Länge: $\odot$, im andern Knoten besitzen müssen. In Wirklichkeit wird diese gesetzmäßige Verteilung durch die Erdstörung (die sogenannte Zenitattraktion) ein wenig geändert, doch ist dies für unseren Zweck ohne wesentliche Bedeutung.

Die hier nachgewiesene Identität der Ausgangspunkte solcher Bahnen besteht jedoch, wie dies ja auch vorausgesetzt wurde, nur hinsichtlich der Richtung und Geschwindigkeit. Der gemeinsame Ausgangspunkt ist, ähnlich wie der Radiationspunkt, nur als perspektivischer Verschwindungspunkt zu nehmen. Gleichwohl kommt ihm im stellaren Sinne dieselbe Bedeutung zu wie dem Radianten. Er ist gleichsam der stellare Radiant für den Eintritt in das Sonnensystem.

Die den inneren Raum dieses Paraboloids ausfüllenden, aus derselben Richtung kommenden Bahnen besitzen Periheldistanzen zwischen 0 und 1. Diese können daher (immer abgesehen von der Exzentrizität der Erdbahn) nicht in ihrem Perihel, sondern nur an einer andern Stelle die Erdbahn treffen.

Auf solche Weise könnte ein derart ausgedehnter Strom von Körpern, die ursprünglich gemeinsame Bewegung in Richtung und Größe hatten, Anlaß zum Auftreten weit auseinanderliegender Radianten geben.

Diese Betrachtung bezieht sich jedoch auf ganz singuläre Fälle, welche streng genommen unendlich geringe Wahrschein-

lichkeit besitzen, nämlich auf die besonderen Werte $v^2 = 2$ und $\tau = 90°$ (genaue Parabeln und Zusammentreffen im Perihel der Meteorbahn).

Für den Vergleich mit der Wirklichkeit handelt es sich mehr um die Annäherungen an diese besonderen Lagen.

Angenommen, man hätte es mit wirklichen Parabeln ($v^2 = 2$) zu tun, während dagegen die Begegnung nicht genau im Perihel stattgefunden hätte.

Ist nun z. B. $\tau = 90° \pm \Delta\tau$, so wird $\sigma = 180° \pm 2\Delta\tau$. Für die wahren Radianten, welche im Kleinkreise liegen, parallel zum Breitenkreise durch Apex und Antiapex, in dem Abstande $\Delta\tau$ gegen die Sonne oder die Opposition hin, werden daher die parabolischen Apheln in der Richtung der Peripherie eines Kleinkreises angeordnet sein, dessen Mittelpunkt in der Ekliptik in $\lambda = \odot$ sich befindet und dessen sphärischer Halbmesser $2\Delta\tau$ beträgt.

Hiernach werden beispielsweise die Aphele der parabolischen Radianten in der Zone zwischen 85° und 95° Elongation vom sogenannten Anthelion ($\odot + 180°$), gegen die Sonne hin gezählt, innerhalb eines kleinen Kreises von 10° Radius um den Punkt der Konjunktion ($\odot$) zusammengedrängt sein. Umgekehrt werden also die hier sehr nahe beisammenliegenden Ausgangspunkte sehr weit auseinanderliegende Radianten liefern können.

Nimmt man, entsprechend hyperbolischen Bahnen, $v^2 > 2$, so wird auch wieder für irgendwelche Werte von τ, $\sigma = 180°$, aber selbstverständlich nicht für $\tau = 90°$. Die hyperbolischen Ausgangspunkte liegen also niemals den Perihelen direkt gegenüber.

Für $\sigma = 180°$ gibt die frühere Gleichung (1)

$$\cos(2\tau - 180°) = \frac{4}{v^2} - 1.$$

Man kann daher für jeden Wert von $v^2 > 2$ das zu $\sigma = 180°$ gehörige τ berechnen, dem also der Ausgangspunkt in $\lambda = \odot$, $\beta = 0$ entspricht.

Ist v^2 nur wenig größer als 2, also für parabelähnliche Hyperbeln, so fällt auch τ nur wenig größer als 90° aus. So

wird z. B. für $v^2 = 2{\cdot}05$ ($a = -20$), $\tau = 99°$. Bei solchen Hyperbeln haben demnach alle im Kleinkreise 99° von der Opposition oder 81° vom Sonnenort entfernt liegenden Radianten einen und denselben zugehörigen gemeinsamen Ausgangspunkt im andern Knoten.

Setzt man daher derartige Hyperbeln voraus, so weisen wahre Radiationspunkte, welche auch nur ungefähr einen Quadranten von der Sonne, untereinander aber selbst weit entfernt liegen, auf Ausgangspunkte zurück, die sich mehr oder weniger nahe beisammen in der Gegend des andern Knotens befinden.

Dies ist nun die Sachlage, welche uns die in Rede stehenden Meteoritenfälle wirklich darbieten. Allerdings ist es nicht möglich, die wahren Radianten den Beobachtungen genau zu entnehmen, da uns die Kenntnis der Geschwindigkeit mangelt. Man kann jedoch in solchen Fällen nicht viel fehlen, wenn man für die Ableitung des wahren Radianten als Näherung vorläufig die Hypothese $v^2 = 2$ gelten läßt, weil dann für nicht allzu große Abweichungen in v die zugehörige Änderung in τ nur gering wird.

Mit $v^2 = 2$ erhält man nun der Reihe nach für die Fälle von

a) Jonzac:	$\tau = 95°$	rechtläufig
b) Juvenas:	$\tau = 97°$	rechtläufig
c) Stannern:	$\tau = 80°$	rückläufig

Die Fälle von Jonzac und Juvenas liegen auch im Begegnungsknoten nahe beisammen. Für Stannern ist der Knoten um 21° und mehr entfernt, weshalb diese Bahn für sich betrachtet werden muß. Die beiden ersten jedoch entsprechen sehr nahe den vorhergegangenen Ausführungen.

Hienach ist bei *a)* $\Delta\tau = 5°$ und bei *b)* $\Delta\tau = 7°$. Wäre genau $v^2 = 2$, so würde daher das parabolische Aphel bei *a)* um 10°, bei *b)* um 14° über dem Knoten in der Bahnebene hinaus liegen, nämlich für

Jonzac	in	$l = 71°5$,	$b = -3°2$
Juvenas	»	$l = 69{\cdot}2$,	$b = +2{\cdot}2$

Für die streng parabolische Geschwindigkeit wären somit die Ausgangspunkte nicht ganz identisch. Sobald man jedoch diese Grenze gegen die Hyperbeln nur wenig überschreitet, findet man durch einfache Rechnung einen übereinstimmenden Punkt in

$$81^\circ 6 \text{ Länge und } +0^\circ 3 \text{ Breite}$$

bei ganz unerheblichem Unterschiede beider Geschwindigkeiten. Es wäre nämlich zu setzen für Jonzac: $v = 1\cdot420$, für Juvenas: $v = 1\cdot423$, welche also nur um 0·006 und 0·009 über die parabolische hinausgehen.

Man braucht daran, daß diese beiden Geschwindigkeiten ein wenig voneinander abweichen, keinen Anstoß zu nehmen. Die beiden Fallepochen zeigen ja, da an eine zweijährige Umlaufszeit dabei nicht zu denken ist, daß es sich, wie in so vielen andern Fällen, um einen bereits sehr in die Länge gezogenen Strom handelt, bei welchem dann kleine Unterschiede in den Elementen der einzelnen Körper, insbesondere in der Geschwindigkeit leicht begreiflich sind.

Mit hinreichender Näherung wird man eine einheitliche Bahn mit dem Mittelwerte dieser Geschwindigkeit, also mit $v = 1\cdot4215$, deren Ausgangspunkt wie oben angegeben gelegen war, annehmen können. Dies wäre daher eine noch sehr parabelähnliche Hyperbel von der Halbachse $a = -48\cdot4$.

Hinsichtlich der Meteoriten von Stannern habe ich nun den umgekehrten Weg eingeschlagen, indem ich nämlich untersuchte, welche Bedingungen zu erfüllen wären, damit auch für diese derselbe Ausgangspunkt zu gelten hätte.

Dabei ist wieder zu erinnern, daß die oben angeführte Gleichung (1) für $\cos(2\tau - \sigma)$, wenn σ gegeben ist, stets je zwei Werte für τ liefert, von welchen der eine der rechtläufigen, der andere einer rückläufigen Bahn entspricht. Mit dem oben angenommenen Ausgangspunkt und der zugehörigen Geschwindigkeit würde man aus der rückläufigen Bahn für den scheinbaren Radianten des Falles von Stannern dann den Ort $\alpha = 342^\circ$, $\delta = -8^\circ$ erhalten.

Wie oben mitgeteilt, fand ich seinerzeit aus den beiläufigen Angaben der Berichte (es konnte keine einzige Beobachtung der Feuerkugel benützt werden) als Ergebnis einer Schätzung

$\alpha = 315°$, $\delta = -15°$. Der Unterschied von etwa 27° kann bei derartigem Material nicht überraschen. Überdies geht aus Nr. 7 des Anhanges zu meiner Abhandlung: »Über die Periheldistanzen etc.« hervor, daß für die Abschätzung hauptsächlich die einseitige Lage der Orte, aus welchen über bedeutende Schallwahrnehmungen noch in großer Entfernung von der Fallstelle berichtet wurde, maßgebend war. Demgemäß wurde die Bahnlage aus 12° westlich von S gerichtet, unter 25° Neigung genommen. Der nun hypothetisch aus einem gemeinsamen Ausgangspunkte für alle drei Meteoritenfälle berechnete Radiant: $\alpha = 342°$, $\delta = -8°$ würde dagegen erfordern, daß die Bahn aus 17° östlich von S unter 30°5 Neigung gerichtet war. Der Unterschied fällt also wesentlich nur auf die Azimute. Nun sind aber die beiden Orte, an welchen die Detonationen nachweisbar am weitesten vom Fallorte noch vernommen wurden: Schrems (70 *km* südwestlich) und Ober-Hollabrunn (87·5 *km* gegen SSE). Ich habe damals einen beiläufigen Mittelwert genommen, welcher also auf die Westseite fiel. Würde man auf die Lage des um 17·5 *km* weiter entfernten letzteren Ortes mehr Rücksicht nehmen, so würde sich in der Tat ein östliches Azimut ergeben können.

Aus diesen Erörterungen folgt ganz zweifellos, daß eine Annahme, welche allen drei Meteoriten bei dem Eintritt in das Sonnensystem identische Bewegungsrichtung und ungefähr gleiche Geschwindigkeit zuschreibt, den Beobachtungen keineswegs widersprechen würde.

Nicht ohne Interesse ist es vielleicht, hervorzuheben, daß die Gegend des hienach beiläufig abgeschätzten gemeinsamen Ausgangspunktes in der dem vermutlichen Apex des Sonnensystems gegenüberliegenden Hemisphäre sich befindet. Da die heliozentrische Eintrittsgeschwindigkeit ein relativer Wert ist, so würde für die absolute räumliche Geschwindigkeit dieser Meteoriten eine solche zu nehmen sein, welche jene des Sonnensystems nur ein wenig überstieg, so daß dieses von den ersteren eingeholt wurde.

Wenn man von der wohlbegründeten Annahme identischer Bewegung (in Richtung und Größe) zur Folgerung gemeinsamer Herkunft übergehen will, darf man jedoch nicht außer

Acht lassen, welche Bedingungen für die räumlichen Verhältnisse derartiger Ströme sich hieraus ergeben würden. Es muß dann das Vorkommen ausgedehnter Meteorströme von ungeheueren Dimensionen in der Umgebung des Sonnensystems angenommen werden, welchen je eine gewisse Individualität zukommt. Verfolgt man nämlich die hier abgeleiteten schwach hyperbolischen Bahnen bis in sehr große Entfernungen, so findet man für die äußersten derselben, wegen ihrer großen Halbachsen, unter Festhaltung der parallelen gleichsinnigen Lage einen lateralen Abstand von ungefähr 17 Erdbahnhalbmessern, demnach nicht viel weniger als den Durchmesser der Saturnbahn.

Es ist im ersten Augenblicke nicht sehr naheliegend, anzunehmen, daß Körper, welche in solchen ungeheueren seitlichen Entfernungen nebeneinander einhergehen, einer gemeinsamen Quelle entstammen sollten. Allein, um nur ein Beispiel anzuführen, noch größere Abstände hindern uns nicht, die kosmogenetische Beziehung selbst der äußersten planetarischen Massen unseres Sonnensystems zum Zentralkörper anzuerkennen.

Die Vorstellung, daß der unseren Forschungen zugängliche Teil des Weltraumes nicht ausschließlich zu einzelnen großen Körpern geballte, sondern vielfach auch in sehr kleinen Partikeln verteilte Materie aufweist, findet sich in sehr bestimmter Form schon bei Herschel und Laplace, ja es scheint, daß sie in neuerer Zeit immer mehr an Boden gewinnt, wenn auch die Anschauungen des letzteren, soweit sie die Abstammung der Kometen betreffen, gewisse Einschränkungen erfahren mußten.

Für die gewaltigen Ausdehnungen der interstellaren Räume sind Maße von der Ordnung unseres Planetensystems fast verschwindend. Wenn sich zwischen den einzelnen Körperchen derartiger vielleicht teilweise schon aufgelöster »kosmischer Gewölke« sehr große Abstände befinden, so erfolgt das Zusammentreffen mit der Erde so selten, daß es einer sehr langen Reihe von viel besseren Beobachtungen solcher zufälliger Erscheinungen bedürfte, um die gesetzmäßigen Beziehungen außer Zweifel zu stellen. Es ist daher von dieser Seite aus

einstweilen kaum möglich, den gemeinsamen Ursprung solcher Massen einwandfrei zu beweisen; noch weniger läßt er sich jedoch in Fällen wie die hier besprochenen widerlegen, gleichgültig, ob man jene als das Produkt der Zerstörung größerer Körper oder als das primäre, ursprünglich Gegebene ansehen will.

Auch diejenigen, welche das Kometen- und Meteorphänomen nach seiner Entstehung nur als rein planetarische Erscheinung betrachten, müssen, angesichts der allgemein bekannten Tatsachen, zugeben, daß aus den parabelähnlichen, langgestreckten Ellipsen durch die von den großen Planeten ausgehenden Störungen zahlreiche Hyperbeln entstehen, welche die betreffenden Massen stromweise in den Weltraum führen. Die Umstände, unter welchen eine derartige Steigerung der Energie stattfindet, sind jetzt genau untersucht und leicht anzugeben.

Meteorhaufen von so großem Reichtum, wie ihn einzelne denkwürdige Erscheinungen der Leoniden und Andromediden erwiesen haben, würden, je nach ihrer Lage gegen die Aktivitätssphäre Jupiters, auch kosmische Ströme liefern können, welche wenigstens als ungefähre Beispiele für andere bedeutendere ähnliche Wirkungen anzunehmen wären.

Da die Größe der Richtungsstörung auch vom Parameter und dieser vom Eintrittswinkel der relativen Bahn um den störenden Körper abhängt, so müssen, wenn die einzelnen ursprünglichen Bahnen als parallel angenommen werden, unter den gestörten der zahllosen einzelnen Partikel auch ganz kleine Abstufungen der Ablenkung von nur wenigen Sekunden und Minuten vorkommen, was die Ursache sein kann, daß ein für unsere beiläufigen Wahrnehmungen anscheinend einheitlicher Strom in großer Entfernung vom Störungsorte bedeutende Querausdehnung bei geringer Dichtigkeit erhalten wird.

Es ist sehr möglich, ja selbst zu vermuten, daß das Meteorphänomen nicht eine ausschließliche Eigentümlichkeit unseres Sonnensystems darstellt. Andere Fixsterne werden es in ähnlichem, manche vielleicht in bedeutenderem Grad aufweisen und auch die störenden Körper können wohl noch bedeutender sein als in unserem System.

Wenn man aber auch ganz davon absieht, die Entstehung ähnlicher kosmischer Ströme zu erklären, so drängen doch zahlreiche Erfahrungen über analoge Erscheinungen zur Annahme derselben, was auch in unserem Falle nicht ganz unberücksichtigt bleiben kann.[1]

[1] Hin und wieder hat man in der Absicht, den nun schon so zahlreich und sicher nachgewiesenen stark hyperbolischen Bahnen von Feuerkugeln und einzelnen Meteoriten die Beweiskraft für den außerplanetarischen Ursprung der betreffenden Körper zu versagen, sehr einfache, ganz naheliegende Tatsachen übersehen.

Besser als lange Auseinandersetzungen dürfte ein konkretes Beispiel hierüber aufklären.

Ein durch seine Studien auf ähnlichem Gebiete bekannter jüngerer Pariser Astronom machte mich schon vor Jahren brieflich auf die übrigens leicht zu erweisende Tatsache aufmerksam, daß heliozentrische Geschwindigkeiten von der Ordnung, wie sie ausgeprägten Hyperbeln entsprechen und wie ihrer viele schon nachgewiesen wurden, »mindestens solche bis 2·5 oder 74 *km* Geschwindigkeit, entsprechend hyperbolischen Halbachsen etwa bis $a = -\frac{1}{4}$« auch unter dem Einflusse der Planeten entstanden sein könnten, weshalb die vielen hyperbolischen Bahnen nicht notwendig auf einen außerplanetarischen Ursprung der betreffenden Körper hinweisen. Allerdings wurde dabei zugestanden und dies ist nicht unwesentlich, daß solche Störungen nicht für $r > 1$, also nicht durch die außerhalb der Erdbahn befindlichen Planeten, ausgeübt werden könnten, wohl aber beispielsweise durch Venus. Jedenfalls müßte $r < 1$ sein. Die Schlußfolgerung war: »Cela tend à montrée, qu'une origine extrasolaire n'est pas nécessairement impliquée dans le cas d'une vitesse de 74 *km*.«

In der allgemeinen Fassung ist gegen diesen Satz nichts einzuwenden. Wenn er jedoch dazu dienen soll, die Beweiskraft der nachgewiesenen hyperbolischen Geschwindigkeiten für den außerplanetarischen Ursprung der betreffenden Körper zu vernichten oder auch nur abzuschwächen, so könnte er sich höchstens auf einige ganz seltene, bisher unbekannt gebliebene Fälle beziehen, während er sonst ganz unanwendbar wäre.

Denn, wenn zugegeben wird, daß eine derartige Störung nur innerhalb $r < 1$ stattfinden könnte, wäre sie ja ganz unmöglich bei allen Meteoren, welche in ihrer Bahn nicht von der Sonne her, sondern gegen diese hin mit der Erde zusammentreffen, da für die letzteren $r < 1$ in diesem Sinne nicht vorkommen konnte. Unter den beobachteten Meteoren sind gerade aber diese überwiegend, weil die Umstände zur Beobachtung günstiger sind. Aber auch bei jenen Meteoren, welche vor dem Zusammenstoße mit der Erde wirklich beispielsweise nahe an Venus vorübergegangen sein konnten, müßte, wenn sie eine hyperbolische Bahn zeigten, es möglich sein, diese nach rückwärts auf den Ort des störenden Planeten zurückzuführen. Bisher ist aber noch nicht ein einziger derartiger Fall bekanntgeworden. Übrigens würden auch einige

Indessen beabsichtige ich hier nur die Umstände anzuführen, unter welchen eine gemeinsame Abkunft der dreierlei Meteoriten möglich und auch nicht unwahrscheinlich wäre, wozu ja die große mineralogische Übereinstimmung Veranlassung gibt. Um aus diesem letzteren Gesichtspunkte der Frage aber auch eine andere Seite abzugewinnen, seien noch zwei andere Beispiele kurz angeführt. Ich möchte nämlich hier noch erwähnen, daß auch die Bahnverhältnisse des Falles von Knyahinya in Ungarn am 9. Juni 1866, $4^h 56^m$ [1] sehr große Ähnlichkeit mit jenen von Jonzac darbieten. Für den Radianten wurde die Lage $\alpha = 170°$, $\delta = +55°$ gefunden. Der Unterschied im Knoten beträgt, auf gemeinschaftliches Äquinoktium reduziert, ungefähr 3° und die Radiationspunkte liegen nahe beisammen.

Die parabolischen Elemente für Knyahinya wären: $\Omega = 78°5$, $\pi = 245°8$, $q = 0·986$, $i = 15°5$ rechtläufig. Das parabolische Aphel wäre in 65°8 Länge und 3°7 südlicher Breite.

Wird jedoch für die heliozentrische Geschwindigkeit derselbe Betrag angenommen wie vorhin für die Bahnen von Jonzac und Juvenas, im Mittel also etwa $v = 1·4215$, so ergibt sich der kosmische Ausgangspunkt in $l = 77°2$, $b = -0°4$, also ziemlich nahe an den betreffenden Orten für die beiden genannten Fälle. Wird die Geschwindigkeit nur wenig größer genommen, z. B. $v = 1·426$, so erhält man, fast ganz übereinstimmend, für den Ausgangspunkt: $l = 80°$, $b = +0°5$.

Die Bahnverhältnisse des Falles von Knyahinya sind übrigens jenen von Jonzac viel mehr verwandt als die von Juvenas.

Mit dem Meteoritenfalle bei Stannern könnte, wenn man das gleiche Falldatum berücksichtigt (die Knotenlänge ist wegen des Schaltjahres etwas verschieden), auch noch der von Slavětic in Vergleich kommen. Er ereignete sich am 21. Mai 1868, $22^h 30^m$, aus einem Radianten, dessen Lage von mir in $\alpha = 157°$, $\delta = +37°$ abgeschätzt wurde (a. a. O.,

Ausnahmsfalle gar nichts beweisen gegenüber der erdrückenden Menge der übrigen hyperbolischen Bahnen, bei welchen der Einfluß eines solchen Planeten unmöglich in Frage kommen kann.

[1] Über die Periheldistanzen etc., wie oben, p. 256.

p. 258). Ungeachtet der nahen Übereinstimmung in der Fallepoche ist er ein wahres Gegenstück zum ersteren, denn seine Bewegung war im strengsten Sinne rechtläufig. Für den oben angeführten Radiationspunkt wären die parabolischen Elemente: $\Omega = 61°5$, $\pi = 237°5$, $q = 0·997$, $i = 6°$ (rechtläufig). Das parabolische Aphel wäre $l = 57°5$, $b = -0°5$. Dagegen würde man für $v = 1·447$ den kosmischen Ausgangspunkt in $l = 81°3$, $b = +1°5$ erhalten.

Sollte die Bahn von Slavětic denselben Ausgangspunkt besitzen wie die Bahnen von Jonzac und Juvenas ($l = 81°6$, $b = +0°3$), so müßte der Radiant für Slavětic in $\alpha = 141°$, $\delta = +18°5$ gewesen sein, was nicht ganz unmöglich wäre, da das oben angeführte Resultat nur beiläufig zu nehmen ist.

Die Meteoriten von Knyahinya und wohl auch jene von Slavětic zeigen jedoch mineralogisch keine Übereinstimmung mit den drei Fällen, welche hier besprochen werden.

III.

Die Ergebnisse der neueren Untersuchungen über die Kometenbahnen kurzer Perioden haben, wenigstens für die meisten, deutliche Beziehungen zu den großen Planeten, namentlich zu Jupiter, erkennen lassen. Dies regt an, einem ähnlichen Zusammenhange auch hinsichtlich solcher einzelner Meteoritenbahnen nachzuforschen, für welche Ellipsen mit kurzen Achsen nach den Ergebnissen der Beobachtungen nicht schon von vornherein ausgeschlossen sind. Insbesondere in Fällen, welche bei fast identischer Beschaffenheit der Substrate aus der Lage der Radianten auf große Verschiedenheiten in den heliozentrischen Bahnen mit Sicherheit schließen lassen, dürften ähnliche Untersuchungen naheliegend erscheinen.

Deshalb halte ich es, selbst nach den Resultaten des vorigen Abschnittes, nicht für überflüssig, die Frage zu erörtern, ob und unter welchen Voraussetzungen die drei Bahnen, von welchen hier die Rede ist, möglicherweise im Sonnensystem ursprünglich identisch gewesen sein und erst durch die von einem der großen Planeten ausgegangenen Störungen diese Verschiedenheiten erlangt haben könnten.

Da, wie schon erwähnt, die Geschwindigkeit in allen drei Fällen sich direkt nicht ermitteln ließ, so müssen die Bahnelemente aus Annahmen berechnet werden, welche den in Frage kommenden Verhältnissen ungefähr entsprechen würden. Deshalb wurde im vorigen Abschnitte zunächst die parabolische Geschwindigkeit zu Grunde gelegt. Diese ist jedoch nicht mehr passend, wenn es sich um Ellipsen mit sehr kurzen Achsen handelt. Weil die relative Geschwindigkeit bei den zwei rechtläufigen Bahnen in Bezug auf die Erde dann sehr klein ausfallen würde, wäre auch der Einfluß der Zenitattraktion zu berücksichtigen, wenn man es vermeiden wollte, daß zur Unsicherheit der Beobachtungsergebnisse noch fast ebenso bedeutende entstellende Einflüsse des Rechnungsvorganges hinzutreten würden.

Um zu diesem Zweck eine Annahme für die Geschwindigkeit aus diesem neuen Gesichtspunkte zu gewinnen, erscheint es vorteilhaft, zunächst Jupiter als störenden Planeten zu nehmen, weil, abgesehen von seinem bedeutenden Einfluß im Sonnensystem, sich die Bahnelemente dann am meisten von den parabolischen unterscheiden, während sie sich unter Voraussetzung der Störung durch die entfernteren großen Planeten mehr und mehr denselben nähern.

Hinsichtlich der Bahnen von Jonzac und Juvenas hat man es — wie unsicher auch die Beobachtungsergebnisse sein mögen und welche Geschwindigkeit auch gewählt wird — jedenfalls mit dem Falle zu tun, wo die Perihele nicht weit vom Begegnungsknoten entfernt waren. Sollen diese Bahnen Ergebnisse spezieller Störungen sein, so müßte der andere Knoten ziemlich genau in die Bahn des störenden Planeten fallen und daher auch das Aphel ungefähr in diese Gegend treffen. Nimmt man, da es sich nur um eine runde Schätzung handelt, für die Periheldistanz, nahe am Orte des Zusammenstoßes mit der Erde, $q = 1$ und bezeichnet mit r den Abstand des störenden Planeten von der Sonne zur Epoche der Störung, so ist die halbe große Achse einer Ellipse, welche diesen Annahmen entsprechen würde: $a = \frac{r+1}{2}$.

Man würde demnach für Jupiter als störenden Körper $r = 5 \cdot 2$ zu nehmen haben und dann $a = 3 \cdot 1$ erhalten. Ich habe der vorläufigen Elementenberechnung $a = 3 \cdot 2$ zu Grunde gelegt, weil nach der Sachlage ein kleiner Spielraum nach aufwärts wahrscheinlicher ist. Den daraus erhaltenen Rechnungsergebnissen sind im nachstehenden auch noch der halbe Parameter (p) und die Exzentrizität (e) beigefügt, weil von diesen Elementen noch Gebrauch gemacht werden wird.

	Jonzac	Juvenas
a ...	3·2	3·2 (angenommen)
p ...	1·684	1·682
e ...	0·689	0·689
☊ ...	81°	263°
π ...	253°7	254°8
q ...	0·997	0·996
i	11° (rechtläufig)	10° (rechtläufig)

Man darf nicht vergessen, daß diese beiden Elementensysteme aus unsicheren Beobachtungen und einer willkürlichen Annahme von a hervorgegangen sind, da sonst die weitreichende Übereinstimmung der meisten Elemente überraschend wäre. Allein auch die günstigste Annahme für die Geschwindigkeit kann die feststehende Tatsache nicht beseitigen, daß die aufsteigenden Knoten in der Länge um ungefähr 180° auseinanderliegen. Dies ist eigentlich der einzige namhafte, aber in Ansehung der Lage sehr wesentliche Unterschied zwischen beiden Bahnen, deren Ebenen einen Winkel von ungefähr 21° miteinander einschließen statt zusammenzufallen.

Die Untersuchung, in welcher Weise diese erhebliche Abweichung aus speziellen Störungen zu erklären wäre, erfordert einige allgemeinere Betrachtungen, welche dann auch auf den Meteoritenfall von Stannern anzuwenden wären.

Im nachstehenden soll die Bahn des störenden Körpers — welcher zur Abkürzung mit S bezeichnet wird — als kreisförmig mit dem Halbmesser r angenommen werden. Bezüglich der Bahn des gestörten Körpers (G), für welche a die große Halbachse, p den halben Parameter und i die Neigung gegen

die Bahnebene des störenden Körpers seien, liegt bekanntlich das von Tisserand[1] mitgeteilte Kennzeichen, daß zwei verschiedene derartige Bahnen (angewendet auf Kometen) aus einer andern durch die von S ausgeübten Störungen hervorgegangen sein können in der Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{2}{r^{3/2}}\left[\sqrt{p_1}\cos i_1 - \sqrt{p_2}\cos i_2\right] = 0. \qquad (2)$$

Wir können für i hier nur Näherungswerte einsetzen, weil die Neigung gegen die Bahn des störenden Planeten nicht angegeben werden kann, wenn die Störungsepoche ganz unbekannt ist. Man wird also dafür die Neigung gegen die Ekliptik zu nehmen haben, wobei, wenn Jupiter benützt wird, die Abweichung höchstens etwa 1°3 betragen kann.

Bei Vergleichungen von Kometenbahnen sind die Elemente, auf welche es hier ankommt, fast immer recht genau bekannt. Viel weniger gilt dies zumeist selbst für gut beobachtete Meteoritenbahnen. In den Fällen, welche uns hier beschäftigen, ist außer der Knotenlänge, welche durch die Fallepoche bestimmt ist, fast alles nur innerhalb ziemlich weiter Grenzen gegeben und läßt daher eine entsprechende Anpassung an die Bedingungen dieser Gleichung zu.

Wenn τ die im vorigen Abschnitt angegebene Bedeutung für den Radiusvektor r besitzt und a die Halbachse der gestörten Bahn ist, so erhält man den halben Parameter aus

$$p = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) r^2 \sin^2\tau = \left(2 - \frac{r}{a}\right) r \sin^2\tau. \qquad (3)$$

Wenn a unbekannt geblieben ist, können die vier Größen a_1, a_2, τ_1, τ_2 gewählt und kombiniert werden.

So ist beispielsweise eine der einfachsten Annahmen, die Gleichheit der Achsen für beide aus der Störung hervorgegangene Bahnen, also $a_1 = a_2$, wie sie vorhin der Berechnung der beiden elliptischen Elementensysteme zu Grunde

---

[1] Bulletin astronomique, t. VI, p. 89, und Traité de Mécanique céleste, t. IV, p. 204.

gelegt wurde. Die Bedingungsgleichung (2) erhält dann die einfache Form:

$$p_1 \cos^2 i_1 - p_2 \cos^2 i_2 = 0.$$

Man sieht auf den ersten Blick, daß die ganz ohne Rücksicht auf diese Gleichung oben abgeleiteten Elemente[1] für die beiden Bahnen ihr fast genau entsprechen. Denn wenn $i_1 = 11°$ und $i_2 = 10°$ sind, müssen auch p_1 und p_2 sehr nahe einander gleich sein.

Mit den in den zwei Elementensystemen angegebenen Werten wird $p_1 \cos^2 i_1 = 1\cdot622$ und $p_2 \cos^2 i_2 = 1\cdot631$. Bleiben die i ungeändert und würden die p auf die Bedingung ausgeglichen, so würde man erhalten $p_1 = 1\cdot688$ und $p_2 = 1\cdot677$. Die Veränderungen wären also ganz unbeträchtlich.

Aus den abgeleiteten Elementen ergeben sich die Tangentenwinkel für den Radiusvektor $r = 5\cdot2$ zu $\tau_1 = 68°3$ und $\tau_2 = 68°9$ (Gleichung 3).

Für $a_1 = a_2$ gilt aber auch noch

$$\sin \tau_1 \cos i_1 - \sin \tau_2 \cos i_2 = 0.$$

Mit $i_1 = 11°$, $i_2 = 10°$ werden die beiden Produkte: $0\cdot912$ und $0\cdot919$, so daß auch in dieser Hinsicht nur geringfügige Abänderungen nötig wären, um der Bedingung völlig zu genügen. Dieselben ergeben sich übrigens schon aus den Änderungen in p.

Da die abgeleiteten elliptischen Elemente der Bedingungsgleichung somit ohnehin fast völlig entsprechen, halte ich es hier zunächst für überflüssig, noch andere Kombinationen in Betracht zu ziehen.

Unter bestimmten Voraussetzungen über die gestörten Bahnen läßt sich auch einiges über die ursprüngliche Bahn angeben, aus welcher die sekundären Bahnen hervorgegangen sein können.

---

[1] Der Winkel τ am Begegnungsknoten, also für $r = 1$, ist nämlich aus dem Radianten bekannt und dann erhält man, weil p eine Konstante für die ganze Bahn ist, leicht $p = \left(2 - \frac{1}{a}\right) \sin^2 \tau$, sobald a angenommen ist.

Im folgenden bezeichnen stets:

v die heliozentrische Geschwindigkeit von S;

v_0 die heliozentrische Geschwindigkeit von G in der ursprünglichen Bahn vor der Störung;

v_1 (beziehungsweise v_2 etc.) diese nach der Störung, alle für den Radiusvektor r, wobei also die Veränderungen der heliozentrischen Koordinaten von G während der Zeit, als dieser Körper innerhalb der Aktivitätssphäre von S bleibt, im Vergleiche gegen r vernachlässigt werden[1] und a_0 und a_1 die zugehörigen Halbachsen wären;

V die relative Geschwindigkeit in der Bahn, welche G um S beschreibt, beim Eintritt in die Aktivitätssphäre von S und A die zugehörige Halbachse dieser Hyperbel.

Der Winkel, welchen an der Stelle größter Annäherung beider Bahnen die Tangente an der ursprünglichen Bahn von G vor der Störung mit der Tangente an die Bahn von S bildet, soll mit ω_0 und der entsprechende Winkel nach der Störung mit ω_1 bezeichnet werden.

Da nun V unter diesen Voraussetzungen auch zugleich die relative Geschwindigkeit beim Austritt aus der Aktivitätssphäre sein muß, so bestehen die Gleichungen:

$$V^2 = v_0^2 + v^2 - 2 v_0 v \cos\omega_0$$
$$V^2 = v_1^2 + v^2 - 2 v_1 v \cos\omega_1,$$

worin

$$v = \sqrt{\frac{1}{r}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a_0}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}}$$

in der bekannten Einheit ausgedrückt sind.

Aus der Verbindung beider Gleichungen erhält man

$$\frac{r}{a_0} + 2\sqrt{\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)} \cos\omega_0 = \frac{r}{a_1} + 2\sqrt{\left(2 - \frac{r}{a_1}\right)} \cos\omega_1, \qquad (4)$$

---

[1] Mit derselben Einschränkung gilt auch die Tisserand'sche Gleichung. M. O. Callandreau hat in einer schönen Studie (Étude sur la théorie des comètes périodiques in den Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, T. XX) das Problem genauer entwickelt, doch erfordert die vorliegende Aufgabe nicht, so weit zu gehen.

welches eigentlich ein allgemeinerer Ausdruck der Tisserandschen Bedingungsgleichung ist. Hieraus läßt sich je nach der Sachlage ω_0 oder ω_1, a_0 oder a_1 gewinnen.

Sind ψ und ψ' die Abstände der Körper S und G vom Knoten, in dessen Nähe die Störung stattfand, so ist ω zu berechnen aus:

$$\cos\omega = -\sin\psi\cos(\psi'+\tau)+\cos\psi\sin(\psi'+\tau)\cos i,$$

worin i, τ und ω mit übereinstimmendem Index zu versehen sind. Da aber sehr nahe $\psi = \psi'$ und, wie sich sogleich ergeben wird, beide nur sehr klein sein können, erhält man hinreichend genau auch:

$$\cos\omega = \sin\tau\cos i. \tag{5}$$

Wenn aus der ursprünglichen Bahn, für welche a_0 und ω_0 (beziehungsweise τ_0 und i_0) gelten, noch eine zweite Bahn a_2, ω_2 (oder τ_2, i_2) hervorgehen soll, so muß auch erfüllt sein:

$$\frac{r}{a_0}+2\sqrt{2-\frac{r}{a_0}}\cos\omega_0 = \frac{r}{a_2}+2\sqrt{2-\frac{r}{a_2}}\cos\omega_2,$$

daher, indem man für $\cos\omega_1$ und $\cos\omega_2$ die Werte $\sin\tau_1\cos i_1$ und $\sin\tau_2\cos i_2$ setzt, auch

$$\frac{r}{a_1}+2\sqrt{\left(2-\frac{r}{a_1}\right)}\sin\tau_1\cos i_1 =$$
$$= \frac{r}{a_2}+2\sqrt{\left(2-\frac{r}{a_2}\right)}\sin\tau_2\cos i_2. \tag{6}$$

Da nun (Gleichung 3)

$$\sqrt{\left(2-\frac{r}{a}\right)}\sin\tau = \sqrt{\frac{p}{r}},$$

so folgt daraus auch

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2\sqrt{p_1}}{r^{3/2}}\cos i_1 = \frac{1}{a_2}+\frac{2\sqrt{p_2}}{r^{3/2}}\cos i_2,$$

welche mit der von Tisserand auf einem andern Wege entwickelten übereinstimmt. Wenn angenommen wird, daß die

beiden Bahnen aus derselben primären Bahn entstanden sind und wenn der Bedingungsgleichung entsprochen ist, so kann, sobald a_0 vorausgesetzt wird, ω_0 aus jeder der beiden Gleichungen berechnet werden und die Resultate müssen selbstverständlich übereinstimmen.

Will man für die ursprüngliche Bahn eine Parabel gelten lassen, so ist $a_0 = \infty$ und

$$\cos \omega_0 = \frac{\frac{r}{a_1} + 2\sqrt{\left(2 - \frac{r}{a_1}\right)} \cos \omega_1}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{r}{a_2} + 2\sqrt{\left(2 - \frac{r}{a_2}\right)} \cos \omega_2}{2\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Da wir von der Annahme $a_1 = a_2 = 3 \cdot 2$ ausgegangen sind, muß $\cos \omega_1 = \cos \omega_2$ werden. Wir erhalten mit den vorhin angegebenen Werten von i und τ übereinstimmend in runder Zahl $\omega_1 = \omega_2 = 24°$ und daraus würden wir, wenn für die ungestörte Bahn eine Parabel genommen wird, $\omega_0 = 14°$ erhalten.

Im vorstehenden sind zwar die Beziehungen zwischen Elementen der verschiedenen, durch eine Störung aus der primären Bewegung hervorgegangenen Bahnen angeführt. Es erübrigt aber noch die Angabe der dynamischen Voraussetzungen, unter welchen derartige bedeutende Umwandlungen vorkommen können und der Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens.

Die von Prof. H. A. Newton für Kometenbahnen mitgeteilten Entwicklungen[1] enthalten Ausgangspunkte, welche auch hier mit entsprechenden Modifikationen benützt werden können.

Es wurden nun noch folgende Bezeichnungen angewendet:

d ist der kleinste normale Abstand der beiden heliozentrischen Bahnen von G und S an der Stelle ihrer größten

[1] On the Capture of Comets by Planets, especially their Capture by Jupiter. Im Americ. Journal of science, XLII, September 1891, p. 183 etc.

Annäherung. d wäre also Null, wenn sich beide Bahnen genau schneiden würden. h bedeutet die Entfernung, welche S noch zurückzulegen hat, wenn G in seiner Bahn an dem vorhin erwähnten Ort angelangt ist; h wird negativ genommen, wenn S über diese Stelle bereits hinausgekommen ist.

m ist die Masse von S, z. B. Jupiters.

Innerhalb der Aktivitätssphäre des störenden Körpers S wird in üblicher Weise nur dessen eigene Schwerewirkung auf G berücksichtigt, infolge deren letzterer eine hyperbolische Bahn in Bezug auf S beschreibt. Hinsichtlich dieser relativen (jovizentrischen) Bahn gilt die Bezeichnung θ_0 für den Winkel, welchen die Tangente an die relative Bahn um S beim Eintritt in die Aktivitätssphäre (Geschwindigkeit V) mit der Bahntangente in der Bewegungsrichtung von S bildet. θ_1, θ_2 etc. sind dann die analogen Winkel verschiedener gestörter Bahnen beim Austritt aus der Aktivitätssphäre. Ferner bezeichnen:

A die halbe Hauptachse und B die halbe Querachse,
P den halben Parameter,
E die Exzentrizität,
ρ den Radiusvektor von S aus,
W die zugehörige wahre Anomalie in der relativen Bahn,
Q den kleinsten Abstand (z. B. das Perijovium) der Bahn von G um S,
α den Winkel der Asymptoten dieser relativen Bahn mit der Achse A.

Zur Abkürzung diene

$$\frac{V}{v} = s, \quad \frac{v_0}{v} = \lambda.$$

Bei Benützung der Ableitungen von Newton muß berücksichtigt werden, daß die Gleichung für tang α (7), p. 188, wahrscheinlich infolge eines Druckfehlers, entstellt ist. Sie muß richtig lauten:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{B}{A} = \frac{s^2 \sqrt{d^2 + h^2 \sin^2 \theta_0}}{mr}, \tag{8}$$

während bei Newton das Wurzelzeichen fehlt.

Newton gibt (13), p. 189, für die Halbachse a_1 der aus der Störung hervorgegangenen Bahn:

$$a_1 = \frac{s}{4m} \cdot \frac{A^2+d^2+h^2 \sin^2 \theta_0}{A \cos \theta_0 \pm h \sin^2 \theta_0}. \tag{9}$$

Hierin ist das Vorzeichen von A schon berücksichtigt und dieses dem Zahlenwerte nach einzusetzen. θ_0 geht aus ω_0 hervor durch Auflösung von

$$\left.\begin{aligned} V \sin \theta_0 &= v_0 \sin \omega_0 \\ V \cos \theta_0 &= v_0 \cos \omega_0 - v \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ebenso gilt auch für den Austritt, also nach der Störung

$$\left.\begin{aligned} V \sin \theta_1 &= v_1 \sin \omega_1 \\ V \cos \theta_1 &= v_1 \cos \omega_1 - v \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Winkel θ werden im selben Sinne gezählt wie die ω und sind hinsichtlich des Quadranten durch diese Gleichungen unzweideutig gegeben. Ferner ist

$$A = \frac{mr}{s^2} \tag{12}$$

$$B = \sqrt{d^2+h^2 \sin^2 \theta_0}. \tag{13}$$

Für den vorliegenden Zweck kommen nun die Beziehungen in Betracht, welche zwischen d, h und den übrigen Größen bestehen müssen, wenn letztere als gegeben vorausgesetzt werden.

Damit durch die Störung die Halbachse a_1 einen vorausbestimmten Wert erhalte, muß, wie aus der Umkehrung von (9) hervorgeht, wenn $\frac{2ma_1}{s} = l$ gesetzt wird,

$$h = l\left[1 \pm \frac{1}{\sin \theta_0} \sqrt{1-\left(\frac{A}{l} - \cos \theta_0\right)^2 - \frac{d^2}{l^2}}\right]. \tag{14}$$

Man findet daraus, wie weit S von der Stelle der größten Bahnnäherung entfernt ist, wenn G sich ebendort befindet.

Offenbar ist aber die angenommene Halbachse a_1 als Ergebnis der Störung nur dann möglich, wenn h einen reellen Wert erhält. Es muß daher

$$\left(\frac{A}{l}-\cos\theta_0\right)^2+\frac{d^2}{l^2}\gtreqless 1$$

sein.

Die günstigste Lage zur Erfüllung dieser Bedingungen ist offenbar durch $d=0$ dargestellt. Es bleibt dann noch zu erfüllen

$$\frac{A}{l}-\cos\theta_0\gtreqless\pm 1.$$

Nach Einsetzung von $\frac{A}{l}=\frac{r}{2sa_1}$ folgt, daß h nur dann reell wird, wenn

$$a_1\gtreqless\frac{r}{2s(\cos\theta_0\pm 1)}.$$

Wird aus den Gleichungen (10) θ_0 durch ω_0 ersetzt, so kann diese Bedingung auch noch geschrieben werden

$$a_1\gtreqless\frac{r}{2\left[(\lambda\cos\omega_0-1)\pm\sqrt{\lambda^2+1-2\lambda\cos\omega_0}\right]}. \qquad (15)$$

Hierin ist mit Rücksicht auf die früheren Substitutionen

$$\lambda=\sqrt{2-\frac{r}{a_0}}$$

und wenn die ursprüngliche Bahn eine Parabel war, wegen $a_0=\infty$, $\lambda=\sqrt{2}$.

Das Gleichheitszeichen entspricht der äußersten Maximalstörung bezüglich der Energie für die angenommenen Größen ω_0 und λ, weil $d=0$ vorausgesetzt ist.

Diese Störung liefert die unter den gegebenen Umständen kleinstmögliche abgeleitete Halbachse a, also auch die kleinste Periode für den Umlauf.

Darum ist die Umwandlung der parabolischen Bahn in eine Ellipse von der Halbachse a_1, wenn die Störung in der Entfernung r vor sich geht, nur dann möglich, falls

$$a_1 \gtreqless \frac{r}{1 \pm 2s - s^2}, \text{ worin } s^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\omega_0.$$

Wird Jupiter als störender Körper gedacht, so ist $r = 5 \cdot 2$ zu nehmen und wenn man die früheren Voraussetzungen, also $\omega_0 = 14°$ beibehält, ergibt sich die Bedingung

$$a_1 \gtreqless 2 \cdot 96.$$

Da aber die oben angenommenen gestörten Ellipsen $a_1 = a_2 = 3 \cdot 20$ haben, so wird dieser Bedingung entsprochen und man erhält für $d = 0$ noch reelle Werte von h.

Nimmt man an, daß die beiden Bahnen sich nicht genau schneiden, daß also d nicht Null ist, so darf es doch, wenn h reell bleiben soll, die Grenze

$$d \lesseqgtr \frac{2ma_1}{s}\sqrt{1-\left(\frac{r}{2a_1 s} - \cos\theta_0\right)^2}$$

nicht überschreiten.

Für $a_0 = \infty$, $a_1 = 3 \cdot 2$, $\omega_0 = 14°$ wird $\theta_0 = 42°6$ (Gleichung 10) und wenn ferner für Jupiter $m = \frac{1}{1050}$ gesetzt wird, erhält man daraus

$$d \lesseqgtr 0 \cdot 0059.$$

Bis auf diese Größe müßten sich die beiden Bahnen mindestens genähert haben.

Für den Grenzwert von d liefert Gleichung (14) nur einen Wert für h, weil der zweite Teil auf der rechten Seite Null, also $h = l$ wird.

Für alle Werte für d von Null bis zu dieser Grenze erhält man aus (14) stets zwei zugehörige Werte von h, also dann aus (13) auch für B und aus (8) für den Asymptotenwinkel α.

Mit den früher angegebenen Größen erhält man z. B. für $d = 0$

$$h = l(1 \pm 0 \cdot 727)$$

Weil nun $l = 0 \cdot 01206$, so sind die zwei Werte für h folgende:

$$h = 0 \cdot 0208, \quad h' = 0 \cdot 0033.$$

Wegen $d = 0$ ist

$$B = h \sin \theta_0,$$

woraus man dann mit A aus (8) die beiden Asymptotenwinkel

$$\alpha = 36^\circ 0, \quad \alpha' = 6^\circ 6$$

erhält. Für $h = l$ würde der Asymptotenwinkel $\alpha = 27^\circ 5$.

Da d nicht kleiner als Null sein kann und auch die Grenze $0 \cdot 0059$ nicht überschreiten dürfte, damit h noch reell wird, so sind zwischen den beiden oben angegebenen Grenzwerten von α (6°6 bis 36°0) alle unter diesen Umständen möglichen Asymptotenwinkel enthalten, welche nach der Störung Ellipsen von $a = 3 \cdot 2$ liefern können. Werden für d verschiedene Werte zwischen diesen Grenzen genommen, so liefert (14) die zugehörigen h, woraus man dann wieder, wie oben, die Winkel α findet.

Die aufsteigenden Knoten der beiden Bahnen von Jonzac und Juvenas liegen, wie schon hervorgehoben, abgesehen von einer geringen Differenz, um 180° voneinander entfernt. Will man sie also beide auf denselben Knoten beziehen, z. B. auf jenen, in dessen Nähe die Störung stattgefunden haben müßte, so wäre eine der beiden Neigungen i_1 oder i_2 negativ in Rechnung zu nehmen, weil in diesem Knoten die eine Bahn aufsteigend, die andere absteigend erscheint. Dies gilt dann auch für ω_1 und ω_2.

Es entsteht nun die Frage, ob mit Beibehaltung der bisherigen Annahmen aus der ursprünglichen parabolischen Bahn, für welche $\omega_0 = 14°$ wäre, durch die Jupiterstörung ebensowohl $\omega_1 = 24°$ als $\omega_2 = 336°$ hervorgehen könnten.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$v_2 \sin \omega_2 = V \sin \theta_2$$
$$v_2 \cos \omega_2 = V \cos \theta_2 + v$$

würde die Notwendigkeit eines negativen Vorzeichens für $\sin \omega_2$ ein gleiches für $\sin \theta_2$ erfordern. Sind θ_0 und θ_2 zusammengehörige Werte für dieselbe jovizentrische Bahn beim Ein- und Austritte, wobei, wie angenommen, θ_0 im ersten Quadranten, so ist für θ_2 der vierte Quadrant ganz ausgeschlossen, weil in dieser Lage derartige Ellipsen nicht entstehen könnten. Demnach könnte es nur zwischen 180° und 270° liegen, wenn $\sin \theta_2$ negativ werden soll. Damit aber der Annahme gemäß $\cos \omega_2$ positiv bleibe, muß

$$v > V \cos \theta_2$$

sein. Da nun

$$\theta_2 = \theta_0 + 180 - 2\alpha, \tag{17}$$

so fällt, wenn θ_0 im ersten Quadranten, θ_2 in den zweiten oder dritten, je nachdem $\alpha \gtrless \frac{\theta_0}{2}$ wird.

Für die rechtläufigen Bahnen gehören also die kleinen Asymptotenwinkel zu den negativen Werten von i.

Für eine und dieselbe Eintrittsrichtung (θ_0) und Geschwindigkeit v_0 ist A konstant und α nur veränderlich nach B, welches von den Entfernungen d und h abhängt. Je kleiner die letzteren sind, desto kleiner wird auch α. Dies hängt also von der Eintrittsstelle der Meteore in die Anziehungssphäre des Planeten ab und es können in solcher Weise, wenn der Querschnitt des Stromes groß genug ist, Bahnen von sehr verschiedenen Achsenverhältnissen und Asymptotenwinkeln gleichzeitig durch die Störung aus einem einheitlichen Strome hervorgehen. Ist letzterer ein rechtläufig absteigender, so werden die kleinsten Werte der Asymptotenwinkel α zu den nach der Störung heliozentrisch rechtläufig aufsteigenden Bahnen gehören, wodurch die Knotenlänge um 180° geändert wird.

Ein großer Teil dieser relativen Bahnen, für welche α sehr klein ist, wird jedoch die Meteoriten direkt auf die Oberfläche des störenden Planeten führen, so daß nur jene in Betracht kommen, für welche die größte Annäherung noch außerhalb derselben erfolgt.

Ob die Störung bei sehr kleinen Asymptotenwinkeln noch möglich ist, ergibt sich aus folgenden Beziehungen. Bekanntlich ist für die Hyperbel

$$P = \frac{B^2}{A} = A \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$E = \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} = \sec \alpha.$$

Die Gleichung der jovizentrischen Störungshyperbel ist dann

$$\rho = \frac{P}{1 + E \cos W}.$$

Hieraus ergibt sich die Distanz des Perijoviums oder, allgemein genommen, die größte Annäherung an den störenden Planeten:

$$Q = \frac{P}{1+E} = A(\sec \alpha - 1) \tag{18}$$

und die Störung ist in der entwickelten Größe nur dann möglich, wenn Q nicht kleiner als der Halbmesser des störenden Planeten wird, weil sonst der gestörte Körper nicht vorüberzieht, sondern auf die Oberfläche des letzteren fällt.

Aus dieser letzteren Gleichung ergibt sich also der Grenzwert, den α überschreiten muß, wenn die Störung in der angenommenen Weise überhaupt möglich war. Ist D der Durchmesser des störenden Planeten, so folgt aus der Bedingung $Q > \frac{D}{2}$

$$\sec \alpha \gtreqless \frac{D}{2A} + 1 \gtreqless \frac{Ds^2}{2mr} + 1. \tag{19}$$

Das noch zulässige Minimum von α hängt daher, weil für jeden einzelnen Planeten sowohl D als mr konstant sind, nur davon ab, daß s den kleinsten Wert erhalte. Aus

$$s^2 = \frac{V^2}{v^2} = \frac{v_0^2}{v^2} + 1 - \frac{2v_0}{v} \cos \omega_0$$

geht hervor, daß dies eintritt für $\omega_0 = 0$, wenn v_0 und v bestimmt gegebene Größen sind. Es wird dann

$$s = \frac{v_0}{v} - 1.$$

Ist für die ursprüngliche Bahn eine Parabel gedacht, so wird $\frac{v_0}{v} = \sqrt{2}$, also $s = \sqrt{2} - 1$ oder $s^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, welches auch immer der störende Planet sei. Dann ist für die Herabdrückung des unteren Grenzwertes von α nur mehr maßgebend, daß $\frac{D}{mr}$ so klein als möglich sei. Unter allen Planeten fällt dieser Bruch bei Jupiter am kleinsten aus.

Für diesen Planeten, welcher hier als der störende angenommen wurde, ist in der üblichen Einheit ausgedrückt

$$\frac{D}{2mr} = 0 \cdot 09763.$$

Die Größe s^2 wird ein Minimum für $\omega = 0$, d. h. wenn die Meteoriten genau die gleiche Bewegungsrichtung mit dem Planeten haben. Ist ihre Bahn eine Parabel, so wird $s^2 = 0 \cdot 1716$, woraus folgt, daß für diese Annahme

$$\alpha \gtreqless 10 \cdot 5^\circ$$

sein müßte, damit das Perijovium noch außerhalb des Planetenkörpers falle.

Da s^2 für die parabolische Bahn sich nur mit ω_0, nicht aber mit der Entfernung des störenden Planeten ändert und $\frac{D}{2mr}$ für alle über Jupiter hinaus befindlichen Planeten größer ist, so wird auch der hier angeführte Grenzwert für α überhaupt der kleinste sein, damit die Meteoriten an dem störenden Körper noch vorüberziehen können.

Für zunehmende Werte von ω_0 wächst s^2 und somit auch dieser untere Grenzwert.

War dagegen die ungestörte Bahn eine Ellipse, für welche jedenfalls $\frac{v_0}{v} < \sqrt{2}$ sein muß, so wird auch für einen kleineren Wert von α als den oben angeführten die Störung in der vorausgesetzten Weise möglich gewesen sein. Diese Betrachtungen liefern nun in Bezug auf unsere Annahmen folgendes Ergebnis

Aus der ursprünglichen Parabel, deren Bahntangente am Störungsorte mit der Bewegungsrichtung des Planeten, recht-

läufig und absteigend, den Winkel $\omega_0 = 14°$ bildete, können neue, elliptische Bahnen mit der Halbachse $a = 3 \cdot 2$ sowohl in der Lage $\omega_1 = 24°$ (absteigend) als auch für $\omega_2 = 336°$ (aufsteigend) dann entstanden sein, wenn auch der kleinere Asymptotenwinkel die erforderliche Größe hatte, um die ganze relative Bahn noch außer den Planetenkörper zu verlegen.

Es ergeben sich bei sinngemäßer Anwendung von (11) zunächst die relativen Austrittsrichtungen für jede der beiden Bahnen:

$$\theta_1 = 151{^\circ}4, \quad \theta_2 = 208{^\circ}6,$$

dann, weil $\theta_0 = 42{^\circ}6$ für beide Bahnen gelten soll, mit Benützung von (17)

$$\alpha_1 = 35{^\circ}6, \quad \alpha_2 = 7{^\circ}0.$$

Vergleicht man diese Winkel mit den weiter oben entwickelten Beziehungen zwischen α, d und h, so findet man leicht, daß zu diesen beiden Störungen eine Lage nötig wäre, in welcher der kleinste Abstand d der ursprünglichen Bahn von der Bahn Jupiters nur sehr wenig größer als Null sein durfte. Dabei wäre der erstere Asymptotenwinkel und also die absteigende elliptische Bahn das Störungsergebnis, als der Abstand des Planeten von diesem Punkte noch etwas weniger als 0·0208 betrug, der zweite und damit die aufsteigende Bahn, da der Planet sich diesem Orte fast schon bis auf 0·0033 genähert hatte.

Man sieht jedoch auch sofort, daß der Winkel $\alpha_2 = 7{^\circ}0$ viel zu klein ausfällt, da er, wie früher gezeigt, schon für das Minimum von s^2 (welches hier wesentlich überschritten ist) nicht kleiner als $10{^\circ}5$ werden dürfte. Daraus folgt, daß das Perijovium noch weit in den Planetenkörper gefallen, daß also, unter diesen oder ähnlichen Voraussetzungen, die Erzeugung der aufsteigenden Bahn aus der angenommenen absteigenden nicht möglich gewesen wäre.

Man muß nun freilich berücksichtigen, daß die Annahmen, von welchen ausgegangen wurde, teilweise nur hypothetisch sein konnten und einigen Spielraum zulassen, daß ferner auch die Radiationsbestimmungen nicht sicher sind. Es liegt daher

nahe, in zulässigen Umgestaltungen dieser Grundlagen das Mittel für eine die Bedingungen erfüllende Lösung zu suchen.

Dies würde jedoch, solange man dabei bleibt, für die ursprüngliche Bahn der Meteoriten eine Parabel anzunehmen, kaum gelingen, ohne ganz unwahrscheinliche Änderungen der Beobachtungsergebnisse und der aus ihnen abgeleiteten Größen.

Es ergibt sich dagegen ohneweiters die Möglichkeit der Lösung, wenn man für die gemeinschaftliche ungestörte Bahn statt der Parabel eine Ellipse von größerer Umlaufszeit annimmt.

Wird beispielsweise $a_0 = 25$ gesetzt, wobei alle übrigen Annahmen ungeändert bleiben, so ergeben sich der Reihe nach aus den schon mehrmals angewendeten Gleichungen:

$$\omega_0 = 18^\circ 7, \quad \theta_0 = 58^\circ, \quad s^2 = 0 \cdot 256$$

und damit für die unterste noch zulässige Grenze des Asymptotenwinkels: $\alpha \gtreqless 12^\circ 7$.

Bringt man nun mit $\theta_0 = 58^\circ$ die beiden früher abgeleiteten Größen $\theta_1 = 151^\circ 4$ und $\theta_2 = 208^\circ 6$ in Verbindung, so erhält man aus Gleichung (17)

$$\alpha_1 = 43^\circ 3 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 13^\circ 7,$$

so daß jetzt auch der zweite Asymptotenwinkel, jener für die Umwendung der Bahn, sich innerhalb der noch zulässigen Grenze befindet. Die Distanz des Perijoviums wird dann größer als der Halbmesser des Planeten.

Wenn also die betreffenden Meteoriten ursprünglich einem Strom angehörten, dessen Bahn von der Parabel sich zwar einigermaßen entfernte, jedoch immer noch eine Ellipse von bedeutender Halbachse war, können unter der Voraussetzung, daß Jupiter diesen Strom mit gleichsinniger Bewegung in einem Winkel von etwa 18°5 durchlief, nebst unzähligen andern, uns unbekannt gebliebenen neuen Bahnen auch jene von Jonzac und Juvenas entstanden sein. Zu dieser Annahme wäre keine Änderung der Beobachtungsergebnisse nötig.

Der geringe Wert von ω_0 würde dann darauf schließen lassen, daß das Perihel dieses Meteorstromes ziemlich nahe an

der Bahn Jupiters, das Aphel daher ungefähr im Abstande 45 (beispielsweise) von der Sonne, also weit über die Neptunsbahn hinaus, sich befunden hätte oder befände. Ohne den Einfluß eines der großen Planeten könnte kein Partikel eines derartigen Stromes in die Nähe der Erde gelangen.

Sobald die Umwendung des Knotens um 180° erklärt ist, kann der noch bleibende geringe Unterschied von 2° in Länge keine Bedeutung beanspruchen, da ein hinreichender Querschnitt des ursprünglichen Stromes ohneweiters anzunehmen wäre.

Die Untersuchung soll nun aus dem gleichen Gesichtspunkt auf die Meteoriten von Stannern ausgedehnt werden. Darnach handelt es sich um die Beantwortung der Frage, ob auch diese möglicherweise ursprünglich im Sonnensystem eine mit den Bahnen der Fälle von Jonzac und Juvenas identische Bahn verfolgt haben könnten, aus welcher sie vor dem Zusammentreffen mit der Erde erst durch die von einem der großen Planeten ausgegangene Störung in einen neuen, ganz und gar verschiedenen Lauf abgelenkt worden wären.

Im zweiten Abschnitte wurde eine Variante für die Koordinaten des Strahlungspunktes dieser Meteoriten in Erwägung gezogen, welche eigentlich nur das Perihel ($\pi = 275°$, $q = 0{\cdot}907$) merklich berührt. Die Neigung $i = 177°5$ wird kaum geändert, insbesondere aber ist der Charakter der rückläufigen Bewegung in beiden Alternativen sehr ausgeprägt und die Knotenlänge selbstverständlich ganz dieselbe, um 21 bis 23° von den Knoten der beiden andern Bahnen abweichend.[1]

Da man einen sehr langen Zeitraum zwischen den Epochen der Störung und des Zusammentreffens mit der Erde annehmen kann, so wäre es möglich, den Unterschied in der Knotenlänge als das Ergebnis allgemeiner Störungen zu betrachten, welche die recht- und rückläufigen Bahnen in verschiedenem Sinne

[1] Auch dies sind parabolische Elemente. Der große Unterschied in π nach der einen und andern Annahme rührt von der geringen Elongation des Radianten in Bezug auf den Apex her. Übrigens ist diese Unsicherheit bei dem ganz bestimmt ausgesprochenen Charakter der streng rückläufigen Bewegung von untergeordneter Bedeutung.

beeinflußten. Dagegen läßt die den Bahnen der beiden andern Fälle fast direkt entgegengesetzte heliozentrische Bewegung die Ableitung aus einer gemeinsamen rechtläufigen Bahn ohne gewagte Hypothesen kaum zu.

Auch bei dem Falle von Stannern konnte nichts über die Geschwindigkeit ermittelt werden. Bei der Prüfung der Annahme, daß die Bahn dieser Meteoriten erst durch spezielle planetarische Störungen die zuletzt nachgewiesene Lage erhalten hat, kann man jedoch die anscheinend unbestimmten Grenzen für die Wahl ihrer Halbachse einigermaßen verengern.

Zunächst würde für den Bahnteil zwischen dem störenden Planeten und der Erde die Hyperbel nicht in Betracht kommen können. Denn, weil diese nicht in sich geschlossen ist und nicht mehrere Umläufe ermöglicht, könnte ein Zusammenstoß mit der Erde nach erfolgter Störung nur auf dem direkten Weg aus der Nachbarschaft des betreffenden Planeten zur Erde stattgefunden haben. Nach dem damaligen Stande der großen Planeten ist, man mag was immer für eine Hyperbel annehmen, diese Voraussetzung wohl fallen zu lassen. Es ist also sicher, daß die Bahn der Meteoriten von Stannern, wenn sie auf einen der großen Planeten zurückführen sollte, keine Hyperbel gewesen sein konnte oder wenn sie wirklich eine Hyperbel war — was der Analogie nach als sehr annehmbar gelten könnte — kann keiner dieser Planeten gleichsam als ihr Erzeuger gelten. Für uns kommt hier der erstere Schluß in Betracht, wenn auch der umgekehrte nicht ohne Interesse bleibt.

Es könnte hienach nur mit einer Ellipse gerechnet werden. Sobald man den störenden Planeten — in der Entfernung r von der Sonne — angenommen hat, muß berücksichtigt werden, daß jedenfalls $a \gtreqless \frac{r}{2}$ und, wenn das Perihel der gestörten Bahn in die Entfernung 1 fällt, $a \gtreqless \frac{r+1}{2}$ bleiben muß.

Bezeichnen wir mit a_3, p_3, i_3 die bekannten, auf die Bahn von Stannern bezüglichen Elemente, so muß, wenn ein direkter Zusammenhang mit den Bahnen von Jonzac und Juvenas möglich sein sollte:

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + \frac{2}{r^{3/2}} \left[\sqrt{p_2} \cos i_2 - \sqrt{p_3} \cos i_3\right]$$

$$= \frac{1}{a_1} + \frac{2}{r^{3/2}} \left[\sqrt{p_1} \cos i_1 - \sqrt{p_3} \cos i_3\right].$$

Erfüllen die mit 1 und 2 indizierten Elemente bereits die betreffende Bedingung untereinander wie die vorhin für die beiden letzteren Bahnen angenommenen, so genügt die Diskussion einer der beiden Gleichungen.

Von dem dritten Elementensystem weiß man nur so viel gewiß, daß $\cos i_3$ sehr nahe an -1 sein muß wegen der ausgeprägt rückläufigen Bahn. Dadurch erhält man in der Klammer einen Gesamtbetrag, welcher selbstverständlich zum mindesten nicht kleiner als das erste Glied für sich sein kann, auch wenn man für das nicht genau bekannte $\sqrt{p_3}$ die unterste mögliche Grenze, nämlich Null, zuläßt. Es muß also jedenfalls

$$\frac{1}{a_3} \gtreqless \frac{1}{a_2} + \frac{2}{r^{3/2}} \sqrt{p_2} \cos i_2$$

sein, wenn die Bedingung des Zusammenhanges erfüllt sein soll. Nimmt man nun wieder Jupiter für den störenden Planeten, setzt also $r = 5\cdot2$ und für a_2, p_2, i_2 die oben angenommenen Elemente für den Fall von Jonzac, so wird rechts das erste Glied $0\cdot307$, das zweite $0\cdot206$. Also müßte

$$a_3 \lesseqgtr \frac{1}{0\cdot513} \lesseqgtr 1\cdot95$$

sein, was unmöglich ist, weil, nach dem Früheren, zum mindesten $a_3 \geqq 2\cdot6$. Und weil das Perihel der Bahn von Stannern auch in die Nähe der Erdbahn traf, so könnte, den Zusammenhang mit Jupiter vorausgesetzt, a_3 selbst nicht viel weniger als $3\cdot1$ betragen haben.

Diese Widersprüche stellen sich selbstverständlich noch entschiedener heraus, wenn man für p_3 statt des eigentlich ja doch unmöglichen unteren Grenzwertes Null einen der Sachlage mehr entsprechenden wählt, wodurch dann auch noch das zweite Glied in der Klammer hinzukommt.

Man kann nämlich die Grenzen, innerhalb welcher a_3 etwa zu nehmen wäre, immerhin noch etwas enger ziehen, wenn man berücksichtigt, daß, falls die Bahn aus Jupiterstörungen hervorgegangen, der jenseitige Knoten sehr nahe an die Bahn dieses Planeten fallen müßte. Eine ausreichende Näherung dafür wäre, daß die wahren Anomalien für die beiden Werte $r = 1$ und $r = 5 \cdot 2$ um 180° verschieden ausfallen müßten, wobei im übrigen nach Möglichkeit den Ergebnissen der Beobachtungen zu entsprechen wäre.

Diesen Bedingungen könnte eine parabelähnliche Ellipse nicht entsprechen. Hält man den durch die Beobachtungen ungefähr wahrscheinlich gemachten Wert für die Periheldistanz q fest, so gelangt man zum Ergebnis, daß die Halbachse der noch annehmbaren Ellipse die Größe $a_3 = 6 \cdot 6$ kaum überschritten haben konnte. Die andern Elemente, welche aus dieser Grenzannahme hervorgehen würden, wären $p_3 = 1 \cdot 677$, $e_3 = 0 \cdot 864$, $q_3 = 0 \cdot 9$, die Entfernung des Perihels vom Begegnungsknoten 38°, der Winkel der Bahntangente an diesem Knoten mit dem Radiusvektor $\tau_3 = 113°8$, $i_3 = 177°5$.

Damit würde das Glied $-\frac{2}{r^{3/2}}\sqrt{p_3}\cos i_3$, welches auf der rechten Seite der Bedingungsgleichung noch hinzuzufügen wäre: $+0 \cdot 218$ und demzufolge würde diese den Wert $a_3 = 1 \cdot 36$ fordern, was der Annahme nach auch wieder unmöglich wäre.

Würde man aber in der Bedingungsgleichung $a_3 = 6 \cdot 6$ oder einen ähnlichen Wert beibehalten und umgekehrt die zugehörige Neigung i_3 suchen, welche der Bedingung entspricht, so würde sich für $\cos i_3$ kein möglicher Wert ergeben. Die rückläufige Bahn wäre also in diesem Zusammenhange unmöglich.

Man kann nun auch den Winkel ω_0 angeben, welchen die Tangente an der ungestörten Bahn von G am Störungsorte mit der Bahntangente von S ebendort einschließen mußte, wenn als Erfolg eine rückläufige Bahn solcher Art aus der Störung hervorgehen sollte.

Für $r = 5 \cdot 2$ erhält man nämlich $\tau = 31°$ und weil $\cos i_3$ fast genau $= -1$ ist, $\omega_3 = 121°$. Die Gleichung

$$\frac{r}{a_0} + 2\sqrt{2 - \frac{r}{a_0}} \cos \omega_0 = \frac{r}{a_3} + 2\sqrt{2 - \frac{r}{a_3}} \cos \omega_3$$

liefert dann, wenn die primäre Bahn (so wie für die beiden andern Fälle) zunächst als Parabel gedacht wird, wegen $a_0 = \infty$, $\omega_0 = 97°$. Es müßte demnach schon die ursprüngliche Bahn rückläufig gewesen sein, während die Bahnen von Juvenas und Jonzac nur aus einer rechtläufigen Bahn von kleinem Abweichungswinkel (ω) hervorgegangen sein können. Selbst wenn man für a_3 den unteren Grenzwert setzt, erhält man immer noch $\omega_0 = 79°5$, also eine die Planetenbahn fast rechtwinklig kreuzende ursprüngliche Bewegung, gänzlich unvereinbar mit der Grundbedingung der rechtläufigen Bahnen von geringer Neigung.

Nimmt man für die ursprüngliche Bahn statt der Parabel eine Ellipse, also etwa wie früher hinsichtlich der beiden andern Bahnen $a_0 = 25$, so wird in der früheren Gleichung $\frac{r}{a_0}$ nicht mehr Null, sondern der Wert von 0·208 kommt noch auf die rechte Seite mit negativem Zeichen und ω_0 wird noch mehr gegen 180° hin wachsen, die ursprüngliche Bahn also noch rückläufiger gedacht werden müssen, während die Bahnen von Jonzac und Juvenas aus der primären Annahme $\omega_0 = 18°7$ abgeleitet wurden.

Es erübrigt noch die Annahme, daß die ungestörte Bahn eine Hyperbel, also a_0 negativ war. Da in diesem Falle $\frac{r}{a_0}$ positiv auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens kommt, erhält man in der Tat für einen negativen und selbst nahe an -1 liegenden Wert von $\cos \omega_3$ ein positives ω_0, d. h. aus einer rechtläufigen hyperbolischen Bahn kann durch Störung eine rückläufige Ellipse werden, ja man kann leicht bestimmen, für welche hyperbolische Halbachse die abgeleitete rückläufige Ellipse, z. B. $a_3 = 3 \cdot 2$, $\omega_3 = 177°5$ entsteht. Wird dazu $\omega_0 = 18°7$ (wie früher) genommen, so müßte $a_0 = -1 \cdot 2$ sein statt wie früher $= 25$.

Diese Möglichkeit der Ableitung einer stark rückläufigen elliptischen Bahn aus einer eben so entschieden rechtläufigen

Hyperbel, an und für sich sehr beachtenswert, ist jedoch für unseren Fall ohne Bedeutung, denn aus einer solchen hyperbolischen primären Bahn würden sich dann wieder die rechtläufigen Bahnen von Juvenas und Jonzac unmöglich ableiten lassen, wovon man sich durch die Verwendung der eben angeführten Gleichung leicht überzeugen kann, ohne daß dies hier weiter verfolgt wird.

Beschränkt man sich auf Ellipsen, wie sie hier, wenn man die Störung durch Jupiter annimmt, hauptsächlich in Frage kommen, nämlich auf solche, bei welchen a nicht viel von 3·1 verschieden ist, so gilt allgemein folgendes:

Alle ungestörten ursprünglichen Bahnen, bei welchen der Winkel der Bewegungsrichtung mit der Jupiterbahn zwischen 0 und 78°2 liegt, müssen, wenn aus der Störung rückläufige Bahnen hervorgehen sollen, Hyperbeln sein, und zwar für die kleineren Werte von ω_0 (z. B. für ω_0 zwischen 10° und 40°, Hyperbeln mit Halbachsen zwischen —2 und —1). Aus solchen können rechtläufige Ellipsen mit kleinen Werten von ω aber nicht entstehen.

Geht man hinsichtlich der ursprünglichen Bahnen vom parabolischen Grenzwert auf die andere Seite zu den elliptischen Bahnen von großer Halbachse, so findet man, daß rechtläufige derartige Ellipsen in rückläufige von dem Typus jener mit kurzer Periode nur umgeformt werden, wenn ω_0 zwischen 78 und 90°, dabei a_0 zwischen ∞ und 12 liegt. Für kleinere Werte von a_0 müßte die ursprüngliche Bahn ebenfalls rückläufig, d. h. $\omega_0 > 90°$ sein.

Stellt sich nun die Ableitung derart rückläufiger Bahnen durch einmalige Störung schon nach den Beziehungen der Lage als unmöglich heraus, so muß dies auch bezüglich der etwaigen Annahme gelten, daß diese Transformation durch wiederholte kleinere Störungen bei mehrmaliger Annäherung an denselben Planeten allmählich entstanden sein könnte.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß unter den verschiedenartigen Bahnen, zu welchen der Eintritt eines ausgedehnten Meteorschwarmes in die Wirkungssphäre eines großen Planeten Veranlassung gibt, sich auch solche befinden werden, deren Periode in einem so einfach kommensurablen Verhältnis zur

Umlaufszeit des Planeten steht, daß wiederholte Annäherungen und also auch erneuerte Umgestaltungen der Bahnen nicht selten vorkommen können. In diesem Falle wird aber, wenn man nicht noch andere Einflüsse zu berücksichtigen hätte, jedesmal die aus der nächstvorhergegangenen Störung entstandene Bahn für die unmittelbar darauffolgende als die ursprüngliche zu gelten haben. Es werden daher die zusammengehörigen Größen:

$$a_0\omega_0 \ldots a_1\omega_1 \ldots a_2\omega_2 \text{ etc.}$$

oder in der Tisserand'schen Gleichung die a, p und i durch eine untrennbare Kette von Gleichungen zusammenhängen müssen, welche die beiden äußersten Endglieder in derselben Weise unmittelbar verbinden wie in dem Falle, wenn der Effekt nur durch eine einmalige Störung entstanden wäre.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kommt dann immer noch die Existenz und Masse des störenden Körpers und die Größe der Annäherung in Frage. In dieser Hinsicht könnte allerdings die einmalige Störung durch eine Reihe mehrmaliger ersetzt werden. Zeigen sich aber von vornherein zwischen den Endgliedern Widersprüche, so kann auch, wie man aus dem Vorstehenden sieht, daran durch die Voraussetzung einer allmählichen Umgestaltung nichts geändert werden.

Es mag nochmals daran erinnert werden, daß für die Ableitung der Bahnen von Jonzac und Juvenas durch eine Jupiterstörung deren ursprüngliche Bewegung direkt und unter einem kleinen Winkel gegen die Bahn dieses Planeten gerichtet, dagegen jene von Stannern diese fast unter einem rechten Winkel kreuzend anzunehmen wären, so zwar, daß diese Bahnen schon vor dem Eintritt in die Wirkungssphäre des störenden Körpers sehr stark voneinander abweichend gewesen sein müßten.

Wollte man trotzdem allen drei Bahnen ursprüngliche Identität im Planetensystem und nicht in den äußersten Regionen zuerkennen, so bliebe freilich noch die Möglichkeit offen, anzunehmen, daß einer der entfernteren Planeten, bis zu Neptun, schon vorher die Meteoriten von Stannern aus ihrer ursprünglich mit den übrigen gemeinsamen Bahn abgelenkt

und in eine neue, die Bahn Jupiters fast unter einem rechten Winkel kreuzende gebracht habe.

Die Wahrscheinlichkeit für die Realität einer derartigen Annahme ist jedoch äußerst gering, da, wie aus den früheren Betrachtungen hervorgeht, jedesmal sehr bedeutende Annäherungen an den störenden Körper erforderlich sind (Gleichung 14).

Prof. H. A. Newton hat (a. a. O., p. 485) a priori versucht, die Wahrscheinlichkeit für derartige Störungen durch Jupiter allein abzuschätzen. Er hat dabei u. a. beispielsweise gefunden, daß unter 1000 Millionen Kometen, welche in parabolischen Bahnen während eines bestimmten Zeitabschnittes innerhalb den Kugelraum kommen, welcher durch die mittlere Entfernung Jupiters von der Sonne bestimmt ist, nur 839 sein können, die so nahe an Jupiter und unter solchen Bedingungen passierten, daß ihre Umlaufszeit kleiner als die dieses Planeten geworden wäre.

Noch bei weitem kleiner wäre die analoge Wahrscheinlichkeit einer solchen Annäherung an Saturn.

Das Zusammentreffen zweier solcher Ereignisse jedoch hätte kaum mehr die Wahrscheinlichkeit der zweiten Potenz des obigen Verhältnisses. Und dazu kommt nun erst noch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßes mit einem dritten Körper, nämlich mit der Erde! Daß unter der relativ doch nicht sehr bedeutenden Anzahl von Meteoritenfällen, deren Bahnelemente sich wenigstens ungefähr angeben lassen, bereits ein solcher vorkommen sollte, den man erst unter mehr als Trillionen anderer etwa zu erwarten hätte, ist doch schwer anzunehmen. —

Bisher wurde für die Rechnung zunächst Jupiter als störender Körper angesehen. Es würde kaum lohnend sein, diese Erörterungen hier in ähnlichem Umfang auf die uns bekannten nächstentfernteren Planeten auszudehnen. Eine kurze Erörterung der Störungsbeziehungen in Regionen, welche sich weit über die unseren Beobachtungen zugänglichen Planetenbahnen im Sonnensystem hinaus erstrecken, dürfte jedoch vielleicht nicht ganz ohne Bedeutung für die Beurteilung der vorliegenden Frage sein.

Je weiter man den störenden Körper im Planetensystem von der Sonne entfernt annimmt, desto näher aneinander befinden sich jene ursprünglichen Bewegungsrichtungen, aus deren Transformation durch die Störung ebensowohl rückläufige Bahnen im strengsten Sinn als rechtläufige für das Zusammentreffen mit der Erde entstehen können.

Setzt man die ursprünglichen Bahnen parabolisch voraus ($a_0 = \infty$), dagegen die aus der Störung hervorgegangenen derart, daß ihre Halbachsen $a_1 = \frac{r+1}{2}$ sind, wo wieder r die Entfernung des störenden Körpers von der Sonne bezeichnet, so kann Gleichung (7) in folgender Form aufgelöst werden:

$$\cos\omega_0 = \frac{r}{(r+1)\sqrt{2}} + \frac{\cos\omega_1}{\sqrt{r+1}}.$$

ω_0 und ω_1 sind die Winkel, welche die Tangenten an die ursprüngliche und an die gestörte Bahn am Störungsorte mit der Bahntangente des störenden Körpers einschließen.

Ist nun r so groß, daß dagegen 1 — die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne — kaum mehr in Betracht kommt, so gilt auch genähert

$$\cos\omega_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\omega_1}{\sqrt{r}}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß das zweite Glied auf der rechten Seite mit zunehmender Entfernung des störenden Körpers von der Sonne, gegenüber dem ersten, beständig bleibenden, allmählich sehr gering werden und daß endlich ein Wert von r eintreten kann, für welchen, wie auch $\cos\omega_1$ zwischen 0 und ± 1 liegen mag, dessen Einfluß auf $\cos\omega_0$ und ω_0 ganz unbedeutend wird. In diesem Falle wird für alle diese Bahnen ω_0 immer in der Nähe von 45° liegen. Für $r = \infty$ würde daraus folgen, daß aus ursprünglich um einen halben Quadranten gegen die Bahn des störenden Körpers rechtläufig gerichteten parabolischen Bahnen nach der Störung alle möglichen recht- und rückläufigen Bahnen von dieser Achsenlänge hervorgehen können. Dies ist nun allerdings nur ein Grenz-

wert, der aber doch über die Bedeutung der demselben nahe kommenden Beziehungen Aufschluß gibt.

Ist r nicht unendlich, aber doch so groß, daß die jedesmalige Periheldistanz dagegen entfallen kann, so wird für $\omega_0 = 45°$ $\cos \omega_1 = 0$, also $\omega_1 = 90°$, entsprechend jenen aus der Störung hervorgegangenen Bahnen, welche die Grenze zwischen den recht- und rückläufigen darstellen. Je nachdem nun $\omega_1 = 0$ für die äußersten rechtläufigen oder $\omega_1 = 180$ für die äußersten rückläufigen Bahnen ausfallen soll, ist ω_0 enthalten zwischen den Grenzen

$$\omega_0 = \arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

worin offenbar das Zeichen + für die äußersten rechtläufigen, — für die äußersten rückläufigen Bahnen gilt. Für die Entfernung Neptuns, also für rund $r = 30$, würden diese Grenzen immer noch ziemlich weit auseinanderliegen. Nämlich, aus den Werten von $\omega_0 = 27°$ bis 45° würden die rechtläufigen, aus $\omega_0 = 45°$ bis 58° die rückläufigen Bahnen entstehen. Für $r = 10.000$ wären alle diese Bahnen bereits zwischen $\omega_0 =$ 44° 11′ und 45° 48′ eingeschlossen. Wenn man jedoch den Abstand von der Sonne etwa ein Viertel Millionen Erdweiten nehmen könnte, so wären die äußersten Grenzen nur mehr um 20′ auseinanderliegend. Nur mehr um diesen kleinen Winkel wären die ursprünglichen Bewegungsrichtungen voneinander abweichend, welche nach der Störung vollkommen entgegengesetzte Bewegungsrichtungen im Vergleiche zum störenden Körper erlangen würden, nämlich $\omega_1 = 0$ einerseits und $\omega_1 = 180$ anderseits.

Wenn man sich die Frage vorlegt, ob man einen Körper von der hiezu erforderlichen Potenz in diesen entlegensten Räumen des Sonnensystems wohl annehmen dürfte, so wäre zu überlegen, daß es sich dabei im wesentlichen darum handelt, welche Größe die hyperbolische Halbachse A der relativen Bahn des gestörten Körpers um den störenden erreichen kann.

Nun ist, wie schon gezeigt wurde, soweit es auf den störenden Körper ankommt, A nur von dem Produkt mr abhängig. Sobald letzteres denselben Wert erreicht wie bei

Jupiter, vermag der Körper auch dieselben relativen Bahnen zu erzeugen und die Möglichkeit solcher Störungen ist dann gegeben.

Wenn r aber, wie im letzten Beispiel, etwa 50.000mal so groß ist als die mittlere Entfernung Jupiters von der Sonne, so braucht m nicht mehr als $^1/_{50.000}$ der Jupitermasse zu betragen, damit das Produkt dasselbe bleibt. Es würden daher äußerst geringe Massen, etwa von der Art wie die des zweiten Jupitersatelliten, hinreichen, um solche Störungen hervorzurufen. Auch brauchen sie nicht notwendig durch einen soliden Körper repräsentiert zu sein. Denkt man sich eine so kleine Masse durch einzelne Partikel etwa auf das Volumen Jupiters verteilt, so hätte man das Beispiel eines vergleichsweise kleinen Meteorschwarmes, welcher diese Rolle übernehmen könnte.

Selbst eine bedeutende Zahl derartiger Gebilde würde in solcher Entfernung von der Sonne nicht den geringsten, für unsere Beobachtungsmittel merkbaren Einfluß auf die uns bekannten Planeten auszuüben vermögen.

Man müßte — im Sinne der früheren Betrachtungen — dann noch annehmen, daß die Bahnen der Meteoriten, welche unter diesem störenden Einflusse standen und einem bereits aufgelösten Strom angehört haben konnten, vom völligen Parallelismus soviel abweichend waren, daß durch die Störung derart entgegengesetzte Bewegungsrichtungen hervorgerufen werden konnten, wie dies vorhin gezeigt wurde.

Es ist möglich, diese Voraussetzungen mit den herrschenden Anschauungen über die Natur der Kometen zu verbinden, ohne Rücksicht auf die Frage, ob diese vom Anfange Glieder des Sonnensystems bildeten oder ob sie einer aus den benachbarten Gebieten des Weltraumes unter besonderen Bedingungen in dasselbe eingetretenen und vielleicht noch immer eintretenden kosmischen Materie ihre Entstehung verdanken.

Aus beiden Gesichtspunkten ist die Annahme nicht unbegründet, daß die äußersten, weiten Regionen des Sonnensystems von kometenartigen Anhäufungen bevölkert sind, abgesehen von den zahllosen Gliedern bereits gänzlich aufgelöster Ströme. Für die erstere Hypothese ist dies selbstverständlich;

aber auch wenn angenommen wird, daß die ursprüngliche Normalbahn der Kometen — wenn dieser Ausdruck gestattet ist — die parabelartige Hyperbel sein mag, so bedarf es ja nur geringer Verminderungen der Energie durch die störenden Planeten, um eine bedeutende Zahl jener Massen in elliptischen Bahnen mit sehr großen Apheldistanzen festzuhalten.

Es ist indessen zu betonen, daß in Hinsicht solcher Beziehungen nur von der Möglichkeit gesprochen werden kann. Zur Abschätzung des Grades der Wahrscheinlichkeit fehlen die nötigen Grundlagen.

IV.

Bekanntlich besitzen die Meteoriten den Charakter von Bruchstücken größerer Massen. Daraus und im Hinblick auf hervorstechende Eigentümlichkeiten der Zusammensetzung und Struktur wurden Schlüsse auf ihre Entstehung durch Zerfall, explosive Zertrümmerung oder durch vulkanische Eruptionen gezogen.

Eine nähere Erörterung der Hypothesen, welche die einschlägige Literatur seit mehr als einem Jahrhundert[1] in verschiedenen Modifikationen darbietet, ist bei diesem Anlasse nicht beabsichtigt. Sie kommen hier nur im Zusammenhange mit der besonderen Aufgabe dieser Betrachtungen in Frage.

Insofern derartige Katastrophen außerhalb des Sonnensystems zur Bildung von Anhäufungen kleiner Massen, Schwärmen und Strömen Veranlassung geben könnten, fallen sie unter das im zweiten Abschnitt über das Vorkommen stellarer Meteorströme Gesagte.

Es wäre jedoch auch noch der mehrfach vertretenen Anschauung Rechnung zu tragen, daß derartige Ereignisse möglicherweise wohl auch Körper unseres Sonnensystems getroffen haben, wodurch Fragmente mit neuen interplanetarischen Bahnen entstanden sein könnten. Es ist hier die

[1] Man kann als Epoche ungefähr das Jahr 1794 bezeichnen, in welchem »das Herabfallen meteorischer Massen und der kosmische Ursprung derselben« von Chladni zuerst unter den Physikern nach der Richtung zur Sprache gebracht wurde, welche die wissenschaftliche Forschung später weiter verfolgt hat.

Rede von Bruchstücken, welche so klein sind, daß sie uns erst durch das Eintreten in die Atmosphäre und durch die damit verbundenen Folgen bemerkbar werden.

Soweit es sich dabei um die Auflösung und den Zerfall eines größeren Körpers unter dem Einfluß einer Art Verwitterung handelt,[1] ist es selbstverständlich, daß die entstandenen Meteorhaufen und Ströme dieselbe — jedenfalls nicht die entgegengesetzte — heliozentrische Bewegungsrichtung wie der ursprüngliche Körper verfolgen müßten. Für die weitere Umwandlung solcher Bahnen durch Störungen würde das im vorigen Abschnitte Gesagte gelten.

Den Schwierigkeiten, welchen wir dort hinsichtlich der Beziehungen zwischen rückläufigen und rechtläufigen Bahnen begegnet sind, könnte unter gewissen Voraussetzungen allerdings die vulkanische Eruptionshypothese entgehen.[2]

Da der Schluß aus den Erfahrungen des irdischen Vulkanismus auf die Intensität desselben in einem andern Himmelskörper unsicher ist, so kann die Annahme, daß der vulkanische Impuls unter günstigen Umständen Bruchstücke selbst bis über die Anziehungssphäre des Mutterkörpers entfernen könnte, nicht ohneweiters als unzulässig gelten.

Für die in einem solchen Fall entstandene Bahnform würde die Auswurfrichtung und die nach Überwindung der Schwere noch verbliebene Geschwindigkeit maßgebend sein. Es wird genügen, zur Erläuterung nur die äußersten Fälle in Betracht zu ziehen und die Vereinfachung durch Anwendung der Aktivitätssphäre, wie bei den Störungen, gelten zu lassen.

Ein um die Sonne in nahezu konstanter Entfernung r sich bewegender Körper hat die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Ein

[1] Diese Art der Entstehung ist von Prof. Schiaparelli in seinem »Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen«, p. 212 etc. der deutschen Ausgabe von Boguslawski so vielseitig begründet worden, daß man kaum das Bedürfnis nach andern Erklärungen empfindet. Sie kann ja auch einen Körper getroffen haben, welcher vorher eine lang anhaltende vulkanische Tätigkeit entwickelt hatte, deren Produkte zurückgeblieben waren.

[2] Tschermak (diese Sitzungsberichte, 1875, II, 71 und 1877, I, 75) hat sie so sorgfältig als möglich begründet.

anderer, dessen Aphel ebenfalls im Abstande r liegen möge, während das Perihel sich in der Erdbahn befände, müßte die Halbachse $a = \frac{r+1}{2}$, daher im Aphel die Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{\frac{2}{r(r+1)}}$ besitzen oder nahezu $\frac{\sqrt{2}}{r}$, wenn r sehr groß ist.

Würde von dem ersteren Körper in der Bahntangente am Aphel und entgegen seiner eigenen Bewegungsrichtung (also im negativen Sinn) ein Fragment ausgeworfen, dem an der Grenze der Anziehungssphäre noch der Rest an relativer Geschwindigkeit in der Größe: $-(v_1+v_2)$ verbliebe, so würde nach Abzug von v_1 noch die heliozentrische Geschwindigkeit $-v_2$, d. h. im retrograden Sinn und damit eine rückläufige Bahn mit der Halbachse a und der Periheldistanz 1 resultieren. Wenn aber, im selben Auswurfssinne wie früher, der Rest nur $-(v_1-v_2)$ wäre, so würde, indem wieder die translatorische Geschwindigkeit des Planeten v_1 in Abschlag käme, noch die heliozentrische Geschwindigkeit $+v_2$, also im direkten Sinn und eine rechtläufige Bahn derselben Art sich ergeben.

Wegen der Substitution $\frac{1}{\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{2}}{r}$ werden für große r beide Werte sehr nahe an der Umlaufsgeschwindigkeit des betreffenden Planeten liegen und wenn selbst die eigene Schwerewirkung des — als klein anzunehmenden — vulkanischen Körpers gar nicht in Rechnung käme, müßte also der schließliche Effekt des eruptiven Impulses im Mittel von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{r}}$ sein, also beispielsweise in der Entfernung $r = 100$, welches mehr als das Dreifache der mittleren Entfernung Neptuns ist, noch immer $^1/_{10}$ oder rund 3 *km*. Nach dem früher Gesagten würden die im retrograden Sinne mit einem Reste von relativer Geschwindigkeit von 3·42 *km* an der Grenze der Anziehungssphäre anlangenden Körper eine rückläufige, die in derselben Richtung mit nur 2·58 *km* anlangenden die entgegengesetzte rechtläufige Bahn beschreiben, und zwar beide Ellipsen von der Halbachse 50·5 (gegen 360 Jahre Umlaufszeit) mit der Periheldistanz 1. Würde aber

für die Entfernung $r = 900$ genommen, so wären diese Geschwindigkeiten nur mehr 1·04 *km* und 0·96 *km*. Die nach andern Richtungen ausgeworfenen Partikel würden — frei geworden — verschiedene andere Ellipsen und namentlich auch Hyperbeln (mit großer Halbachse) beschreiben. Hier ist nur von den Extremen der recht- und rückläufigen Bahnen für die Begegnung mit der Erde die Rede.

Man sieht, wie die nötige Energie des Auswurfes immer geringer wird, je weiter man den vulkanisch tätigen Körper hinausversetzt annimmt. Eine derartige Hypothese müßte, wenn sie im Sinn unserer Frage benützt werden könnte, das Sonnensystem noch weit außerhalb der Neptunbahn mit solchen Vulkanplaneten bevölkern, welche nicht zu bedeutend an Masse sein dürften, um die eigene Gravitation zu überwinden, und nicht zu klein, um noch bedeutende vulkanische Impulse zu erzeugen.

Übrigens könnte dies auch als vorübergegangene Phase einer vielleicht längst entschwundenen Epoche angesehen werden, aus welcher noch die geschlossenen Bahnen der Fragmente zurückgeblieben wären.

Nur sehr gering ist die Anzahl der mit Meteoritenfällen verbundenen Erscheinungen, bei welchen es bisher gelungen ist, aus den Beobachtungen einen hinreichend verläßlichen Schluß, wenigstens auf die untere Grenze der heliozentrischen Bahngeschwindigkeit, zu ziehen. Da sich diese nun in allen bekanntgewordenen Fällen so groß erwiesen hat, wie sie nur ausgeprägten Hyperbeln entspricht, so würde man, bei aller Vorsicht, welche in der Verallgemeinerung einzelner Erfahrungen nicht genug empfohlen werden kann, mit mehr Wahrscheinlichkeit solche eruptive Körper außer den Grenzen unseres Sonnensystems anzunehmen haben, wenn man sich der vulkanischen Hypothese in dieser Form überhaupt bedienen wollte.

Schließlich seien die Ergebnisse dieser Untersuchung übersichtlich zusammengefaßt:

1. Die von den Meteoriten der drei Fälle bei Stannern, Jonzac und Juvenas im Sonnensystem unmittelbar vor

dem Zusammentreffen mit der Erde verfolgten Bahnen können unter keinerlei Voraussetzung auch nur als nahezu identisch bezeichnet werden. Sie sind voneinander wesentlich verschieden.

2. Der Versuch, diese voneinander sehr abweichenden heliozentrischen Bahnen aus einer im Weltraum außerhalb des Sonnensystems für alle drei bezüglich der Richtung und Geschwindigkeit nahezu identischen Bewegung abzuleiten, begegnet geometrisch und dynamisch keinen Schwierigkeiten. Er liefert ein durchaus positives und mögliches, für die beiden letzteren Fälle auch wahrscheinliches Ergebnis. Hinsichtlich des Falles von Stannern würde sich jedoch für die primäre Bahn vor dem Eintritt in das Sonnensystem der laterale Abstand von den beiden andern sehr groß ergeben. Es müßte also für die Quelle dieser Meteoriten ein aufgelöster stellarer Strom von sehr bedeutendem Querschnitt angenommen werden.

3. Bei der Prüfung der Hypothese, daß die drei verschiedenen Bahnen innerhalb des Sonnensystems durch Störungen seitens eines der großen Planeten, insbesondere Jupiters, aus ursprünglich einheitlichen oder nahezu identischen Bahnen entstanden sein könnten, ist die Frage zu trennen:

a) Die Bahnen von Jonzac und Juvenas können, ohne sehr unwahrscheinliche Annahmen, durch solche Störungen erzeugt worden sein.

b) Aus denselben oder ähnlichen ursprünglichen Bahnen in gleicher Weise jene der Meteoriten von Stannern abzuleiten, ist ohne Voraussetzungen, denen nur geringe Wahrscheinlichkeit zukommen würde, kaum möglich.

4. Würde man dagegen den Ort solcher Störungen im Sonnensystem sehr weit über die Regionen der uns bekannten Planeten hinaus annehmen, so wäre allerdings auch die Ableitung der rückläufigen Bahn von Stannern, wie der beiden rechtläufigen, aus wenig voneinander abweichenden primären Bewegungen möglich. Hiezu würde die Annahme störender Körper in diesen Regionen nötig sein, doch wären sehr geringe Massen ausreichend. Als solche könnten auch

noch unaufgelöste meteorische oder kometenartige Aggregate angesehen werden.

5. Wollte man diese Meteoriten als vulkanische Auswürflinge eines interplanetarischen Körpers betrachten, so könnte letzterer auch nur in großer Ferne weit über die unserer Beobachtung zugänglichen Planetenregion hinaus angenommen werden.

Aus diesem Gesamtergebnis fließt ohneweiters auch die Beantwortung der aufgeworfenen Frage: Ohne Zweifel bleibt die Möglichkeit offen, daß die drei Meteoriten aus derselben Gegend des Weltraumes herrühren und man kann durchaus nicht mit Sicherheit behaupten, daß sie ganz verschiedener Abkunft wären.

Welche von den möglichen Annahmen gegenüber den andern einen wesentlich höheren Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hätte, ließe sich nicht sowohl aus den diese Fälle begleitenden, viel zu unvollkommen bekanntgewordenen Umständen, als aus andern Erfahrungen und Analogien beurteilen, deren Anwendbarkeit jedoch nicht immer ohne Einschränkung zugegeben werden kann. Auch aus diesem Gesichtspunkt ist jedoch die Zusammengehörigkeit der Meteoriten von Jonzac und Juvenas viel wahrscheinlicher als ihre genetische Beziehung zum Falle von Stannern. Sicher müßte die gemeinsame Quelle, nach planetarischem Maß angegeben, in ganz besonders großer Entfernung von der Sonne anzunehmen sein.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. X. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Zur Konturbestimmung der Flächen zweiten Grades (Pohlke's Satz)

von

Theodor Schmid in Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Oktober 1904.)

Herr Karl Pelz teilte im 66., 73., 75., 76. und 77. Bande dieser Sitzungsberichte seine ausgedehnten Untersuchungen über Konturbestimmung der Flächen zweiten Grades mit. Das Wesentliche derselben läßt sich in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

»Die Projektionen der Schnittlinien einer Fläche zweiten Grades mit den Ebenen, welche durch eine Gerade der Umrißebene gehen, haben in zwei Punkten S und T dieselben Tangenten s und t, also die Gerade $ST = p$ als gemeinsame Polare des Punktes $st = P$; die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf der Geraden $OP = d$; die Achsen derselben umhüllen eine Parabel l, welche d als Direktrix besitzt und die Normalen der Punkte S und T, sowie die Normalstrahlen der gemeinsamen Involution P berührt; die Brennpunkte der Kegelschnitte bilden die Fußpunktkurve der Parabel l für den Punkt P, also eine schiefe Strophoide.«

»Die Projektionen der Schnittlinien einer Fläche zweiten Grades mit den Ebenen, welche durch eine Gerade der Verschwindungsebene gehen, sind ähnliche Kegelschnitte; ihre Mittelpunkte liegen auf der Projektion der konjugierten Geraden; ihre Achsen sind parallel und ihre Brennpunkte liegen auf

zwei Kegelschnitten, welche mit dem Umrißkegelschnitte konfokal sind und die Mittelpunktsgerade als gemeinsame Sekante besitzen.«

Der erste Satz ergibt sich aus der Verwandtschaft zweiten Grades, welche zwischen den normalen konjugierten Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt besteht. Der zweite Satz umfaßt die beiden besonderen Sätze, welche Herr Pelz auf p. 178 und p. 196 des 75. Bandes aufstellt, und läßt sich kurz in folgender Weise begründen.

Eine Gerade g der Verschwindungsebene[1] schneidet die Fläche in zwei Punkten S, T. Die zugehörigen Tangenten s, t einer Schnittlinie der Fläche mit einer durch g gehenden Ebene treffen sich in einem Punkte der Schnittgeraden der beiden Tangentialebenen σ und τ — der konjugierten Geraden $g^{\times}$. Das Bild dieses Punktes ist der Mittelpunkt und die Bilder von s, t sind die Asymptoten der Projektion der Schnittlinie. Die Tangenten s bilden das Strahlenbüschel S auf σ; das Bild dieses Strahlenbüschels ist ein Parallelstrahlenbüschel, weil die Projektion von S unendlich fern ist. Ebenso sind die anderen Asymptoten und auch die Achsen parallel.

Die absoluten Kreispunkte J'_{∞}, K'_{∞} der Projektionsebene sind die Bilder zweier Punkte J, K der Geraden g und die Tangenten aus J, K an je eine Schnittlinie ergeben vier Schnittpunkte, deren Projektionen die Brennpunkte der Projektion der Schnittlinie sind. Die zwei Kegel, welche man der Fläche aus J und K umschreiben kann, schneiden sich aber in zwei Kegelschnitten, deren Ebenen durch $g^{\times}$ gehen und deren Projektionen die Konturen der beiden Kegel berühren müssen. Diese Konturen sind aber die Tangenten aus J'_{∞} und K'_{∞} an die Kontur der Fläche; daher sind die Projektionen der beiden Kegelschnitte mit dem Umrißkegelschnitte konfokal.

Herr Heinrich Drasch benützte im 87. Bande dieser Sitzungsberichte die Polarität zur Konturbestimmung, was auch im nachfolgenden geschehen soll.

1. Die Polarität einer Fläche zweiten Grades ist durch ein Poltetraeder $ORST$ und durch einen Punkt P mit seiner Polar-

[1] Ebene durch den Sehpunkt, parallel zur Bildebene.

ebene π bestimmt; dabei ist die Fläche geradlinig, nichtgeradlinig oder imaginär, je nachdem der Raumteil (Oktant), in welchem P liegt, von π in einem Vierseit, Dreiseit oder gar nicht geschnitten wird.[1]

Projiziert man den Punkt P aus den Eckpunkten des Tetraeders auf die gegenüberliegenden Flächen, so ergeben sich die Punkte P^0, P', P'', P''', während die Ebene π auf diesen vier Flächen die Spuren p_0, p_1, p_2, p_3 ergibt. Die Geraden RP' und p_1 sind dann konjugierte Geraden der Polarität. Das Dreieck OST ist ein Poldreieck, P' und p_1 sind Pol und Polare in Bezug auf die Linie zweiten Grades, welche Spur und Umriß der Fläche für ρ als Projektionsebene und R als Sehpunkt ist.

Je drei von diesen vier Bildfeldern sind projektiv trilinear verwandt; je drei von den Spurfeldern sind sektiv trilinear verwandt. Die Kante OR wird von der Ebene π in einem Punkte X und von der Verbindungsebene des Poles P mit der gegenüberliegenden Kante ST in einem Punkte $X^\times$ geschnitten. Diese Punkte X, $X^\times$ bilden ebenso wie O, R ein Punktepaar der Involution konjugierter Punkte auf der Kante OR, wodurch diese Involution bestimmt ist. Analog ergeben sich auf den anderen Kanten OS, OT, ST, RT, RS die Punktepaare $YY^\times$, $ZZ^\times$, $UU^\times$, $VV^\times$, $WW^\times$. Die drei Verbindungsgeraden $U^\times X^\times$, $V^\times Y^\times$, $W^\times Z^\times$ gehen durch den Punkt P, nämlich $U^\times X^\times$ als Schnittgerade der Ebenen $STX^\times$ und $ORU^\times$. Durch Vervollständigung der Involutionen auf den Kanten kann dann zu jedem weiteren Punkte die Polarebene und zu jeder Ebene der Pol konstruiert werden.

2. Denkt man sich nun (Fig. 1) das Ganze aus einem beliebigen Punkte auf eine Bildebene δ projiziert, so kann man ein Viereck $ORST$ als Projektion eines Poltetraeders beliebig annehmen, ferner P' und P'' als Nebenbilder eines Punktes P so wählen, daß SP' und RP'' sich in einem Punkte $Z^\times$ von OT schneiden, endlich p_1 und p_2 als Bilder der Spuren einer Ebene π, so daß sie sich in einem Punkte Z von OT schneiden.

[1] C. Koehler, Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, 6. Band, 1904.

Der Schnittpunkt von RP' und SP'' ist dann das Bild des Punktes P, welcher der Pol der Ebene π sein soll. Damit können auch die anderen Punktepaare $XX^{\times}$, $YY^{\times}$, $UU^{\times}$, $VV^{\times}$, $WW^{\times}$ schon im Bilde angegeben und die Involutionen auf den Bildern der sechs Kanten des Tetraeders vervollständigt werden. Nimmt man jetzt eine beliebige Ebene ε im Bilde durch ihre Spuren e_1, e_2 an, so kann das Bild des Poles E mit Hilfe der Involutionen gefunden werden, indem man aus den neuen Punktepaaren entweder E' und E'' sucht oder zwei analoge Verbindungsgeraden wie $U^{\times}X^{\times}$, $V^{\times}Y^{\times}$. Im ersteren Falle genügt es, die drei Involutionen auf OR, OS, OT zu vervollständigen; im letzteren Falle muß man die vier Involutionen auf OR, ST, OS, RT ergänzen. Es kann nun der Schnitt einer Geraden oder Ebene mit der Fläche, beziehungsweise die Berührung aus einer Geraden oder einem Punkte an die Fläche im Bilde konstruiert werden, ohne daß der Sehpunkt A gegeben ist, insbesondere kann man den Berührungskegelschnitt für den Sehpunkt A selbst, also den Umriß finden. Die Ebenen ν, welche durch den Sehpunkt A gehen, haben Spuren n_0, n_1, n_2, n_3, deren Projektionen in e i n e Gerade n der Bildebene δ zusammenfallen. Konstruiert man im Bilde den einer solchen projizierenden Ebene ν entsprechenden Pol N, so ist dieser Punkt auch der Pol von n in Bezug auf den Umrißkegelschnitt der Fläche; denn AN ist die Polgerade von ν in Bezug auf den Berührungskegel aus A.

W e n n d i e P r o j e k t i o n *ORST* e i n e s P o l t e t r a e d e r s, f e r n e r P' u n d P'' a l s N e b e n b i l d e r e i n e s P u n k t e s P s o w i e p_1 u n d p_2 a l s B i l d e r d e r S p u r e n s e i n e r P o l a r e b e n e π g e g e b e n s i n d, s o i s t d i e P o l a r i t ä t d e s U m r i ß k e g e l s c h n i t t e s d e r F l ä c h e z w e i t e n G r a d e s b e s t i m m t, o h n e d a ß d e r S e h p u n k t A g e g e b e n w ä r e.

3. Die Seiten des Viereckes $ORST$ sind Spuren von projizierenden Ebenen. Jede solche Ebene geht durch eine Kante des Poltetraeders, ihr Pol liegt auf der gegenüberliegenden Kante, somit liegen die Pole J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 der Seiten des Viereckes auf den gegenüberliegenden Seiten OR, OS, OT, ST, TR, RS in Bezug auf den Umrißkegelschnitt. Die projizierende Ebene durch ST schneidet die Kante OR in einem Punkte $J_1^{\times}$;

der Pol J_1 dieser Ebene ist der konjugierte Punkt zu $J_1^\times$ in der Involution auf der Kante OR. Die projizierende Ebene durch OR schneidet die Kante ST in einem Punkte $J_4^\times$, welchem der Pol J_4 der Ebene konjugiert ist auf der Kante ST. Im Bilde (Fig. 2) fallen die Punkte $J_1^\times$ und $J_4^\times$ in einen Diagonalpunkt des Viereckes $ORST$ zusammen; ihre Verbindungsgerade ist daher unbestimmt, ebenso $J_2^\times J_5^\times$ und $J_3^\times J_6^\times$. Diese drei Geraden sollen durch das Bild des Punktes A gehen, welches eben unbestimmt ist. Die Pole $J_1, \ldots, J_6$ der Seiten des Viereckes $ORST$ sind die Eckpunkte eines Vierseits $orst$. Die Seiten des letzteren sind die Polaren der Punkte O, R, S, T in Bezug auf den Umrißkegelschnitt. Sie sind die Spuren der Polarebene des Sehpunktes A auf den Tetraederflächen, denn es ist $O = A^0$, $R = A'$, $S = A''$, $T = A'''$, also die Verbindungsgeraden dieser paarweise vereinigten Punkte wieder unbestimmt.

Die Projektion $ORST$ des Poltetraeders ist ein Polviereck des Umrißkegelschnittes und das zugehörige Polvierseit $orst$ ist das Spurenvierseit der Ebene des wahren Umrisses; beide zusammen bilden eine Konfiguration 10_3.

Der Punkt J_1 und der Schnittpunkt von t mit TS, ferner J_2 und der Schnittpunkt von t mit TR sind zwei Paare der gemeinsamen Involution konjugierter Punkte auf t in Bezug auf den Umrißkegelschnitt und den Schnitt der Ebene ORS; die Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der Tangenten aus T an den Umrißkegelschnitt. In gleicher Weise ergeben sich die Tangenten aus O, R, S mit ihren Berührungspunkten.

4. Die Spuren der Verschwindungsebene μ erscheinen im Bilde (Fig. 2) vereinigt als unendlich ferne Gerade der Bildebene δ. Die Punkte X, Y, Z, U, V, W sind jetzt die unendlich fernen Punkte der Seiten des Polviereckes $ORST$; die Punkte $X^\times, Y^\times, Z^\times, U^\times, V^\times, W^\times$ sind also die Zentralpunkte $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ der sechs Involutionen auf den Seiten des Polviereckes. Das Bild des Poles der Verschwindungsebene ist der Schnittpunkt M der drei Geraden H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 und ist der Mittelpunkt des Umrißkegelschnittes. Die Nebenbilder M^0, M', M'', M''' des Punktes M sind die Mittelpunkte

der Bilder der Kegelschnitte, welche auf den Tetraederflächen liegen. Der Punkt M ergibt sich entweder als Schnittpunkt von H_1H_4 und H_2H_5 oder etwa von RM' und SM''.

Aus der Lage des Punktes M zu einem Poldreiecke, z. B. $J_1J_4J_4^{\times}$ ist sofort die Art des Umrißkegelschnittes zu erkennen. In der Figur liegt M in einem Scheitelteile des Poldreieckes, daher ist der Umriß eine Ellipse. Legt man eine Gerade durch M, so ist ihr Pol ein unendlich ferner Punkt, welcher die Richtung des konjugierten Durchmessers angibt. Nimmt man insbesondere die Gerade $m = MO$, so gibt die Polare o von O die Richtung des konjugierten Durchmessers $m^{\times}$ an. Ebenso sind die konjugierten Durchmesser zu MR, MS, MT parallel zu r, s, t. Aus O und o ergeben sich die Endpunkte F des Durchmessers m. Die Gerade k, welche durch J_5 parallel zu m geht, ist die Polare des Schnittpunktes K von OS und $m^{\times}$, woraus sich die Endpunkte G des konjugierten Durchmessers $m^{\times}$ ergeben.

Umgekehrt kann man den Umrißkegelschnitt und das Dreieck RST beliebig wählen; dann ist O als Eckpunkt des Polviereckes sowie die ganze Abbildung der Fläche zweiten Grades bestimmt.

Wenn O das Bild des Mittelpunktes der Fläche ist, so sind R, S, T die Fluchtpunkte von drei konjugierten Durchmessern, deren Endpunkte die Doppelpunkte C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2 der betreffenden Involutionen sind. Dann ist OM der zur Bildebene konjugierte Durchmesser der Fläche, M^0 ist der Fluchtpunkt dieses Durchmessers, o ist die Fluchtgerade der Ebene des wahren Umrisses.

5. Sind die Parallelprojektionen OC, OD, OE von drei konjugierten Halbmessern (welche auf den Geraden x, y, z liegen) einer Fläche zweiten Grades gegeben,[1] so kann der Umrißkegelschnitt nach dem obigen konstruiert werden (Fig. 3). Eine Gerade p, welche durch C parallel zu z geht, als Spur einer projizierenden Ebene betrachtet, schneidet y in einem Punkte J. Diesem Punkte entspricht ein Punkt $J^{\times}$ in

[1] Dabei können C, D, E auch imaginäre Endpunkte sein, wodurch sich die Konstruktion nur wenig ändert.

der Involution konjugierter Punkte mit D_1, D_2 als Doppelpunkte. Die Parallele zu x durch $J^{\times}$ und die Parallele zu y durch C schneiden sich in dem Pole P von p in Bezug auf den Umrißkegelschnitt. Die Gerade $OP = z^{\times}$ ist daher die konjugierte Richtung zu z. Die Gerade q, welche durch E parallel zu OP geht, wieder als Spur einer projizierenden Ebene betrachtet, schneidet y in einem Punkte K. Die Parallele zu z durch den konjugierten Punkt $K^{\times}$ und die Parallele zu y durch E schneiden sich im Kreuzriß Q''' des Poles Q von q in Bezug auf den Umrißkegelschnitt. Dieser Pol Q muß dann auf der Geraden z liegen und auf der Parallelen zu x durch den Punkt Q'''.

Aus p und P ergeben sich die Endpunkte F des Durchmessers $z^{\times}$, ebenso aus q und Q die Endpunkte G des konjugierten Durchmessers z für den Umrißkegelschnitt. Da die Strecke QE gleich der Strecke $K^{\times}T$ ist, welche auf der Parallelen zu z durch $K^{\times}$ zwischen x und y liegt, so kann man G auch so finden: Man macht $K^{\times}T = EQ = OR$, ferner $RE = RS = QS$, dann ist $OS = OG$. Den Punkt F kann man analog finden oder man macht $OL =$ und $\perp OD$, ferner $JL = OH$, dann ist die Parallele durch H zu z die Tangente für F.

6. Die im vorigen Abschnitte behandelte Aufgabe der Konturbestimmung wurde auch in einer Reihe von Arbeiten über Pohlke's Lehrsatz in verschiedener Weise gelöst, worüber noch einige Bemerkungen angefügt werden mögen, denn die dort vorkommenden Betrachtungen des Umrisses einer Kugel gelten unmittelbar für das Ellipsoid und lassen sich zumeist auf die anderen Flächen zweiten Grades übertragen.

Die Geraden r, s, t sind jetzt die zu den Richtungen von x, y, z konjugierten Durchmesser der drei Kegelschnitte ODE, beziehungsweise OCE, beziehungsweise OCD. Diese Durchmesser auf r, s, t und die zugehörigen Tangentenpaare, welche zu x, y, z parallel sind, gelten nach Abschnitt 3 auch für den Umrißkegelschnitt;[1] r, x und s, y sind zwei Paare von kon-

---

[1] v. Deschwanden (Vierteljahrsschrift, Zürich, 6. Jahrg., 1861) fand bereits ein die drei in der Zeichnung gegebenen Ellipsen einschließendes Sechseck. Er erkennt darin jedoch nicht die drei oben erwähnten Tangentenpaare der Umrißellipse und sagt: »So leicht es aber ist, diese Ellipse angenähert

jugierten Durchmessern des Umrißkegelschnittes, woraus sich die Asymptoten und Achsenrichtungen desselben ergeben.[1]

Für den Fall des Ellipsoides kann man auch den Kegelschnitt verwenden, dessen Ebene π durch die Endpunkte C, D, E der drei konjugierten Durchmesser geht. Die Tangentialebenen für die Punkte C, D, E sind zu den Diametralebenen yz, zx, xy parallel, bilden daher mit diesen ein Parallelepiped und schneiden sich in einem Punkte P, welcher der Pol der Ebene π ist. Die Diagonale OP des Parallelepipeds geht durch den Schwerpunkt S des Dreieckes CDE und wird durch diesen gedrittelt. Da der Durchmesser OP zur Ebene π konjugiert ist, so ist der Schnittpunkt S der Mittelpunkt der Schnittellipse von π. Sucht man also in einer Parallelprojektion den Schwerpunkt S des Dreieckes CDE, macht $OP = 3 \times OS$ und bestimmt die Tangenten aus P mit den Berührungspunkten für die Ellipse, welche durch CDE geht und S als Mittelpunkt hat, so gilt dieses Tangentenpaar samt Berührungspunkten auch für die Umrißellipse.[2]

Wenn die Parallelprojektion eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiten Grades ein Kreis ist, so sind die Bilder der Endpunkte des konjugierten Durchmessers Brennpunkte des Umrißkegelschnittes, wobei der Kreis und die Endpunkte (Brennpunkte) auch imaginär sein können. Die Parallelprojektion der Fläche kann aber immer durch Affinität auf diesen Fall zurückgeführt werden. Wenn man nämlich dem Dreiecke OCD jenes Diametralschnittes, welcher eine reelle oder imaginäre Ellipse enthält, ein gleichschenkeliges, bei O' rechtwinkeliges Dreieck zuordnet, wobei CD als Affinitätsachse benützt werden kann, so geht der Diametral-

---

zu bestimmen, so wenig ist es mir gegenwärtig möglich, eine allgemein anwendbare Konstruktion zur genauen Bestimmung derselben anzugeben.« Bei Peschka (diese Sitzungsber., 78. Bd., 1879), Mandl (diese Sitzungsber., 94. Bd, 1886), Pelz (Ber. der Böhm. Ges. der Wiss. 1895) sind die Tangentenpaare als Umrisse umschriebener Zylinder angegeben und zur Konstruktion der Umrißellipse benützt. — Darstellende Geometrie, Wiener, II., p. 131, Rohn-Papperitz, II., p. 208

[1] Drasch, Zeitschrift für Realschulwesen, 8. Jahrg., 1883.

[2] Ruth, diese Sitzungsber., Bd. 100, 1891.

schnitt in einen reellen oder imaginären Kreis und der Endpunkt E in einen reellen oder imaginären Brennpunkt des transformierten Umrißkegelschnittes über. Aus den Achsen des letzteren ergeben sich dann konjugierte Durchmesser des eigentlichen Umrisses.[1]

Auch analytische Untersuchungen über diesen Gegenstand liegen vor, welche zu brauchbaren Konstruktionen führen.[2]

---

[1] Schur, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, 117. Bd., 1897; Schilling, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 48. Bd., 1902.

[2] Beck, Journal f. d. r. u. ang. Mathem., Bd. 106, 1890, und Zeitschrift f. Mathem. und Physik, 44. Bd., 1899. — Sobotka, Sitzungsber. d. böhm. Ges. d. W., 1900. — Eine einfache metrische Beziehung findet auch bei Peschka, Pelz, Wiener und Rohn-Papperitz zur Vereinfachung der Konstruktion Anwendung.

Fig. 1.

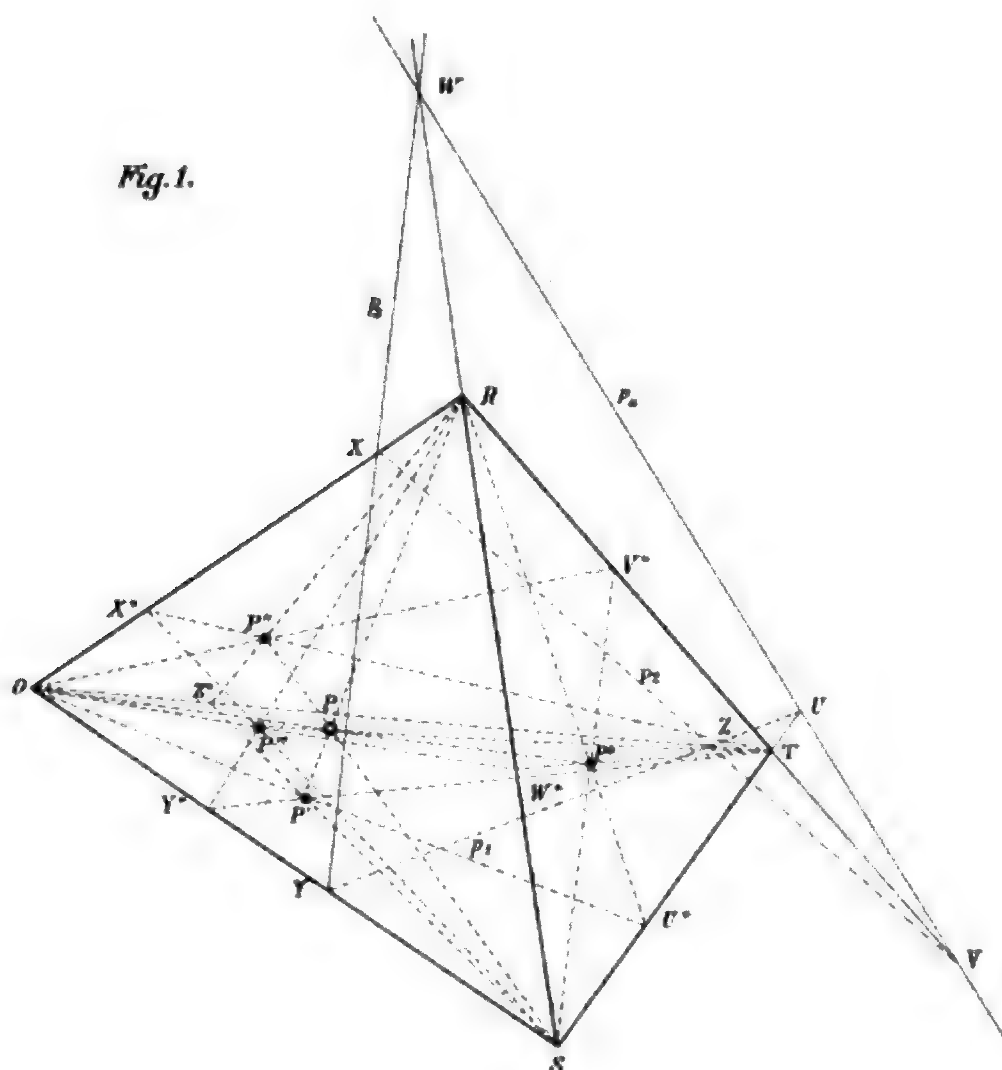
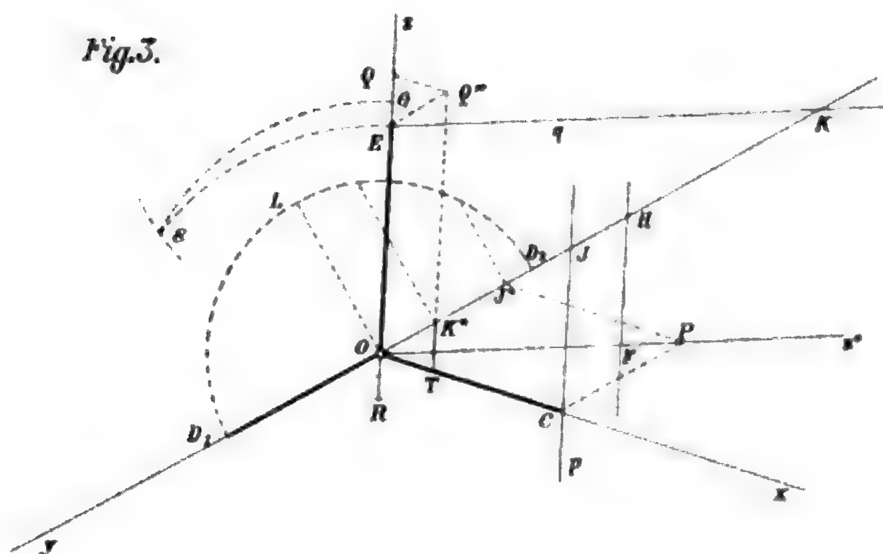


Fig. 3.



Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XVII.

Luftelektrische Messungen in Seewalchen im Sommer 1904

von

Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Dezember 1904.)

In diesen Sitzungsberichten wurden von mir zweimal die Resultate luftelektrischer Messungen (hauptsächlich der Zerstreuung) mitgeteilt, die in den Sommer- und Herbstmonaten der Jahre 1902 und 1903 in Mattsee bei Salzburg vorgenommen worden waren[1] In diesem Sommer habe ich ebenfalls am Nordrande der Alpen Zerstreuungsmessungen ausgeführt, deren Resultate mit den früheren im großen und ganzen übereinstimmen, in einzelnen Details aber Abweichungen zeigen; ferner kommt noch eine Anzahl von Bestimmungen des Ionengehaltes der Atmosphäre mittels des Ebert'schen Ionenaspirationsapparates hinzu.

Über den Beobachtungsort ist vorauszuschicken: Seewalchen in Oberösterreich liegt am Nordende des Attersees, der sich in ungefähr nordsüdlicher Richtung erstreckt, etwa 18 *km* lang, 1·5 bis 2 *km* breit ist und 465 *m* über dem Meere liegt; das Südende des Sees umgeben felsige Berge, die

[1] Schweidler, diese Sitzungsberichte, Bd. 111, p. 1463 und Bd. 112, p. 1501.

bis zu zirka 1900 *m* Höhe ansteigen, das Nordende Hügelland. Im speziellen ist Beobachtungsort der ungedeckte Balkon an der dem See zugewandten SE-Front eines Hauses; der Standpunkt des Apparates ist beiläufig 3·5 *m* über dem Erdboden, 8 *m* über dem Seespiegel und etwa 30 *m* in horizontaler Richtung vom Ufer entfernt.

I. Zerstreuungsmessungen.

Die Beobachtungsmethode ist die gleiche wie die in den oben zitierten Arbeiten verwendete; auch der Apparat und somit seine Konstanten sind dieselben geblieben. An dieser Stelle möchte ich bemerken, daß die vielfach herrschende Ängstlichkeit gegenüber der Infektionsgefahr durch radioaktive Substanzen nach meinen persönlichen Erfahrungen übertrieben ist, so daß manche praktisch vorteilhafte Anwendung solcher Stoffe (z. B. als Kollektoren für Potentialmessungen) unnötigerweise aufgegeben wurde. Das Elektroskop meines Zerstreuungsapparates diente mir durch mehrere Monate im verflossenen Sommersemester zur Untersuchung radioaktiver Substanzen (Uranverbindungen, Radiobleipräparate, Pechblende, auch einige schwächere Radiumverbindungen), ohne daß dadurch die Isolation des Elektroskopes merklich verändert wurde; so z. B. beträgt der Ladungsverlust im geschlossenen Elektroskop — ohne vorherige Anwendung der Natriumtrocknung — 2·0 Volt pro Stunde, also ein gegenüber der zu messenden Zerstreuung vernachlässigbarer Wert. Auch theoretisch ist von vornherein zu erwarten, daß Stoffe wie Polonium oder Radiotellur, die keine Emanation und induzierte Aktivität liefern, vollkommen unschädlich sind, die von Radium herrührende Aktivierung wenigstens nach einigen Stunden als unmerklich angesehen werden kann; die einzige wirkliche Gefahr, das Hineinfallen radioaktiver Körnchen in das Elektroskop oder das Klebenbleiben solcher an seiner Außenwand, kann wohl durch einen nur mäßigen Aufwand von Vorsicht und Sorgfalt vermieden werden.

Da ich den Zerstreuungsapparat in Seewalchen nicht wie in Mattsee unter einem Dache, dem Erdfeld entzogen, sondern auf dem freien Balkon aufgestellt hatte, wäre die Anwendung des Schutzzylinders korrekter gewesen. Trotzdem behielt ich die Methode der Messung mit freistehendem Zerstreuungskörper bei, einerseits um mit den früheren Messungen vergleichbare Werte zu erhalten, anderseits um diese Methode unter diesen minder günstigen Bedingungen auszuprobieren; natürlich ist damit eine gewisse Unsicherheit der Einzelwerte in den Kauf genommen.

Eine Übersicht über die an 68 Beobachtungstagen mit durchschnittlich sechs (im Juli sieben) Ablesungen pro Tag erhaltenen Resultate im einzelnen sowie eine kurze meteorologische Charakteristik findet sich im Anhange; daraus sind die in folgender Tabelle gegebenen Mittelwerte berechnet. Analog wie in den oben zitierten Abhandlungen bezeichnen Z_-, Z_+ und Z die negative, respektive positive und mittlere Zerstreuung in Volt pro 5 Minuten, reduziert auf ein mittleres Potential des Zerstreuungskörpers von 200 Volt. q ist der Mittelwert der einzelnen Quotienten, also $\frac{1}{n}\sum\frac{Z_-}{Z_+}$, wo n die Anzahl der Einzelmessungen ist. Die Tabelle enthält diese Mittelwerte in der Stellung:

(n)	
Z_-	Z_+
q	
Z	

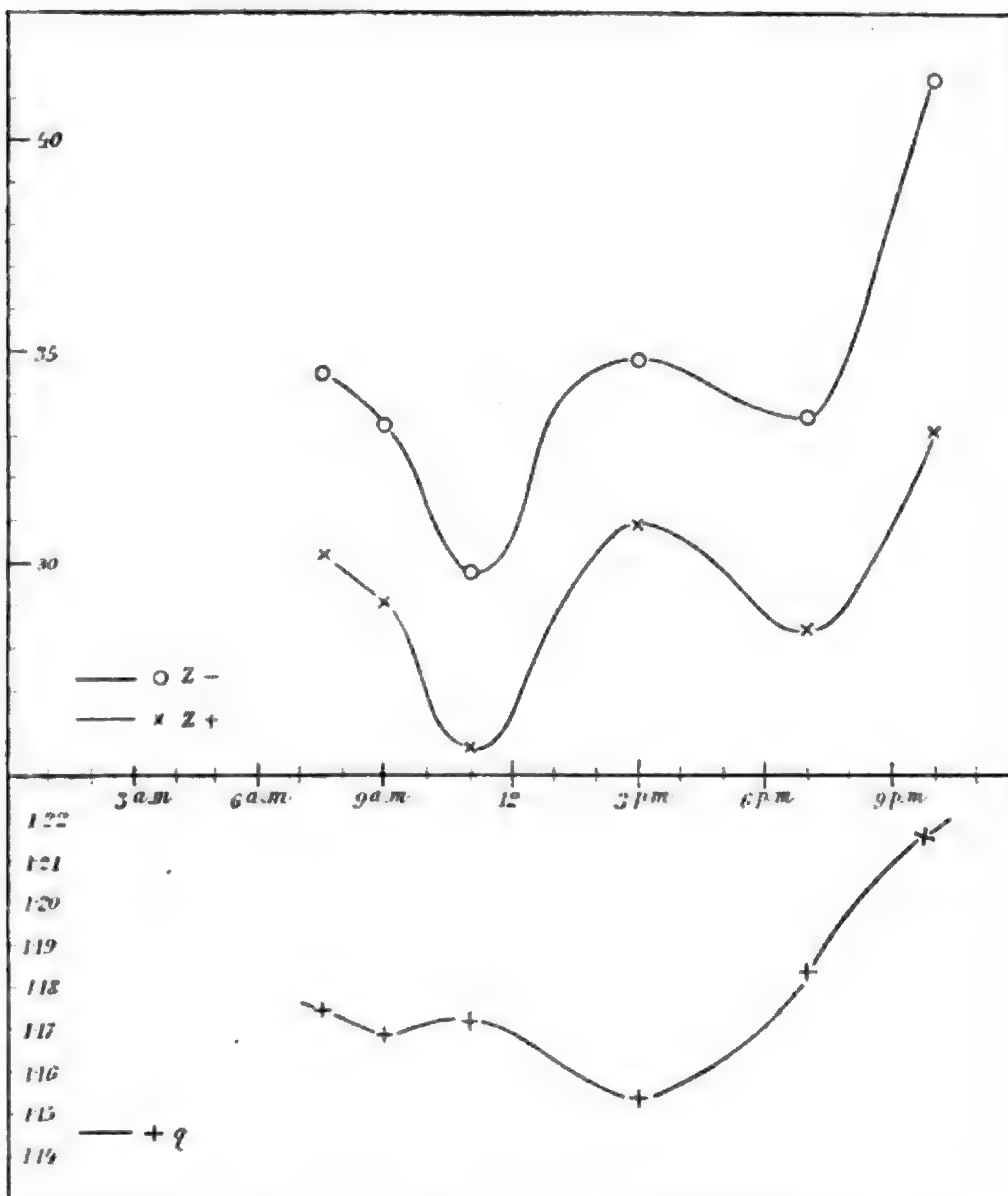
	$7^1/_2{}^h$ a. m.	9^h a. m.	11^h a. m.	1^h p. m.	3^h p. m.	7^h bis 8^h p. m.	10^h p. m.
Juli ($n = 23$)	(15) 35·63 31·87 1·166 33·75	(21) 32·40 27·12 1·229 29·76	(21) 28·38 24·64 1·162 26·51	(21) 31·02 25·69 1·193 28·35	(23) 32·89 29·76 1·159 31·32	(18) 33·78 28·33 1·179 31·05	(16) 42·97 35·16 1·231 39·06
August ($n = 26$)	(19) 35·47 31·13 1·167 33·30	(13) 32·00 30·42 1·068 31·21	(16) 29·22 25·78 1·149 27·50	—	(19) 36·05 32·36 1·138 34·20	(17) 35·47 30·97 1·163 33·22	(12) 42·04 35·80 1·189 38·92
September ($n = 19$)	(10) 31·10 26·80 1·205 28·95	(14) 35·82 30·96 1·169 33·39	(13) 32·88 26·96 1·222 29·92	—	(18) 36·30 31·28 1·166 33·79	(11) 30·36 24·68 1·228 27·52	(4) 33·1 27·5 1·26 30·3
Gesamt- mittel ($n = 68$)	(44) 34·53 30·40 1·175 32·47	(48) 33·28 29·13 1·168 31·20	(50) 29·82 25·61 1·173 27·71	—	(60) 34·91 31·04 1·154 32·97	(46) 33·58 28·41 1·185 31·00	(32) 41·39 33·32 1·219 37·35

Hieraus ergibt sich das Hauptmittel:

$$Z = 32 \cdot 11, \quad q = 1 \cdot 179 \quad (n = 560)$$

und daraus[1] die Zerstreuung an einem freistehenden Körper in Prozenten pro Minute zu: $A = 5 \cdot 36 \frac{\%}{\text{min}}$.

Der tägliche Gang im Gesamtmittel ist in nachstehender Textfigur graphisch dargestellt:



[1] Vergl. Schweidler, diese Sitzungsberichte, Bd. 112, p. 1503.

Die erhaltenen Resultate und ihr Verhältnis zu den in Mattsee gefundenen können kurz zusammengefaßt werden:

Der absolute Betrag der Zerstreuung ist von der gleichen Größenordnung wie in Mattsee und liegt zwischen den beiden für 1902 und 1903 gefundenen Werten. Der Mittelwert von q dagegen ist nicht wie in Mattsee nahe gleich 1, sondern zirka 1·18; dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß der Standort des Apparates nicht der Wirkung des Erdfeldes entzogen ist und daß daher dort eine Ansammlung überschüssiger positiver Ionen vorhanden ist (vergl. später die Resultate der Ionengehaltsmessungen).

Bezüglich des täglichen Ganges ergibt sich im großen und ganzen für Z eine Übereinstimmung mit den Mattseer Beobachtungen: ein Maximum liegt in den ersten Nachmittagsstunden, ein Minimum um Sonnenuntergang, hierauf folgt abermaliges Ansteigen zu Werten, die das Nachmittagsmaximum noch übertreffen. Vormittags ist wie in Mattsee auch hier ein Minimum vorhanden, es ist sogar tiefer wie das Abendminimum; das vorausgehende Maximum aber hat nur im September die gleiche Lage wie im Mittel in Mattsee, nämlich um 9^h a.m.; im Juli und August scheint es verfrüht einzutreten, da bereits von $7^1/_2{}^h$ a. m. angefangen die Zerstreuung absinkt. Das bei den früheren Messungen erhaltene Morgenminimum wurde in Seewalchen nicht konstatiert, da zu diesem Termin keine Beobachtungen angestellt wurden; wahrscheinlich ist es aber auch hier vorhanden.

Der tägliche Gang von q zeigt einen beträchtlich abweichenden Verlauf; vom Morgen bis Mittag ziemlich konstant, erreicht q nachmittags ein Minimum (in Mattsee 1903 ein Maximum), um Sonnenuntergang einen mittleren Wert (Mattsee 1903 ein Minimum) und in den ersten Nachtstunden seinen größten Wert; da der absolute Wert von q offenbar durch das Erdfeld beeinflußt ist, dürfte auch der tägliche Gang durch den des Potentialgefälles gestört sein.

Von einer Gruppierung der Mittelwerte nach verschiedenen meteorologischen Begleiterscheinungen habe ich diesmal abgesehen; sollte sich die Nützlichkeit einer solchen herausstellen, so könnte sie immer noch nachträglich aus den Tabellen des Anhanges gebildet werden.

II. Messungen des Ionengehaltes.

Zur Verwendung gelangte eine von Günther und Tegetmeyer hergestellte modifizierte Type des Ebert'schen Ionenaspirationsapparates, die sich von der älteren Type hauptsächlich durch Verkürzung des Zylinderkondensators unterscheidet; ich habe stets mit dem kurzen Rohre (ohne Anwendung der beigegebenen Verlängerungstücke) gemessen, da ein allerdings nur einmal ausgeführter Vergleich keine Differenz ergab und auch theoretische Erwägungen die Länge als hinreichend erscheinen lassen. Für Kapazität des Systems und Fördermenge des Aspirators verwendete ich den beigegebenen Eichungstabellen entnommene Zahlenwerte. Eine einzelne Messung beanspruchte eine etwas variable Zeit von etwa 14 Minuten, entsprechend acht Touren des Federgehäuses, d. i. laut Eichung für eine hindurchgesaugte Luftmenge von 1·55 m^3.

Die Einzelwerte sind im zweiten Teile des Anhanges mitgeteilt. Als Mittelwerte ergaben sich für ρ_+ und ρ_-, d. i. den Gehalt an freier Elektrizität in elektrostatischen Einheiten pro Kubikmeter:

$\rho_+ = 0·447$ (Beobachtungszahl $n = 30$)
bei Extremwerten 0·669 und 0·306

$\rho_- = 0·381$ (Beobachtungszahl $n = 26$)
bei Extremwerten 0·674 und 0·168

Die beiden Maxima wurden am selben Tage (9. August, 3^h bis 4^h p. m.) gefunden, das Minimum $\rho_- = 0·168$ am 4. September, 3^h p. m., kurz vor einem Gewitter; der korrespondierende Wert ρ_+ konnte infolgedessen nicht mehr beobachtet werden.

Der absolute Betrag des mittleren Ionengehaltes ist von gleicher Größenordnung wie die von Ebert,[1] von Gerdien[2] und von Lüdeling[3] beobachteten Werte. Bildet man den

[1] Ebert, Physik. Zeitschr., 2, p. 662 (1901).

[2] Gerdien, Physik. Zeitschr., 4, p. 632 (1903); Götting. Nachr., 1904, p. 277.

[3] Lüdeling, Ill. Aeronaut. Mitteil., 7, p. 321 (1903).

Quotienten aus den Mittelwerten $\frac{p_+}{p_-}$, so erhält man die Zahl 1·173, was mit dem Mittelwerte $q = 1·179$ (vergl. die Zerstreuungsmessungen) nahe übereinstimmt; es folgt hieraus, daß der Wert von q tatsächlich durch den Ionengehalt (nicht durch die Verschiedenheit der spezifischen Geschwindigkeiten) bedingt ist.

In den letzten Wochen schloß ich an die Messungen des Ionengehaltes noch einige Bestimmungen der spezifischen Geschwindigkeiten an. Eine Mitteilung über die Resultate dieser — nur als Vorversuche zu betrachtenden — Messungen soll an anderer Stelle erfolgen. Ebenso soll das Verhältnis der gleichzeitig vorgenommenen Zerstreuungs- und Ionengehaltsmessungen separat einer Diskussion unterzogen werden.

Anhang.

I. Zerstreuungsmessungen.

Die folgenden Tabellen enthalten die Einzelwerte der Zerstreuungsbeobachtungen in derselben Form wie meine früheren gleichartigen Mitteilungen. Die meteorologische Charakteristik gibt in Bezug auf Bewölkung, Niederschlag, Windrichtung, Barometerstand und Luftdurchsichtigkeit den mittleren Zustand oder eventuell den Gang der betreffenden Elemente an. I bedeutet größte Reinheit der Luft, VI starke Trübung, d. i. merkliche Verschleierung zirka 1 *km* entfernter Objekte, aber ohne eigentlichen Nebel. Zum vorletzten Beobachtungstermin ist zu bemerken, daß er stets auf die Zeit bald ($^1/_2$ bis $^1/_4$ Stunde) nach Sonnenuntergang fällt, daher von etwa 8^h p. m. im Juli bis zirka $6^3/_4{}^h$ p. m. im September kontinuierlich zurückrückt. Die Anmerkung notiert besondere meteorologische Ereignisse wie Gewitter (Gew.), Wetterleuchten (Wetterl.), Sturm, Nebel u. dgl.

Datum	Meteorologie	$7^{1}/_{2}^{h}$ a. m.	9^{h} a. m.	11^{h} a. m.	1^{h} p. m.	3^{h} p. m.	$7-8^{h}$ p. m.	10^{h} p. m.	Anmerkung
Juli 7.	klar 0, E 727 IV—II	—	—	—	—	28·5 26·5 1·08	20·0 18·0 1·11	44·5 34·5 1·29	—
Juli 8.	klar E, 0, SW 726 II—III	48·0 28·5 1 68	29·5 26·5 1·11	37·0 30·5 1·22	35·0 31·5 1·11	41·5 39·5 1·05	22·0 14·0 1·57	41·0 30·5 1·35	—
Juli 9.	f. klar 0 727—725 II—VI	—	37·0 36·0 1·03	34·0 31·5 1·08	31·5 26·5 1·19	34·0 29·5 1·15	30·0 21·0 1·43	37·5 36·0 1·04	Nachmittags: Trübung von III—VI
Juli 10.	f. klar-$^{3}/_{4}$ bew. E 724 V—IV	—	16·0 17·0 0·94	17 0 17·0 1·00	—	20·0 17·5 1·14	28·5 36·0 0·79	43·0 34·0 1·27	—
Juli 11.	klar E 722 II	—	—	25·5 24·0 1·07	24·0 21·0 1·14	26·5 25·5 1·04	—	—	—
Juli 12.	klar E 723 I—III	30·0 29·5 1·02	35·0 30·5 1·14	28·0 25·5 1·10	29·0 29·0 1·00	30·5 27·5 1·11	25·0 21·0 1·19	33·5 34·5 0·97	9^{h} p. m.: Wetterl. Nachts: Sturm

Datum	Meteorologie	$7^1/_2{}^h$ a. m.	9^h a. m.	11^h a. m.	1^h p. m.	3^h p. m.	7—8^h p. m.	10^h p. m.	Anmerkung
Juli 13.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Juli 14.	f. klar-bew., R. E 726 III—IV	—	29·0 20·0 1·45	30·5 28·5 1·07	25·0 23·5 1·07	31·5 29·5 1·07	—	—	Nachmittags und Abends: Gew.
Juli 15.	klar-bew., R. 0 726 II, III, I	40·0 30·0 1·33	36·5 27·0 1·35	28·0 19·5 1·43	35·0 25·5 1·38	35·5 28·5 1·24	57·5 54·0 1·06	65·0 55·0 1·18	4–$6^1/_4{}^h$ p. m.: 3 Gew., SW-Sturm
Juli 16.	klar 0 728 I—II	43·5 40·5 1·07	45·0 41·0 1·10	30·5 33·5 0·91	33·5 29·5 1·13	38·0 31·5 1·21	29·5 21·0 1·40	52·0 47·0 1·11	—
Juli 17.	w. bew. 0 729—726 II—III	49·0 45·0 1·09	48·0 41·5 1·16	40·5 22·0 1·84	32·0 34·0 0·94	38·5 31·5 1·22	53·0 42·5 1·25	—	4^h, 7^h, 10^h p. m.: Gew.
Juli 18.	w. bew. E, S 725—722 III—VI	37·0 30·5 1·22	31·0 25·5 1·22	—	37·5 29·5 1·27	37·0 32·5 1·14	—	—	5^h, 11^h a. m., 4^h, 5^h, 7^h, 10^h: Gew.

Juli 19.	klar	S	18·0 15·0	14·5 14·0	15·0 17·0	18·0 18·0	19·0 18·0	28·5 29·5	35·5 26·5	—
	723—720	IV—I	1·20	1·03	0·88	1·00	1·05	0·97	1·34	
Juli 20.	klar	S	31·0 30·0	29·0 22·5	28·5 25·5	30·5 28·5	30·5 28·5	40·5 35·5	40·5 32·5	—
	721·5	I	1·03	1·29	1·12	1·07	1·07	1·14	1·25	
Juli 21.	w. bew., R.	S, E, SW	36·5 32·5	43·5 38·0	13·5 15·5	25·0 21·0	28·5 23·0	22·0 24·0	—	S stürmisch, 9h p. m.: Gew.
	722	II	1·12	1·14	0·87	1·19	1·23	0·92		
Juli 22.	1/4 bew.	S	—	19·0 16·0	15·0 12·5	15·0 15·0	21·0 18·0	30·5 30·5	33·0 25·5	—
	724·5	V		1·19	1·20	1·00	1·17	1·00	1·29	
Juli 23.	w. bew., R.	0	30·5 32·5	30·5 26·5	25·5 20·0	21·0 19·0	25·5 15·0	32·5 31·5	44·0 32·5	8h a. m.: Gew.
	725—723·5	V	0·94	1·15	1·27	1·10	1·70	1·03	1·36	
Juli 24.	klar—bew.	E, W	—	28·5 25·5	32·5 31·5	38·5 30·5	43·0 37·0	—	52·0 38·0	7h p. m.: Gew. und W-Sturm
	722	IV—II		1·12	1·03	1·26	1·16		1·37	
Juli 25.	klar—1/4 bew.	0	40·5 27·5	20·0 11·0	39·5 25·0	48·5 30·5	55·5 30·5	41·5 36·0	48·0 41·5	Abends: Wetterl.
	720—717	I	1·47	1·82	1·58	1·60	1·82	1·15	1·14	

Datum	Meteorologie	$7^{1}/_{2}{}^{h}$ a. m.	9^{h} a. m.	11^{h} a. m.	1^{h} p. m.	3^{h} p. m.	7—8^{h} p. m.	10^{h} p. m.	Anmerkung
Juli 26.	bew., R.–$^{1}/_{2}$ bew. SW 720 I	53·0 48·0 1·10	52·0 42·5 1·22	25·5 22·5 1·14	25·5 30·5 0·83	34·0 38·0 0·90	46·0 28·5 1·61	—	Nachmittags: Gew.
Juli 27.	w. bew., R. S 720·5 II	—	37·5 32·5 1·15	44·0 30·5 1·44	40·5 29·5 1·37	41·0 31·5 1·30	—	—	6^{h} u. 9^{h} p. m.: Gew.
Juli 28.	bew., R. S 722 —	28·0 53·0 0·53	46·0 37·0 1·24	41·0 43·5 0·94	60·0 30·5 1·96	44·0 78·0 0·56	44·0 14·0 [3·1]	45·0 36·5 1·23	R.-Böen, S-Sturm
Juli 29.	bew., R.–$^{3}/_{4}$ bew. S 723—725 VI	24·5 18·5 1·32	27·5 24·0 1·15	25·0 26·0 0·96	24·5 20·0 1·22	25·5 22·0 1·16	31·5 21·0 1·50	31·0 25·5 1·21	—
Juli 30.	klar 0, E 726 V—II	25·0 17·0 1·47	25·5 15·0 1·70	20·0 16·0 1·25	22·0 16·5 1·33	27·5 25·5 1·08	29·5 32·0 0·92	42·0 32·5 1·29	—
Juli 31.	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Aug. 1.	klar, 3/4 bew., R., klar S 726·5 II—IV	39·5 30·5 1·30	29·5 36·0 0·82	37·0 33·0 1·12	45·0 43·0 1·05	32·0 28·0 1·14	—	Mittags: Gew.
Aug. 2.	1/2 bew.-bew., R. SW 726 III—IV	34·0 36·0 0·94	—	—	—	—	—	12^h, 5^h, 8^h p.m.: Gew.
Aug. 3.	bew.—klar 0 728·5 IV—III	—	—	29·5 26·5 1·11	28·5 25·5 1·12	34·0 20·0 1·70	37·5 31·0 1·21	—
Aug. 4.	klar NE 729 II	33·0 30·0 1·10	25·5 22·5 1·14	23·5 26·5 0·89	30·5 26·5 1·16	36·0 34·0 1·06	42·5 40·5 1·05	—
Aug. 5.	klar 0 725 II	37·0 34·5 1·07	31·5 25·5 1·24	—	40·0 40·0 1·00	29·5 29·0 1·02	37·5 31·5 1·19	—
Aug. 6.	bew.—klar 0 727 III	—	—	—	—	15·0 19·0 0·79	46·0 39·5 1·16	—
Aug. 7.	klar–1/2 bew., R. S 727·5 – 725·5 IV	45·0 40·5 1·11	—	39·5 36·0 1·10	42·5 36·0 1·18	—	—	5^h, 8^h p.m.: Gew.

Datum	Meteorologie	$7^{1}/_{2}{}^{h}$ a. m.	9^{h} a. m.	11^{h} a. m.	1^{h} p. m.	3^{h} p. m.	$7-8^{h}$ p. m.	10^{h} p. m.	Anmerkung
Aug. 8.	$^{3}/_{4}$ bew., R. 0 727—725 IV	—	—	—		—	36·0 37·0 0·97	—	—
Aug. 9.	bew., R.–$^{3}/_{4}$ bew. S 724 —	—	—	—		49·5 53·0 0·93	36·0 30·5 1·18	—	—
Aug. 10.	w. bew., R. 0, S 721 V—IV	24·5 20·0 1·22	—	—		—	—	—	—
Aug. 11.	klar, $^{3}/_{4}$ bew., $^{1}/_{4}$ bew. E 720 III	29·5 27·5 1·08	27·5 26·5 1·04	31·5 28·5 1·10		51·5 43·5 1·19	49·0 41·0 1·20	—	10^{h} p. m.: Wetterl.
Aug. 12.	bew., R.–$^{1}/_{4}$ bew. S 724 —	—	—	—		26·5 25·5 1·04	30·5 25·5 1·56	—	—
Aug. 13.	klar–$^{1}/_{4}$ bew. 0 728 IV—III	—	20·0 19·0 1·06	20·0 21·0 0·95		29·0 26·0 1·11	60·0 53·0 1·13	43·5 38·0 1·14	—

Aug. 14.	klar 725	0, S IV	41·5 37·0 1·13	29·5 25·5 1·16	36·0 21·0 1·71	36·0 32·5 1·11	22·5 23·5 0·95	53·0 41·5 1·28	—
Aug. 15.	w. bew., R. 723	S, SW II—III	41·5 34·0 1·22	39·5 42·5 0·93	—	47·0 41·0 1·15	52·0 40·5 1·29	—	7—11h p. m.: Wetterl.
Aug. 16.	bew., R.–klar 725·5	S II—III	47·0 43·5 1·08	46·0 42·0 1·10	31·5 30·5 1·03	—	41·5 47·0 0·88	39·5 24·5 1·60	—
Aug. 17.	klar 723·5—720	0 II—III	38·0 32·5 1·17	25·5 23·5 1·09	30·5 23·5 1·30	36·0 25·0 1·44	—	48·5 41·5 1·17	—
Aug. 18.	klar—bew., R. 720–718·5–721	S I—II	46·0 41·5 1·11	41·5 41·5 1·00	50·0 45·0 1·11	48·5 49·5 0·98	—	—	—
Aug. 19.	klar—1/4 bew. 723—721	E IV—II	32·5 28·5 1·14	26·0 23·0 1·13	23·0 18·0 1·27	29·5 20·5 1·45	25·0 23·0 1·09	35·0 30·5 1·15	—
Aug. 20.	klar—3/4 bew. 722	0 II—VI	36·0 27·5 1·31	—	24·5 22·5 1·10	27·5 24·5 1·12	34·0 24·5 1·39	53·0 41·5 1·28	—

Datum	Meteorologie	$7^1/_2{}^h$ a. m.	9^h a. m.	11^h a. m.	1^h p. m.	3^h p. m.	$7-8^h$ p. m.	10^h p. m.	Anmerkung
Aug. 21.	klar—bew., R. 0, W 721 II	42·5 42·5 1·00	47·0 43·5 1·08	25·5 26·0 0·98		37·0 30·5 1·23	—	—	7—9^h p.m.: Gew.
Aug. 22. bis 25.	—	—	—	—		—	—	—	—
Aug. 26.	bew., R.–$^1/_2$bew. S, SE 722—726 —	—	27·0 24·5 1·10	20·0 15·0 1·33		—	30·5 25·5 1·20	28·0 24·5 1·14	—
Aug. 27.	w. bew., R. S, 0 724 —	25·5 21·0 1·21	—	27·5 23·5 1·17		30·5 29·5 1·03	—	—	12^h, $4^1/_2{}^h$ p.m.: Gew.
Aug. 28.	$^3/_4$ bew. 0 725 IV—V	24·5 14·0 1·75	—	18·0 16·0 1·12		21·0 19·5 1·07	30·5 25·5 1·20	40·5 45·0 0·90	—
Aug. 29.	$^1/_2$ bew.—klar — 725 V	26·5 24·0 1·10	—	—		29·0 23·5 1·23	—	—	—

Aug. 30.	klar 724—721	— —	—	—	—	—	—	—	—	—
Aug. 31.	klar–bew., R 720	NE, W II—III	30·5 26·5 1·15	—	—	—	—	—	—	5^h p. m.: Gew.
Sept. 1.	w. bew., R. 722	S, SW II	—	—	—	39·5 34·0 1·17	—	—	—	6^h p. m.: Gew.
Sept. 2.	bew., R. 721·5	S —	30·0 40·5 0·74	—	—	47·0 34·5 1·37	—	—	—	—
Sept. 3.	$^3/_4$ bew.–$^1/_4$ bew. 721·5	S I—III	41·5 31·5 1·32	50·5 42·0 1·20	47·0 33·0 1·42	37·0 33·0 1·12	35·0 31·5 1·11	40·0 40·0 1·00	—
Sept. 4.	$^1/_2$ bew.–bew., R. 723	S V—VI	—	—	31·0 29·5 1·05	27·5 24·5 1·12	—	—	4^h p. m.: Trübung, $4^1/_2{}^h$, 5^h p. m.: Gew.
Sept. 5.	bew.—$^1/_4$ bew. 724·5	NE VI—IV	25·5 20·0 1·27	23·5 22·5 1·04	25·5 24·5 1·04	31·0 27·5 1·13	28·0 26·5 1·06	32·5 29·5 1·10	NE stürmisch

Datum	Meteorologie	$7^1/_2{}^h$ a. m.	9^h a. m.	11^h a. m.	1^h p. m.	3^h p. m.	7—8^h p. m.	10^h p. m.	Anmerkung
Sept. 6.	klar NE 722·5 V—III	16·0 15·0 1·07	29·5 24·5 1·20	32·5 30·5 1·07		31·0 29·5 1·05	29·0 24·5 1·18	30·5 20·0 1·52	Morgennebel
Sept. 7.	klar NE 723 III—II	35·0 20·0 1·75	28·5 20·0 1·42	20·0 17·5 1·14		44·0 36·5 1·21	41·5 30·5 1·37	—	schwacher Morgennebel
Sept. 8.	bew. R. 0 725·5 —	—	—	—		36·0 25·5 1·42	29·5 23·0 1·28	—	—
Sept. 9.	bew. 0 724·5 V	28·0 20·5 1·37	25·5 20·0 1·27	28·5 23·5 1·21		36·0 29·5 1·22	25·5 23·5 1·08	—	—
Sept. 10.	bew., R. 0 724 —	30·5 23·5 1·30	48·0 47·0 1·02	—		41·5 37·0 1·12	—	—	—
Sept. 11.	bew., R. 0 722·5 VI	—	36·5 30·5 1·20	35·0 28·5 1·23		38·0 38·5 0·99	—	—	Morgennebel, $7^1/_2{}^h$ bis $9^1/_2{}^h$ p. m.: Wetterl.

Sept. 12.	w. bew.—klar 723·5	0 IV	32·5 28·5 1·14	43·5 36·0 1·21	—	37·0 28·5 1·30	20·0 20·0 1·00	29·5 20·0 1·47	—
Sept. 13.	bew.—klar 722·5—719	NE IV	—	29·5 27·0 1·09	31·0 25·0 1·24	37·0 36·0 1·03	39·5 27·5 1·43	—	—
Sept. 14.	bew., R. 718·5	S —	41·5 36·0 1·15	53·0 47·0 1·13	—	—	—	—	—
Sept. 15.	bew., R. 718·5—721	S —	—	—	—	—	—	—	—
Sept. 16.	bew., R. 721—724·5	0 —	—	—	36·0 22·5 1·60	25·5 22·5 1·13	24·5 17·0 1·44	—	—
Sept. 17.	bew. 726	0, S II	—	30·0 24·5 1·22	35·0 25·0 1·40	35·0 30·5 1·15	—	—	—

Datum	Meteorologie	$7^{1}/_{2}$h a. m.	9h a. m.	11h a. m.	1h p. m.	3h p. m.	7—8h p. m.	10h p. m.	Anmerkung
Sept. 18.	bew. NE 727·5 I—II	—	40·0 36·0 1·11	40·5 30·5 1·33		42·5 35·0 1·21	36·0 27·5 1·31	—	—
Sept. 19.	$^{1}/_{4}$ bew.–$^{3}/_{4}$ bew. NE 727 II—III	30·5 32·5 0·94	38·0 34·0 1·12	36·0 30·5 1·18		39·5 35·0 1·13	—	—	6h a. m.: Temp. +2° C.
Sept. 20.	$^{1}/_{2}$ bew.—bew. NE 723 IV	—	25·5 22·5 1·13	29·5 30·0 0·98		28·5 25·5 1·12	25·5 20·0 1·25	—	—

II. Ionengehaltsmessungen.

ρ_+ und ρ_-, d. i. Summe der positiven, beziehungsweise negativen Ionenladung in statischen Einheiten pro Kubikmeter.

Datum		Stunde	ρ_+	ρ_-
August	6.	3h p. m.	0·435 $\frac{\text{st. E.}}{m^3}$	0·396 $\frac{\text{st. E.}}{m^3}$
	7.	3h »	0·425	0·396
	8.	3h »	0·446	—
	8.	7h »	—	0·386
	9.	3h »	0·669	0·674
	11.	9h a. m.	0·450	0·455
	11.	3h p. m.	0·490	—
	12.	3h »	0·354	0·356
	13.	3h »	0·368	0·331
	17.	3h »	0·407	0·283
	18.	3h »	0·552	0·639
	19.	3h »	0·462	—
	20.	3h »	0·359	0·423
	21.	3h »	0·474	0·391
	26.	11h a. m.	0·425	0·373
	28.	3h p. m.	0·324	0·347
September	1.	3h »	0·444	0·393
	2.	3h »	0·610	0·478
	3.	9h a. m.	0·563	—
	4.	3h p. m.	—	0·168
	5.	3h »	0·306	0·294
	6.	3h »	0·382	0·294
	7.	3h »	0·504	—
	8.	3h »	—	0·278
	9.	9h a. m.	0·324	0·294
	10.	9h »	0·540	—
	10.	3h p. m.	—	0·453
	11.	9h a. m.	0·412	—
	11.	3h p. m.	—	0·324

Datum	Stunde	ρ_+	ρ_-
September 12.	3h p. m.	0·380 $\frac{\text{st. E.}}{m^3}$	—
13.	10h a. m.	0·356	0·414 $\frac{\text{st. E.}}{m^3}$
14.	9h »	0·531	—
17.	3h p. m.	—	0·329
18.	9h a. m.	0·490	—
18.	3h p. m.	—	0·407
19.	3h »	0·469	—
20.	11h a. m.	—	0·327

Luftelektrische Beobachtungen auf dem Meere

von

Arthur Boltzmann.

Aus dem Institute für theoretische Physik der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Dezember 1904.)

Im Sommer dieses Jahres benützte ich die Gelegenheit einer Überfahrt nach Amerika, eine Reihe von Zerstreuungsmessungen auf dem Schnellpostdampfer »Belgravia« der Hamburg—Amerika-Linie über der Nordsee und dem Atlantischen Ozean auszuführen.

Der Gesellschaft wie dem Kapitän des Schiffes, Herrn Magin, und den Herren Schiffsoffizieren danke ich bestens für ihre freundliche Unterstützung.

Ich hatte ursprünglich vor, dreierlei Messungen zu machen: 1. Potentialgefälle, 2. Zerstreuung mit dem Ebert'schen Aspirationsapparate, 3. Zerstreuung mit dem Apparate von Elster und Geitel.

Einige Tage vor der Abfahrt des Schiffes benützte ich dazu, mich über die Örtlichkeiten und die Art und Weise, wie die Apparate am besten aufzustellen wären, zu orientieren. Das Schiff, hauptsächlich zur Warenbeförderung bestimmt, hat ein langes Vorder- und Achterdeck, welche in der Mitte durch einen Aufbau getrennt sind, der vorne die Kommandobrücke trägt; rückwärts geht über dem Hause der Dampfsteuermaschine hinweg eine Brücke quer über das Achterdeck. Letztere, nur durch ein Geländer eingefaßt, war der einzige

Punkt auf dem Schiffe, der sich außer dem Bereiche der Mastbäume, Ladebäume und Drahtseile befand.

Ich versuchte auf ihr das Potentialgefälle im Vertikalabstande zweier Wasserkollektoren zu messen, Flammenkollektoren wurden wegen des zu erwartenden starken Windes, Radium- oder Poloniumelektroden wegen der Zerstreuungsapparate nicht gewählt. Der Ausschlag der Elektroskopblättchen war nicht nur ganz inkonstant, sondern oft so stark, daß die Blättchen, wenn beide Elektroden, zirka 50 *cm* voneinander entfernt, in gleicher Höhe waren, anschlugen, was einem Potential von 200 Volt entsprach. Die Ursache davon dürfte gewesen sein, daß der Standpunkt sich ungefähr 8 *m* über dem Wasser auf einer hohen eisernen Galerie befand und daher die Krümmung und Zusammendrängung der Niveauflächen sehr groß war. Leider verhinderten mich schlechtes Wetter und Mangel an Zeit näher darauf einzugehen. Dann schwankte das Schiff während der Fahrt über den durch seine starke Dünung bekannten Atlantischen Ozean bis auf die letzten Tage meist so erheblich, daß wenig Aussicht vorhanden war, sichere Werte des Potentialgefälles zu erhalten.

Exner[1] führte bereits im Jahre 1888 Potentialmessungen im Indischen Ozean und im Roten Meer aus und wählte mit Vorteil den vor dem Rauch und Dampf geschützten Bug des Schiffes. An demselben wären wegen der starken Vertikalbewegungen und noch anderer Umstände sichere Messungen bei dieser Fahrt auch kaum möglich gewesen.

In der Folge beschäftigte ich mich daher nur mehr mit Zerstreuungsmessungen, welche auch auf große, oft unerwartete Schwierigkeiten stießen, deren Überwindung meine ganze Zeit beanspruchte. Der Unterstützung meines Vaters L. Boltzmann ist es zu verdanken, daß das Beobachtungsmaterial dieser Messungen verhältnismäßig reichhaltig wurde. Es sollen die Messungen nur ein erster Versuch sein, Daten der Zerstreuung und Ionenzahl auf offenem Meere zu geben. Die regnerische und feuchte Witterung in der ersten Hälfte

---

[1] F. Exner, Beobachtungen über atmosphärische Elektrizität in den Tropen. I. und II. Diese Sitzungsber., Bd. 98 (1889), Bd. 99 (1890).

der Reise machte eine öftere Unterbrechung der Versuche nötig. Auch wurde das Ablesen durch die Bewegungen des Schiffes, hauptsächlich die Vertikalbewegungen, sehr erschwert und konnte mit Sicherheit meist nur auf halbe Teilstriche genau abgelesen werden.

Ich nahm mir erstens einen Ebert'schen Aspirationsapparat, von der Firma Günther & Tegetmajer bezogen, mit. Mit demselben hatte ich schon in Wien und Lunz in Niederösterreich gearbeitet. Dabei hatte sich gezeigt, wie auch schon Herr Gockel[1] fand, daß die Isolierung bei feuchtem Wetter unsicher wurde. Besonders störend wirkte nach solchem folgende Beobachtung:

Wenn der Zerstreuungszylinder nach längerer Entladung geladen wurde, fielen die Elektroskopblättchen 2 bis 3 Minuten langsam um einige Millimeter und zeigten dann eine ziemlich konstante Ladung. Wenn ich jetzt einen Aspirationsversuch ausführte, sank die Ladung, um nach beendeter Aspiration sofort wieder erheblich zu steigen. Dieses Phänomen kann man dadurch erklären, daß bei und noch einige Zeit nach der Ladung Elektrizität in die Staubschichte über dem Bernsteinschutzdeckel hineinkroch und wenn das Potential der Ladung der isolierten Metallteile bei der Aspiration niedriger wurde, diese aufgespeicherte Elektrizität wieder langsam auf das Metall zurückkehrte und so sein Potential wieder erhöhte. Nachdem ich den Deckel unter großen Schwierigkeiten sorgfältig geputzt hatte, isolierte der Apparat ohne jede Störung. Nach einigen Tagen, als wieder Staub auf den Deckel gefallen war, was durch die Aspiration wohl beschleunigt zu werden scheint und es auch wieder feucht wurde, trat der alte Übelstand von neuem auf.

Ich entschloß mich daher, um für die Seefahrt den heikelsten Teil des Apparates, die Isolation, jederzeit in der Hand zu haben, zu folgenden Änderungen: Statt des Bernsteinschutzdeckels setzte ich den ursprünglichen Metalldeckel wieder ein mit der Änderung, daß sich derselbe mittels einer Charniere, die an der nach abwärts gerundeten Peripherie angebracht ist,

[1] Physik. Zeitschr. 4, 872, 1903.

in zwei Halbkreise teilen läßt, um ihn behufs Reinigung der Bernsteinisolierung leicht herabnehmen zu können. Längs des geraden Schnittes des einen Halbkreises sind oben und unten schmale, übergreifende Blechstreifen angelötet, so daß der andere Halbkreis beim Zuklappen sich zwischen diese mit genügender Reibung hineinschiebt. Dadurch ist der Spalt zwischen den beiden Kreishälften abgedichtet und wird auch ein Auseinanderfallen derselben hintangehalten, am besten noch mit einem Häckchen gesichert. Erwähnt sei noch, daß der Ring, welcher die rückwärtige Mattscheibe des Elektroskops hält, zum leichteren Entfernen derselben mit Klammern festgehalten wurde. Diese Anordnung bewährte sich sehr gut und war die Isolierung mit Natriumtrocknung auch bei feuchtestem Wetter eine ausgezeichnete.

Zweitens nahm ich einen Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel, von derselben Firma bezogen, mit; derselbe wurde mit Schutzzylinder und Deckel aufgestellt.

Dann hatte ich noch ein Aßmann'sches Aspirationspsychrometer von J. Jaborka in Wien mit. In demselben wurde leider gegen Schluß der Reise durch einen Bediensteten des Schiffes ein Thermometer zerbrochen. Daher hören die Beobachtungen der Feuchtigkeit der Luft bereits am 29. August auf.

Jedes größere deutsche Schiff führt ein meteorologisches Journal für die Seewarte in Hamburg. Diese stellte mir eine Abschrift des Journals der »Belgravia« von dieser Ausreise bereitwilligst zur Verfügung. Aus demselben wurde der Luftdruck und Schiffsort entnommen und die Notizen über Bewölkung, Wind, Wellengang etc. ergänzt.

Beobachtungsplatz war die jeweilig windgeschützte Seite der Kommandobrücke; diese liegt hoch über dem großen, oben besprochenen Deck am vorderen Ende des drei Stockwerke hohen Aufbaues. Der Standort der Apparate war also sehr hoch, etwa 13 *m* über dem Meeresspiegel und befand sich im Bereiche der vom Schiffe noch nicht berührten, von vorne herankommenden Seeluft. Das Schiff, welches ein Deplacement von etwas über 12.900 Tonnen hat, legte in der Stunde zirka 24 *km* zurück, Erschütterungen durch die verhältnismäßig

schwachen Maschinen waren nicht zu spüren. Wind suchte ich mit den auf Kommandobrücken üblichen aufziehbaren Matten, so gut es eben ging, abzuhalten.

Am Elster und Geitel'schen Apparate wurde immer die Ladungsabnahme während der Zeit von je 15 Minuten beobachtet, die Isolationsfehler wurden, wenn nötig, mit den Resultaten der Isolationsproben korrigiert; die a_- und a_+ nach der Formel

$$a = 100 \frac{C+C'}{C} \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{0\cdot 434} (\log V_0 - \log V_1)$$

berechnet, wobei C die Kapazität des Zerstreuungskörpers, C' die des Elektroskops, V_0 das Potential der Anfangs-, V_1 das der Endladung in Volt bedeutet.

Der Aspirator gibt nach einmaliger Umdrehung des Federgehäuses einen Glockenschlag; sofort nach einem solchen wurde ganz aufgezogen. Es wurden acht Glockenschlagintervalle als Zeit eines Versuches gewählt, was bei diesem Apparat der Zeit von fast genau 16 Minuten entspricht. In dieser Zeit werden im ganzen $M = 1\cdot 456\, m^3$ Luft gefördert. Die pro Kubikmeter Luft mit eingesogenen Elektronen neutralisieren eine Elektrizitätsmenge $E = fV$ elektrostatische Einheiten, wobei der Reduktionsfaktor $f = \frac{VC}{300 . M}$ ist, V ist die Potentialdifferenz in Volt und $C = 20\cdot 51\, cm$ die Kapazität des Kondensators. Der Reduktionsfaktor ist

$$f = 0\cdot 046955 = \frac{1}{21\cdot 29},$$

also höher als der von Ebert für einen ähnlichen Apparat angegebene.[1]

Die Mittel der q sind immer

$$\bar{q} = \sum \frac{a_-}{a_+}, \quad \bar{Q} = \sum \frac{E_-}{E_+}$$

[1] Ebert, Elektronen-Aspirationsapparat. Aeronaut. Mitteilungen, 1903, I. Heft, p. 18.

und wurden bei der Bildung der q nur direkt aufeinander folgende Messungen benützt; bei der Mittelbildung wurden extreme Werte ausgeschaltet. So konnte in einigen Fällen gar kein Elektrizitätsverlust konstatiert werden, was auch Lüdeling bei einer Messung mit positiver Ladung im Ballon fand;[1] genannter Autor schreibt es der Lahmlegung der negativen Elektronen in der Wolke zu. Während nun ich gar keine Zerstreuung fand, war allerdings am 21. August die Luft auch sehr trüb, am 27. dichter Nebel, was jedenfalls eine starke Verminderung der Zerstreuung bewirkte, die sich auch am zweiten Apparate zeigte. Es könnte schon hier folgende später beobachtete Wirkung, wenn auch in sehr vermindertem Maße, im Spiele gewesen sein.

Vom 28. August an, dem ersten schönen Tage, an dem auch die See ruhiger geworden war, zeigte das Elektroskop im Ebert'schen Apparate langsame Schwankungen des Potentialgefälles, bei denen der Übergang von einem Extrem des Standes zum anderen fast eine Viertelstunde dauerte. Ebert erklärt in oben zitierter Abhandlung von ihm beobachtete Schwankungen der Potentialdifferenz mit Luftströmungen im Innern des Elektroskops durch Erwärmung infolge der Sonnenstrahlung. Doch waren die beobachteten Schwankungen zu regelmäßig und andauernd, als daß ich sie durch Luftströmungen erklären möchte. Die Schwankungen des Schiffes waren an diesen Tagen sehr gering, so daß auch diese nicht die Ursache gewesen sein können. Beim Elektroskop des Elster und Geitelschen Apparates, welches etwas unempfindlicher war und dessen Gläser zur Abdichtung mit Wachs verklebt waren, das einen Teil der Fläche des Glases bedeckte, konnten diese Schwankungen des Potentials nicht konstatiert werden. Hingegen zeigten beide Elektroskope das unerklärliche Verhalten, daß die Blättchenpaare oft stundenlang gegen eine Seite hingezogen wurden und man die Apparate ganz schief stellen mußte, um annähernd auf beiden Seiten gleiche Ausschläge zu

---

[1] Lüdeling, Luftelektrische Zerstreuungs- und Staubmessungen auf den intern. Ballonfahrten 2. April und 7. Mai 1903. Aeronaut. Mitteil. 1903, Heft 10.

erhalten, letzteres war auch beim Elster und Geitel'schen Apparat in geringerem Maße erforderlich.

Diese Erscheinungen könnte man vielleicht damit erklären, daß die Bestandteile des Schiffes elektrische Ladungen ansammelten. Das dürfte bei feuchtem Wetter in sehr geringem Maße der Fall gewesen sein, während es bei trockenem Wetter stark bemerkbar wurde. An dem Aufbau des Schiffes war sehr viel aus Holz, welches mit harzigen Ölen imprägniert und bestrichen ist, daher trocken wohl nicht als vollkommener Leiter betrachtet werden kann. Die Potentialmessungen im Hafen haben ferner gezeigt, daß die Niveauflächen über dem Schiffe sehr dicht und Veränderungen unterworfen sind, das Erdfeld also sehr kräftig und variabel ist. Ferner war der große Schornstein, die Masten etc. nicht weit, auch münden an der Kommandobrücke die elektrischen Starkstromleitungen, der Signale zur Maschine, zum Betriebe des Nebelhorns und der Positionslaternen.

Die Schwankungen des Potentials nun und das Zurseiteziehen der Blättchen könnten davon herrühren, daß elektrische Massen von außen durch das Glas auf die Blättchen wirkten, welches von innen mit Natrium, von außen durch die trockener werdende Luft trocken gehalten, gut isolierte. Es wurden aber die gegen das Gehäuse positiv und negativ geladenen Blättchen in beiden Fällen nach derselben Seite gezogen. Die Differenz dieser Potentiale, welche zirka 400 Volt betrug, könnte nun gegen die elektrischen Ladungen, welche die Blättchen auf eine Seite zogen und wegen ihrer starken Wirkung sehr groß gewesen sein müssen, so klein gewesen sein, daß die Blättchen in beiden Fällen relativ gegen diese von gleichem Vorzeichen geladen waren. Daß sie auf eine Seite gezogen wurden, ist aus irgendwelcher Unsymmetrie leicht erklärlich.

Auf diese Vermutungen kam ich erst nach der Reise und zwar anläßlich Beobachtungen im Freiballon. Versuche im Laboratorium mit einem Exner-Elster-Geitel'schen Elektroskop, welches geladen und oben verschlossen aufgestellt wurde, wie zu einer Isolationsprobe ergaben auch, daß ein demselben genäherter, mit einer Influenzmaschine stark geladener Körper, z. B. eine Kugel, die Blättchendivergenz bei gut

getrockneten Gläsern so beeinflußte, daß er sie vergrößerte oder verkleinerte, und zwar wirkte er auf das ihm nähere Blättchen bedeutend stärker, was also im ganzen einer Anziehung oder Abstoßung der Mittellinie gleichkommt. Die Wirkung ist verschieden, ob das Gehäuse isoliert aufgestellt oder zur Erde abgeleitet wird. Bei Wiederholung eines solchen Versuches wurde bald das Glas elektrisch und zog seinerseits die Blättchen an. Ein das Elektroskop nahezu umschließendes Blech wirkte noch bedeutend stärker, seine Wirkung war der auf dem Schiffe ziemlich gleich. Kontinuierlich und heftig geladen wurden die Blättchen durch eine auch weit entfernt stehende ausstrahlende Spitze, so daß sie fortwährend anschlugen. Verband ich die Kugel mit einem Pol der Influenzmaschine und näherte sie so weit, daß von ihr auf das Elektroskop Funken übersprangen, so zuckten die Blättchen ganz erheblich. Diese Erscheinungen werden am besten durch ein an der Innenseite des Glases in das Gehäuse geschobenes Gitter vollständig hintangehalten; wenn dasselbe genügend weitmaschig und aus genügend feinem Drahte gemacht ist, so dürfte es die Ablesung nicht im mindesten behindern.

Die geladene Kugel wirkte auch auf das im Ebert'schen Apparat eingebaute Elektroskop und zwar sowohl auf das sichtbare Ende des inneren Zylinders des Kondensators als auch durch die Elektroskopgläser hindurch. Die Entfernung, in der eine Wirkung noch merkbar war, konnte, wenn die Gläser durch Gitter abgeblendet wurden, bedeutend vergrößert werden, was also zeigt, daß die Influenzwirkung auf das Ende des Kondensators auf den Blättchenständer kompensierend wirkt und umgekehrt. Es wäre daher gut, auch den Kondensator durch Verlängerung des Rohres oder einen Winkel zu schützen; letzteren brachte bereits Lüdeling behufs Zuführung reiner Luft an. Der Apparat war also, wie er benutzt wurde, vom Einfluß des Erdfeldes nicht frei. Die besprochenen regelmäßigen Schwankungen, welche auch bei geschlossenem Kondensator beobachtet wurden, könnten auch von Schwankungen des Erdfeldes herrühren, die durch das getrocknete Glas wirksam wurden.

Bei einer Ballonfahrt nahm ich im Herbst einmal auch ein Exner-Elster-Geitel'sches Elektroskop mit, lud es, verschloß es oben und beobachtete an ihm nur den Einfluß der äußeren Ladungen und der des Glases. Da der Tag sonnig und nicht sehr feucht war, war das Glas außen genügend trocken, innen wurde gut mit Natrium getrocknet. Das Gehäuse des Elektroskops war durch einen blanken Messingdraht, der über zirka drei Viertel des Randes des Korbes lief, mit diesem und dem im Wiener Aeroklub üblichen Anker leitend verbunden. Zeitweilig wurde dieser Messingdraht auch mit einer Wasserelektrode in der Höhe des Korbes in Verbindung gesetzt. Es ergab sich, daß der Ausschlag des Elektroskops stark variierte, z. B. zu Beginn der Fahrt beim ersten Aufstieg. Dabei war der Kollektor in Tätigkeit, es nahmen also die mit ihm verbundenen Teile die Ladung der umgebenden Luft an. was auch an einem Elektroskope, welches die Potentialdifferenz des Messingdrahtes und einer mit dem Kollektor gleich hohen Wasserelektrode anzeigte, ersichtlich war. Davon isoliertere Teile erhielten nun offenbar gegen diese und das untersuchte Elektroskop eine Ladung, welche offenbar auch auf den isolierten Blättchenständer wirkte, da sich die Blättchendivergenz veränderte. Ich beobachtete sogar, daß das Nähern der Hand an die rückwärtige, nicht durch den Spiegel zum Teil abgeblendete Glasplatte die Potentialdifferenz im Elektroskop beeinflußte. Als ich diese Glaswand durch ein am Gehäuse angebrachtes dickes Packpapier bedeckte, wurden die Schwankungen bedeutend schwächer. Sie wurden auch noch schwächer, als der Ballon längere Zeit in derselben Höhe blieb, eine Ladung obigen Drahtes auch schon längere Zeit mit der Elektrode nicht mehr konstatiert werden konnte. Eine Ladung des Korbes durch Ballastgeben konnte jedenfalls wegen der Feuchtigkeit und des groben Kornes des mitgenommenen Sandes nicht besonders bemerkt werden.

Bezüglich der Erdleitung, welche ich zur See durch Eisenteile des Schiffes zu vermitteln suchte, möchte ich noch folgendes bemerken. Sie ist beim Gehäuse des Ebert'schen Apparates, wenn der isolierte Teil als vor äußeren Einflüssen voll-

kommen geschützt angenommen wird, für die bereits eingesogene Luft unnötig, es kommt ja für diese nur die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kondensatorrohren in Betracht. Da die Kapazität des Gehäuses nicht groß ist, wird es isoliert eine elektrische Ladung annehmen und so auf die Elektronen der umgebenden Luft umso stärker wirken können, je weniger diese bewegt ist. Beim Elster und Geitel'schen Apparat wird diese Wirkung schon deshalb verstärkt auftreten, da hier die Luft nicht angesogen wird.

Das Gehäuse braucht also kein konstantes Potential zu haben, sondern sollte, um jede polarisierende Wirkung auszuschließen, das Potential der umgebenden Luft haben; man sollte es also darnach z. B. besonders bei Messungen auf einem Turme nicht mit einer zur Erde hinabgehenden Leitung, sondern mit einem Kollektor in seiner Höhe verbinden; dabei hätte man noch die lokale Störung des Turmes. Um diese und die Wirkung des Erdfeldes zu vermeiden, könnte man den ganz horizontal angeordneten Apparat mit einem Kollektor in gleicher Höhe auf längerer, isolierender Stange über ebenem Terrain aufstellen; dadurch hätte man den idealen Zustand fast erreicht.

Meteorologische Verhältnisse.

Während der ersten Hälfte der Reise, vom 21. bis 27. August, wo das Schiff, nachdem es die Nordsee und die Südwestspitze Englands passiert, einen Bogen nach Norden beschrieb, war die Witterung starkem Wechsel unterworfen, meist böig, entsprechend dem westlich von Irland, 25° W und 55° N herrschenden Minimum des Dekadenmittels vom 21. bis 31. August. Im allgemeinen herrschte jedoch über dem Meere höherer Druck als über dem Kontinent. Von Spanien zieht nämlich im Dekadenmittel eine Isobare hohen Druckes nach Westen, südlich von Newfoundland vorbei, nach der Ostküste der Vereinigten Staaten. Auf dieser Linie wanderte ein Zentrum hohen Druckes dem Schiff entgegen, um es am 24. August fast 10° S zu passieren. Daher die Drehung des Windes an

diesem Tag, indem das Schiff die nördliche Peripherie des antizyklonalen Bereiches streifte. Dem Druckmaximum folgte fast in derselben Breite ein Minimum, das zur Zeit der Abreise des Schiffes die Mündung des Lorenzostromes passierte, um dann etwas nach Süden zu biegen. Am 25. August kam es etwa 5° S am Dampfer vorbei, die Begegnung fand ziemlich in der Mitte zwischen Europa und Amerika statt. An diesem Tage wendete der Wind wiederum. Zu Ende des 27. August drang das bereits südlich steuernde Schiff in den Bereich hohen Druckes, dessen Zentrum wieder dem Minimum im Süden nachfolgte. Als das Schiff am 29. südlich von Newfoundland vorbeikam, beherrschte den Osten von Kanada schon wieder eine Depression.

Mittelwerte der Beobachtungsresultate.

Das erste Mittel ist aus den Beobachtungen der ersten sieben stark bewölkten und böigen Tage entnommen, in denen das Schiff aus der Nordsee bis etwas über die Mitte des Atlantischen Ozeans gelangte, das zweite aus denen der vier restlichen schönen Tage mit blauem Himmel. n ist die Anzahl der benützten Beobachtungen.

		(n)		(n)
21. bis 27. August:	$E_{-} = 0\cdot368$	35	$a_{-} = 2\cdot01$	20
	$E_{+} = 0\cdot274$	35	$a_{+} = 0\cdot85$	20
	$E = 0\cdot321$		$a = 1\cdot43$	
	$Q = 1\cdot4$		$q = 2\cdot575$	
28. bis 31. August:	$E_{-} = 0\cdot414$	28	$a_{-} = 3\cdot19$	37
	$E_{+} = 0\cdot269$	28	$a_{+} = 1\cdot24$	37
	$E = 0\cdot343$		$a = 2\cdot214$	
	$Q = 1\cdot657$		$q = 2\cdot81$	
Gesamtmittel:	$E_{-} = 0\cdot391$	63	$a_{-} = 2\cdot6$	57
	$E_{+} = 0\cdot272$	63	$a_{+} = 1\cdot05$	57
	$E = 0\cdot332$		$a = 1\cdot83$	
	$Q = 1\cdot528$		$q = 2\cdot691$	

Vergleichswerte.

	E_-	E_+	E	Q	(n)
Reinickendorf bei Berlin	0·33	0·4	0·365	0·82	1
Potsdam[1] zirka	—	—	0·25	1	50
München[2] zirka...........	—	—	1·00	—	—

Mittel für den Sommer.

	a_-	a_+	a	q
Kremsmünster 1902, Mittagsbeob., Augustmittel.......	1·54	1·31	1·43	1·17
Wolfenbüttel 1899, Mittagsbeob., Augustmittel.......	—	—	1·35	—
Darmstatt, 7^h bis 9^h a., 1883 bis 1885 (Kugel als Zerstreuungsk.), Augustmittel.	—	—	1·7	—
Mattsee, Tagesbeob. 1903, Sommermittel, auf Schutzzyl. reduziert............	1·66	1·67	1·665	0·998
Küstenbeobachtungen:				
Spitzbergen, 5. bis 10. August 1900, am Land und auf dem Meere..................	4·62	2·88	3·75	1·6
7. August vor Kap Teurenberg auf dem Dampfer, vormittags, 80° N Br.	3·48	1·27	2·38	2·7
An Bord der »Belgravia«, Sommer 1904	2·6	1·05	1·83	2·691

[1] Lüdeling, Sitzungsber. der Akad. in München, Heft II, p. 355, 1903.
[2] Ebert, Physik. Zeitschr. 4, p. 166, 1902.

Ferner bildete ich noch folgende Tagesmittel; bei denselben berücksichtigte ich alle, auch die Nullwerte. Die Luftladung und Zerstreuung beider Vorzeichen steigen mit dem Verlassen des Kanals; die Zerstreuung besonders am 22. August, an welchem starker Wind herrscht. Am 25. und 27. August sind beide klein, die Ladung besonders am 25., einem trüben und bewölkten Tage, die Zerstreuung am 27., dem nebligsten Tage, jedoch unter nicht stark bewölktem Himmel mit verhältnismäßig starkem Winde. Bei dem folgenden schönen Wetter haben beide Phänomene durch die größere Anzahl der verwerteten Beobachtungen begünstigte gleichmäßig hohe Werte. Die negative Ladung der Luft, welche auch in der Nähe des europäischen Kontinents besonders gering war, vermindert sich wieder mit der Nähe des Landes. Man sieht auch die Rückwirkung dieses Verlaufes am Q. Bei a_{+} ist letzteres aber nicht der Fall.

Datum	E_-	n	E_+	n	Q	n	a_-	n	a_+	n	q	n	Luft-druck $n=4$	Temperatur	n	Dampf-druck	Relative Feuchtigk.	n	Wind-stärke $n=7$
August																			
21	0·274	6	0·108	6	2·51	4	0·7	5	0·28	5	2·19	4	762·9	17·5	3	10·7	72	4	1·6
22	0·317	2	0·104	2	4·06	2	2·74	2	2·15	2	1·24	2	759·4	15·6	4	10	80	2	4·7
23	0·393	7	0·315	6	1·41	6	2·79	2	1·57	1	1·77	1	767·4	15·7	4	9·8	79	4	1·9
24	0·353	3	0·643	3	0·79	3	3·55	1	1·1	1	3·23	1	763·4	15·6	4	11·1	83	2	4·4
25	0·32	6	0·198	5	1·8	5	3·16	2	0·98	3	2·72	2	761·1	14·1	4	9·5	76	1	2·3
26	0·433	5	0·304	5	1·52	5	3·23	4	1·17	3	2·88	3	760·3	14·1	4	10·4	78	5	4·1
27	0·39	8	0·277	8	1·43	8	1·16	10	0·43	7	3·1	6	757·6	14·5	4	12·7	99	6	4·5
28	0·43	10	0·345	9	1·37	9	2·86	12	1·08	12	2·99	11	763·1	15·6	5	12·1	87	5	3
29	0·379	7	0·253	7	1·56	7	3·28	10	1·12	9	3·16	9	760	19·5	4	13·9	90	1	2·7
30	0·374	8	0·224	8	1·77	8	3·28	9	1·37	9	2·67	9	763·2	18·8	4				3
31	0·465	4	0·217	4	2·22	4	3·31	8	1·5	7	2·25	7	766·2	18	3				2·8

Beobachtete Maximalwerte.

Datum	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q
28. August	0·986	(0·704)	(1·4)	—	—	—
24. »	(0·305)	1·103	(0·28)	—	—	—
29. »	—	—	—	6·1	(1·53)	(3·99)
28. »	—	—	—	(3·78)	2·76	(1·37)

Die Zerstreuung und Ionenzahl auf dem Meere zeigt also kein abnormes Verhalten, was auch F. Exner bezüglich des Potentialgefälles fand. Die Werte der q sind durchaus groß, was besonders bei den Zerstreuungsmessungen mit dem Elster und Geitel'schen Apparate hervortritt, im Gegensatze zur größeren Wanderungsgeschwindigkeit der negativen Elektronen. Dieser Unterschied dürfte darin zu suchen sein, daß der Elster und Geitel'sche Apparat durch das starke Erdfeld der Kommandobrücke stärker beeinflußt war als der Ebert'sche Apparat. Es dürften wohl auch die gegen die Luft in dieser Höhe negativ geladenen Bestandteile des Schiffes auf die Verteilung der Elektronen gewirkt haben. Über das Geländer hinaufragende Eisenstangen bildeten mit Drahtseilen und den Stricken, die zum Aufziehen besprochener Matten dienten, fast ein Netz.

Die Werte der q nehmen auch bei beiden Apparaten mit wachsendem Winde ab und umgekehrt. An den Tagen der größten Windstärke wird q bei beiden Apparaten kleiner als Eins. Starke Luftbewegung, bei der zur Diffundierung nicht genug Zeit vorhanden war, würde darnach die Zerstreuung bei negativer Ladung vermindert und die bei positiver vergrößert haben. Daher dürften die Werte der q bei diesen Beobachtungen von der Windstärke abhängig und bei schwachem Luftzuge zu groß sein. In der Tabelle, in der P. B. Zölss[1] die Elektrizitätszerstreuung mit der Windgeschwindigkeit vergleicht, zeigt auch q eine mit wachsendem Winde abnehmende

[1] Diese Ber., Bd. CXII, 1903.

Tendenz. Der Apparat war hier 11·6 *m* über dem Erdboden aufgestellt.

Die Ionenzahl und Zerstreuung nimmt mit der Lufttemperatur zu, deren Wachsen wieder mit der Sonnenstrahlung zusammenhängt. Die Maxima der Zerstreuung und Ionenzahl scheinen denen der Luftwärme etwas voraus zu gehen.

Nebelbildung und diesiges Wetter verminderten die Zerstreuung; dies prägt sich besonders am 21., 25. und 27. August aus. Bei niederem Barometerstand, zyklonalen, aufsteigenden Luftströmen ist die Zerstreuung und Ionenzahl relativ kleiner, mit demselben war aber in der Regel auch regnerisches und böiges Wetter verbunden.

Die Stundenmittel aus den Beobachtungen der Luftladung und Zerstreuung bei positiver und negativer Kondensatorladung erreichen in der Zeit von 8^h a. bis 8^h p. gegen 11^h a. und 3^h p. Höchstwerte, das Nachmittagsmaximum überwiegt. An den Tagen mit ununterbrochenem Sonnenschein steigt die Luftladung mit diesem besonders stark. Bei positiver Ladung sind die Schwankungen geringer und etwas unregelmäßiger, was vielleicht mit der Sammlung der positiven und Abstoßung der negativen Elektronen zusammenhängt. Dieser Unterschied ist auch beim Elster und Geitel'schen Zerstreuungsapparate größer.

Mit Sonnenuntergang sinkt die Zerstreuung, und zwar besonders bei positiver Ladung, was auch mit Beobachtungen auf dem Lande[1] übereinstimmt. Die positive Luftladung, also bei negativer Kondensatorladung, sinkt auch mit Sonnenuntergang (ausgenommen am 28. August); die negative Luftladung steigt jedoch in dieser Zeit, sie zeigt überhaupt während des ganzen Tages eine steigende Tendenz.

Die Maxima der Q, die bei bewölktem Wetter von 10^h bis 11^h a. und 4^h bis 5^h p. eintreten, rücken bei schönem Wetter beträchtlich zusammen. Die q haben in der Früh 8^h, 1^h p. und nachmittags zirka 3^h hohe Werte.

In den beigegebenen Tabellen wurden die Zeitangaben zur Kürzung, wenn es sich nur um wenige Minuten Differenz handelte, oft zusammengezogen. Die eingeklammerten Tem-

[1] Gockel, l. c. und Kremsmünster Beobachtungen (1903 bis 1904).

peraturen sind die Angaben des Schiffsthermometers, die anderen die des Aspirationspsychrometers. An die Schiffsbeobachtungen sind noch einige wenige in Lunz und Wien vor und nach der Reise mit denselben Apparaten ausgeführte Beobachtungen angefügt. Die darauffolgenden Mittel aus den Tageszeiten sind den Schiffsbeobachtungen entnommen.

Von den drei Kurven auf den zwei Tafeln stellen die Ordinaten der untersten Kurve die a_- und a_+ dar, die der nächsten Kurve sind die abgelesenen Voltdifferenzen V, welche der neutralisierten Elektrizitätsmenge direkt proportional sind.

0 = negative Ladung,
+ = positive Ladung.

Die oberste Kurve stellt den Stand des im Steuerhause cardanisch aufgehängten Schiffsbarometers (Quecksilberbarometer) auf die Temperatur von Null Grad reduziert, dar.

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
21. August	8^h a.							
	9 08	0·348						
	9 49		0·305	1·14				
	9 58				1·023			
	10 13	0·423					2·03	
	10 18			1·76		0·504		
	10 35		0·24					19·2
	11 —	0·54						
	11 17				1·15			16·5
	11 23		0·019				2·67	
	12 —							(16
	12 15					0·43		
	4 20	0·164			0·52			(20)
	4 40		0·024	6·83		0·015		
	5 02	0·178			0·28			17·9
	5 24		0			0·11	2·55	
	6 43	0·009						
	6 52				0·52			
	7 08		0·061	0·15		0·35		(16·5 16·4
22. August	10^h 06	0·446						(16 15·1
	10 19				3·78			
	10 30		0·066	6·78		2·76	1·37	
	10 58	0·188						
	11 20		0·141	1·33	1·7			14·6
	11 40					1·53	1·11	(15·5
	3 40	(0?)						
	4 —		(0·19?)					(15)
23. August	9^h 02	0·376						(15
	9 30		0·254	1·48				
	9 50	0·432						

Dampfdruck	Relat. Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke 0–12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
			0	Cumuli 4, Seegang gering.
				Rheinmündung wird passiert.
			0	
11·9	72%			Sonne.
10·15	72			
		S	1—2	Etwas mehr Cumuli.
				Kein Seegang.
		SE	2	Breite 51° 27′ N, Länge 2° 6′ E.
				3^h Landung in Dover.
10·4	68			
				Sonne versteckt sich, Luft trüb.
				Cum. str. Cirr. 3; diesig; Seeg. schwach.
10·5	75	ESE	3	Beacky Head, 4 bis 5 *km* vom Land ab.
10·8	85%	W	5	Nach kurzem Regen cum. nimb. 5; böig.
				Ziemlich hohe Wellen.
9·2	74			
		WNW	6	Lizard.
		NE	1	Trüb, ruhige See, cum. bedeckt.

Datum	Zeit		E_-	E_+	Q	–	a_+	q	Temp.
23. August	10^h	06		0·174	2·49				
	10	30	0·333			2·79			15·2
	12	—							(15)
	1	12				2·78			
	1	30					1·57	1·77	
	2	—	0·357						14·8
	2	20		0·441	0·809				
	2	50	0·47						
	3	10		0·409	1·15				(18·5)
	4	40	0 465						15·6
	5	—		0·315	1·47				
	6	40	0·315						(15)
	6	58		0·296	1·06				14·6
24. August	8^h	40	0·38						(15)
	8	50				3·55			15·7
	9	—		0·352	1·08				
	9	09					1·1	3·23	
	10	—	0·474						
	10	13		0 474	1				16·2
	12	—							(15·5)
	4	45	0·305						(16)
	5	—		1·103	0·28				(16)
25. August	8^h	25	0·338						(14)
	9	—		0·207	1·64				
	9	21	0·441						
	9	44		0·141	3·13				
	10	47	0·258						
	10	55				4·03			
	11	06		0·235	1·1				14·5
	11	12					1·28	3·15	

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 0—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
10·8	83%			
		NE	2	50° 26′ N, 13° 8′ W.
				Regenschauer.
				Leichter Nebel.
9·8	78	NE	2	
				Cum. cirr. str. 5.
9·2	77	NE	2	Staubregen, bedeckt.
				Etwas Sonne, leichte Cum.
9·4	76	NE	3	Bedeckt.
		SSE	3	Den ganzen Tag Himmel bedeckt. Luft
10·95	82%			trüb.
				Leicht bewegte See.
		ESE	3	Staubregen.
11·4	83			
		S	4	50° 20′ N, 20° 58′ W.
		SW	5	Nach viel Regen starker Seegang.
		N	3	Bedeckter Himmel.
				Hohe westliche Dünung.
				Luft trüb.
		N	3	
9·45	76%			

Datum	Zeit		E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
25. August	11^h	26	0·178						(14·5)
	1	04	0·291						
	1	17				2·17			
	1	32		0·197	1·48		0·95	2·28	
	4	26		0·211			0·72		(14)
	4	50	0·413		1·96				(14)
26. August	8^h	37	0·296						(12)
	9	—		0·178	1·66				
	9	40	0·343						
	10	10		0·456	0·75				(14)
	2	03	0·451						
	2	23		0·254	1·78				15·8
	2	30				2·74			
	2	43	0·643						16
	2	48					0·93	2·95	
	3	06		0·315	2·04	3·2			
	4	06	0·432			2·94			(15·5) 16·4
	4	26		0·319	1·35		0·88	3·34	15·6
	4	44				4·04			
	5	—					1·71	2·36	14·6
27. August	8^h	09	0·193						(16·5)
	8	30		0·338	0·57				
	9	07	0·352			1·84			15·8
	9	28		0·235	1·5		0·6	3·07	
	10	—	0·347			1·35			15·5
	10	26		0·216	1·61		0·57	2·37	
	10	45				1·45			
	11	12	0·376						15·8
	11	19				1·15			

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 0—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
		N	3	49° 51' N, 28° 12' W.
				Nach Regen.
		ESE	1	
		NNW	5	Cumuli str. 6. Weiße Kämme auf den Wellen.
		NNW	4	Himmel bedeckt.
		NW	4	48° 52' N, 35° 43' W.
10·5	77%			Nach Regenböe.
				Sonne. Weiße Kämme.
10·4	76			
10·2	73	NW	4	
10·55	80			
				Cum. cirr. 6.
10·2	82	NW	4	
		WSW	5	Bedeckter Himmel.
				Neblig-trübe Luft.
13·5	100%			Böig; ziemlich starker Seegang.
13·15	99·5	WSW	5	Sonne bricht auf kurze Zeit durch.
13·5	100			
				Nebel unter blauem Himmel.

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
27. August	11h 36		0·254	1·48		0·28	4·11	(15) 14·6
	1 02				1·85			
	1 10	0·329						
	1 28					0·49	3·78	
	1 35		0·235	1·4				14·4
	1 50				1·3			
	2 —	0·371						
	2 10					0·402	3·1	
	2 25		0·296	1·25				14·2
	2 33				1·38			
	2 58					0·63	2·19	(14)
	5 28	0·596			0			
	5 40		0·305	1·95	0			
	6 02					0		
	6 55	0·554						
	7 —				1·28			
	7 23		0·338	1·64				(12·5)
28. August	8h 11	0·549						(14)
	8 35		0·207	2·66				
	8 58	0·174			2·79			
	9 19		0·117	1·48		1·13	2·47	
	9 41	0·197			2·06			15·1
	10 04					1·06	1·72	
	10 16		0·352	0·56				
	10 26				3·37			
	10 49					0·82	4·11	
	11 12				3·34			
	11 26	0·399						
	11 42					1·38	2·42	(16) 17·4

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 0—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
12·5	100%	SW	4/5	47° 26′ N, 42° 49′ W.
		SW	4/5	
11·8	96			Nebel unter Wolken.
				Weiße Kämme auf den Wellen.
		SW	4/5	
11·7	97			
				Regenböe.
		WSW	4	Dichter Nebel. Luft ganz undurchsichtig.
		W	4	Dichter Nebel.
		W	3	Strat. cirr. 2. Leicht bewegte See.
				Sonnenschein.
11·25	88%			Klarer Himmel, Horizont weißlich. Luft nicht ganz klar.
		W	3	
11·9	80	W	3	Klarer Himmel, Luft klar.

Datum	Zeit		E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
28. August	1h	16				3·84			15·8
	1	38					1·23	3·12	
	1	44	0·352						
	2	04		0·178	1·97	3·72			(15
	2	28					0·7	5·31	
	2	55				2·45			
	3	20	0·305				0·55	4·45	
	3	50		0·376	0·81	3·05			(17)
	4	11	0·333				0·71	4·3	16·2
	4	36		0·268	1·25		1·01		
	5	—	0·413			1·19			
	5	23					1·32	0·9	
	5	30		0·371	1·11				
	5	44	0·587			3			
	6	52				1·61			15·8
	7	—		0·531	1·11		1·74	0·93	
	7	37	0·986			3·89			
	7	40		0·704	1·4				
	7	55					1·29	3·02	(16
29. August	8h	30	0·169			2·54			17·5
	8	50		0·122	1·38		0·53	4·79	18
	9	12	0·254			2·35			
	9	30		0·235	1·08		1·08	2·18	
	9	53				3·73			
	10	—	0·24						
	10	13					1·25	2·98	
	10	24		0·258	0·93				
	10	30	0·573			2·17			
	10	54					0·56	3·88	
	11	13				2·9			
	11	30	0·573				1·22	2·38	

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 0—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
12·05	89%			45° 53′ N, 49° 46′ W.
				Leicht bewegte See.
		W	3	
12·7	92	WSW	3	
		WSW	3	
12·6	93			
		WSW	3	Klarer Himmel. Leicht bewegte See.
		SW	2	Cum. str. 2. In der Nacht war starker Tau.
14	90%			
				Sonne. Schwacher Seegang. Horizont ziemlich klar.
		SW	2	
				Str. cum. cirr. 1.

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
29. August	11h 46		0·263	2·18	2·46			(19·5)
	1 46				6·1			
	2 07					1·53	3·99	
	2 20	0·554						
	2 25				3·19			
	2 40		0·197	2·81				
	2 45					1·18	2·7	
	4 —	0·559			3·08			(21)
	4 22		0·319	1·75		1·58	1·95	
	6 49	0·305			4·3			
	7 10		0·38	0·8		1·19	3·61	(20)
30. August	8h 21	0·235						(17)
	8 41		0·258	0·91				
	8 55				2·951			
	9 02	0·301						
	9 20		0·150	2		1·17	2·52	
	9 30				2·84			
	9 54					1·33	2·14	
	11 —				4·03			
	11 10	0·610						
	11 21					1·7	2·37	
	11 30		0·188	3·25				(19·6)
	1 15	0·498						
	1 38		0·329	1·51	3·79			
	1 56	0·193				0·69	5·49	
	2 18		0·207	0·93	4·25			
	2 42					1·69	2·51	
	4 15		0·254		3·48			(19·5)
	4 35	0·371		1·46		1·13	3·08	
	5 18	0·432			2·53			

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 1—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
		SSW	3	43° 56′ N, 56° 43′ W.
		SSW	3	
		SSW	3	Str. cum. cirr. 6. Leichter Seegang.
		WSW	3	Str. cum. cirr. str. 4.
		NNE	3	Cum. cirr. str. 7. Leichter Seegang. Westliche Dünung.
		NNE	3	
		NNE	3	Cum. str. cirr. str. 5. 42° 6′ N, 63° 23′ W.
		NNE	3	
		NE	3	

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.
30. August	5^h 36		0·169	2·56		2·08	1·22	
	6 30		0·235		2·81			
	6 45	0·352		1·5		1·54	1·82	
	7 22				2·79			
	7 40					0·96	2·91	(19,
31. August	6^h 56				3·06			(16,
	7 11					1·49	1·49	
	8 26	0·554						(16)
	8 40				2·81			
	8 50		0·178	3·11				
	8 57					1·33	2·11	
	9 11	0·38						
	9 22				3·7			
	9 30		0·249	1·53				
	9 39					1·8	2·06	
	10 24				2·87			
	10 40					1·28	2·24	
	11 35				2·47			
	11 50					1·21	2·04	(19,
	1 45				4·58			
	2 02	0·549				1·68	2·73	
	2 20				4·37			
	2 27		0·193	2·85				
	2 36					1·72	2·54	
	4 37		0·249					
	5 —	0·376		1·51				
	5 40				2·59			(19

Dampf-druck	Relat. Feuch-tigkeit	Wind-richtung	Wind-stärke 0—12	Wetter, Seegang, Schiffsort etc.
		NE	3	
				Cum. str. cirr. 7.
		NE	3	Seegang etwas stärker.
		NE	4	Ganz blauer Himmel.
				Mäßiger Seegang.
		NE	4	Luft sehr klar.
		NE	4	
				Str. cirr. 1.
		NE	4	40° 34′ N, 70° 10′ W.
		NE	3	
		NE	3	Str. cirr. str. 3.
				Wellen hören fast auf.
			0	

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	
16. Oktober	3h 09				1·15	0·4	2·87	Auf der Türkenschanze, im Westen von Wien, auf einer größeren Wiese, hochgelegen. Sonne. Himmel zur Hälfte mit Cumuli und Alto Strat. bedeckt. Schwacher Westwind.
	4 —				1·09			
	4 15					0·35	3·11	
19. Oktober	10h 25				2·64			Auf der Türkenschanze.
	10 45					0·96	2·75	Sonne.
	11 02				2·6			Schwacher Westwind. Cirro str.
	11 20	0·24				1·46	1·78	Cum.
	11 40		0·061	3·93	2·62			
	12 —	0·254						
	12 30		0·244	1·041		1·83	1·43	
	12 50	0·24			3·43			
	1 10		0·169	1·42		1·7	2·02	
	3 50	0·319			2·38			
	4 10		0·188	1·697		0·98	2·43	
	4 40	0·193			1·64			
	5 —		0·098	1·97		0·88	1·80	
20. Oktober	12h 38	0·211			1·60			
	1		0·141	1·406		0·90	1·68	

Datum	Zeit	E_-	E_+	Q	a_-	a_+	q	Temp.	
6. August	9h 15	0·761							In Lunz im Wienerwald auf der Spitze eines Hügels.
	9 43		0·967	0·787					
	11 14		0·545						Reiner Himmel.
	11 57	0·582		1·068					
	6 20	0·69							
	6 50		1·596	0·43					
7. August	8h 26	1·061							In Lunz.
	8 53		0·779	1·362					
	9 22	0·967						19·5	
	9 54		0·554	1·745					
	10 20	0·798						26	
	10 51		0·638	1·25					
	2 20	0·859						29	
	2 58		0·592	1·451				22	
	3 27	0·892							
	3 58		0·573	1·556					
	4 31	0·902							Wolken ziehen herauf.
	4 59		0·794	1·136					
	5 25	0·883							
	5 50		0·484	1·824					
	6 25	0·84							Gewitter um 6h 30.
	6 46		0·981	0·856					

Mittel aus den Tageszeiten.

a) Regnerisches Wetter.

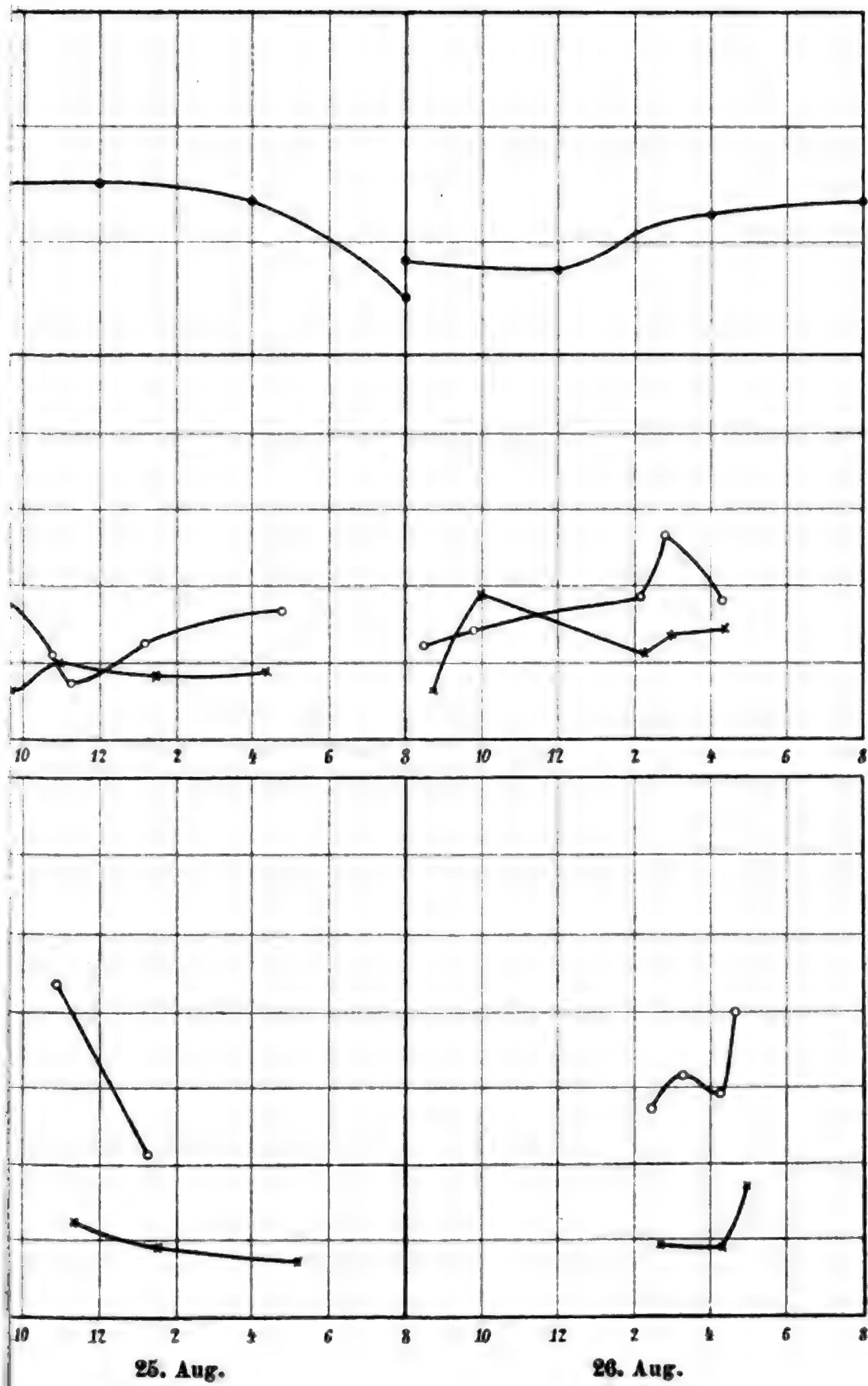
Zeit	E_-	n	E_+	n	Q	a_-	n	a_+	n	q	Temperatur
8h — 9h	0·302	4	0·317	2	1·11	3·55	1	—	—	—	14·7
9 — 10	0·382	6	0·247	6	1·66	1·4	3	0·8	2	3·23	—
10 — 11	0·353	7	0·266	7	2·21	3·01	4	1·28	3	1·7	—
11 — 12	0·365	3	0·162	4	1·3	1·3	3	1·03	3	2·79	—
12 — 1	—	—	—	—	—	—	—	0·34	1	2·67	15·2
1 — 2	0·31	2	0·216	2	1·44	2·02	4	1·00	3	2·61	—
2 — 3	0·458	5	0·33	3	1·28	2·06	2	0·65	3	2·75	—
3 — 4	—	—	0·362	2	1·59	3·2	1	—	—	—	—
4 — 5	0·356	5	0·187	4	3·43	2·5	3	0·58	3	3·34	16·1
5 — 6	0·387	2	0·574	3	1·23	0·28	1	0·91	2	2·45	—
6 — 7	0·293	3	0·296	1	1·06	0·52	—	—	—	—	—
7 — 8			0·190	2	1·64			0·81	2	1·49	14·8

b) Schönes Wetter.

Zeit	E_-	n	E_+	n	Q	a_-	n	a_+	n	q	Temperatur
7h— 8h	—	—	—	—	—	3·06	1	1·49	1	2·05	—
8 — 9	0·336	5	0·191	4	2·01	2·77	4	0·93	2	3·45	16·1
9 —10	0·283	4	0·188	4	1·52	2·93	5	0·13	5	2·27	—
10 —11	0·24	1	0·305	2	0·74	2·8	3	1·00	5	2·98	—
11 —12	0·527	3	0·225	2	2·71	3·04	5	1·38	4	2·3	18·5
1 — 2	0·348	3	0·329	1	1·51	0·96	2	0·96	2	4·3	—
2 — 3	0·551	2	0·194	4	2·14	1·41	6	1·41	6	3·3	—
3 — 4	0·432	2	0·376	1	0·81	3·05	1	0·55	1	4·45	19·2
4 — 5	0·36	3	0·272	4	1·49	3·28	2	1·11	4	3·11	—
5 — 6	0·477	3	0·27	2	1·84	2·33	4	1·7	2	1·06	—
6 — 7	0·319	2	0·235	1	1·5	2·9	3	1·54	1	1·38	—
7 — 8	0·986	1	0·538	3	1·1	3·34	2	1·29	4	3·18	18·5

c) Gesamtmittel.

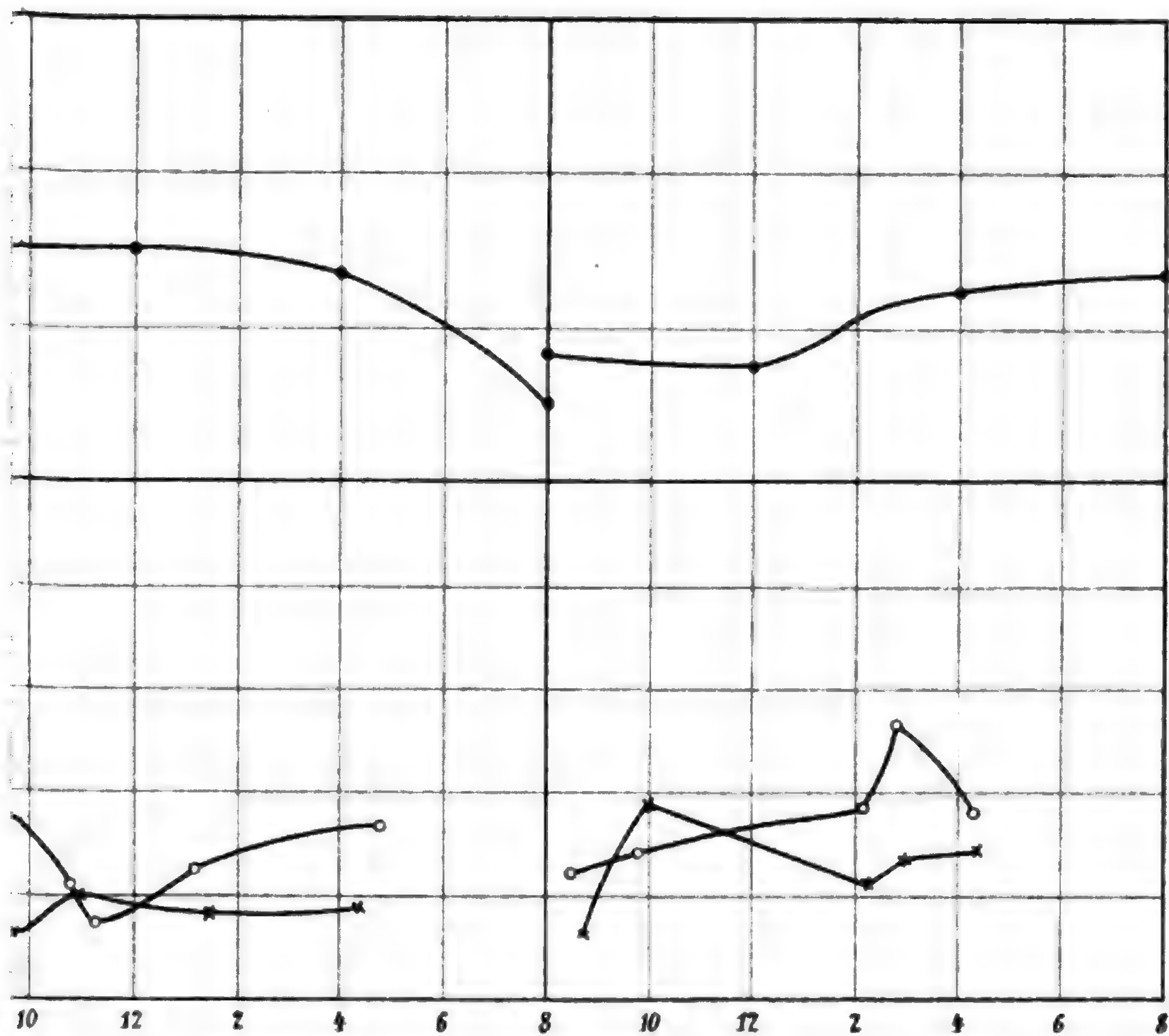
Zeit	E_-	n	E_-	n	Q	a_-	n	a_+	n	q	Temperatur
7^h—8^h	—	—	—	—	—	3·06	—	1·49	—	2·05	—
8 — 9	0·310	—	0·254	—	1·56	3·16	—	0·93	—	3·45	15·4
9 —10	0·333	—	0·217	—	1·59	2·16	—	0·46	—	2·75	—
10 —11	0·296	—	0·254	—	1·47	2·9	—	1·14	—	2·34	—
11 —12	0·446	—	0·193	—	2	2·17	—	1·2	—	2·54	—
12 — 1	—	—	—	—	—	—	—	0·34	—	2·67	16·8
1 — 2	0·329	—	0·272	—	1·47	1·49	—	0·98	—	3·45	—
2 — 3	0·504	—	0·262	—	1·71	1·73	—	1·03	—	3·02	—
3 — 4	0·432	—	0·369	—	1·2	3·12	—	0·55	—	4·45	17·6
4 — 5	0·358	—	0·229	—	2·46	2·89	—	0·84	—	3·22	—
5 — 6	0·432	—	0·422	—	1·53	1·3	—	1·3	—	1·75	—
6 — 7	0·306	—	0·265	—	1·28	1·71	—	1·54	—	1·38	—
7 — 8	0·980		0·368	—	1·37	3·34		1·05		2·33	16·6

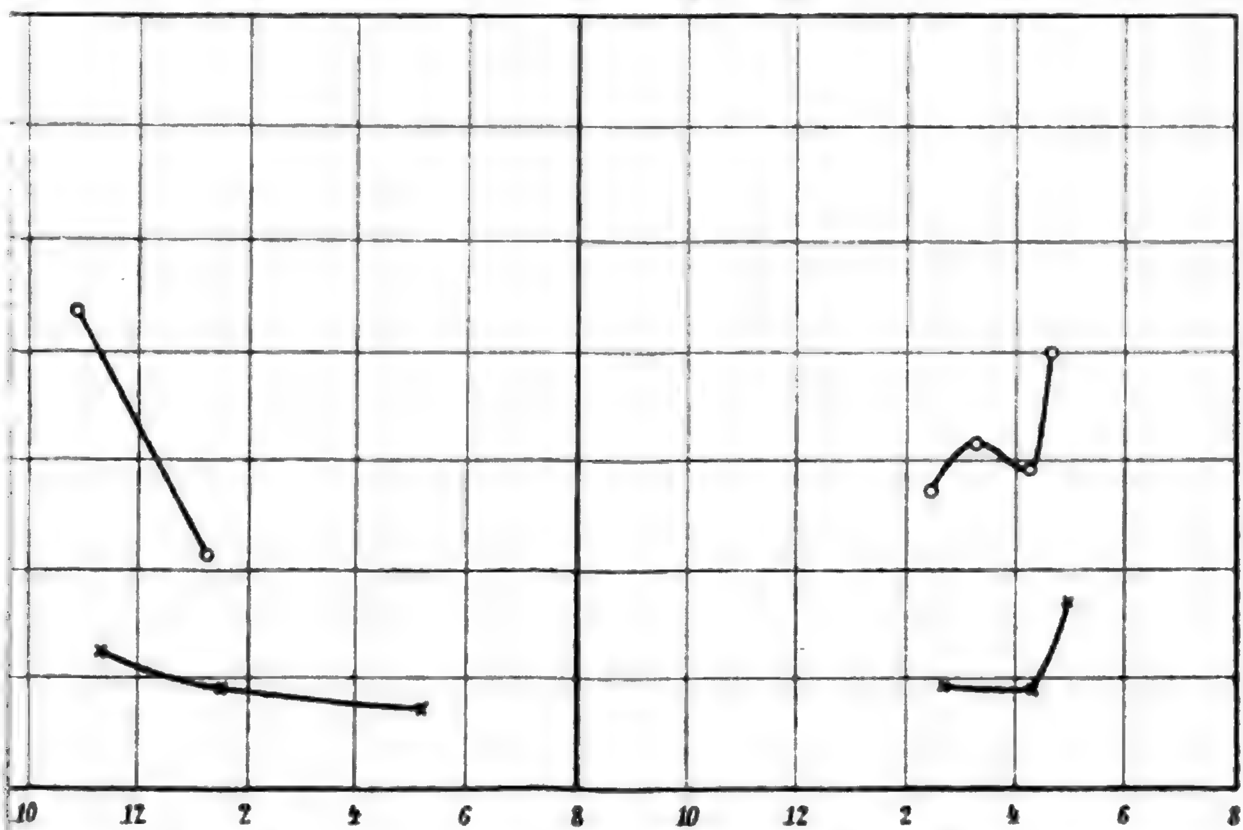


Lith. Druck aus der k. k. Hof- u. Staatsdruckerei

c) Gesamtmittel.

Zeit	E_-	n	E_-	n	Q	a_-	n	a_+	n	q	Temperatur
7^h— 8^h	—	—	—	—	—	3·06	—	1·40	—	2·05	—
8 — 9	0·319	—	0·254	—	1·56	3·16	—	0·93	—	3·45	15·4
9 —10	0·333	—	0·217	—	1·59	2·16	—	0·46	—	2·75	—
10 —11	0·296	—	0·254	—	1·47	2·9	—	1·14	—	2·34	—
11 —12	0·446	—	0·193	—	2	2·17	—	1·2	—	2·54	—
12 — 1	—	—	—	—	—	—	—	0·34	—	2·67	16·8
1 — 2	0·329	—	0·272	—	1·47	1·49	—	0·98	—	3·45	—
2 — 3	0·504	—	0·262	—	1·71	1·73	—	1·03	—	3·02	—
3 — 4	0·432	—	0·369	—	1·2	3·12	—	0·55	—	4·45	17·6
4 — 5	0·358	—	0·229	—	2·46	2·89	—	0·84	—	3·22	—
5 — 6	0·432	—	0·422	—	1·53	1·3	—	1·3	—	1·75	—
6 — 7	0·306	—	0·265	—	1·28	1·71	—	1·54	—	1·38	—
7 — 8	0·086		0·368	—	1·37	3·34		1·05	-	2·33	16·6



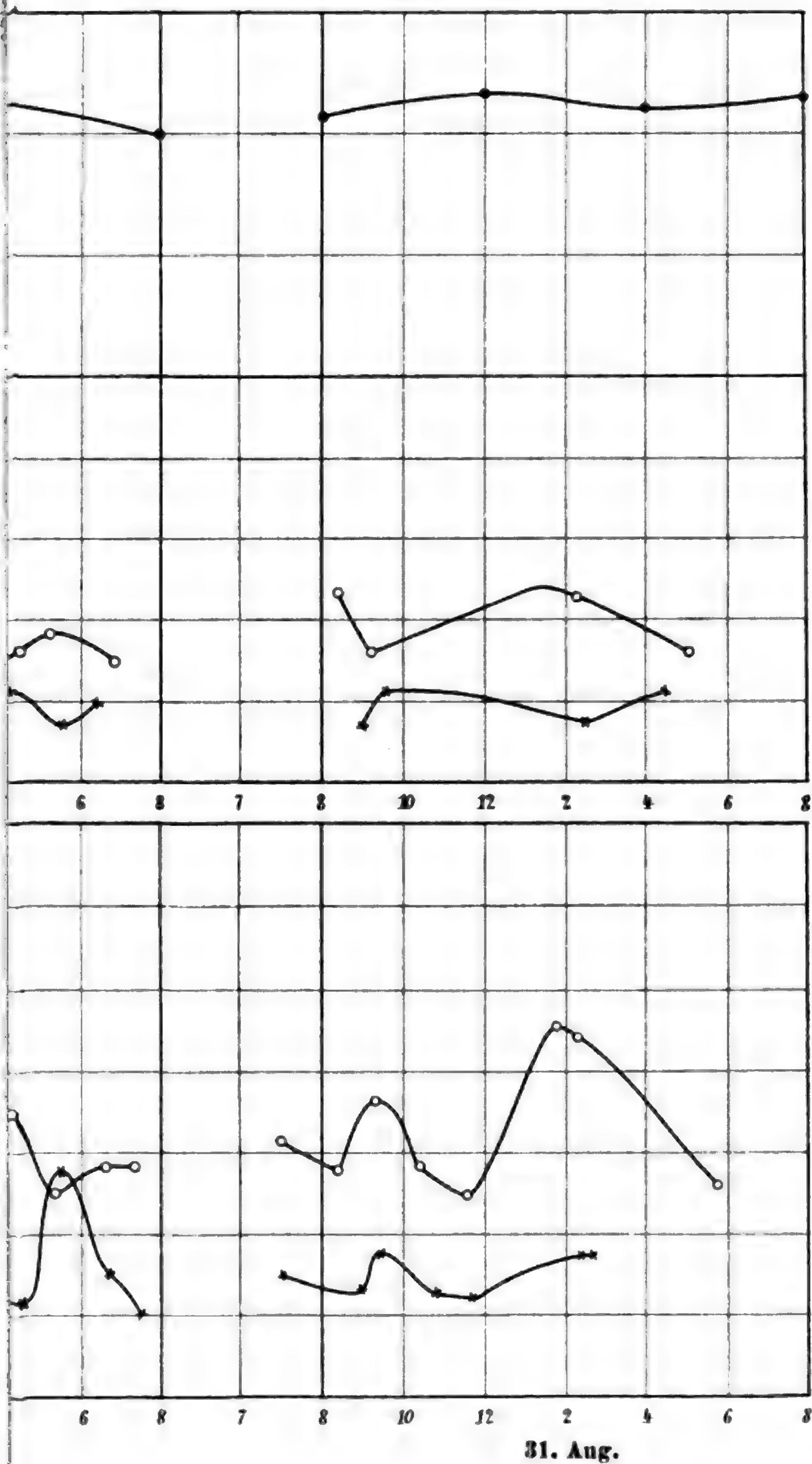


25. Aug.

26. Aug.

Lith. Druck aus der k.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Tafel II.



Lith u Druck aus der k. k. Hof u Staatsdruckerei

Über die Büschelentladung

von

Dr. **Karl Przibram.**

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Dezember 1904.)

In einer Reihe von Arbeiten[1] habe ich mich mit der Büschelentladung beschäftigt und es hat sich dabei eine gewisse Vorstellung über diesen Vorgang ausgebildet, die ich in der letzten Veröffentlichung schon andeutungsweise besprochen habe. Im folgenden möchte ich nun dieser Anschauung eine präzisere Form geben. Um jedem Mißverständnisse vorzubeugen, bemerke ich gleich hier, daß es sich nicht um eine Theorie des Büschels handelt, sondern um die Fiktion eines Vorganges, wie er im Büschel in ähnlicher, nur etwas verwickelterer Weise stattfinden könnte und an dessen Hand man das Verhalten des Büschels unter verschiedenen Bedingungen verfolgen respektive verständlich machen kann. Durch die Vereinfachung der Annahmen verzichten wir im Interesse der Übersichtlichkeit auf quantitative Übereinstimmung.

In einem Volumelement eines Gases, in welchem eine gewisse elektrische Feldstärke herrscht, kann die Elektrizitätsleitung auf zwei ziemlich scharf zu unterscheidende Arten vor sich gehen:

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 108, p. 1161 bis 1171, 1899; Bd. 109, p. 902 bis 904, 1900; Bd. 110, p. 960 bis 963, 1901; Bd. 113, p. 439 bis 468, 1904. Phys. Zeitschr., Bd. 4, p. 581 bis 583, p. 842 bis 845, 1903. Ann. d. Phys., Bd. 14, p. 378 bis 383, 1904.

1. Durch Wanderung schon vorhandener Ionen, ohne daß in dem betreffenden Volumelemente Ionisierung stattfindet — dunkle Entladung;

2. durch Ionisierung durch Ionenstoß[1] in dem Volumelement selbst, wobei die Ionen und zwar sowohl die positiven, wie die negativen, genügende Energie dem Feld entnehmen, um neutrale Moleküle zu zertrümmern, und so neue Ionen liefern. Da bekanntlich die Ionisierungsspannung für negative Ionen kleiner ist als für positive,[2] so muß die auf die freie Weglänge des Ions entfallende Spannungsdifferenz in diesem Falle größer sein als die größere, positive Ionisierungsspannung, die Feldstärke also größer als ein gewisser Wert, F_p, sein. Man beobachtet dabei ein starkes Leuchten. Es kann auch der Fall (3) eintreten, daß nur die negativen Ionen ionisieren, nicht aber der umgekehrte Fall. Diese Entladungsform wird im allgemeinen an Wirksamkeit und Leuchtkraft zwischen den beiden anderen Formen stehen.

Die Betrachtung der Büschelentladung zeigt uns eine von der Elektrode ausgehende leuchtende Entladung und daranschließende dunkle Entladung (Ionenwanderung) durch den übrigen Raum.

Wovon hängt nun die Ausdehnung des Büschels, d. h. des leuchtenden Entladungsteiles, ab?

Ist die Ausdehnung sehr klein, d. h. das Leuchten auf eine dünne Schichte an der Elektrode beschränkt, so liegt Spitzenstrom vor (zweifache Grenzionisierung, Stark, l. c., p. 67, 70). Um diesen zu erhalten, müsse die Elektrode auf das Potential P_0 gebracht werden. Es ist bekannt, daß cet. par. P_0 für negative Elektrode kleiner ist als für positive.

In einem Punkte O befinde sich eine kleine kugelförmige Elektrode vom Radius a, umgeben von einer konzentrischen Kugelfläche von sehr großem Radius, deren Potential auf Null

[1] Über die Ionisierung durch Ionenstoß siehe J. J. Thomson, »Conduction of Electricity through gases«, Cambridge, 1903, p. 376; J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902, p. 57. — Auf die Bedeutung der positiven Ionen für die disruptive Entladung im Inneren des Gases, nicht nur an der Elektrode selbst, hat meines Wissens zuerst J. S. Townsend, »Electrician«, 50, p. 971, 1903, hingewiesen.

[2] Vergl. J. Stark, l. c. p. 57.

gehalten werde. Der Elektrode werde ein elektrischer Strom von der Stärke J zugeführt. Findet keine Leitung im Gasraume statt, so wird das Potential P in O beständig anwachsen und zwar mit einer der Stromstärke J direkt, der Elektrodenkapazität verkehrt proportionalen Geschwindigkeit:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{a} J.$$

Nun finde innerhalb einer Kugelfläche, die die Elektrode eng umschließt und deren Radius daher noch gleich a gesetzt werden kann, zweifache Ionisierung durch Ionenstoß statt, so daß n Ionen pro Zeiteinheit entstehen. Die eine Ionenart wird jetzt radial von O weg wandern mit einer Geschwindigkeit V, die gleich ist der spezifischen Ionengeschwindigkeit v mal der Feldstärke F. Das Potential P der Elektrode wird jetzt nicht mehr so rasch anwachsen, sondern es wird von J der durch die Ionen fortgeführte Strom zu subtrahieren sein, den wir der Ionengeschwindigkeit proportional setzen (Annahme 1).

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{a}(J - k_1 v F). \tag{1}$$

Für F ist der Wert der Feldintensität an der Oberfläche der Kugel vom Radius a zu setzen. Findet keine Leitung statt, so ist an irgend einem Punkt A im Abstand x von O: $F = \frac{aP}{x^2}$ und an der Oberfläche von O: $F = \frac{P}{a}$. Durch die Anwesenheit der Ionen im Felde wird jedoch die Intensität desselben geändert. In erster Annäherung wird $F = \frac{k_2 a P}{x^m}$ gesetzt werden können, wo k_2 ein Proportionalitätsfaktor und m eine positive Zahl ist[1]; an der Oberfläche von O ist daher $F = \frac{k_2 P}{a^{m-1}}$ (Annahme 2). Gleichung 1) wird jetzt

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{a}\left(J - k\frac{vP}{a^{m-1}}\right), \tag{2}$$

[1] m wird umso größer sein, je größer v ist, doch soll angenommen werden, daß die Störung des Feldes, das heißt die Abweichung von der Form $\frac{aP}{x^2}$ nicht groß und daher m für verschiedene Ionenarten nicht sehr verschieden sei.

wo $k = k_1 k_2$ gesetzt ist. Wir nehmen noch (3) an, daß k von P unabhängig ist. Es ist dies in Wirklichkeit wohl nicht der Fall, da jedenfalls die Zahl n der pro Zeiteinheit gebildeten Ionen darin enthalten sein wird. Die Annahme: k proportional P läßt sich auch leicht durchführen, bietet aber nichts wesentlich verschiedenes.

Das Integral der Gleichung 2) ist

$$-\frac{a^m}{kv}\log\operatorname{nat}\left(\frac{J}{a}-\frac{kv}{a^m}P\right)+C=t$$

und

$$C'\left(\frac{J}{a}-\frac{kv}{a^m}P\right)=e^{-\frac{kv}{a^m}t}.$$

Für $t = 0$ sei $P = P_0$, dann ist

$$C'=\frac{1}{\frac{J}{a}-\frac{kv}{a^m}P_0}$$

und

$$P=\frac{a^{m-1}}{kv}\left[J-\left(J-\frac{kv}{a^{m-1}}P_0\right)e^{-\frac{kv}{a^m}t}\right], \tag{3}$$

$$F=\frac{k_2 a^m}{kvx^m}\left[J-\left(J-\frac{kv}{a^{m-1}}P_0\right)e^{-\frac{kv}{a^m}t}\right] \tag{4}$$

und wenn statt $\frac{k_2}{k}$ wieder $=\frac{1}{k_1}$ geschrieben wird:

$$x=\left\{\frac{1}{k_1}\frac{a^m}{vF}\left[J-\left(J-\frac{kv}{a^{m-1}}P_0\right)e^{-\frac{kv}{a^m}t}\right]\right\}^{\frac{1}{m}}; \tag{5}$$

x ist hier die Entfernung von O, in welcher nach Verlauf der Zeit t eine bestimmte Feldstärke F besteht.

Es ist bekannt, daß die disruptive, leuchtende Entladung nicht sofort eintritt, sobald die nötige Feldintensität erreicht ist (Entladeverzug, Warburg). Wenn der Elektrode O Elektrizität zugeführt wird, so wird sich die Entladung nicht sofort ausbreiten, sobald an der Grenze der Ionisierungsschichte die

Ionisierungsspannung erreicht ist. Die Spannung wird vielmehr Zeit haben, weiter in das Feld vorzurücken, entsprechend der Gleichung 5). Erst nach einiger Zeit wird dann in dem ganzen Gebiet, innerhalb dessen die Ionisierungsspannung überschritten ist, plötzlich Entladung eintreten. Nehmen wir an, dieser Zusammenbruch des Gases finde so rasch statt, daß der Nachfluß von Elektrizität nach der Elektrode nicht in Betracht kommt, so wird durch die konzentrische Ausbreitung der Entladung das Potentialgefälle außerhalb des Entladungsgebietes nicht geändert. Denn die Ladung bleibt dann dieselbe, nur ist sie über eine größere Kugelfläche verteilt, was auf das Feld außerhalb ohne Einfluß ist. Die Entladung kann daher beiläufig nur so weit vordringen, als Gleichung 5) angibt, wenn F gleich F_p, der zur Ionisierung durch positive Ionen erforderlichen Feldstärke, und t gleich dem Entladeverzug gesetzt wird. In Wirklichkeit wird bei der häufigsten Versuchsanordnung, bei der sich zwei Elektroden gegenüberstehen, der Schwerpunkt der Ladung sich bei der Entladung gegen die andere Elektrode bewegen und das Feld daher in der Entladungsrichtung stärker werden. Die Entladung kann sich daher weiter ausbreiten und alle Faktoren, welche eine Verlängerung des Büschels bewirken, werden in erhöhtem Maße zur Geltung kommen.

Nach der Entladung haben sich die Spannungen im Entladungsgebiet ausgeglichen und nun wird das Potential von O wieder ansteigen, bis abermals das Entladungspotential überschritten ist. Gleichung 5) gestattet, einige Bedingungen für die Länge des Büschels anzugeben, wenn auch bei den mehr oder weniger willkürlichen Annahmen, welche ihr der Einfachheit halber zu Grunde gelegt wurden, eine quantitative Übereinstimmung nicht zu erwarten ist. Ich gehe nun über zur Diskussion der Formel und lasse jedem Resultate die entsprechenden, experimentell gefundenen Tatsachen folgen.

1. Abhängigkeit von t: Die Länge des Büschels wächst mit dem Entladeverzug. Aufhebung des Entladeverzuges erschwert die Bildung langer Büschel.

Beobachtet: Glühende Elektroden, Ultraviolettes Licht, Röntgen- und Becquerelstrahlen, die den Entladeverzug ver-

kürzen, bewirken bei nicht zu kleinen Funkenstrecken den Übergang des Funkens in ein Büschel respektive das Zusammenziehen eines langen Büschels. v. Wesendonck[1] (glühende Elektroden), J. Klemenčič[2] (Ultraviolett); Himstedt[3] (Röntgen- und Radiumstrahlen); A. Stafanini und L. Magri[4], D. M. Sokoltzow[5] (Radiumstrahlen). Es spielt hier noch ein Faktor mit, nämlich $\frac{1}{k_1}$, wo k_1 die Zahl der pro Zeiteinheit gebildeten Ionen enthält. Wird diese größer, so muß also x kleiner werden. Hierher gehört auch ein von mir beschriebener Versuch,[6] bei dem die Beseitigung des Entladeverzuges respektive Vermehrung der Ionenzahl durch eine andere vorhergehende Entladung bewirkt wird: Eine große, mäßig evakuierte Glaskugel wird in das Feld einer mit einem Teslapol verbundenen Metallscheibe gebracht. Man sieht dann im Inneren der Kugel einen ruhigen Lichtnebel (negatives Glimmlicht) und lange, zuckende, von der Scheibe weggerichtete Strahlen (positives Büschel). Durch langsames Entfernen der Scheibe kann man das Büschel zum Verschwinden bringen, während das Glimmen bleibt. Lenkt man nun durch Nähern der Hand das Glimmen und mit ihm die überschüssigen Ionen ab, so schießen sofort an den vom Glimmen entblößten Stellen die Strahlen des Büschels hervor.

Wenn der Entladeverzug beiläufig so groß ist, wie die zur Erreichung des stationären Zustandes erforderliche Zeit (nach Gleichung 3), was am ehesten für kleines a und J, die gebräuchlichsten Versuchsbedingungen bei der Büschelentladung, eintreten wird, dann wird in Gleichung 5) der die Exponentialgröße enthaltende Posten zu vernachlässigen sein und man erhält als Länge des vollständig ausgebildeten Büschels

$$x = \left(\frac{a^m J}{k_1 v F}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

[1] Wied. Ann., Bd. 30, p. 1 bis 51, 1887.
[2] Wied. Ann., Bd. 59, p. 63 bis 65, 1896.
[3] Ann. der Phys., Bd. 4, p. 531, 1901.
[4] Atti d. Accad. d. Lincei, Bd. 13, p. 268 bis 271, 1904.
[5] Auszugsweise in »Science Abstracts«, Bd. 7, p. 343, 1904.
[6] Diese Sitzungsber., Bd. 113, p. 462, 1904.

2. x wächst mit wachsendem a (Elektrodenkapazität). Dies gilt jedoch nur bei kleinen Elektroden und geringer Stromstärke, wenn nach Gleichung 3) der stationäre Zustand bald erreicht ist. Wird dagegen a zu groß, so kann die Zeit bis zur Erreichung des stationären Zustandes beträchtlich größer werden als der Entladeverzug, das Büschel wird auftreten, bevor die Maximalspannung erreicht ist, wird also wieder kürzer. Dies wird umso eher eintreten, je kleiner v ist, wie die Exponentialgröße $e^{-\frac{kv}{am}t}$, d. h. eher beim positiven als beim negativen Büschel.

Beobachtet: Man überzeugt sich leicht, daß, wenn zwischen den Kugelkonduktoren einer kleinen Influenzmaschine ein Büschelstrom übergeht, derselbe sich sofort zusammenzieht, wenn man auf die Kugeln Spitzen aufsetzt. Es ist dies ja die unangenehme Wirkung, die Rauheiten oder Staubteilchen auf den Konduktoren auf das Funktionieren der Maschine ausüben. Holtz[1] gibt Abbildungen von Büscheln an verschieden großen Kugeln; es zeigt sich, daß mit wachsendem Kugelradius die negativen Büschel länger, die positiven kürzer werden. M. Toepler[2] findet bei geringer Stromstärke ein Maximum der Funkenlänge bei einer bestimmten Elektrodengröße, während bei größerer Stromstärke ein Abnehmen der Länge bei abnehmendem Kugelradius nicht zu beobachten ist.

3. x wächst mit wachsendem J.

Beobachtet: Bei steigender Stromstärke geht der Spitzenstrom in ein Büschel, das Büschel in einen die ganze Entladungsstrecke überbrückenden Bogen über (M. Toepler).[3]

4. x wächst mit abnehmendem F, der Feldstärke, welche erforderlich ist, damit Ionisierung durch den Stoß positiver Ionen stattfindet.

Dies läßt sich nicht direkt prüfen, da v und F nicht voneinander unabhängig sind. Je größer v der positiven Ionen,

---

[1] Mitteilungen des naturw. Ver. für Neu-Vorpommern und Rügen, 1882, p. 79 (Tafel II).

[2] Ann. der Phys., Bd. 10, p. 730, 1903.

[3] Ann. der Phys., Bd. 2, p. 560 bis 635, 1900.

desto kleiner F. Wird z. B. das Gas verdünnt, so nimmt F ab, v aber zu.

Im allgemeinen wird angenommen, daß die Ionisierungsspannung vom Druck unabhängig, also F der freien Weglänge des Ions verkehrt, daher dem Druck direkt proportional, v dagegen dem Druck verkehrt proportional ist. Das Produkt vF wäre dann vom Druck unabhängig. Dagegen ist $\frac{1}{k_1}$ vom Druck abhängig, da k_1 die Zahl der pro Zeiteinheit gebildeten Ionen enthält und diese Zahl mit der Zahl der neutralen Moleküle, also mit dem Druck zunehmen dürfte. Dies gäbe die Zunahme von x mit abnehmendem Druck, wie die Beobachtung sie zeigt. Auch die eingangs erwähnte Annahme: k proportional P führt zu diesem Resultat. Man erhält dann für x einen Ausdruck:

$$x = \left(\frac{a}{F}\sqrt{\frac{Ja^{m-1}}{Cv}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

für großes t.

Da F vor dem Wurzelzeichen, v unter demselben steht, so wird x mit abnehmendem Druck zunehmen.

Ebenso sind die Büschel in Wasserstoff, obwohl v größer ist als in Luft, doch größer, weil F für Wasserstoff kleiner ist. Aus demselben Grunde sind die Büschel in Luft größer als in Kohlendioxyd (vergl. meine Beobachtungen an photographischen elektrischen Figuren[1]).

5. Bei gleichbleibendem F wächst x mit abnehmendem v. In ein und demselben Gase ist F, da es nur auf die Ionisierungsspannung des positiven Ions ankommt, unabhängig vom Vorzeichen. Dagegen ist v für die positiven Ionen meist beträchtlich kleiner als für die negativen, es wird also das

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 108, p. 1161 bis 1171, 1899. — Wenn ein Zweifel bestehen konnte, ob diese Figuren, die durch Entladung längs der photographischen Platte erhalten wurden, wirklich eine ähnliche Abbildung der freien Büschelentladung geben, so ist derselbe durch die Versuche von E. Lietzau behoben, welche Proportionalität von Gleitfunkenstrecke zu Luftfunkenstrecke ergeben. Vergl. W. Voege, Ann. der Phys., Bd. 14, p. 568, 1904.

positive Büschel meist länger sein als das negative. Bildet man das Verhältnis der Länge des positiven Büschels zu der des negativen, so wird dieses Verhältnis umso kleiner sein, je kleiner das Verhältnis der Geschwindigkeit des negativen Ions zu der des positiven in dem betreffenden Gas ist.

Beobachtet: Schon an einer anderen Stelle[1] habe ich die folgende kleine Tabelle angegeben.

Gas	Verhältnis des Durchmessers der positiven zu dem der negativen Figur[2]	Verhältnis der Beweglichkeit der negativen Ionen zu der der positiven Ionen[3]	
		trocken	feucht
Luft	4·5	1·375	1·10
O_2	4·1	1·32	1·18
H_2	3·5	1·19	1·05
CO_2	2·6	1·07	0·915

Die letzte Kolumne zeigt, daß in feuchtem CO_2 eine Umkehrung der Ionenbeweglichkeit stattfindet und in der Tat erhält man in diesem Gase leicht Figuren, bei denen das negative Büschel das positive an Größe übertrifft.[4] Ich kann noch folgende Daten hinzufügen:

Zeleny[5] fand bei früheren Versuchen für Stickstoff einen etwas kleineren Wert des Verhältnisses der Geschwindigkeiten als in Luft: Luft 1·24, N_2 1·23. Auch das Verhältnis der Büschel fand ich kleiner als in Luft, beiläufig so wie in

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 113, p. 439, 1904. — Ann. der Phys., Bd. 14, p. 378, 1904.

[2] Aus Messungen an den bereits mehrmals erwähnten photographischen Figuren. Diese Sitzungsber., Bd. 108, p. 1161, 1899.

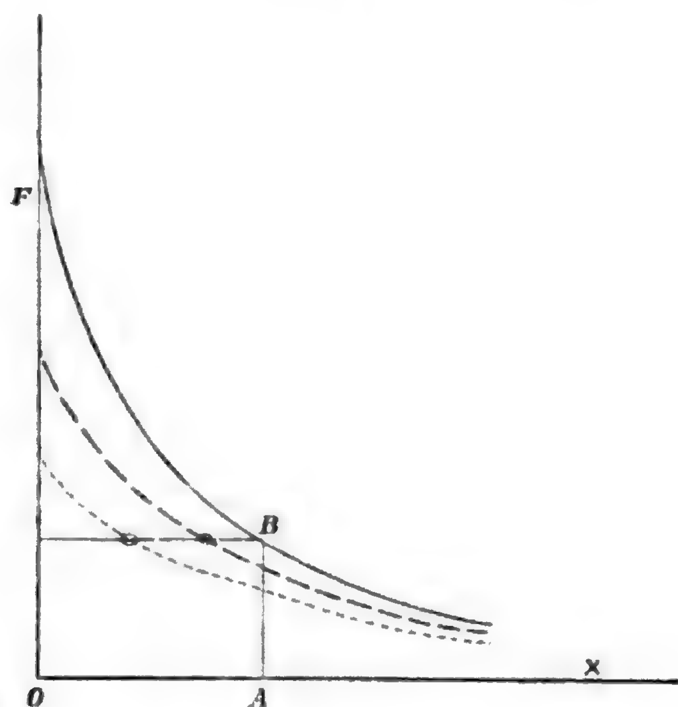
[3] Zeleny, Phil. Trans. A. 195, p. 193, 1900.

[4] L. c., Fig. 8. — Dasselbe für Lichtenberg'sche Figuren: Reitlinger, Diese Sitzungsber., Bd. 43, p. 535, 1861.

[5] Phil. Mag., Bd. 46, p. 120, 1898.

Wasserstoff. Für Leuchtgas fand Zeleny das Verhältnis der Geschwindigkeiten gleich 1·105 (Luft 1·24). Dementsprechend beobachtete Holtz[1] bei Ersetzung der Luft durch Leuchtgas eine Zusammenziehung des positiven und eine Ausdehnung des negativen Büschels.

Künstliche Beschleunigung der Ionen durch einen Luftstrom hindert die Büschelbildung: Ausblasen eines Büschels (v. Wesendonck[2]). Umgekehrt gibt eine negative Elektrode eine eigentümliche Büschelentladung, wenn die Elektrizitätsstreuung durch Ionenwanderung dadurch verhindert wird, daß



ein zu einer feinen Öffnung ausgezogenes Glasrohr über die Elektrode geschoben wird (M. Toepler[3]).

Die Abhängigkeit der Büschelentladung von der Ionengeschwindigkeit kann man sich graphisch versinnlichen. Die Elektrode befinde sich in O (siehe die Figur). Die ausgezogene Kurve stelle den Verlauf der Feldintensität dar, wenn keine Leitung stattfände. Durch die Ionenwanderung wird die Feld-

[1] Karl's Rep., Bd. 17, p. 340, 1881. Vergl. O. Lehmann, Die elektrischen Lichterscheinungen. Halle 1898, p. 270.

[2] Wied. Ann., Bd. 40, p. 485, 1890.

[3] Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 560, 1900.

intensität an jedem Punkte des Feldes herabgesetzt und zwar um so mehr, je größer die Geschwindigkeit der Ionen ist. Für zwei verschiedene Ionenarten sollen sich die beiden unterbrochen gezeichneten Kurven ergeben und zwar die gestrichelte für die langsamere, die punktierte für die schnellere Ionenart. Ist die zum (leuchtenden) Durchschlagen des Gases erforderliche Feldstärke gegeben durch die Ordinate *AB*, so hat man durch *B* eine Parallele zur Abszissenachse zu ziehen; die Abszissen der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Abfallskurven geben dann die Länge der Büschel. In Wirklichkeit ändert sich die Ausdehnung des Büschels mit der Ionenbeweglichkeit viel rascher, als es bei unserem angenommenen Vorgang der Fall wäre; doch ist hier zu bemerken, daß in unserem Bilde der Schwerpunkt der Ladung stets in *O* bleibt, also durch die leuchtende Entladung das Spannungsgefälle außerhalb derselben nicht geändert wird, während im Büschel im allgemeinen, wie schon früher angegeben wurde, eine Verschiebung des Schwerpunktes der Ladung gegen die andere Elektrode, also eine Erhöhung des Spannungsgefälles an der Grenze der Entladung stattfindet und andrerseits die Verteilung der Entladung auf einzelne Radien statt über die ganze Kugel, Unregelmäßigkeiten in das Spannungsgefälle bringt. Diese beiden Umstände werden bewirken, daß die einmal im Vorteil befindliche Entladung sich noch viel weiter ausdehnen wird als im ganz symmetrischen Felde.

Ein weiterer und vielleicht der ausschlaggebende Grund für die Kleinheit des negativen Büschels ist auch noch darin zu suchen, daß, noch bevor die eigentliche Durchschlagsspannung (positive Ionisierungsspannung) erreicht ist, die negativen Ionen ionisierend wirken und daher die Zahl der für die Ionenwanderung verfügbaren Ionen zunimmt, also $\frac{1}{k_1}$ und damit auch x abnimmt.

6. x ist beim vollständig ausgebildeten Büschel, d. h. bei großem t, von P_0, dem Anfangspotential des Spitzenstromes, unabhängig.

Beobachtet: J. Precht[1] fand folgende Zahlen für P_0:

[1] Wied. Ann., Bd. 49, p. 150 bis 183, 1893.

In Luft ...... +2750 Volt und —2050 Volt.
In CO_2 ...... +3475 » » —2100 »

Das Verhältnis der beiden Zahlen ist also für Luft 1·34, für CO_2 1·65. Wäre also P_0 für die Büschellänge maßgebend, so sollte man erwarten, daß in CO_2 das positive Büschel im Verhältnis zum negativen größer wäre als in Luft, da in Luft dem größeren positiven Büschel das größere P_0 entspricht und das positive P_0 in CO_2 noch beträchtlich höher ist, auch im Vergleiche zum negativen, als in Luft. Tatsächlich sind aber, wie oben gesagt wurde, die Büschel in CO_2 einander viel ähnlicher als in Luft, so daß also P_0 keinen großen Einfluß haben kann.

7. Änderung des Verhältnisses der Länge des positiven zu der des negativen Büschels mit dem Gasdrucke.

Wenn sich die Büschel vollständig ausbilden können, wird dieses Verhältnis angenähert:

$$\frac{x_p}{x_n} = \left(\frac{v_n}{v_p}\right)^{\frac{1}{m}},$$

wenn k_1, a, J und F für beide Ionenarten gleich sein sollen. Da sich v_n und v_p mit dem Druck in gleicher Weise ändern (v_n nach Rutherford[1] umgekehrt proportional dem Druck), so muß das Verhältnis vom Druck ziemlich unabhängig sein.

Beobachtet: Die beiden einpoligen Lichtenberg'schen Figuren verändern ihren Radius mit abnehmendem Druck in gleicher Weise (dem Druck umgekehrt proportional, Reitlinger[2]). Sieben[3] fand für einpolige photographische Figuren, daß sich die positive Figur rascher ausdehnt; dagegen erhielt ich für solche Figuren für das Verhältnis der Radien die folgenden Zahlen (in Luft):

4·5 bei 760 *mm* Druck.
5·0 » 560 *mm* »
4·8 » 360 *mm* »

---

[1] Proc. Camb. Phil. Soc., Bd. 9, p. 401, 1898.
[2] Diese Sitzungsber., Bd. 41, p. 358, 1860.
[3] Berl. Ber., Bd. 25, p. 395, 1889.

Anders verhält sich die Sache, wenn sich die Büschel nicht ungehindert ausbreiten können; wenn sich z. B. beide gegeneinander bewegen. Wenn sie zur Berührung kommen, hört die weitere Ausbreitung auf. Die Lage der Ausgleichsstelle hängt dann auch davon ab, welches Büschel früher zustande kommt. Nun wird für die raschere Ionenart, also im allgemeinen die negative, der stationäre Zustand, d. h. die maximale Spannung, früher erreicht sein (vergl. die Exponentielle $e^{-\frac{kv}{am}t}$ in Gleichung 4), die umso früher verschwindet, je größer v ist). Es wird daher auch das negative Büschel seine maximale Ausdehnung früher erreicht haben, als das positive. Alles, was daher die Zeit bis zum Zusammentreffen der beiden Büschel verkürzt, wird eine Begünstigung des früher fertigen, negativen Büschels, also eine Verkleinerung des besprochenen Verhältnisses bewirken.

Beobachtet: Das Verhältnis der Ausdehnung des positiven zu der des negativen Büschels bei den zweipoligen Figuren[1] nimmt 1. mit abnehmender Elektrodendistanz, 2. mit abnehmendem Druck ab; z. B. in Luft:

Elektrodendistanz in Millimetern:						
48	39	31	25	21	17	11
Verhältnis bei Atmosphärendruck:						
5·0	4·57	3·35	3·07	2·29	2·1	1·66

Druck in Millimetern Hg:			
760	500	400	300
Verhältnis bei 39 *mm* Distanz:			
4·57	3·3	2	1·6

8. Die bisherigen Resultate bezogen sich auf die Größe des Büschels. Es lassen sich aber auch die Formverschiedenheiten aus unseren Annahmen einigermaßen erklären. Infolge der kleinen Unregelmäßigkeiten der Elektrodenoberfläche wird

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 108, p. 1164 und 1165, 1899.

die Entladung nicht auf der ganzen Oberfläche zugleich, sondern zunächst an einzelnen begünstigten Punkten eintreten. Infolge des erhöhten Spannungsgefälles am Ende der so gebildeten kleinen Entladungsstrecke wird die Entladung in der einmal bestimmten Richtung weiter fortschreiten. So kommt es, daß die Entladung sich auf einzelne Radien respektive Sektoren beschränken wird. (Ein Grund für die Bevorzugung einzelner Entladungsbahnen ist vielleicht auch in den verschiedenen Bewegungszuständen zu suchen, in denen sich nach der kinetischen Gastheorie die einzelnen Moleküle des Gases befinden und die Verschiedenheiten in der Ionisierungsspannung zur Folge haben werden.) Es kann nun weiter jeder Punkt eines Entladungszweiges als neue Elektrode betrachtet werden, die ihrerseits mehrere Zweige aussenden kann und so kommen die Verästelungen des Büschels zustande. Es ist nun anzunehmen, daß diese Verästelung umso schärfer hervortritt, je größer die Ionisierungsspannung, also F, ist; denn bei kleiner Ionisierungsspannung kann diese bei gleichbleibender Elektrizitätszufuhr leichter auch in noch nicht von der Entladung bestrichenen Partien erreicht werden. Bei höherer Ionisierungsspannung dagegen wird mehr Elektrizität längs der schon gebildeten Entladungsbahnen abströmen. So nimmt in der Tat die Verästelung mit abnehmendem Druck ab. Sie ist geringer in Luft als in CO_2 (namentlich beim negativen Büschel), in Wasserstoff geringer als in Luft.

Wir nahmen bisher an, daß im Büschel zweifache Ionisierung stattfindet. Es soll die positive Ionisierungsspannung erreicht sein. Beim positiven Büschel, bei dem die positiven Ionen hinauswandern, ist dies die einzig mögliche Entladungsart. Beim negativen dagegen wird schon bei geringerer Spannung Ionisierung durch negative Ionen stattfinden. Während erstere Ionisierungsart scharfe Linien ziehen wird, da, sobald ein positives Ion ionisiert, die durch dasselbe gebildeten negativen Ionen hinter demselben kräftig ionisieren werden, da ihre Ionisierungsspannung jedenfalls beträchtlich überschritten ist, wird letztere Entladung in allen Abstufungen möglich sein. Es ergibt sich so der auffallende Unterschied zwischen den scharfen, spitz endigenden Ästen des positiven Büschels und den

verschwommen auslaufenden Fächern des negativen Büschels, wie sie auf den Lichtenberg'schen und noch deutlicher auf den photographischen Figuren zu sehen sind.

9. Sehen wir noch nach, was unsere Formeln über die Häufigkeit der Büschel aussagen. Aus 4) findet man die Feldstärke an der Elektrode ($x = a$), wenn wir wieder annehmen, daß die Exponentialgröße zu vernachlässigen ist: $F = \frac{J}{k_1 v}$.

Wenn disruptive Entladung stattgefunden, also $F = 0$ geworden ist, so muß die Feldstärke erst wieder nach Gleichung 4) anwachsen bis zu einem beiläufig durch obigen Ausdruck gegebenen Wert. Dieser wird nun (vergl. den Koeffizienten von t im Exponenten) umso früher erreicht sein, je größer v ist, d. h. die Büschel werden sich umso rascher folgen können, je größer die Ionenbeweglichkeit ist.

Beobachtet: Die negativen Büschel folgen sich rascher als die positiven. Höherer Ton des negativen Büschels (Beccaria[1]). Analyse im rotierenden Spiegel (Faraday[2]). Bildet man den Quotienten aus dem zeitlichen Abstand zweier positiver und zweier negativer Büschel einmal in Luft, das andere mal in CO_2, so findet man, daß derselbe in CO_2, entsprechend dem geringen Unterschiede der Ionengeschwindigkeiten in diesem Gase, viel kleiner ist als in Luft, wie ich durch photographische Aufnahmen auf rotierenden Films[3] nachweisen konnte.

Zu den meisten hier vorgebrachten Resultaten kann man durch bloße Überlegung gelangen. Ich habe die vielleicht etwas anspruchsvoll erscheinende mathematische Einkleidung nur gewählt, um die Ausdrucksweise präziser gestalten zu können. Worauf es mir ankam, war nur, zu zeigen, wie viele Eigentümlichkeiten des Büschels sich durch Auseinanderhaltung der verschiedenen Entladungsarten: dunkle Entladung durch Ionenwanderung, Ionisierung durch Ionenstoß und zwar zweifache und einfache (durch negative Ionen) erklären lassen.

---

[1] Siehe G. Wiedemann, Elektrizität, p. 616, § 806.

[2] Exp. Research., I., p. 469, § 1468, London 1839.

[3] Diese Sitzungsber., Bd. 109, p. 902 bis 904, 1900.

An Bedeutung gewinnen diese Betrachtungen über die Büschelentladung, die in letzter Zeit als Zwischenform zwischen schärfer definierten Entladungsarten stark in den Hintergrund getreten ist, vielleicht durch die Tatsache, daß mit dem Büschel, wie namentlich v. Wesendonck[1] ausgeführt hat, die Erklärung für eine Reihe von Versuchen gegeben ist, bei denen auffallende polare Unterschiede auftreten, in erster Linie für das Verhalten unsymmetrischer Funkenstrecken (Faraday's Verzweigungsversuch) und für die Spitzenausströmung bei raschen Schwingungen (Himstedt-Effekt).

Das Büschel ist, wie B. Walter[2] gezeigt hat, der Vorläufer des Funkens. Beim Faraday'schen Verzweigungsversuche handelt es sich nun darum, in einer von zwei gleich langen Funkenstrecken das Büschel möglichst zu entwickeln, in der anderen es zu unterdrücken. Es geschieht dies dadurch, daß im ersteren Falle die negative, im zweiten die positive Elektrode so groß gemacht wird, daß sich an ihr keine Büschel entwickeln können. Da cet. par. das positive Büschel länger ist als das negative, so wird man auf der Seite des ersteren auch die längeren Funken erhalten.

Was den Himstedt-Effekt betrifft, so habe ich früher[3] schon auf den Zusammenhang mit der Büschelgröße in verschiedenen Gasen hingewiesen.

Gas	Verhältnis der Größen des positiven und des negativen Büschels	Ausschlag eines Elektroskops unter Einfluß eines Teslapoles mit Spitze in gleicher Entfernung (nach Himstedt[4])
Luft	4·5	+1000 bis 1200
O_2	4·1	+ 300 » 400
H_2	3·5	— 100 » 200
N_2	3·2	— 200 » 300
CO_2	2·6	— 600 » 700

1 Wied. Ann., Bd. 30, p. 43, 1887.
2 Wied. Ann., Bd. 66, p. 636, 1898.
3 Diese Sitzungsber., Bd. 108, p. 1167, 1899.
4 Wied. Ann., Bd. 52, p. 473, 1894.

Je länger das positive Büschel im Verhältnis zum negativen, desto mehr überwiegt die positive Ausstrahlung.

v. Wesendonck[1] betont, daß die positive Entladung nur da der negativen überlegen ist, wo die disruptive eigentliche Büschelentladung in den Vordergrund tritt. Damit stimmt meine Beobachtung[2] überein, daß diese Überlegenheit bei abnehmenden Druck abnimmt.

---

[1] Phys. Zeitschr., Bd. 4, p. 465, 1903.
[2] Phys. Zeitschr., Bd. 4, p. 581 bis 583, 1903.

Apparate von L. Boltzmann zur Demonstration stehender und interferierender Wellen

von

Arthur Boltzmann.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Dezember 1904.)

Um das Jahr 1880 ließ L. Boltzmann als Direktor des physikalischen Institutes der Universität Graz drei Wellenapparate nach seiner Angabe konstruieren.

Im Folgenden will ich eine kurze Beschreibung der Apparate geben, da sie bisher unveröffentlicht geblieben sind. Sie sind noch im Besitze genannten Institutes und hat mich Herr Prof. Pfaundler bei meiner Arbeit in liebenswürdigster Weise unterstützt.

Der erste Apparat besteht im Wesen aus drei horizontalen Reihen von Kugeln, welche an Metallstäben befestigt sind, die an ihrem rückwärtigen Ende in der Vertikalebene drehbar angebracht sind. Die Kugeln sind so angeordnet, daß je drei aus den drei Reihen in einer Vertikalebene liegen. An der obersten Stange ist in der Nähe der Kugel ein Faden befestigt, welcher durch einen in der Mitte der untersten Stange befestigten Ring gezogen ist und von da wieder hinauf zur mittleren Stange geht, an der er bei der Kugel befestigt ist. Die beiden oberen Kugeln und der Ring in der Mitte der untersten Stange sind vertikal untereinander, daher ist die unterste Kugel und ebenso der Drehpunkt der untersten Stange um die halbe Stangenlänge nach vorne gerückt, da alle Stangen gleich lang genommen werden. Durch diese Hebelwirkung an der untersten Stange wird erzielt, daß die Elongation der untersten Kugeln

das Doppelte des arithmetischen Mittels, also die algebraische Summe der Elongationen der beiden oberen Kugeln ist, wenn diese durch das Durchziehen von Wellenformen unter den sie haltenden Stangen auf und ab bewegt werden. (Fig. 1.)

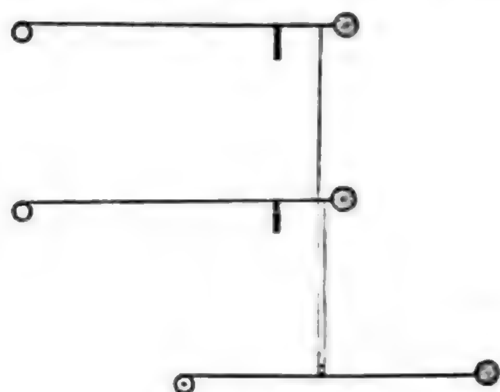


Fig. 1.

Hinter den Kugeln ist eine Führung der Stangen in Form von Vertikalschlitzen in einer Messingplatte, welche die Vorderwand des kastenförmigen Apparates bildet. Die Wellenformen werden durch geeignete Ausschnitte in den Seitenwänden eingeschoben und sind durch eiserne Plattstäbe geführt. Fig. 2 zeigt die Ansicht

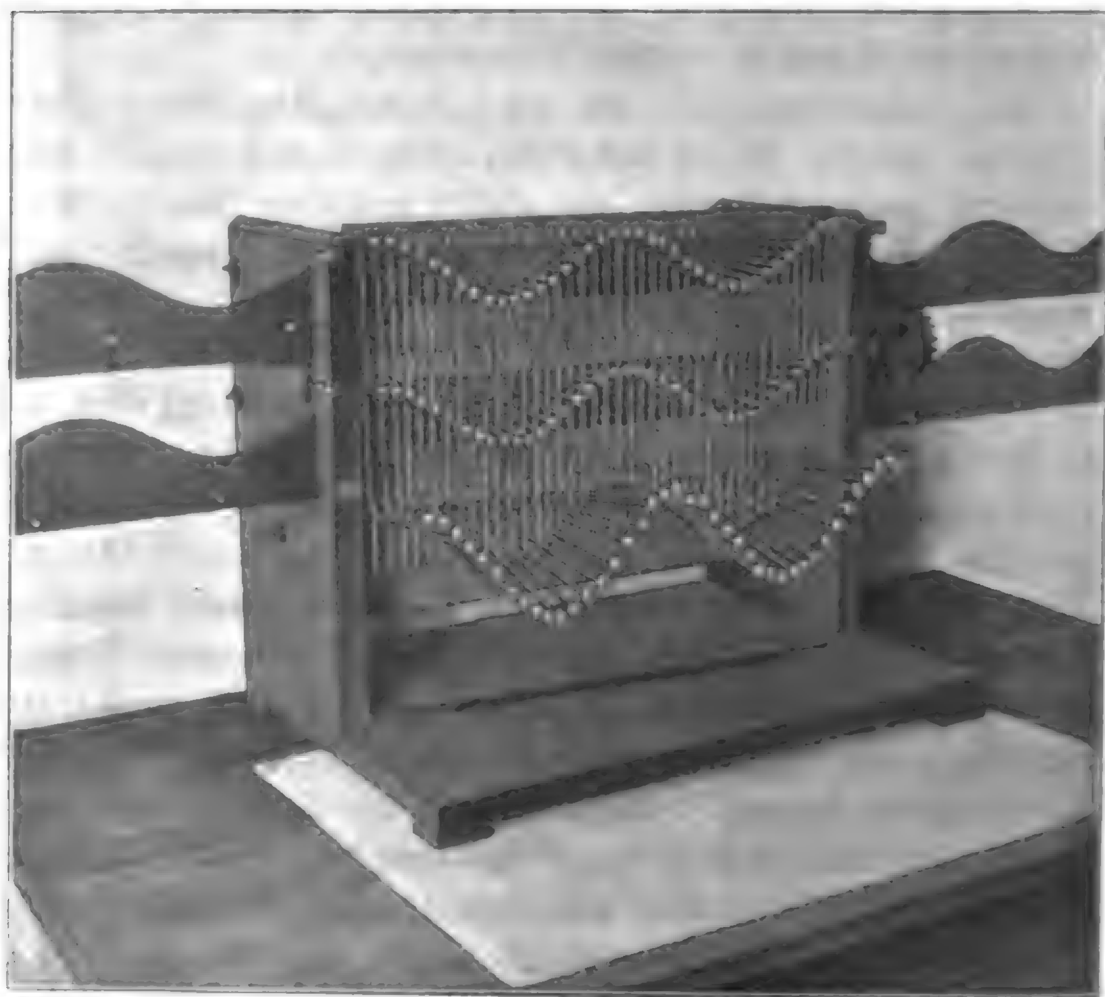


Fig. 2.

des Apparates mit einer stehenden Welle in der größten Elongation.

Will man mit diesem Apparate eine stehende Welle darstellen, welche aus einer einfachen primären und einer reflektierten Welle entstehen soll, so schiebt man eine Wellenform, welche eine solche einfache Sinusschwingung darstellt, unter die eine der beiden oberen Kugelreihen, eine zweite gleiche Wellenform unter die andere. Jede Schablone ist mit einer Zahnstange versehen, in deren Zähne ein dazwischen angebrachtes Zahnrad oben und unten eingreift; dadurch wird erreicht, daß die Schablonen mit gleicher Geschwindigkeit relativ gegen den festen Teil des Apparates gegeneinander laufen. Die unterste Kugelreihe führt die stehende Welle aus, deren Knotenpunkte und Bäuche an derselben Stelle bleiben, während die Wellenlinien, welche die beiden oberen Kugelreihen bilden, gegeneinander fortschreiten. Man kann also mit diesem Apparate in geometrisch ganz naturgetreuer Weise die Zusammensetzung der Schwingungen z. B. eines an einem Ende angebundenen Seiles, der Luftsäule in der Pfeife oder von Stäben darstellen.

Will man die Addition, Übereinanderlagerung oder Interferenz zweier Wellen zeigen, welche in derselben Richtung fortschreiten, so kann man das Zahnrad mit der Kurbel zurückziehen, die beiden gewählten Wellenformen mit einem Steg, der mit Klemmschrauben versehen ist, miteinander verbinden und so zusammen hindurchziehen. Die unterste Kugelreihe stellt dann die resultierende Welle in derselben Richtung fortschreitend dar.

Bemerkt sei noch, daß man die Stellung der untersten Kugeln durch Aufwickeln der Fäden um die oberen Stangen jederzeit regulieren kann.

Ein ähnlicher Apparat, welcher so ziemlich dieselben Zwecke verfolgt, wurde vor kurzem von W. Schmidt[1] konstruiert.

Der zweite Apparat dient dazu, die Schwingungsformen z. B. einer Saite rasch darzustellen. Die ruhende Saite wird

[1] Verh. d. Deutschen Phys.-Ges., VI. Jahrg. Nr. 15/19.

durch eine Reihe von Kugeln dargestellt, welche an Fäden hängen. Dieselben werden um eine horizontale Walze so gelegt, daß ihre Richtung aus der lotrechten in eine wagrechte übergeht, dann laufen sie quer über die oberen Kanten von etwa neun vertikalen, in gleichen Abständen angeordneten Blechstreifen, um endlich an einer Stellschraube festgebunden zu sein. (Fig. 3.)

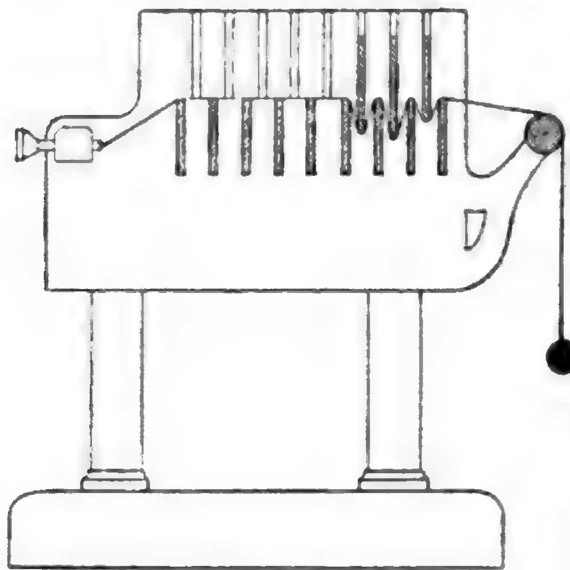


Fig. 3.

Zwischen die ziemlich dicken, oben abgerundeten festen Blechstreifen kann man nun von oben die Schablonen der Wellen, welche ebenfalls abgerundet und wie die anderen Bleche mit Einkerbungen für jeden Faden versehen sind, hineinschieben. Dadurch werden die einzelnen Fäden nach der Form der Schablone zwischen die feststehenden Bleche tiefer und weniger tief hineingezogen, durch diese Verkürzungen der Fäden die Kugeln gehoben. Hier ist zu bemerken, daß die Elongationen der Kugeln doppelt so groß sind wie die der Nuten der Wellenform, da der Faden doppelt hineingezogen wird; das stört jedoch gar nicht, da dieser Apparat nicht wie der vorige die resultierende Welle von zwei sichtbar laufenden darzustellen hat, sondern nur die relative Gestaltänderung der einfachen Schwingung, wenn die Obertöne hinzutreten.

Um dies zu erreichen, steckt man nacheinander die seitlich geführten Schablonen des Grundtones und der verschiedenen Obertöne hinein; so stellt Fig. 4 die Ansicht des Apparates dar, während die Schablonen des Grund- und ersten Obertones eingesteckt sind.

Der dritte Apparat dient dazu, die Bewegung einer stehenden Welle mit zwei Obertönen darzustellen. Er besteht im wesentlichen aus drei durch Zahnräder verbundenen horizontalen Axen, welche mit einer Kurbel gedreht werden. Auf diesen Axen sind nebeneinander Scheiben so angebracht,

daß sie bei ihrer Drehung Stäbe, welche mit Rädchen auf ihnen ruhen und vertikal geführt sind, so auf und ab heben, daß diese mit ihren oberen Enden stehende Wellen beschreiben.

Die Stäbchen über der untersten und vordersten Achse führen die Schwingung des Grundtones aus; dazu müssen die

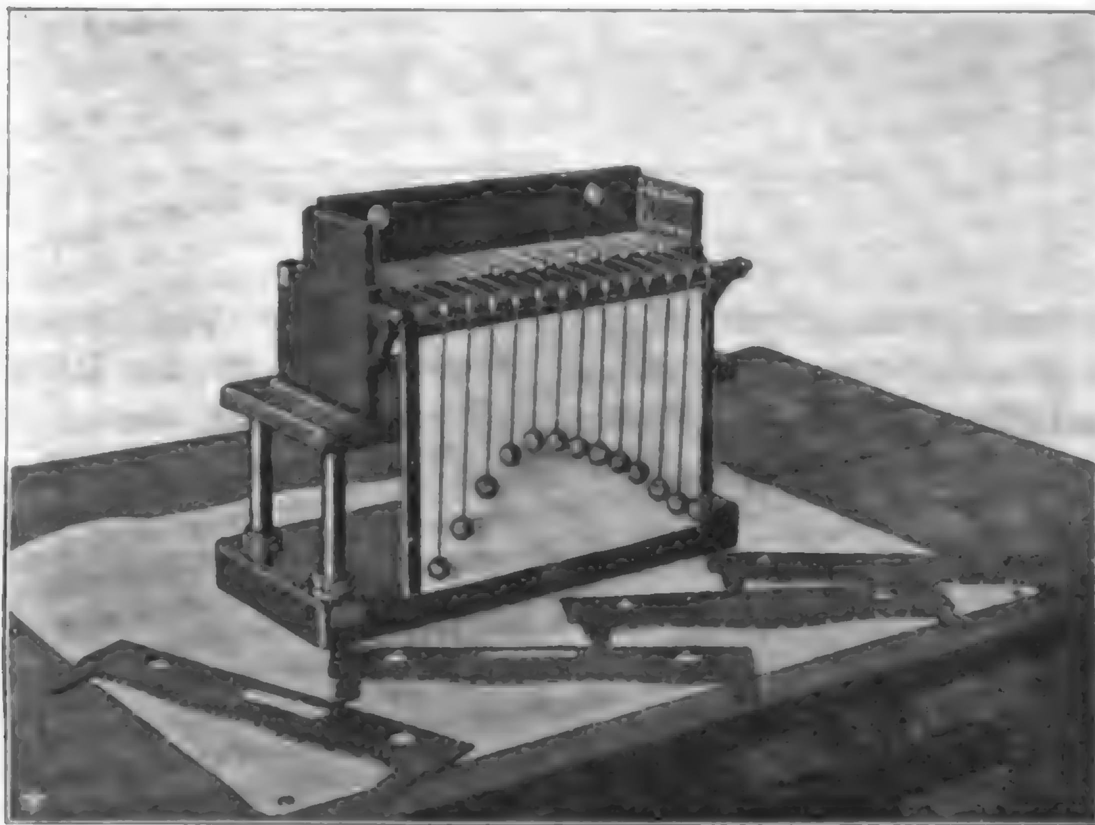


Fig. 4.

Scheiben geeignet geformt und exzentrisch angebracht sein. Die oberen Enden der nächsten Stäbchenreihe geben in ihrer Verbindungslinie das Bild der Schwingung $n = \frac{3v}{2l}$ des zweiten harmonischen Obertones, wo l die Länge der Grundschwingung bezeichnet. Die dazugehörigen Scheiben, welche auch entsprechend klein gewählt sind, müssen sich dreimal so schnell drehen als die Scheiben des Grundtones, was durch eine geeignete Zahnradübersetzung erreicht ist. Die dritte Stäbchenreihe macht die Schwingung $n = \frac{5v}{2l}$, die dazugehörige Achse dreht sich also fünfmal so schnell als die erste; an derselben

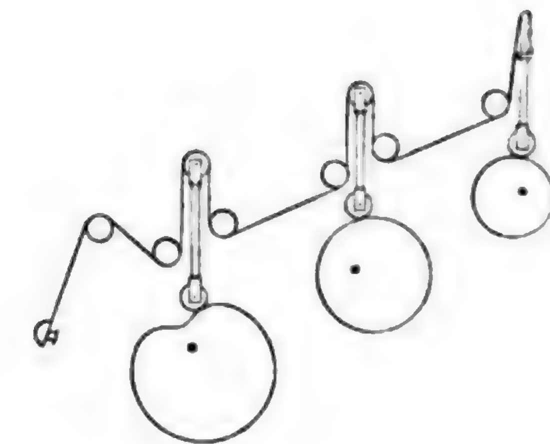


Fig. 5.

ist zweckmäßigerweise die Kurbel angebracht. Von diesen letzten Stäbchen gehen Fäden aus, die, an auf die Stäbe gesteckten Ringen festgeknüpft, durch Verschieben derselben gespannt werden können. Die Fäden laufen dann durch eine

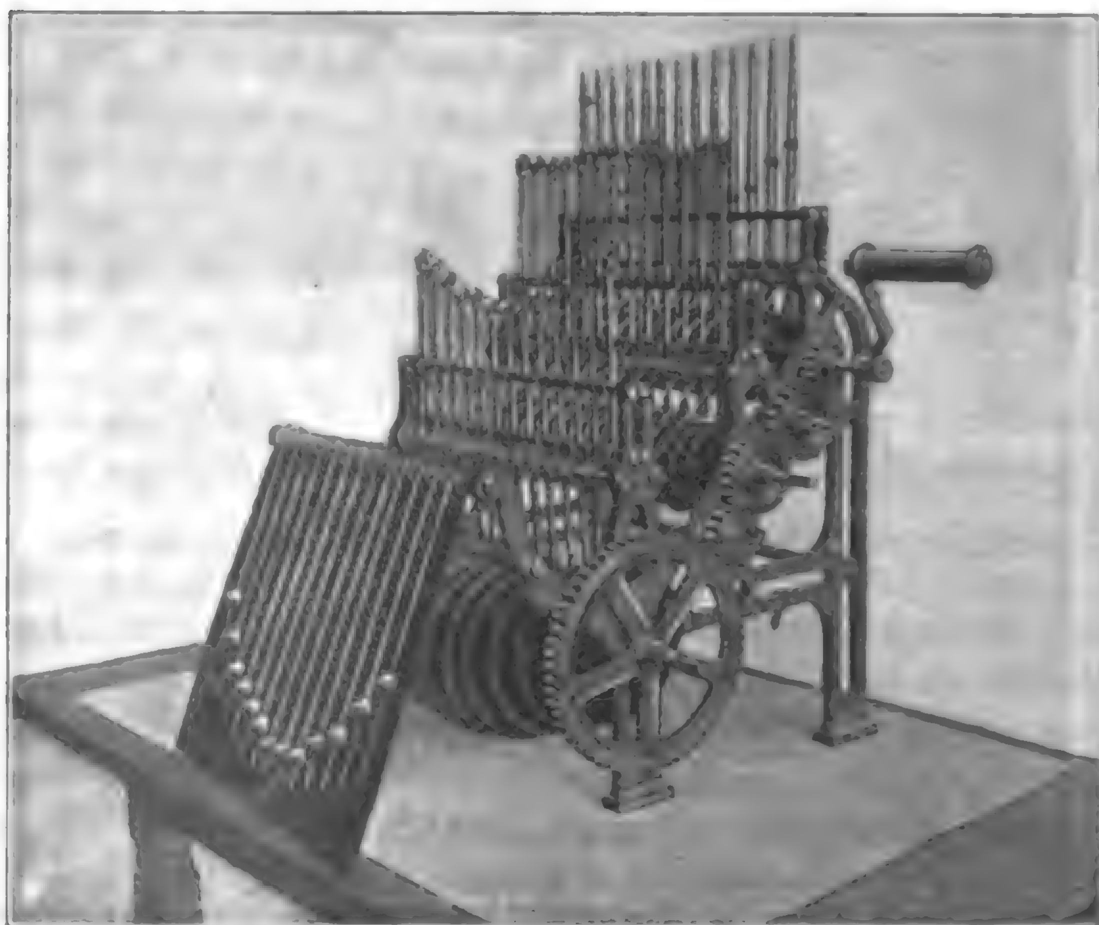


Fig. 6.

Bohrung im oberen Ende der Stäbe, gehen dann herab um zwei feste Rollen (Fig. 5), dann über die Rollen an den oberen Enden der zweiten Stäbchenreihe, um wieder um zwei feste Rollen und endlich um die oberen Enden der vordersten Stäbchenreihe zu gehen. Das andere Ende der Fäden wird wieder durch Kugeln gebildet, die auf- und abgehoben werden. Dadurch, daß nun jede Stäbchenreihe nach ihrer Wellenform die Fäden bei der Drehung der Axen anzieht, erhält man in der Reihe der Kugeln ein anschauliches Bild einer mit genannten Obertönen ausgeführten Schwingung. Bei dieser Ausführung bewirkt nun allerdings die Hebung der beiden vorderen Stäbchenreihen die doppelte Anziehung der Fäden, als ihre eigene Elongation beträgt, während bei der letzten Stäbchenreihe die Fäden nur einfach verkürzt und verlängert werden. Fig. 6 zeigt die Ansicht dieses Apparates.

Der Vollständigkeit halber möchte ich noch einen Apparat[1] erwähnen, der sich ebenfalls in Graz befindet und nicht, wie die früher beschriebenen, die geometrische, sondern mechanische Analyse von Klängen durch eine Pendelkombination versinnlicht, welche zu zeigen gestattet, daß durch eine periodische Bewegung des Aufhängepunktes ein Pendel nur dann zu starkem Schwingen angeregt wird, wenn es mit einer in jener periodischen Bewegung enthaltenen Partialschwingung isochron schwingt.

---

[1] Eine Beschreibung findet sich in der Abhandlung von P. Czermak. L. Boltzmann, Festschrift p. 80.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXIII. BAND. X. HEFT.

JAHRGANG 1904. — DEZEMBER.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TAFELN UND 8 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1904.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes, Dezember 1904 des CXIII. Bandes, Abteilung IIa der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 2 K 80 h = 2 Mk. 80 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 07368 2398

